

原子核基礎論A (火2, 大西・萩野)

■ 授業計画と内容

核力と量子色力学、核物質の性質、原子核構造に関して理論模型のいくつかをとりあげながら最近の発展を紹介する。

1. はじめに(原子核の基本的性質)(1コマ → 2コマ)
2. 核力とその起源(3コマ)
3. クォークとハドロン(1コマ→2コマ)
4. 核物質の相図と状態方程式(2コマ→0.5コマ)

大西

5. 殻模型と魔法数(1コマ)
6. 平均場理論と核変形(3コマ)
7. 中性子過剰核の物理(2コマ)
8. 非束縛核と共鳴散乱理論(1コマ)

萩野

■ 成績評価の方法・観点及び達成度

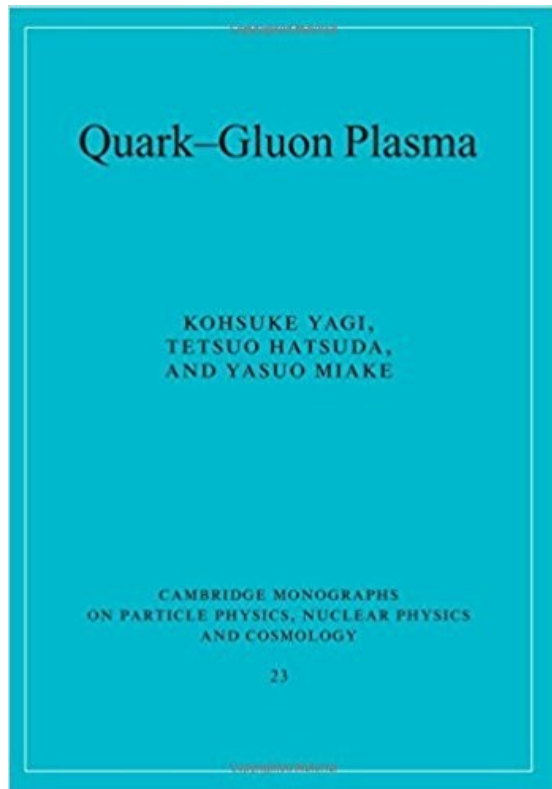
- レポート試験の成績(80%) 平常点評価(20%)
平常点評価には、出席状況および討論への積極的な参加の有無を参考にする。
- 前半(大西担当分)では10-15問程度レポートを出します。
半分程度以上解いてPandAから提出して下さい。

核物質の相図と状態方程式

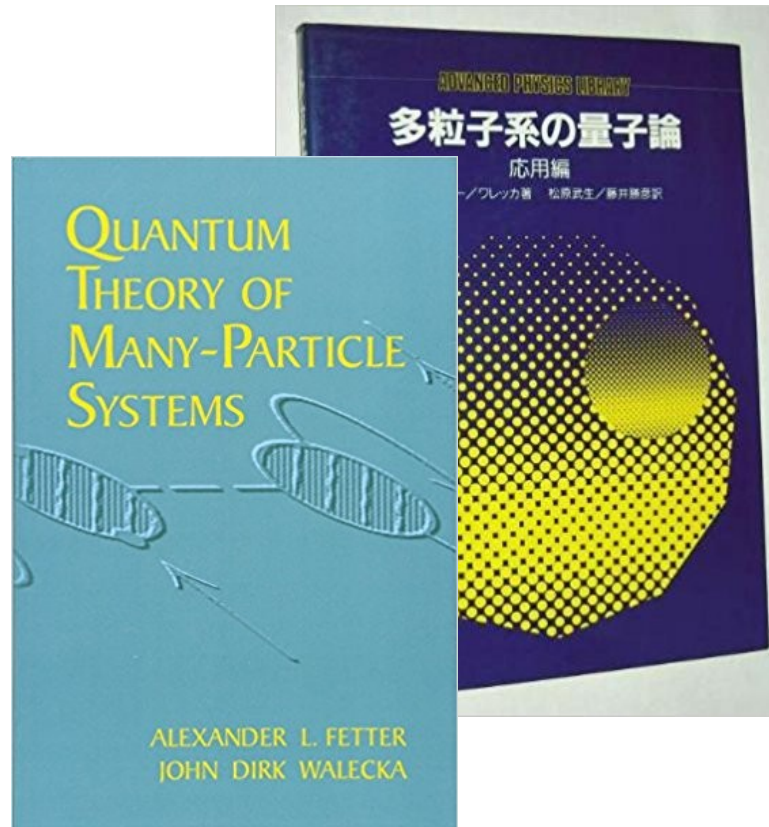
- QCD 相転移と核物質の相図
 - QCD 相転移、格子 QCD 計算、有効模型
- 核物質状態方程式の現象論
 - 核物質パラメータ、対称エネルギー、中性子星物質
- 核力から核物質へ
 - 平均場理論 (密度汎関数)、有効相互作用、第一原理計算

参考書

- Sec. 4 では八木・初田・三明、Fetter-Walecka、国広さんのテキストを参考にしています。



Quark-Gluon Plasma: From Big Bang to Little Bang, Yagi, Hatsuda, Miake (9869 円)

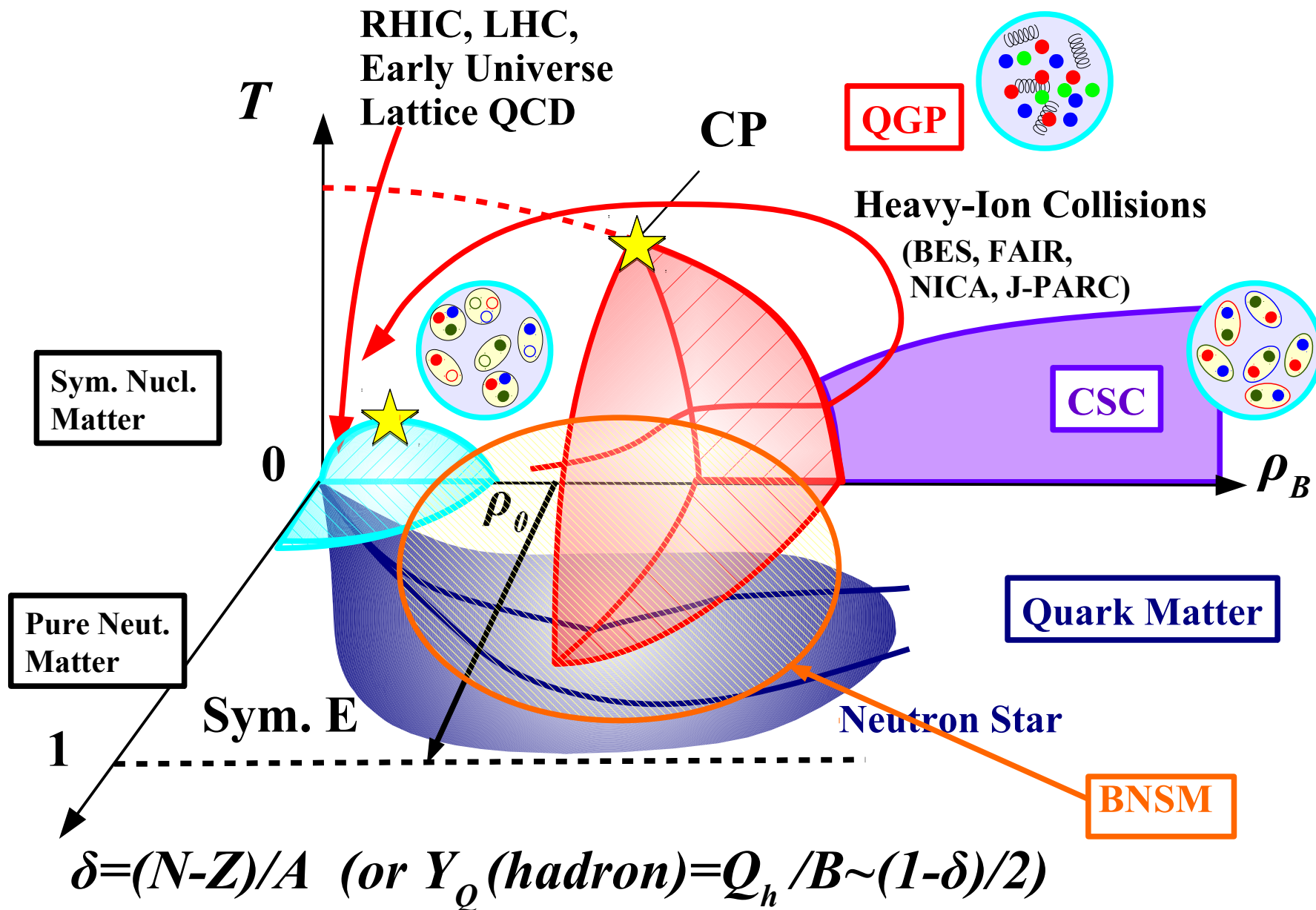


*Quantum Theory of Many-Particle Systems
Fetter, Walecka (4083 円)*



*クォークハドロン物理学入門、
国広 健二 (2907 円)*

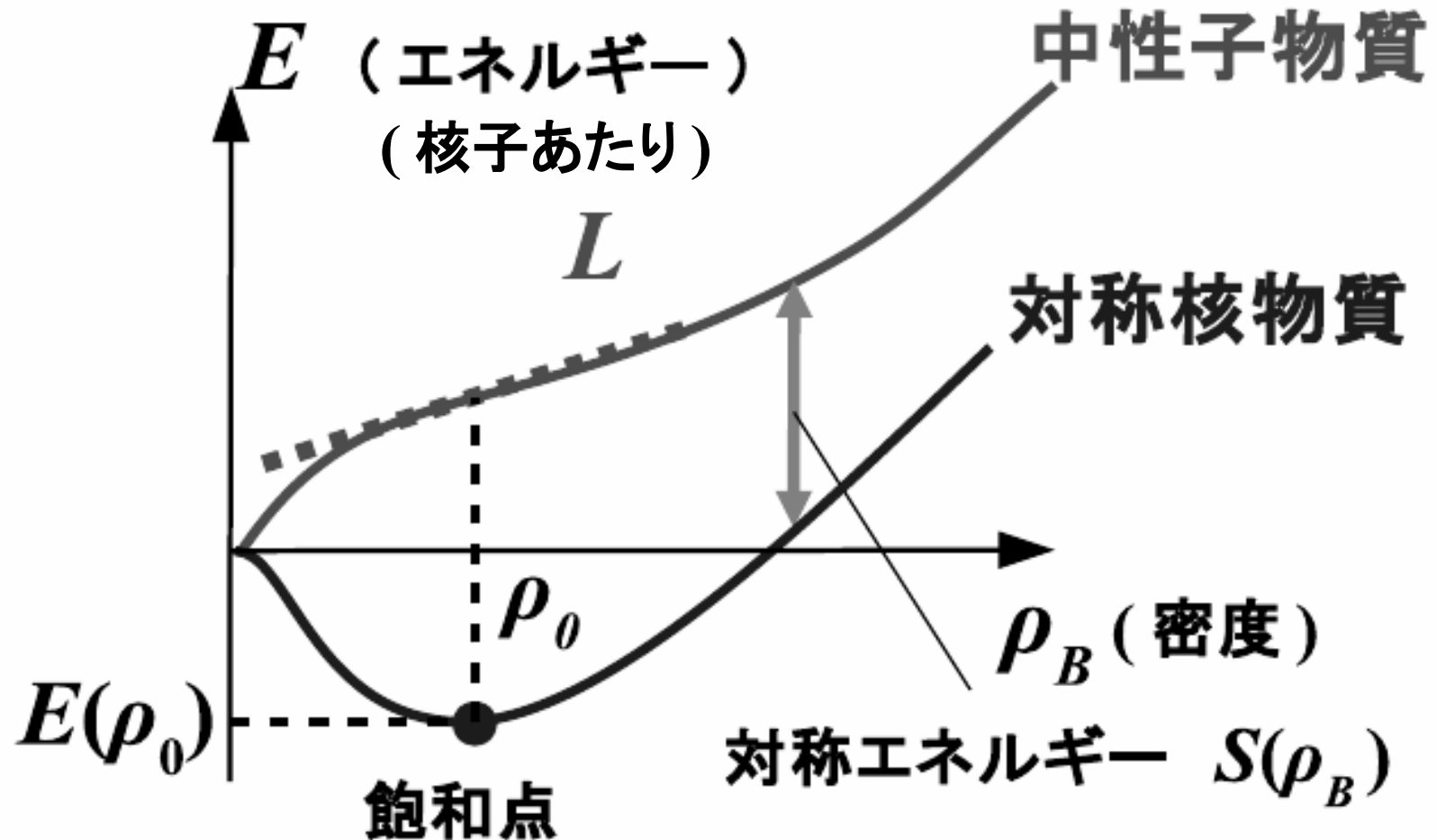
QCD phase diagram



AO, JPS Conf. Proc. 20 (2018), 011035

核物質の状態方程式

状態方程式 (EOS)

