

# 原子核基礎論B

京大基研 大西 明

Akira Ohnishi (YITP, Kyoto U.)

1. 原子核の集団運動とその微視的理解 (3コマ)
2. 原子核反応論基礎 (1コマ)
3. 核融合反応 (1コマ)
4. 核分裂: 現象論と微視的理論 (1コマ)
5. ニホニウムと超重元素の物理 (1コマ)

萩野

6. 高温・高密度核物質概観 (1コマ)
7. 高エネルギー重イオン衝突 (2コマ)
8. 有限温度・密度における場の理論入門 (2コマ)
9. QCD 有効模型における相転移と相図 (1コマ)
10. 有限温度・密度格子 QCD と符号問題 (1コマ)

大西

# 原子核基礎論A、B(大西担当分)

- 原子核基礎論 A

1. はじめに(原子核の基本的性質)(1コマ → 2コマ)
2. 核力とその起源(3コマ)
3. クォークとハドロン(1コマ→2コマ)
4. 核物質の相図と状態方程式(2コマ → 0.5コマ → 0コマ)

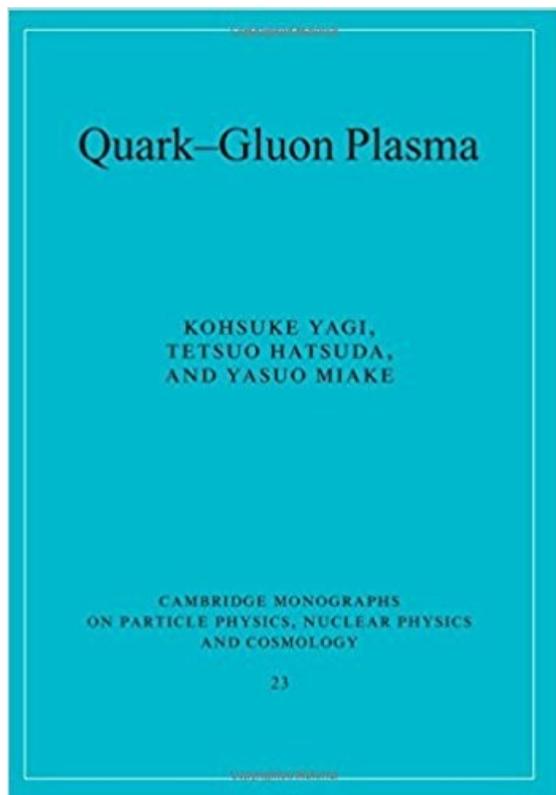
- 原子核基礎論 B

6. 高温・高密度核物質概観(1コマ)
7. 高エネルギー重イオン衝突(2コマ)
8. 有限温度・密度における場の理論入門(2コマ)
9. QCD 有効模型における相転移と相図(1コマ)
- 10.有限温度・密度格子 QCD と符号問題(1コマ)

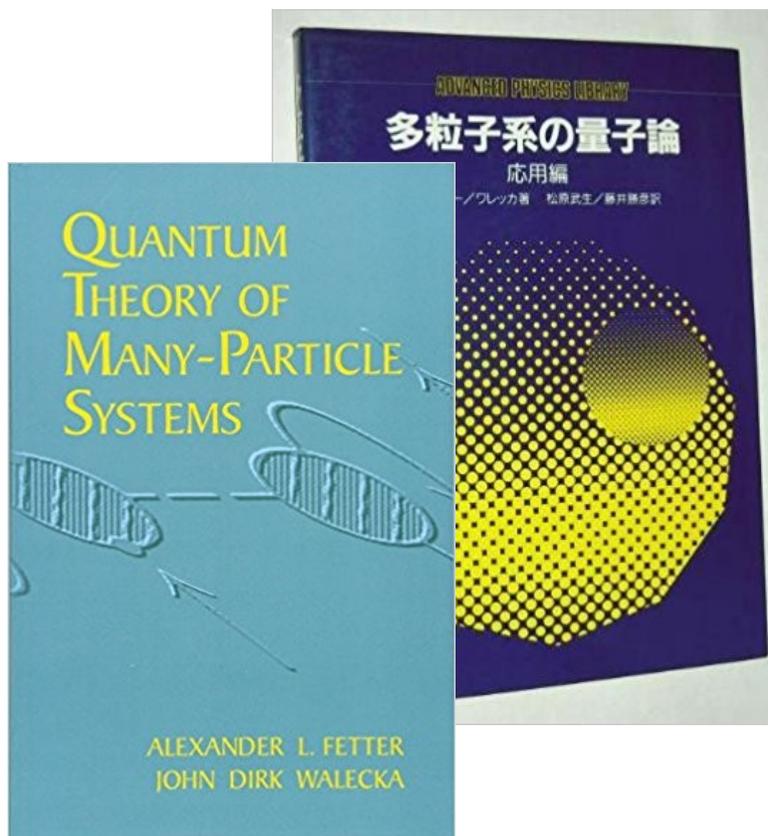
同様の内容ですが、  
基礎論 A では話せなかった  
ので、基礎論 B で1コマ講義  
します(年度によって異なる。)

# 参考書

- Sec. 6 では八木・初田・三明、Fetter-Walecka、国広さんのテキストを参考にしています。



*Quark-Gluon Plasma: From Big Bang to Little Bang, Yagi, Hatsuda, Miake (10309 円)*