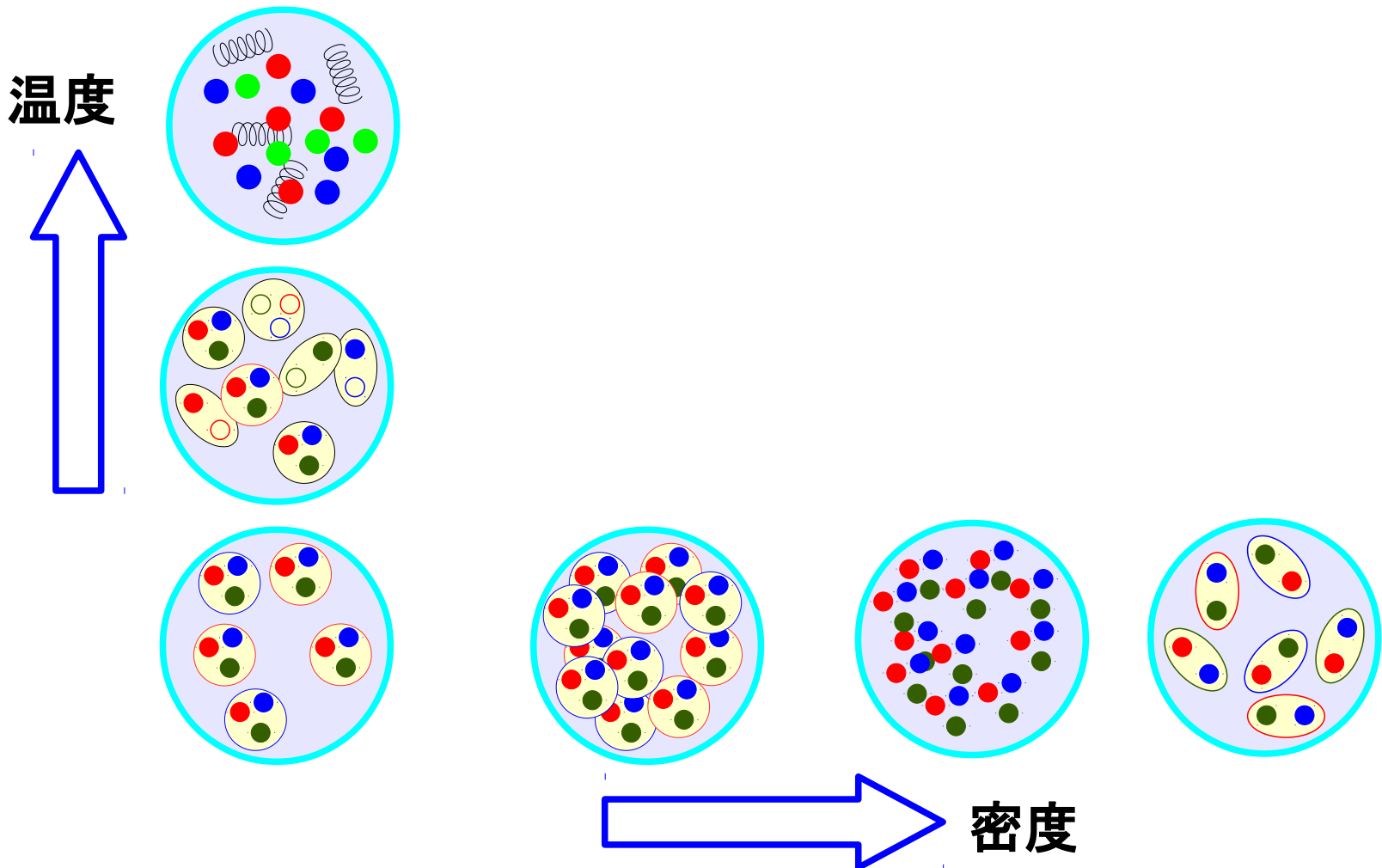


$$\varepsilon = \rho E, P = \rho^2 \frac{\partial E}{\partial \rho}$$

QCD 相転移と核物質の相図

QCD 相転移

- 漸近的自由性 (大きなエネルギースケールでは結合定数 $\rightarrow 0$)
→ 核物質 (ハドロン物質) は、高温・高密度においては
クォーク・グルーオンからなる物質になるはず
(QCD 相転移)



QCD 相転移温度の簡単な評価

■ Massless Free Gas (Stefan-Boltzmann 則)

$$P = \frac{\pi^2}{90} T^4 \left(\sum_B g_B + \frac{7}{8} \sum_F g_F \right)$$

■ Hadron gas ~ massless free pion gas

$$P_H = \frac{\pi^2}{90} T^4 \times 3$$

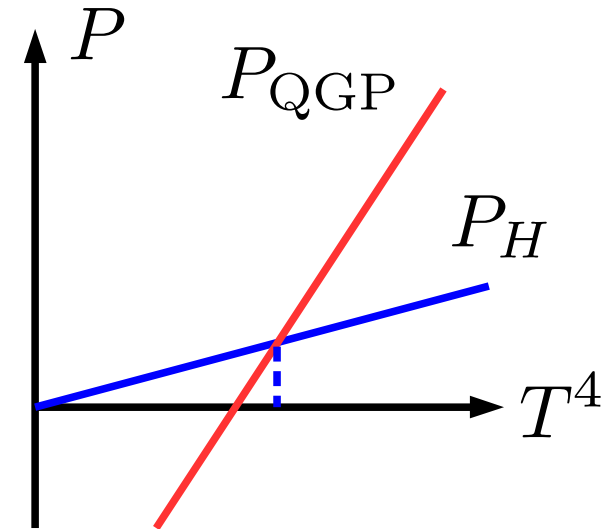
■ Quark Gluon Plasma (QGP)

~ (massless free) quarks and gluons + vacuum

$$P_{\text{QGP}} = \frac{\pi^2}{90} T^4 \left(2 \times (N_c^2 - 1) + \frac{7}{8} \times 4 \times N_c \times N_f \right) - B$$
$$= \frac{\pi^2}{90} T^4 \times 37 - B$$

■ QCD 相転移

$$P_H = P_{\text{QGP}} \rightarrow T_c = \left[\frac{90}{34\pi^2} \right]^{1/4} B^{1/4} \simeq 0.72 B^{1/4} \simeq 158 \text{ MeV}$$



■ Bag model

- カイラル対称性が回復した摂動論的真空となった球の中をクォークが運動

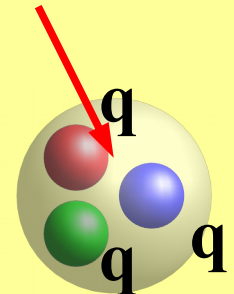
$$M_N = \underbrace{\frac{3x}{R}}_{\text{クォークの運動エネルギー}} + \underbrace{\frac{4\pi R^3}{3} B}_{\text{摂動論的な真空を作るエネルギー}} + \underbrace{\dots}_{\text{相互作用、カシミア、周りの中間子の雲、...}}$$

クォークの
運動エネルギー

摂動論的な
真空を作る
エネルギー

相互作用、
カシミア、
周りの中間子
の雲、...

カイラル対称性が破れていない摂動論的な真空



カイラル対称性が
自発的に破れた
物理的真空

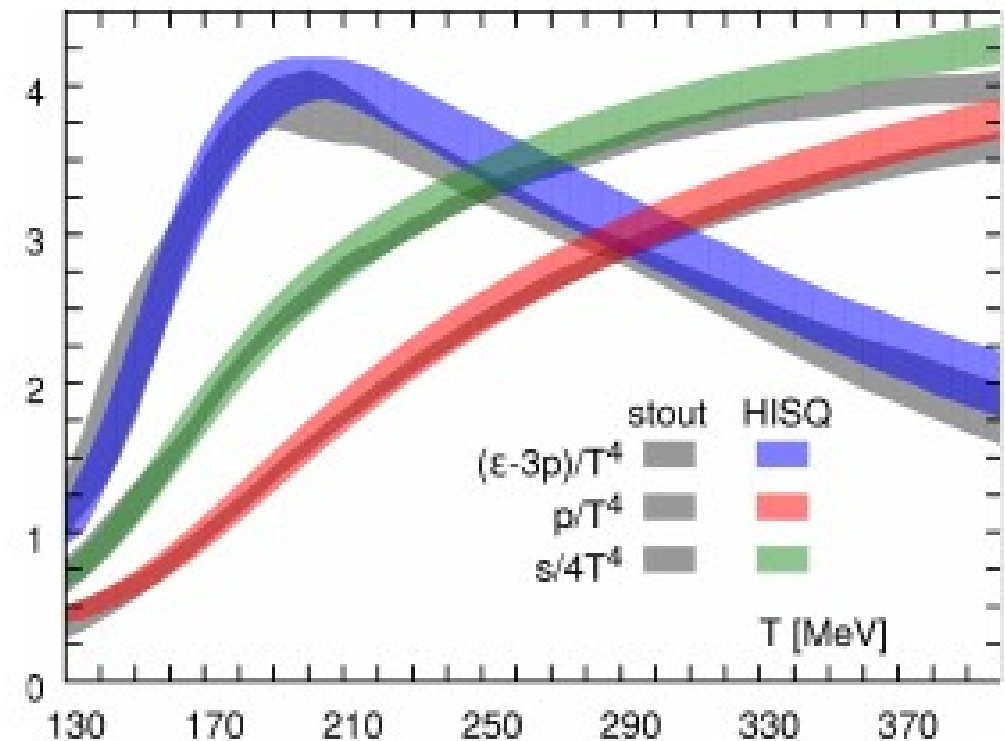
- 球形の bag の中でクォークの Dirac eq. を解いた結果: $x = 2.04 \dots$
- B: カイラル対称性が破れることにより得られるエネルギー密度: $B \sim (220 \text{ MeV})^4$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{particle}} - B \rightarrow T^{\mu\nu} = T_{\text{particle}}^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} B$$

Chodos, Jaffe, Johnson, Thorn, Weisskopf ('74)

クォーク・グルーオン・プラズマの発見 (1)

- 量子色力学 (QCD) に基づく第一原理計算
= 格子 QCD シミュレーション
 - 図: T^4 で規格化したエネルギー密度と圧力
 - $T = 150\text{-}200\text{ MeV}$ 程度で
急激なエネルギー密度の変化
 - 圧力はやや滑らかに
増加していく
- QGP への相転移
 $T_c = 154 \pm 9\text{ MeV}$

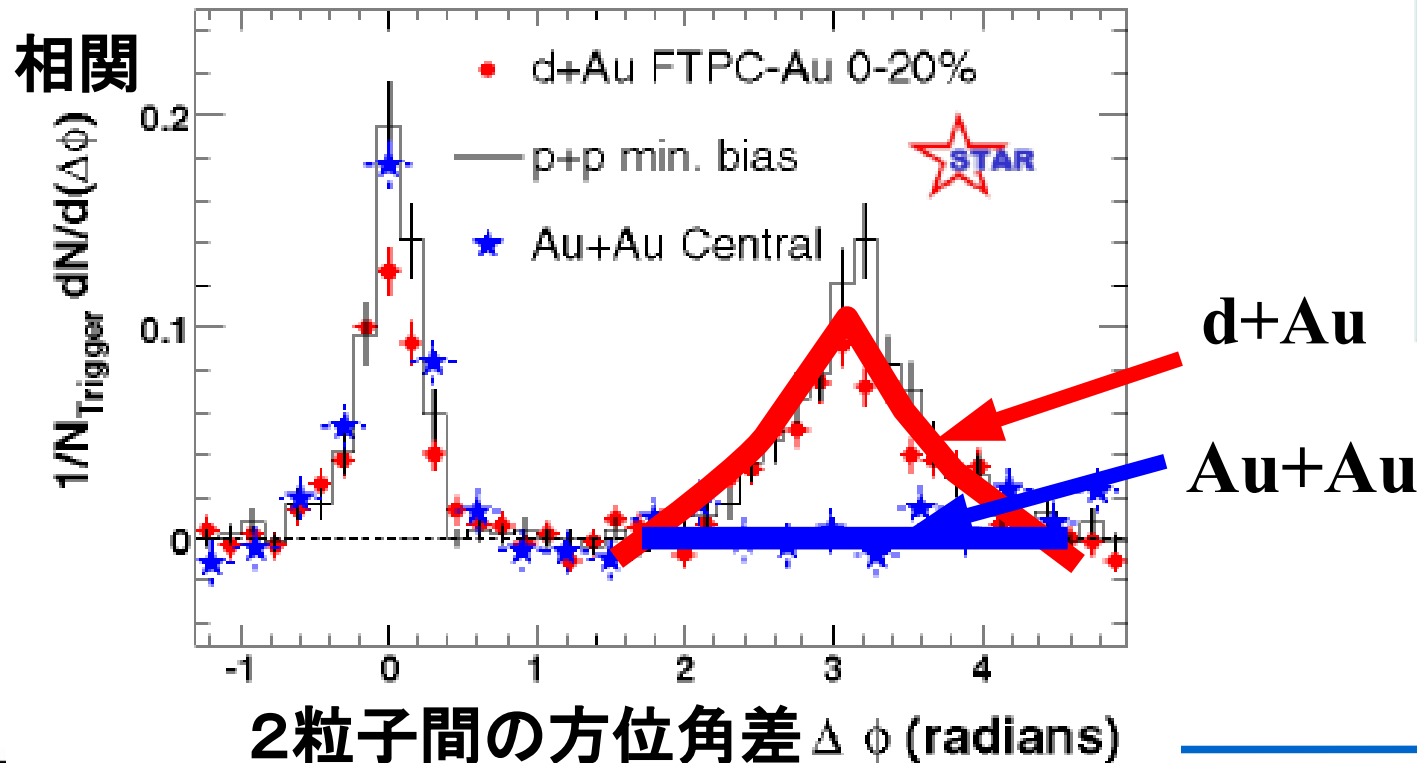
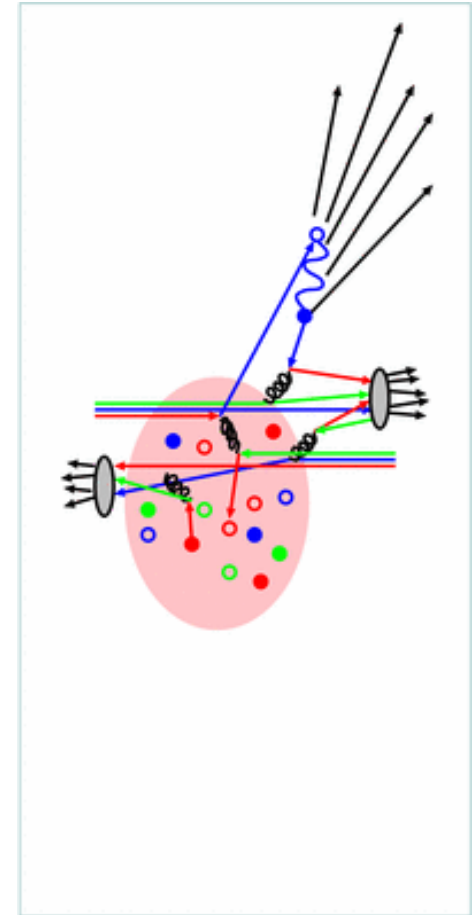


A. Bazavov et al. [HotQCD], PRD90('14)094503.
S. Borsanyi et al., PLB 730 ('14) 99.

クォーク・グルーオン・プラズマの発見 (2)

■ QGP 中でのジェットのエネルギー損失

- 真空中ではパートン (クォーク、グルーオン) が激しく散乱 + ハドロン化 → 強い方位角 180 度相関
- QGP が作られると色電荷の分布によりパートンがエネルギーを失う → 後方での方位角相関の消失
- RHIC での実験で d+Au ではそのまま、Au+Au 衝突では後方相関が消失



STAR, white paper

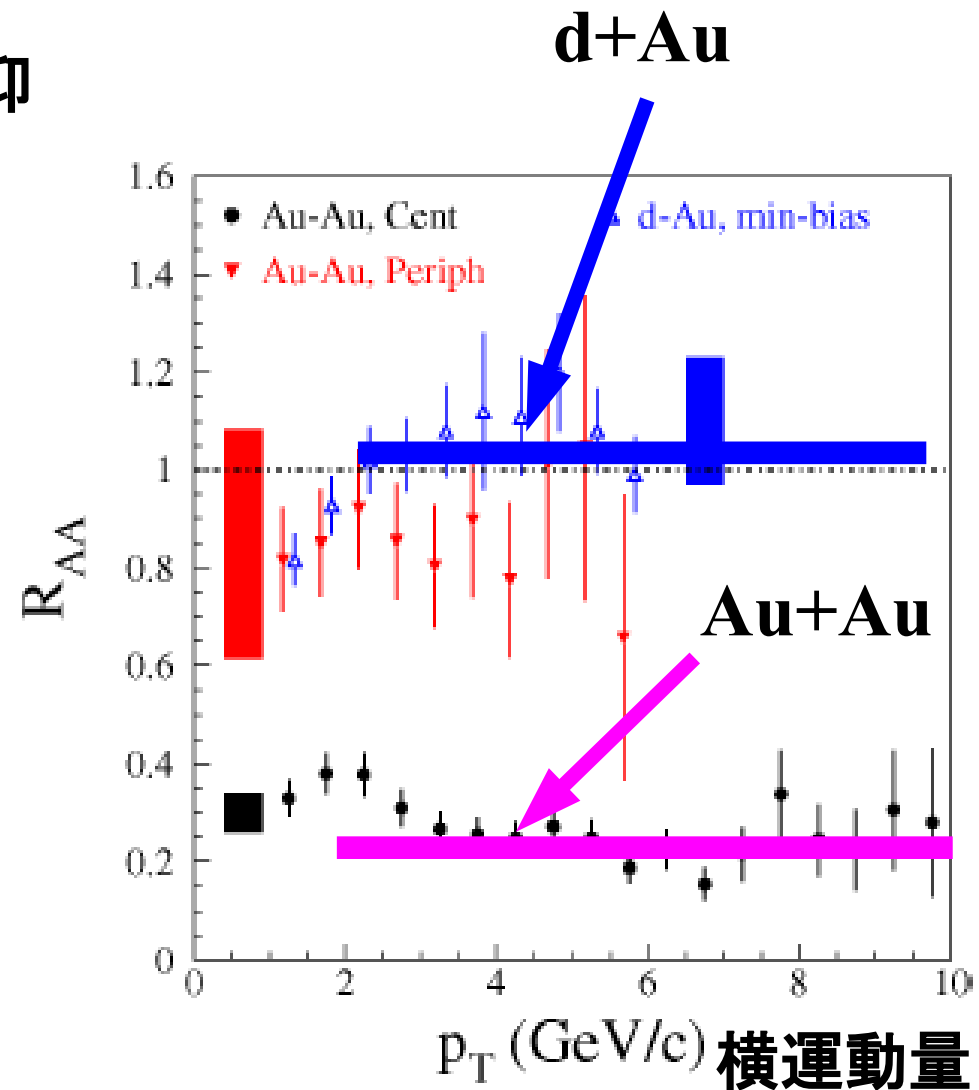
クォーク・グルーオン・プラズマの発見 (3)

■ 高運動量ハドロン抑制

- 高いエネルギーのパートンの抑制
→ 高いエネルギーのハドロン抑制
- 本当に抑制されているか？

$$R_{AA} = \frac{\text{「実際の生成量」}}{\text{「素過程の重ね合わせ」}}$$

- RHIC での観測
小さな原子核の衝突 (d+Au)
→ $R_{AA} \sim 1$
大きな原子核の衝突 (Au+Au)
→ $R_{AA} < 1$



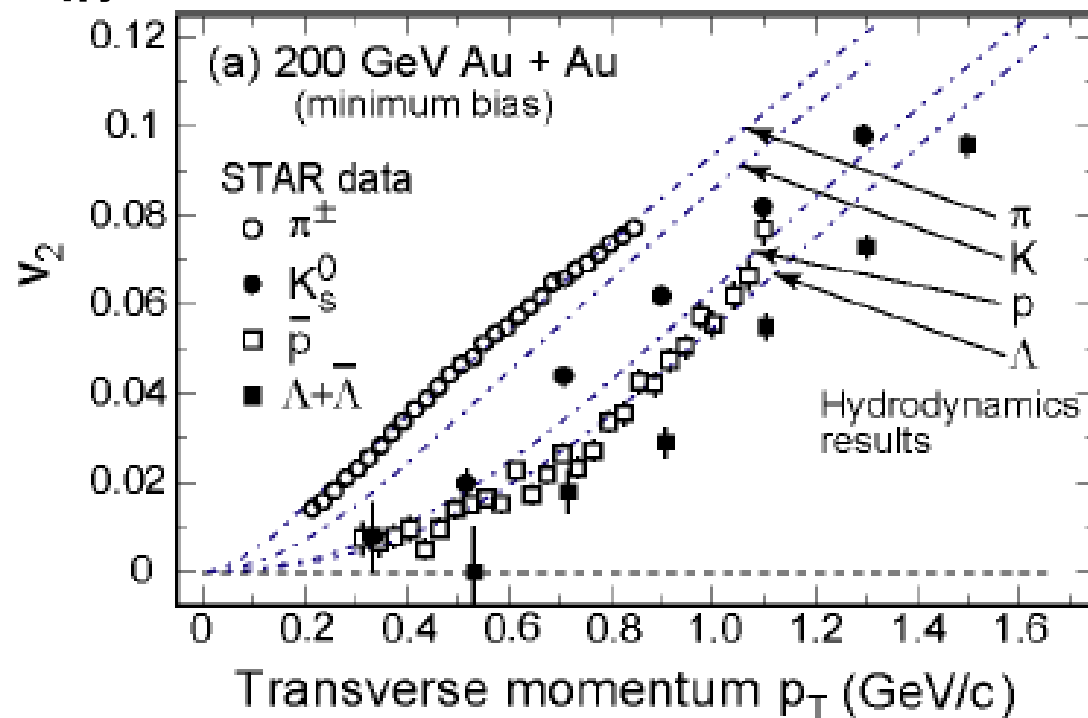
PHENIX White Paper

クォーク・グルーオン・プラズマの発見 (4)

■ 流体模型(完全流体)の成功

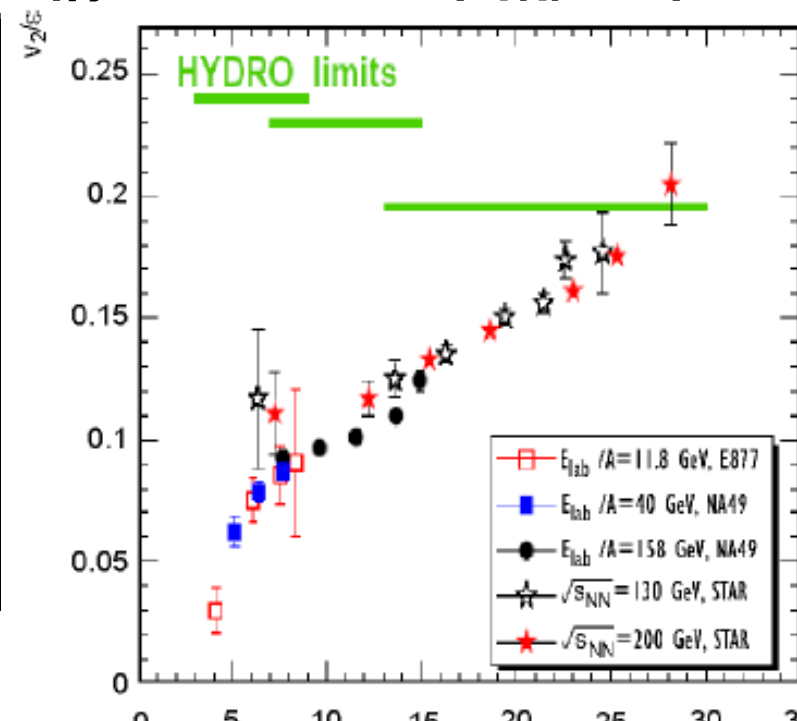
- 入射エネルギーの増加 + クォーク・グルーオンの解放
→ 粒子密度の増加 → 平均自由行程の減少
→ 流体模型の適用可能性大
- RHIC での楕円フローデータは完全流体模型で見事に説明可能

楕円フロー



横運動量

楕円フロー / 空間離心率



面積・ラピディティ当りの粒子生成量

U.W. Heinz, nucl-th/0412094

有限密度での QCD 相転移

■ 格子 QCD 計算

- **符号問題のため、有限密度での精密計算は困難**

■ 有効模型 (E.g. Nambu-Jona-Lasinio (NJL) 模型)

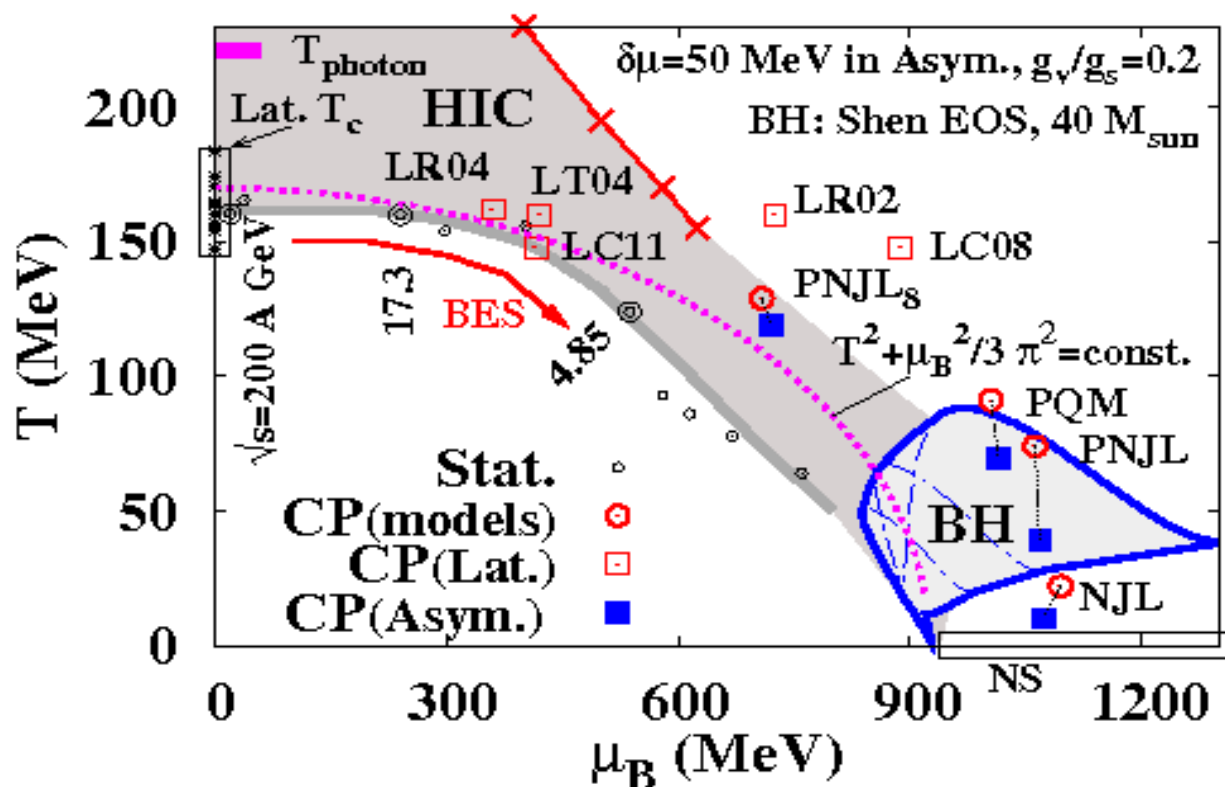
- 低温では1次相転移の可能性あり → QCD 臨界点
- 低温での相転移次数・臨界点の位置には大きな模型依存性

■ 重イオン衝突実験

- RHIC, LHC よりも低いエネルギーで探索が行われつつある

中子星
連中子星合体

- (5-10) 倍の核密度まで到達すると予想。



核物質の状態方程式

質量公式と状態方程式

- $A \rightarrow \infty$ における核子あたりのエネルギー
(クーロンエネルギーは無視)

$$E = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{-B(A, Z)}{A} = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[-a_v + a_s A^{-1/3} + a_a \frac{(N - Z)^2}{A^2} - a_p \frac{\delta_p}{A^{\gamma+1}} \right]$$
$$= -a_v + a_a \delta^2$$

- 密度と非対称度の関数と考えると、
核子あたりのエネルギーが最小となる密度が実現する

$$E = E(\rho_B, \delta)$$

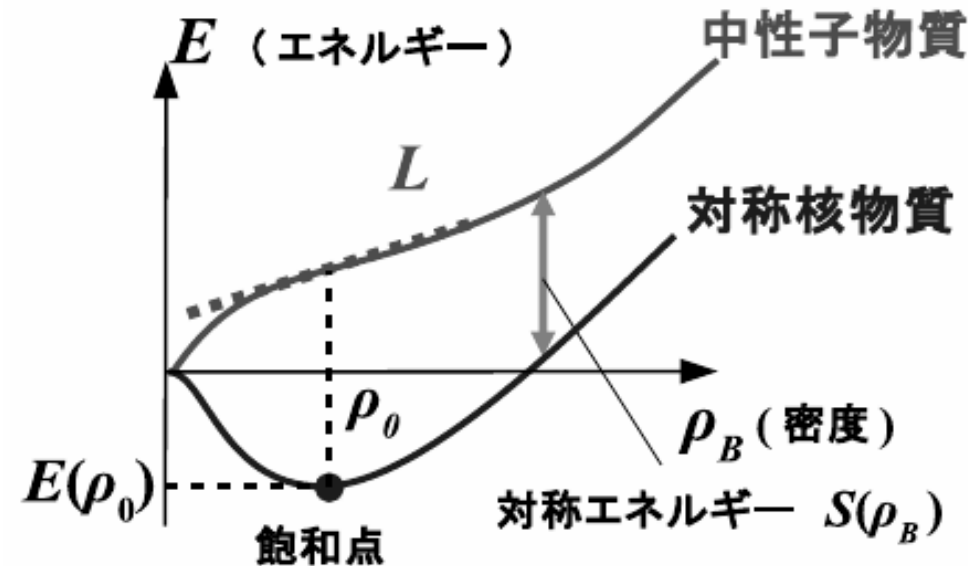
→ 核物質の飽和性

- 飽和点

$$(\rho_0, E_0) \simeq (0.16 \text{ fm}^{-3}, -16 \text{ MeV})$$

- 核力 or QCD による飽和点の説明
= 原子核理論の基本的課題

状態方程式 (EOS)



対称エネルギー

■ 非対称核物質 ($N \neq Z$) のエネルギー

$$E(\rho_B, \delta) = E(\rho_B, \delta = 0) + S(\rho_B)\delta^2 \quad P = \rho^2 \partial E / \partial \rho$$

■ 対称エネルギー

$$S(\rho_B) = E(\text{中性子物質}) - E(\text{対称核物質})$$

■ 飽和密度でのパラメータ

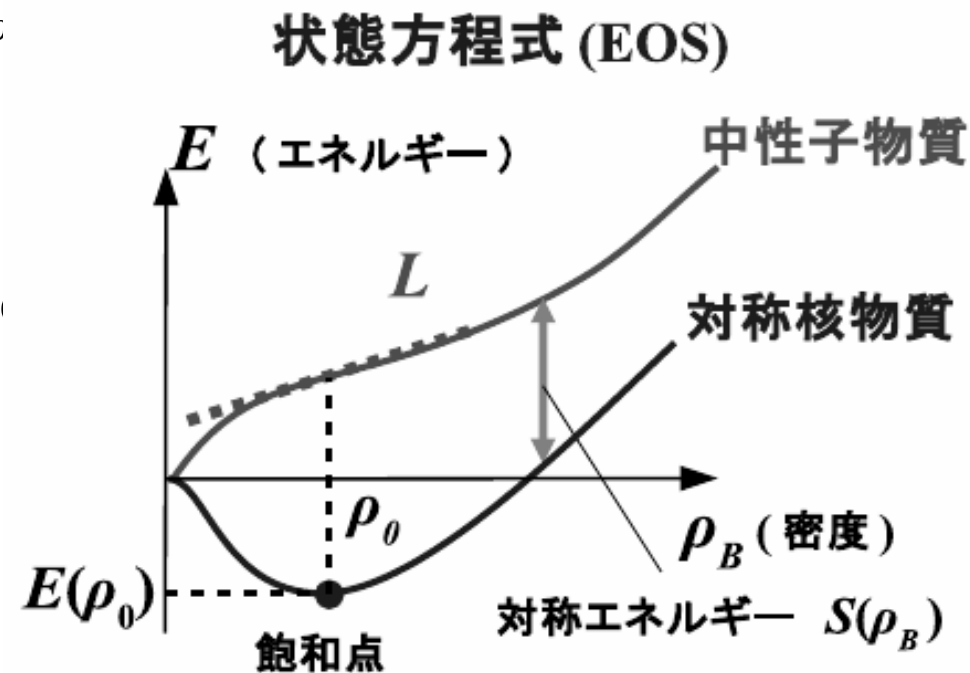
- 非圧縮率 $K \equiv 9 \rho_0^2 \left. \frac{\partial^2 E(\rho_B)}{\partial \rho_B^2} \right|_{\rho_B = \rho_0}$

- 対称エネルギーの値と微分

$$S_0 \equiv S(\rho_0), \quad L \equiv 3\rho_0 \left. \frac{dS(\rho_B)}{d\rho_B} \right|_{\rho_B = \rho_0}$$

$$E(\rho_B, \delta) \simeq E_0 + S_0 \delta^2 + \frac{L}{3} x \delta^2 + \frac{K}{18} x^2$$

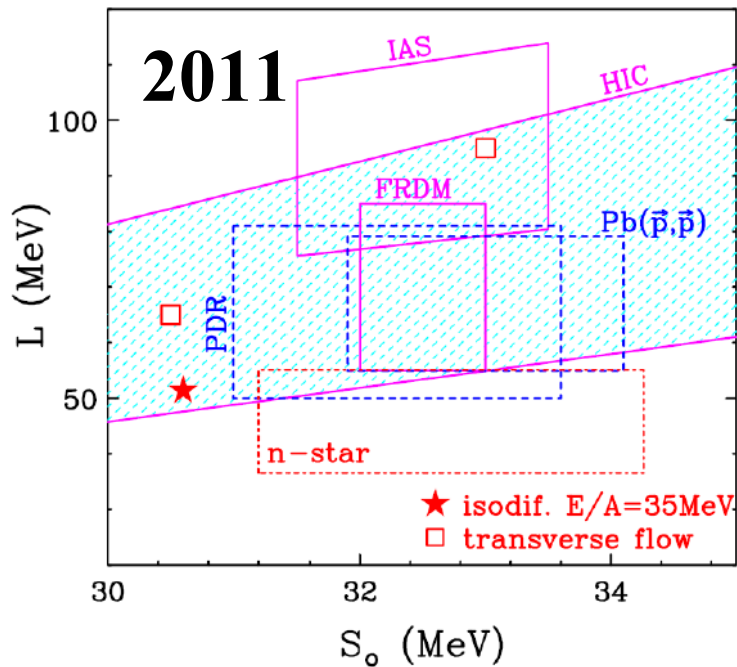
$$(x = (\rho_B - \rho_0)/\rho_0)$$



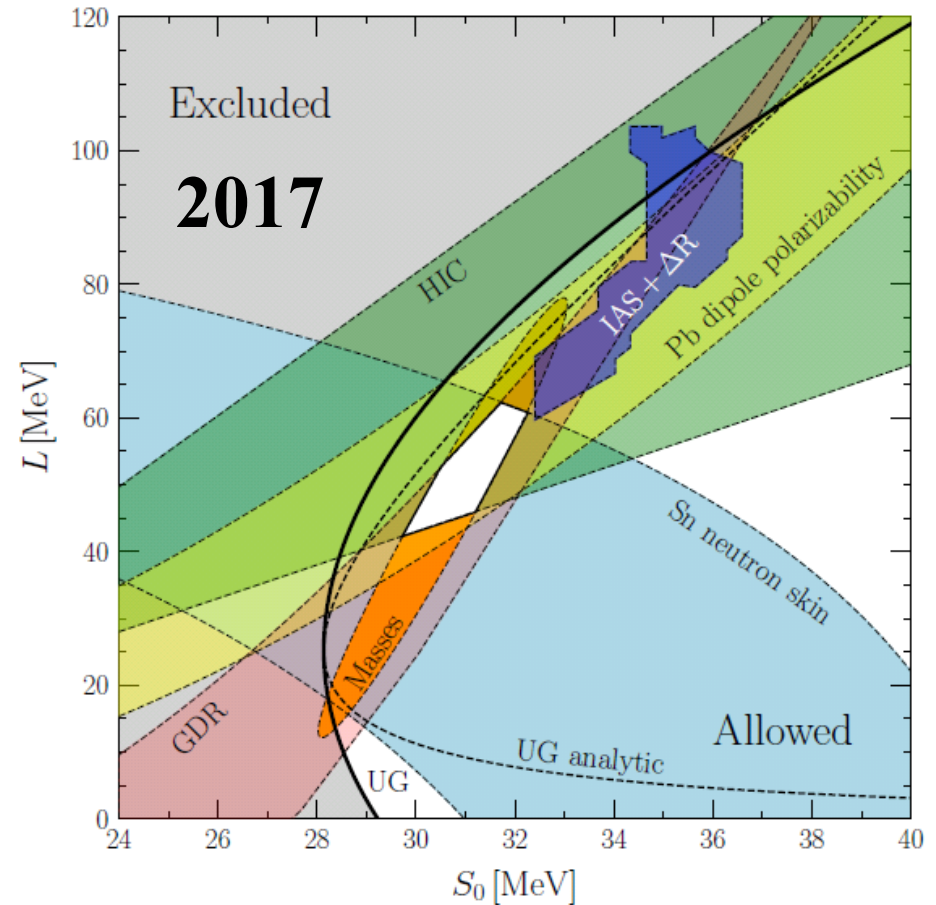
対称エネルギーパラメータ

■ Symmetry Energy Parameters

$$S(u) = S_0 + \frac{L}{3} (u-1) + \frac{K_{\text{sym}}}{18} (u-1)^2 + \mathcal{O}[(u-1)^3] \quad (\mathbf{u=n/n_0})$$



Tsang et al. ('12): NuSYM 2011



Lattimer, Lim ('13), Lattimer, Steiner ('14)
Tews, Lattimer, AO, Kolomeitsev ('16)

飽和密度パラメータから状態方程式へ

■ 核物質 EOS (k_F 展開)

Tews et al. ('17)

$$E(u, \delta) = E_{snm}(u) + \delta^2 S(u) \quad (\delta = (N - Z)/A)$$

$$S(u) = \Delta T(n_0)u^{2/3} + au + bu^{4/3} + cu^{5/3} + du^2$$

$$\simeq S_0 + \frac{L}{3}(u - 1) + \frac{K_{sym}}{18}(u - 1)^2 + \frac{Q_{sym}}{54}(u - 1)^3$$

$$E_{snm}(u, x) = T_0(n_0)u^{2/3} + a'u + b'u^{4/3} + c'u^{5/3} + d'u^2$$

$$\simeq E_0 + \frac{K_0}{18}(u - 1)^2 + \frac{Q_0}{54}(u - 1)^3$$

■ 高次パラメータ (既存の有益な模型から推定, $d'=0 \rightarrow Q_0$)

$$K_{sym} = 3.501L - (305.67 \pm 24.26)\text{MeV}$$

$$Q_{sym} = -6.443L + 708.74 \pm 118.14\text{MeV},$$

$$K_0 = (190 - 270)(= 230 \pm 40)\text{MeV}$$

■ $u = \rho / \rho_0$ を与えると、 K_0, S_0, L の 1 次関数 $\rightarrow$ 端点が上限・下限

Fermi momentum (k_F) expansion

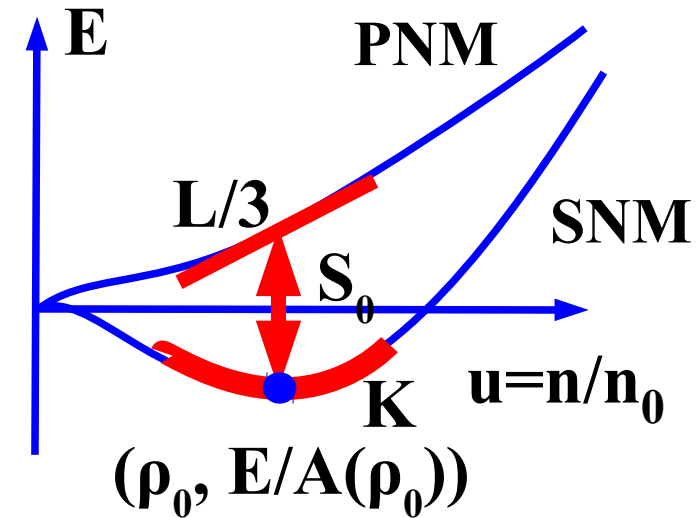
■ Saturation & Symmetry Energy Parameters

$$E_{\text{NM}}(u, \alpha) = E_{\text{SNM}}(u) + \alpha^2 S(u)$$

$$E_{\text{SNM}}(u) \simeq E_0 + \frac{K_0}{18}(u-1)^2 + \frac{Q_0}{162}(u-1)^3$$

$$S(u) \simeq S_0 + \frac{L}{3}(u-1) + \frac{K_s}{18}(u-1)^2 + \frac{Q_s}{162}(u-1)^3$$

$$(u = n/n_0, \alpha = (n_n - n_p)/n)$$



Energy does not approach zero at $n \rightarrow 0$.

■ Fermi momentum expansion ($\sim$ Skyrme type EDF)

● Generated many-body force is given by $k_F \propto u^{1/3}$ m^*

$$E_{\text{SNM}}(u) \simeq \boxed{T_0 u^{2/3}} + \underline{a_0 u} + \underline{b_0 u^{4/3}} + \underline{c_0 u^{5/3}} + \underline{d_0 u^2}$$

$$S(u) \simeq \boxed{T_s u^{2/3}} + \underline{a_s u} + \underline{b_s u^{4/3}} + \underline{c_s u^{5/3}} + \underline{d_s u^2}$$

Kin. E. **Two-body** **Density-dep. pot.**

Expansion Coefficients

- Coefficients (a,b,c,d) are represented by Saturation and Symmetry Energy Parameters

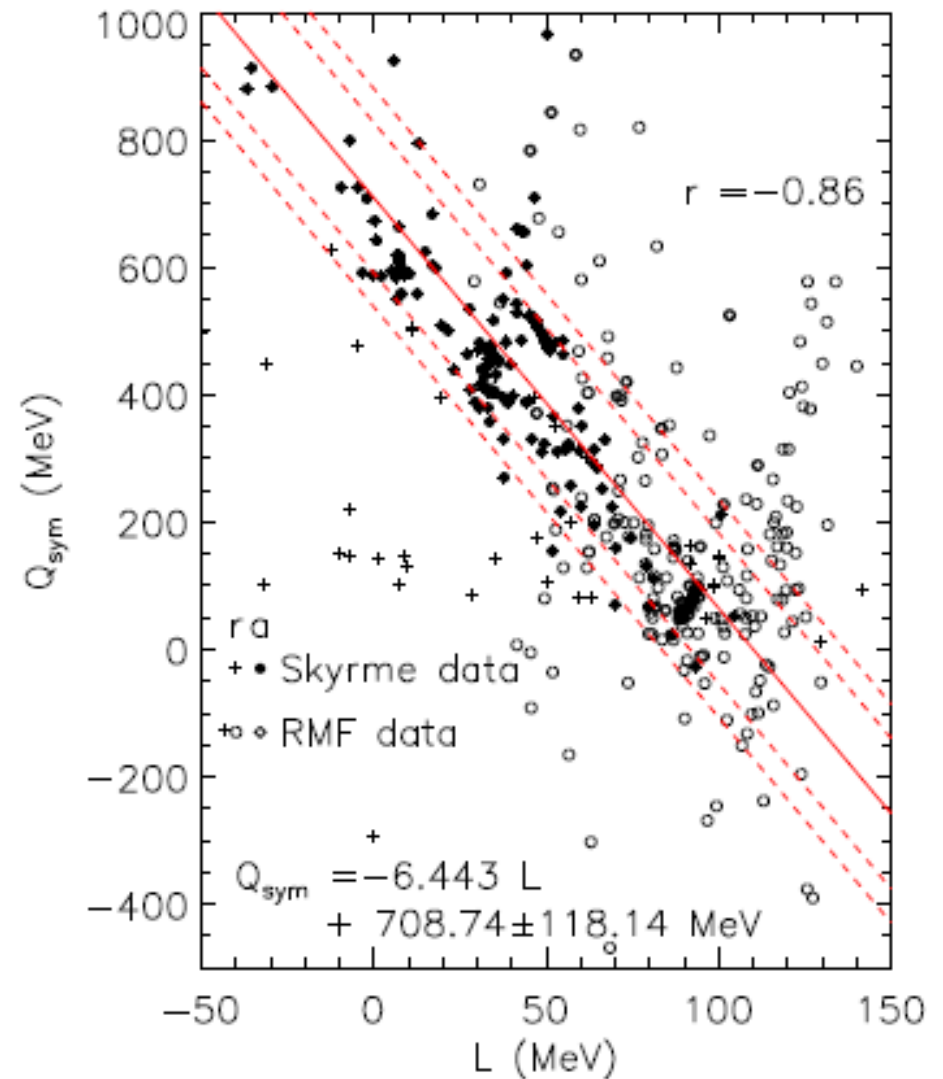
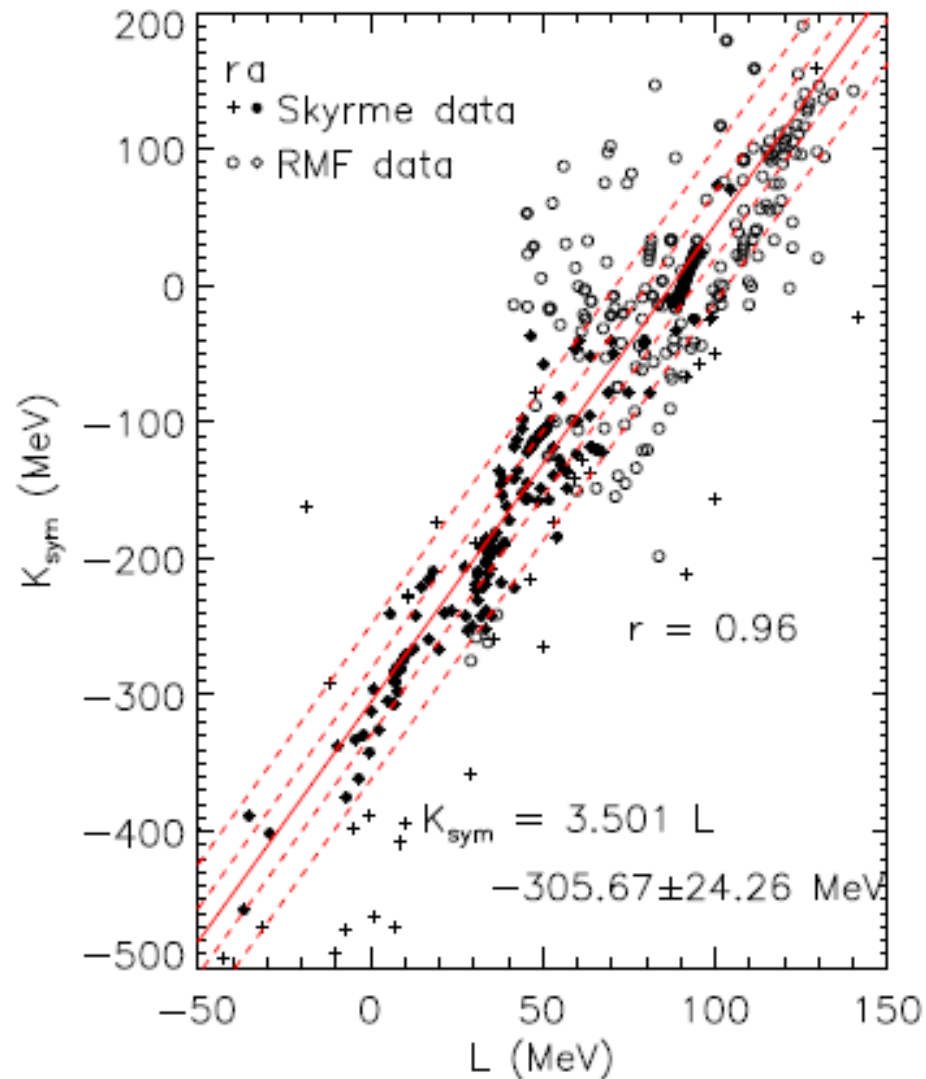
$a_0 = -4T_0$	$+20E_0$	$+K_0$	$-Q_0/6$
$b_0 = 6T_0$	$-45E_0$	$-5K_0/2$	$+Q_0/2$
$c_0 = -4T_0$	$+36E_0$	$+2K_0$	$-Q_0/2$
$d_0 = T_0$	$-10E_0$	$-K_0/2$	$+Q_0/6$
$a_s = -4T_s$	$+20S_0 - 19L/3$	$+K_s$	$-Q_s/6$
$b_s = 6T_s$	$-45S_0 + 15L$	$-5K_s/2$	$+Q_s/2$
$c_s = -4T_s$	$+36S_0 - 12L$	$+2K_s$	$-Q_s/2$
$d_s = T_s$	$-10S_0 + 10L/3$	$-K_s/2$	$+Q_s/6$

$$\left(T_0 = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_F (n_0)^{2/3}}{2m}, \quad T_s = T_0 (2^{1/3} - 1) \right)$$

Tedious but straightforward calc.

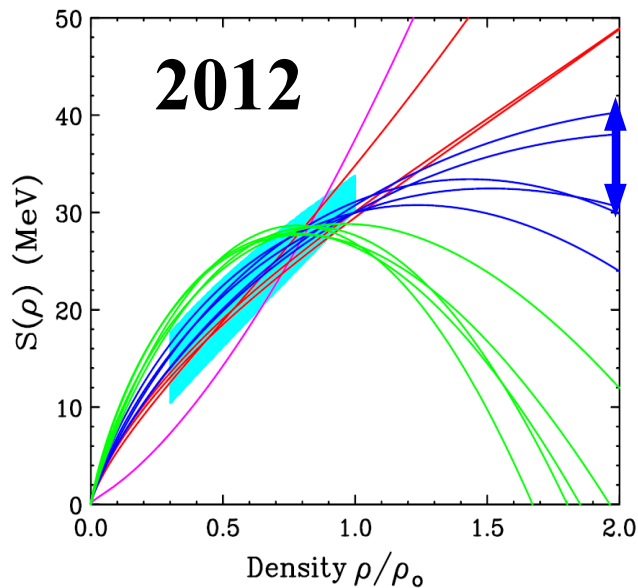
I. Tews, J.M.Lattimer, AO, E.E.Kolomeitsev (TLOK), ApJ 848 ('17)105

Ksym and Qsym

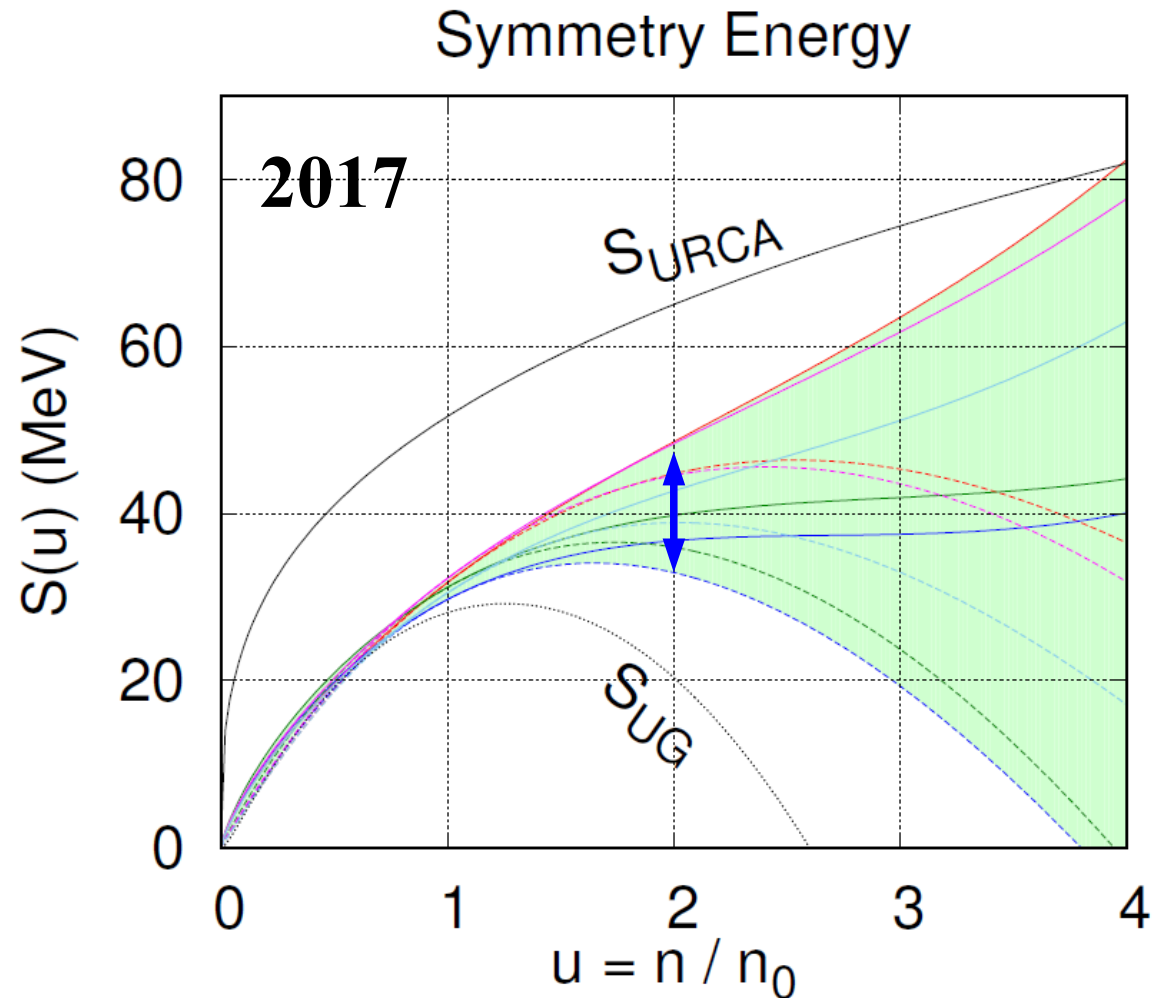


Tews et al. ('17)

対称エネルギー



*M. B. Tsang et al.,
PRC86 ('12) 015803.*

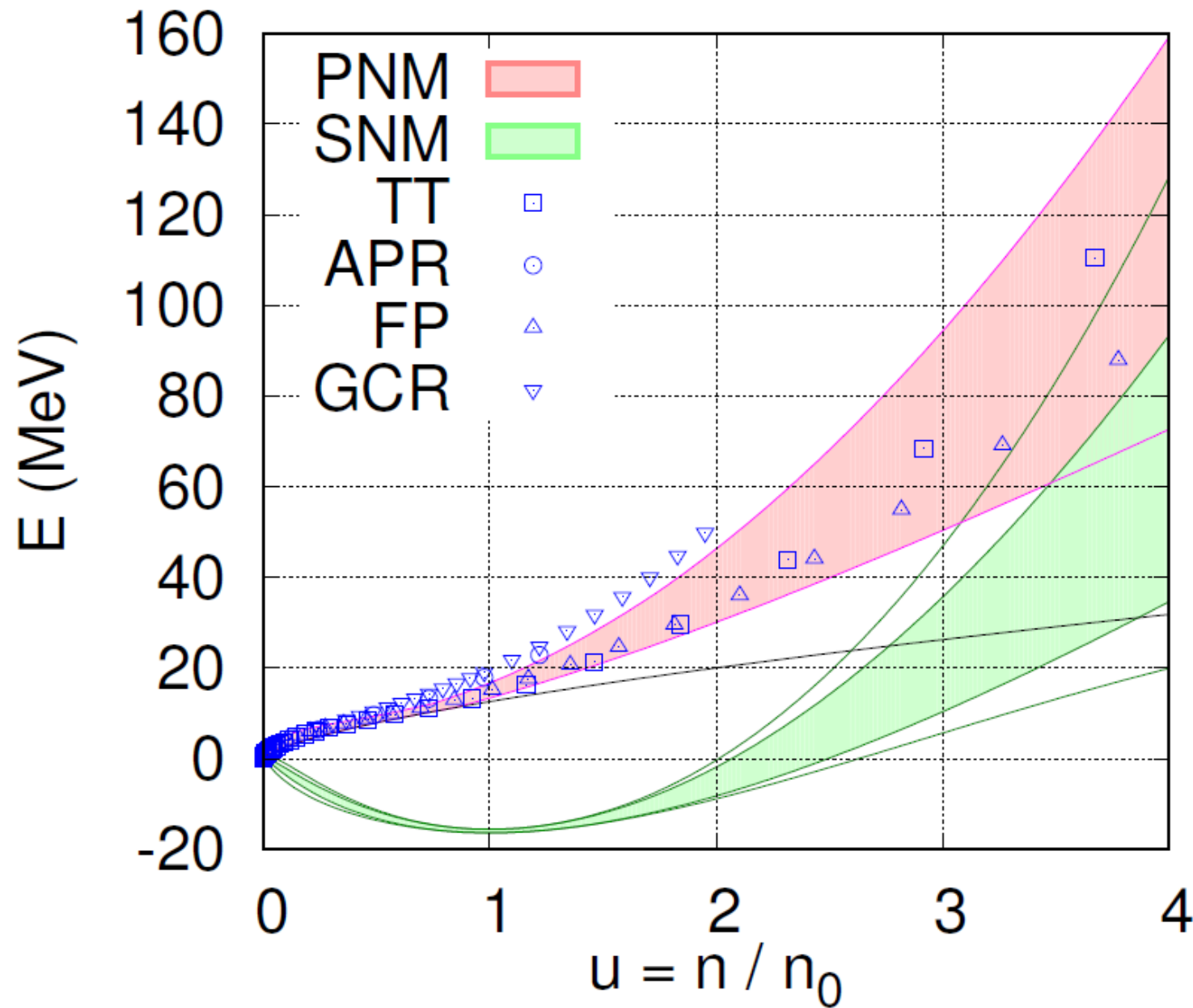


Based on Tews et al. ('17)

仮定

- (S_0, L) が5 角形の中
- k_F^n ($n=2,3,4,5,6$) で展開
- 2, 3 次の係数 ($K_{\text{sym}}, Q_{\text{sym}}$) が L と相関 (模型からの推定)

核物質狀態方程式



Based on Tews et al. ('17)

中性子星物質 EOS

■ 核物質 → 中性子星物質

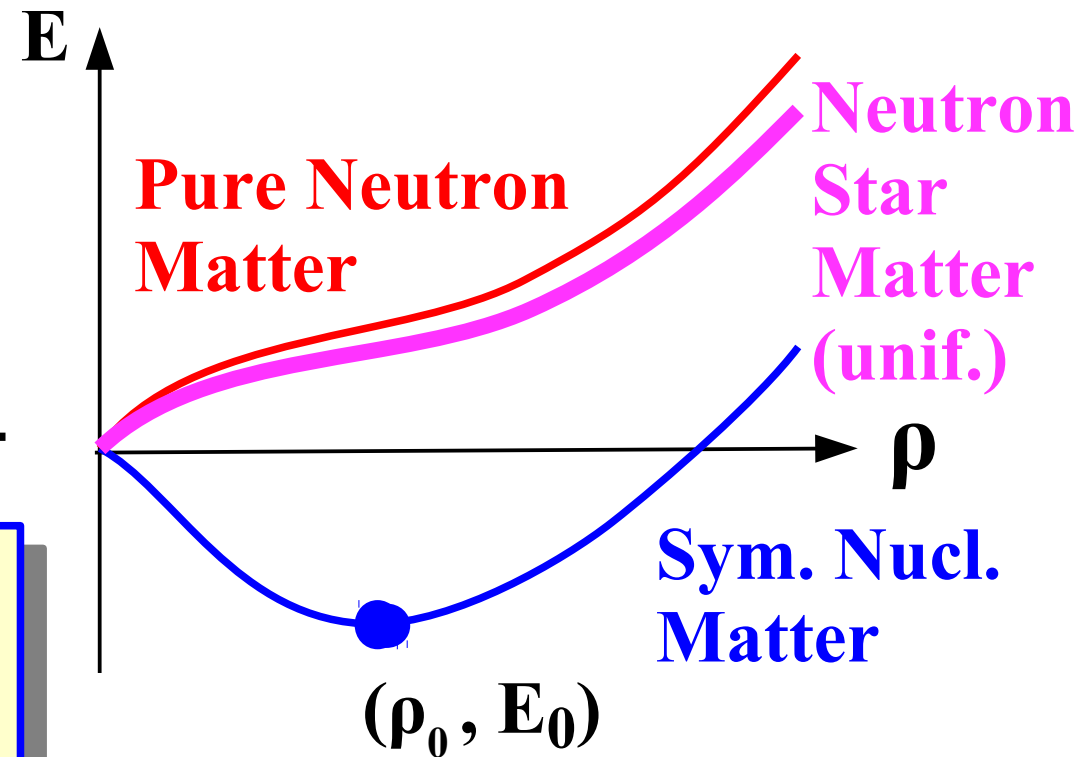
- 中性子・陽子・電子からなる電気的中性物質
- 電気的中性条件から $\rho_e = \rho_p$

$$E_{nsm}(u) = E_{snm}(u) + \delta^2 S(u) + \frac{3}{8} \hbar (3\pi^2 \rho_0 u / 2)^{1/3} (1 - \delta)^{4/3}$$

$$(u = \rho / \rho_0, \quad \delta = (N - Z) / A)$$

(陽子・中性子の質量差、
電子質量は無視)

- 非対称度 (δ) はエネルギーが最小となるように選ばれる
→ 中性子星物質のエネルギー
＜ 中性子物質のエネルギー



対称核物質エネルギーと
対称エネルギーが分かれば、
中性子星物質 EOS が求まる！

メモ：中性子星物質中の非対称度

- 陽子・中性子の質量差、電子質量を無視すると、非対称度 δ は解析的に求まる。

$$Y_p(u) = (1 - \delta(u))/2 = \left[(A(u) + 1)^{1/3} - (A(u) - 1)^{1/3} \right]^3 / 4$$

$$A(u) = \sqrt{1 + \pi^2 \hbar^3 \rho_0 u / 288 S^3(u)}$$

- 3 次方程式の解き方 (カルダノの公式)

- 変数を定数だけずらして2次の項を消す。 $x^3 + px + q = 0$

- 因数分解の公式

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\ &= (x + y + z)(x + \omega y + \omega^2 z)(x + \omega^2 y + \omega z) \quad (\omega = (-1 + \sqrt{3}i)/2) \end{aligned}$$

を用いると、

$$y^3 + z^3 = q, \quad 3yz = -p$$

を満たす (y, z) を使って3次方程式が解ける。

中性子星の構造

- 中性子星の内側は見えないのに、
どうやって組成がわかるのですか？
→ 質量や半径からある程度推測できます。

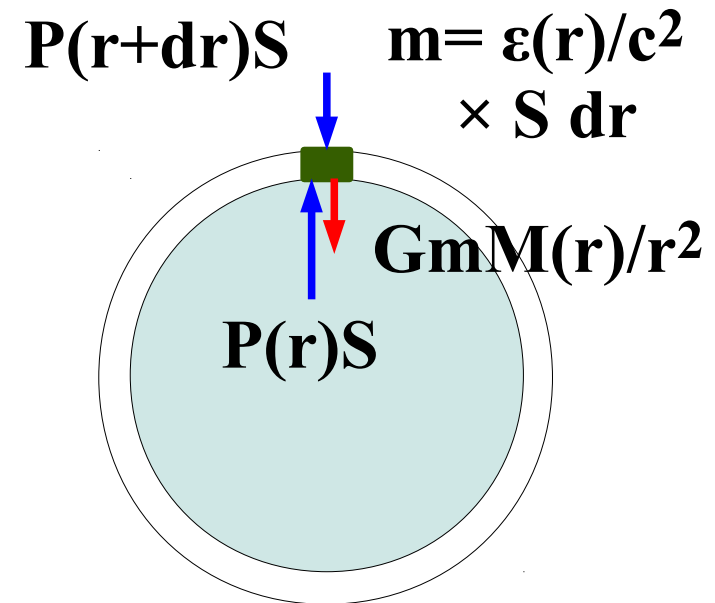
- 静水圧平衡
小さな箱を考えて、
外の圧力 + 重力 = 内の圧力

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M \epsilon / c^2}{r^2}$$

- Tolman-Oppenheimer-Volkoff 方程式
(一般相対論補正を含む静水圧平衡)

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{(\epsilon / c^2 + P / c^2)(M + 4\pi r^3 P / c^2)}{r^2 (1 - 2GM / rc^2)}$$

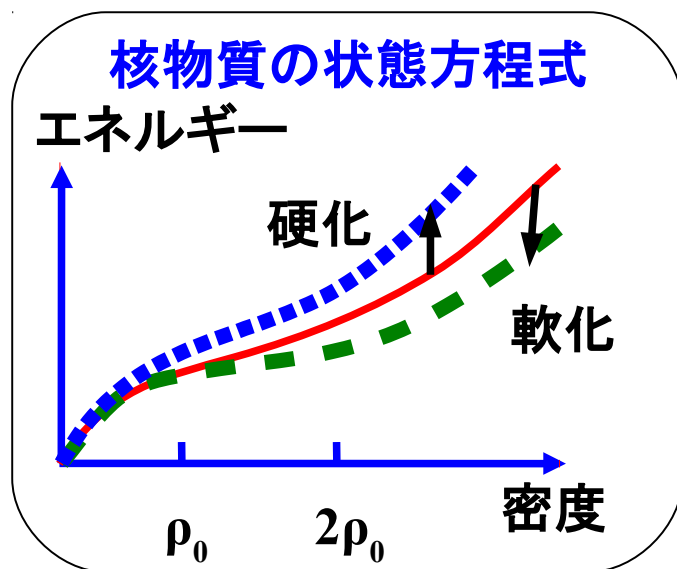
$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon / c^2, \quad P = P(\epsilon) \quad (\text{EOS})$$



$M(r)$: r までの質量
 $\epsilon(r)$: エネルギー密度
 $P(r)$: 圧力

状態方程式とMR(質量-半径)曲線

- 状態方程式が与えられると質量と半径の関係 (MR 曲線) が一意的に求まる。
→ 中性子星の MR 曲線は相互作用モデルを判別する

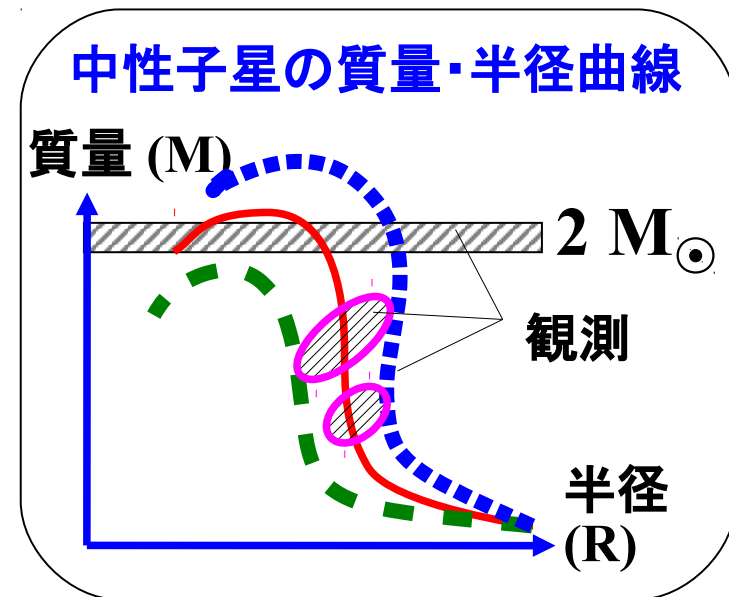


予言

TOV 方程式

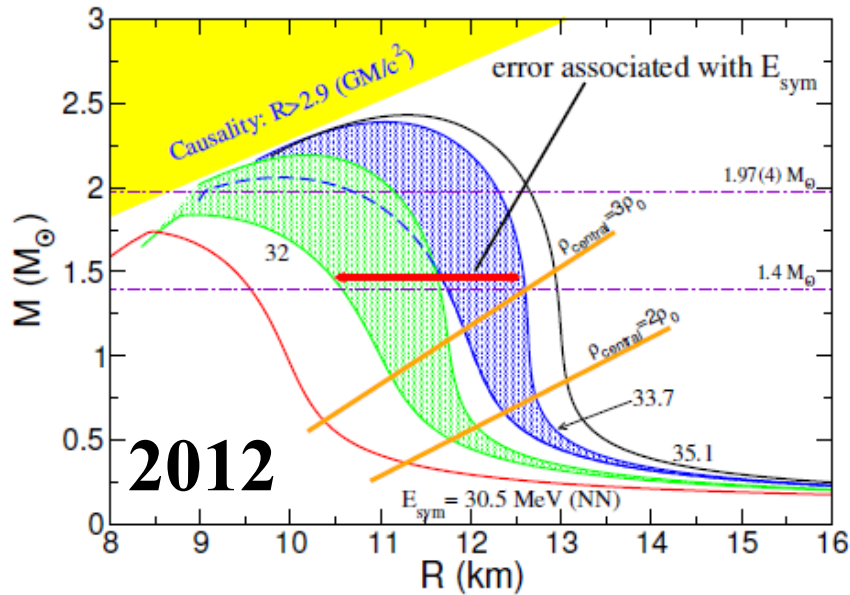
$$\frac{dP}{dr} \simeq - \frac{GM \epsilon / c^2}{r^2}$$

検証



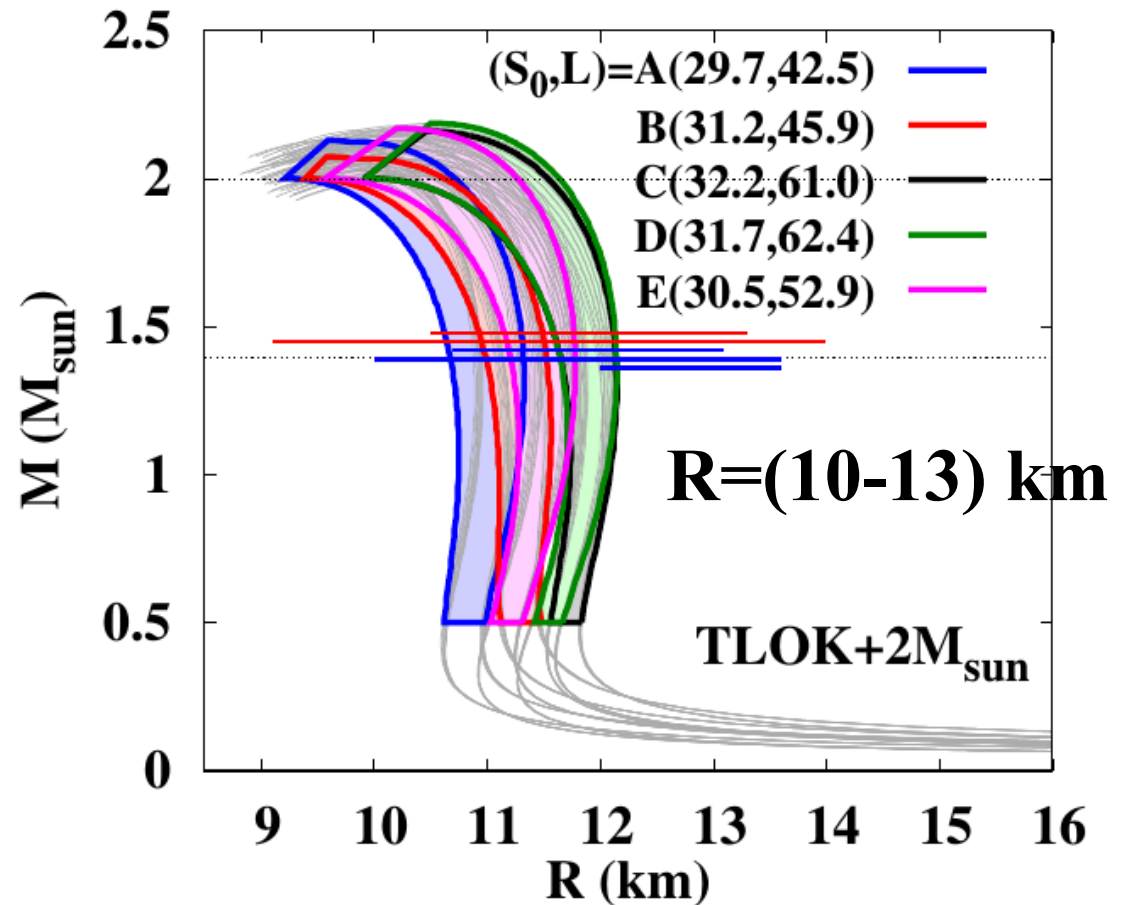
中性子星のMR 曲線

Based on Tews et al. ('17)



2017

Neutron Star Mass and Radius



核力から核物質へ

■ 密度汎関数理論

- 与えられた密度における多体系の基底状態エネルギーは密度の汎関数で与えられる。 *P. Hohenberg, W. Kohn ('64)*

$$E_{gs} = \min_{\Psi} \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle = \min_{\rho} \left[\min_{\Psi} \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle_{\rho} \right]$$

$$= \min_{\rho} F[\rho]$$

- 相互作用する系の密度は、一体ポテンシャル中を運動する自由粒子系の密度として計算できる。 *W.Kohn, L.J.Sham ('65)*

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi_i(\mathbf{r}) + U_{\text{eff}}(\mathbf{r}) \varphi_i(\mathbf{r}) = \varepsilon_i \varphi_i(\mathbf{r})$$

$$F[\rho] = E_H[\rho] + \underline{E_{\text{xc}}[\rho]}, \quad U_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = U_H(\mathbf{r}) + \frac{\delta E_{\text{xc}}}{\delta \rho(\mathbf{r})}$$

- 密度汎関数 → 状態方程式 Exchange-Correlation E.

$$E(\rho) = \min_{\rho'} F[\rho'] |_{\rho'_{\text{ave}} = \rho}$$

スキーム力による密度汎関数

■ Skyrme interaction (c.f. Ring-Schuck text)

● ゼロレンジ相互作用 + 微分 (有限レンジ効果) + 密度依存力

$$\begin{aligned}v(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = & t_0(1 + x_0 P_\sigma) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ & + \frac{1}{2} t_1 (\mathbf{k}^2 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \mathbf{k}^2) + t_2 \mathbf{k} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \mathbf{k} \\ & + \frac{1}{6} t_3 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \rho^\alpha ((\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2) \\ & + i W_0 (\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2) \mathbf{k} \times \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \mathbf{k} \\ \mathbf{k} = & (\nabla_1 - \nabla_2)/2i\end{aligned}$$

● エネルギー密度 (spin, isospin が飽和している場合)

$$\begin{aligned}H(\mathbf{r}) = & \frac{\hbar^2}{2m} \tau(\mathbf{r}) + \frac{3}{8} t_0 \rho^2 + \frac{1}{16} t_3 \rho^{2+\alpha} + \frac{1}{16} (3t_1 + 5t_2) \rho \tau \\ & + \frac{1}{64} (9t_1 - 5t_2) (\nabla \rho)^2 - \frac{3}{4} W_0 \rho \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{1}{32} (t_1 - t_2) \mathbf{J}^2 \\ \tau = & \sum |\nabla \varphi_i|^2, \quad \mathbf{J} = -i \sum \varphi_i^*(\mathbf{r}, s, t) \nabla \varphi_i(\mathbf{r}, s', t) \times \boldsymbol{\sigma}_{ss'}\end{aligned}$$

広い質量領域の原子核の性質からパラメータを決定
→ 密度汎関数 $F = \int dr H(r)$

メモ: スピン・アイソスピン・ファクター

■ 3/8 等のファクターはどこから現れる？

→ spin, isospin についての和

$$V_{\text{HF}}(t_0 \text{ term}) = \frac{1}{2} t_0 \sum_{i,j} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \langle ij | (1 + x_0 P_\sigma) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) | ij - ji \rangle$$

$$= \frac{1}{2} t_0 \sum_{n,m} \int d\mathbf{r} |\varphi_n(\mathbf{r})|^2 |\varphi_m(\mathbf{r})|^2 \times X = \frac{X}{32} t_0 \int d\mathbf{r} \rho^2$$

$$X = \sum_{s,t} \langle s_1 t_1 s_2 t_2 | (1 + x_0 P_\sigma) | s_1 t_1 s_2 t_2 - s_2 t_2 s_1 t_1 \rangle$$

$$= 4 \times (4 + 2x_0 - 1 - 2x_0) = 12$$

Brueckner Theory

■ Lippmann-Schwinger Eq.

$$T = V + VG_0 T$$

- V が singular でも T は有限

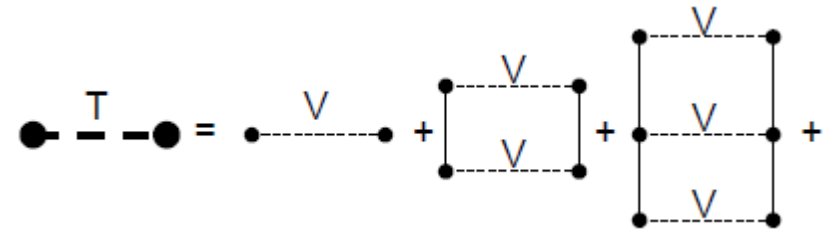
■ 原子核中での 2 体散乱 → パウリ原理

$$g(E) = V + V \frac{Q}{E - H_0} g(E)$$

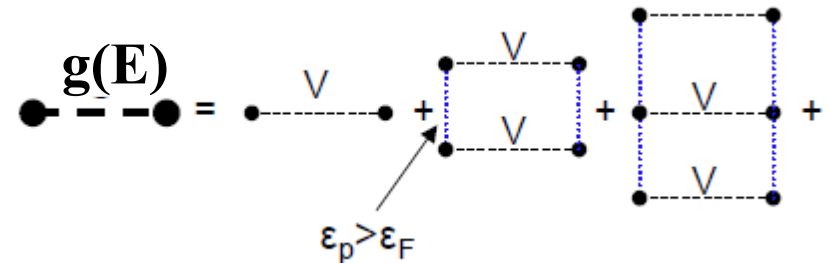
$$Q = 1 - \sum_{i,j < F} |ij\rangle \langle ij|$$

- 原子核中では中間状態で
フェルミエネルギー以上の状態のみ
伝播可能

■ 核内での散乱行列 = g-matrix



$$V |\Psi_k^{(+)}\rangle = T |\mathbf{k}\rangle$$



$$V |\Psi\rangle = g(E) |\Phi\rangle$$

↑
2 体相関を含む
複雑な状態

↑
2 体相関の
無い状態
(E.g. Slater det.)

Healing distance

■ (波動関数についての) Bethe-Goldstone 方程式

$$g_{12} = v_{12} + v_{12} \frac{Q_{12}}{E - (t_1 + t_2 + U_1 + U_2)} g_{12}$$

$$\rightarrow [E - (t_1 + t_2 + U_1 + U_2)] \psi_{12} = Q_{12} v_{12} \psi_{12}$$

- BG 方程式の解は、 $k_F l \sim 1.9$ 程度の距離で通常の平面波にほぼ一致する。(Healing distance)
→ 独立粒子描像

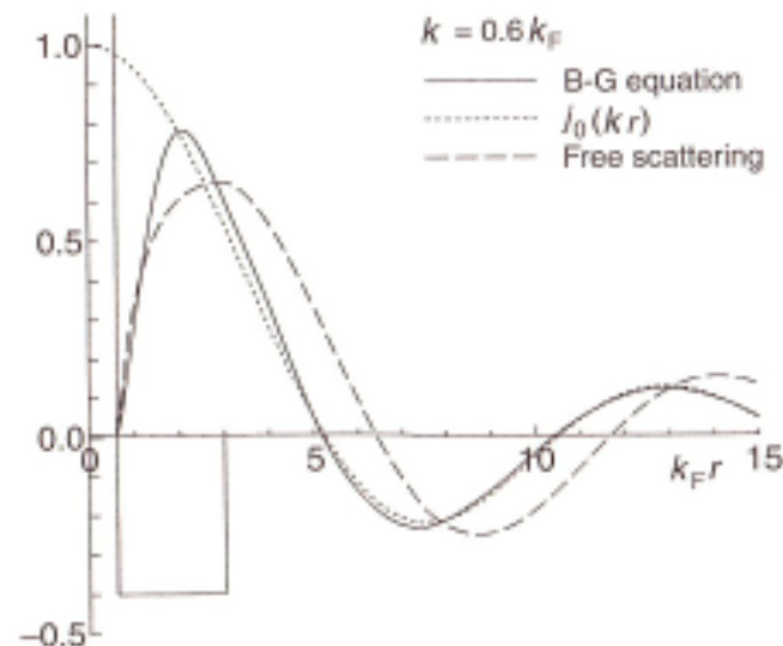
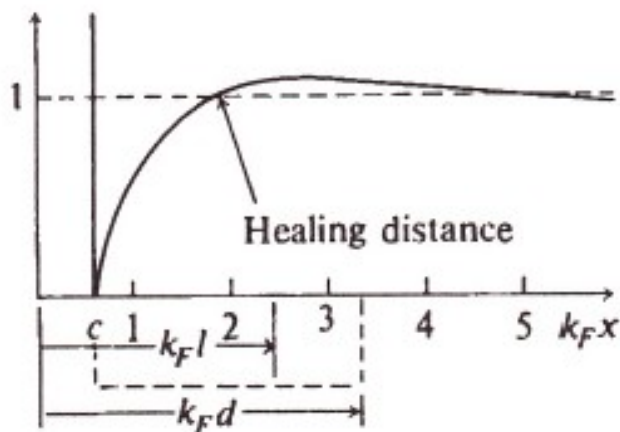


図 2.17 $k = 0.6 k_F$ の場合の Bethe-Goldstone 方程式の解 (実線) と、自由空間内の 2 粒子散乱 (破線) および自由粒子の相対波動関数 (点線) の比較

$k_F = 1.27 \text{ fm}^{-1}$, 芯半径は $k_F r_c = 0.62$, 井戸型ポテンシャルの半径は $k_F r_0 = 3.0$, 有効質量は $M^*/M = 0.6$ ととられている。

Brueckner-Hartree-Fock theory

- g-matrix を 2 体相互作用とする HF
= Brueckner-Hartree-Fock

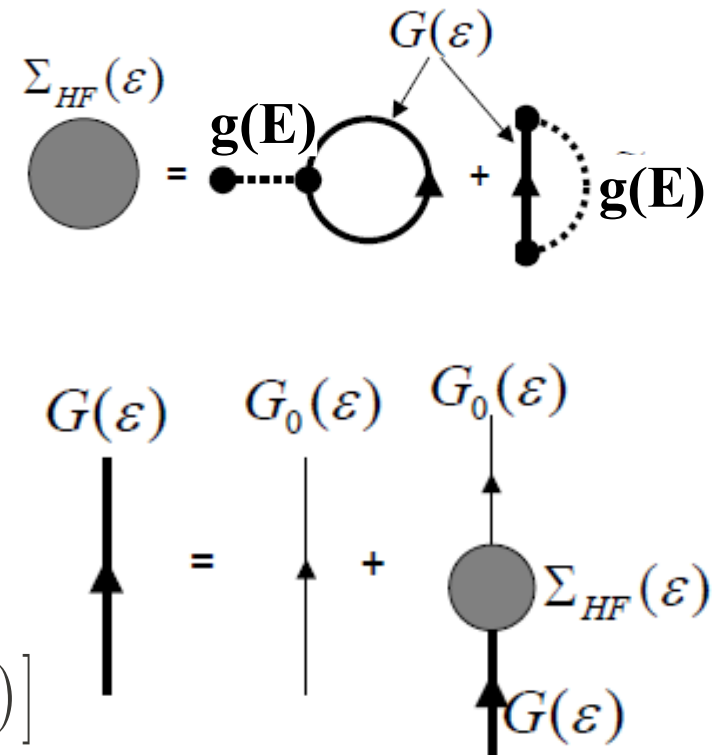
$$H = H_0 + V, \quad V = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij}$$

$$H_0 = \sum_i \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + U_i \right]$$

$$g(E) = V + V \frac{Q}{E - H_0} g(E)$$

$$U_i(\epsilon_i) = \sum_j \left[g_{ij,ij}(\epsilon_i + \epsilon_j) - g_{ij,ji}(\epsilon_i + \epsilon_j) \right]$$

$$E_{\text{BHF}} = \sum_i^{\text{occ.}} \langle i | -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 | i \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^{\text{occ.}} \langle ij | g(\epsilon_i + \epsilon_j) | ij - ji \rangle$$



- Self-consistent treatment

$U \rightarrow \text{g-matrix} \ \& \ \phi \text{ (s.p.w.f)} \rightarrow U$

Brueckner-Hartree-Fock theory (cont.)

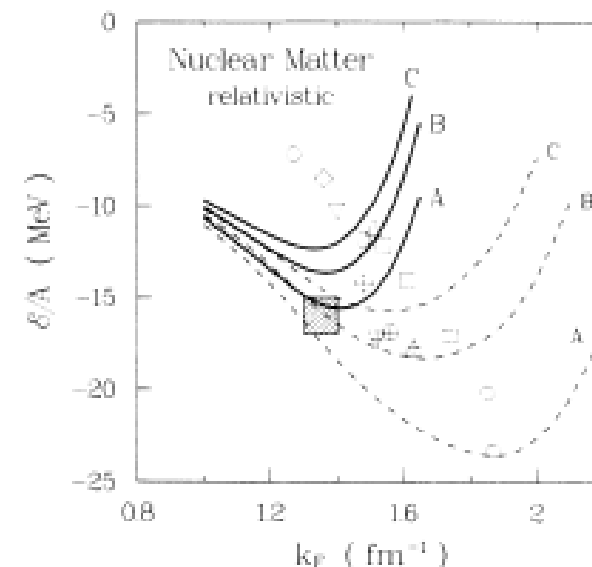
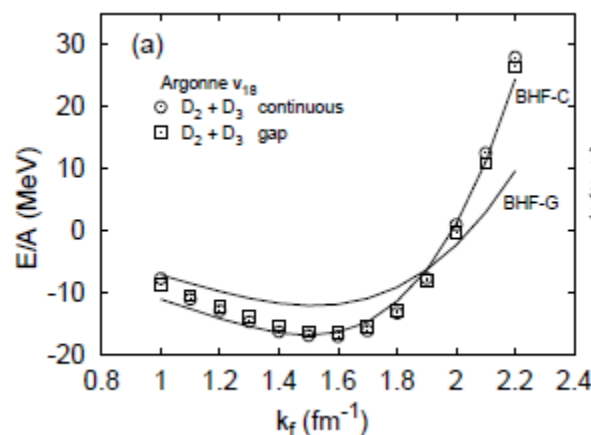
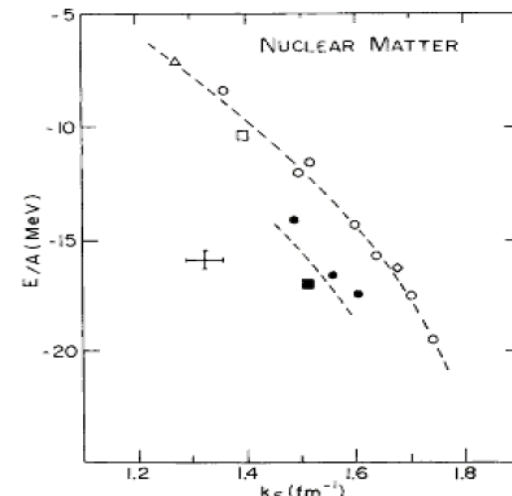
■ 成功点

- 核物質の飽和性を定性的に説明
- 殻模型(独立粒子描像)の基礎を与える
- 有効核力の状態依存性を説明

■ 問題点

- 飽和点(飽和密度、飽和エネルギー)の定量的理解(Coester line)→ Relativity or 3体力
- 展開の高次項→ Continuum choice では3体クラスター効果は小さい
- スピン軌道力が足りない

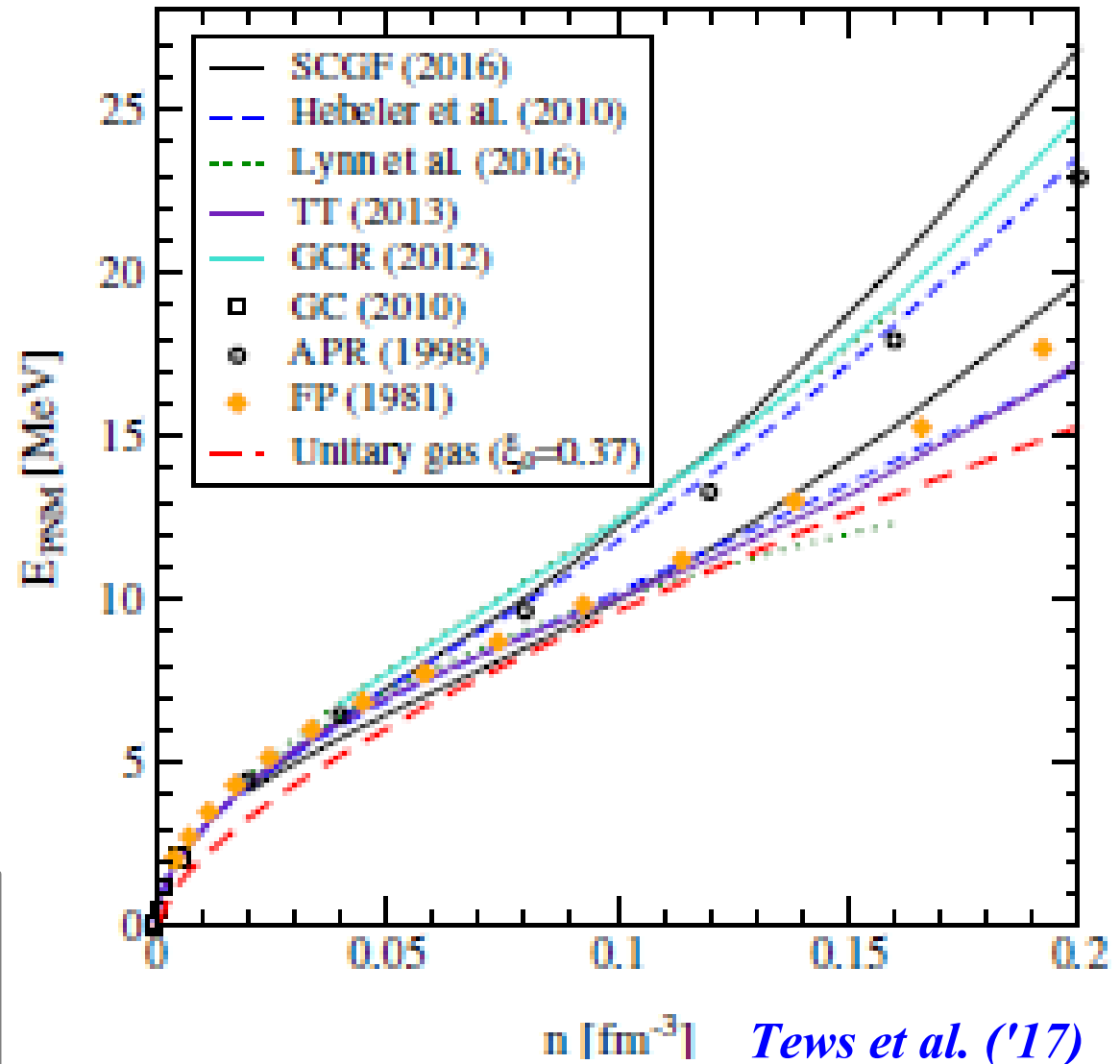
問題は残っているが、
現実的核力から出発して
多体問題に適用する
有効な手法



第一原理計算

■ (生の) 現実的核力から出発する量子多体計算

- 低密度の中性子物質ではほぼ一致
- 2体力のみでは、対称核物質の飽和点は説明不可。
→ 3体力 (密度依存性) が必要



「核力から核物質」は
現在でも核物理の
大きな課題

レポート問題 (Sec. 4)

■ Report 4-1 (講義への感想・意見)

今年度の原子核基礎論 A 前半は全てオンライン講義 (Zoom 講義) となりました。原子核基礎論 A はまだ続きますが、この段階での感想を聞きたいと思います。
(意味のある「問題点の指摘」に腹を立てるつもりはありませんが、記名で書きにくい感想は、講義終了時のアンケートでお願いします。)

- 講義する側として気をつけたのは、黒板での板書の授業と同程度のスピードで Zoom 講義を進めることでした。ただし振り返ってみれば顔が見えないため学生の理解度が推測しにくいことによる過剰説明とそれによる遅延、板書をとる時間 (~ 考える時間) を考慮しないことによる理解の浅さなどがあつたのでは無いかと危惧しています。講義のスピードが「速かった・適切である・遅かった」のどれであつたか答えて下さい。(部分と全体を分けてもらって OK)
- 散乱の量子力学、場の理論入門、群論の一部は、ある程度時間をとりました。これらのそれぞれについて、「不要であつた・適切であつた・より詳しく講義すべきであつた」のどれであつたでしょうか？
- この講義はレポートが多かつたとのことですが、負担は大きかつたですか？
「負担が大きかつた・大きくなかつた・面白かつた」
のどれであつたでしょうか？(複数回答可)
(大学院での研究は理論研究であっても、手での計算のみでなく、数値計算などコンピュータを使う場合も多いです。拒否反応を持たないようにして下さい。)
- 自由意見もぜひお願いします。

レポート問題 (Sec. 4)(cont.)

- これ以降の問題は講義の進行状況によって分母として数えるかどうか変わります。確定して PandA にレポートとして出題します。
- Report 4-2 有限温度相転移の場合と同様に、有限密度での相転移が記述できるかどうか、確かめてみよう。
massless free fermion に対して、粒子からの圧力は

$$P_F^{(\text{particle})}/d_F = \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{90} T^4 + \frac{\mu_F^2 T^2}{24} + \frac{\mu_F^4}{48\pi^2} \quad (d_Q = 4N_c N_f, \quad d_N = 8)$$

と与えられる。 d_F は fermion 自由度、 μ_F は化学ポテンシャル。

$\mu_N = N_c \mu_Q$ であること、有限温度の場合と同様にクォーク物質の圧力には真空からの補正が加わることに注意して、クォーク物質・核物質（質量ゼロのクォーク気体・核子気体とする）の圧力を μ_Q の関数として表わせ。相転移は起こるか？起こるとすればそのときの μ_Q を求めよ。

レポート問題 (Sec. 4)(cont.)

- Report 4-3 (講義で紹介した場合よりさらに) 簡単な状態方程式モデルを考えよう。核子あたりのエネルギーが

$$E = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} + \alpha \frac{\rho}{\rho_0} + \beta \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma$$
$$= T_0 u^{2/3} + \alpha u + \beta u^\gamma \quad (u = \rho/\rho_0)$$

と与えられるとする。

$\gamma=7/6, 4/3, 2$ の場合、飽和密度 $\rho_0=0.16 \text{ fm}^{-3}$ 、飽和エネルギー $E_0=-16 \text{ MeV}$ を再現するようにパラメータ α, β を求めよ。またこの時に非圧縮率 K の値を求めよ。

現象論的には $K \sim 230 \text{ MeV}$ と知られている。 γ の値はどれが適当であるか？

(T_0 は飽和密度の対称核物質における平均運動エネルギーであり、この問題の条件では $T_0=22.13 \text{ MeV}$ である。)

レポート問題 (Sec. 4)(cont.)

■ Report 4-4 (とても面倒くさい問題です。)

簡単な状態方程式で Tolman-Oppenheimer-Volkoff 方程式

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{(\varepsilon + P)(M + 4\pi r^3 P)}{r^2(1 - 2GM/r)}, \quad \frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon, \quad P = P(\varepsilon) \text{ (EOS)}$$

を解き、中性子星の質量 - 半径曲線 (MR 曲線) を求めてみよう。

次の3つの EOS について中心密度を変化させ、圧力がゼロとなる半径、および最大質量を求めよ。

$$(1) P = \varepsilon \text{ (causal EOS)}, \quad (2) P = \frac{\varepsilon}{3} \text{ (massless free EOS)},$$

$$(3) E/A = m + T_0 u^{2/3} \text{ (non-rel. free nucleon, } P = \rho^2 \frac{\partial(E/A)}{\partial \rho} \text{)}$$

数値は Report 1-2 で与えたものを利用してよい。

$$\frac{GM_N^2}{\hbar c} = 5.9 \times 10^{-39}, \quad M_\odot = 1.9884 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad \hbar c = 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm},$$

$$m = 939 \text{ MeV}/c^2 = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}, \quad r_0 = 1.07 \text{ fm}$$