*Quantum Theory of Many-Particle Systems  
Fetter, Walecka (4015 円)*



*クォークハドロン  
物理学入門、  
国広悌二 (売り切  
れ)*

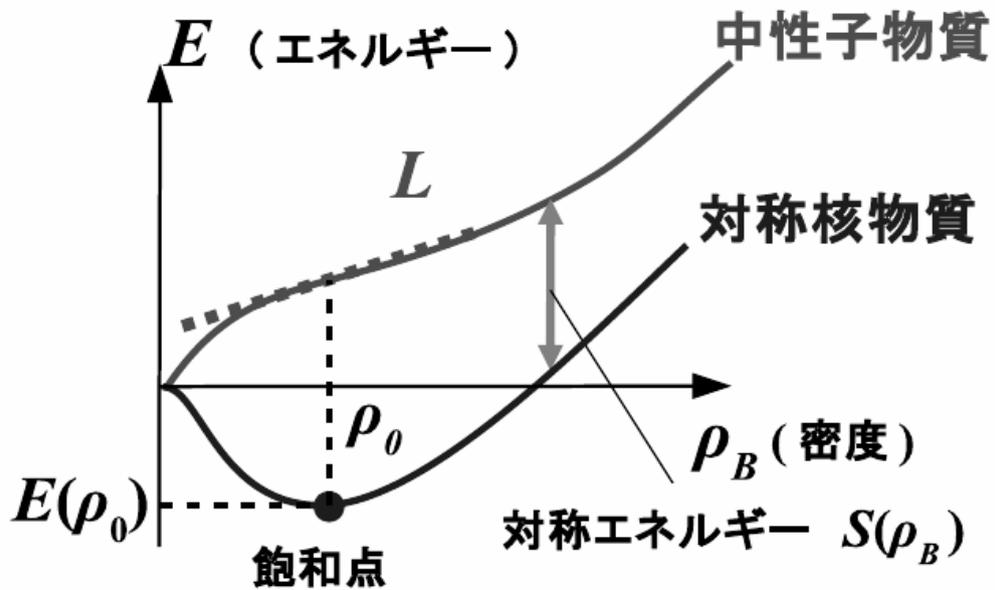
---

# 高温・高密度核物質概観

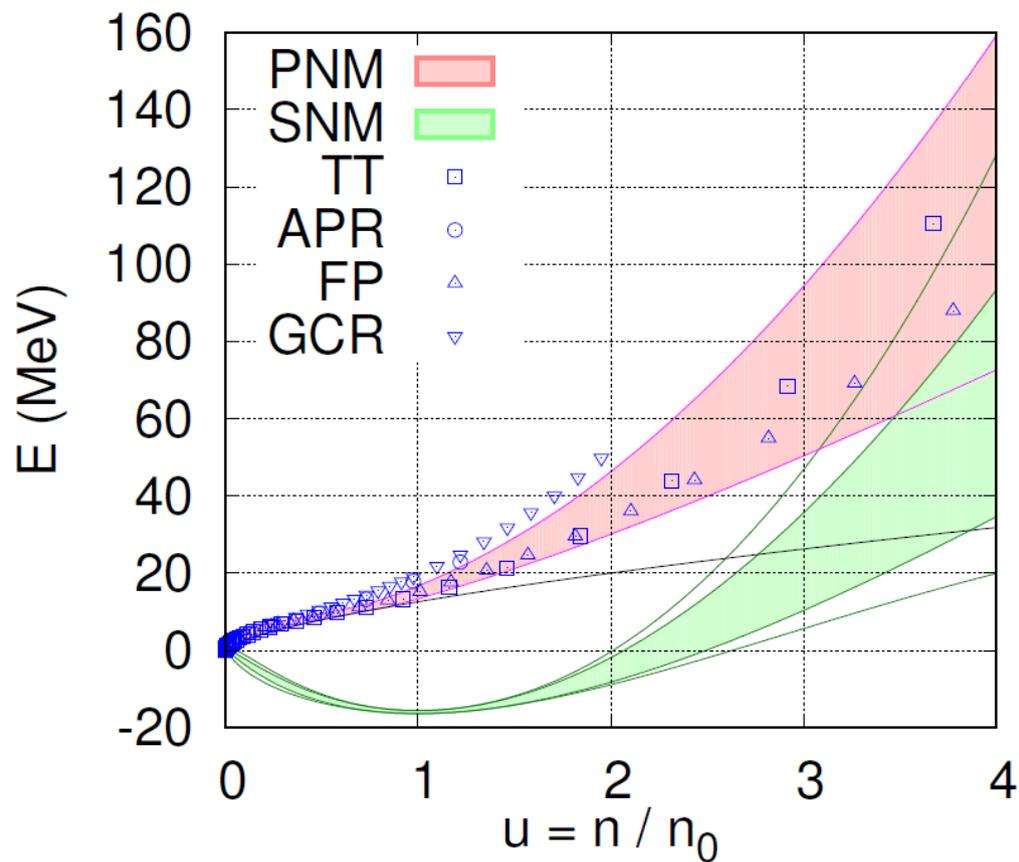


# 核物質状態方程式

## 状態方程式 (EOS)



$$\varepsilon = \rho E, P = \rho^2 \frac{\partial E}{\partial \rho}$$



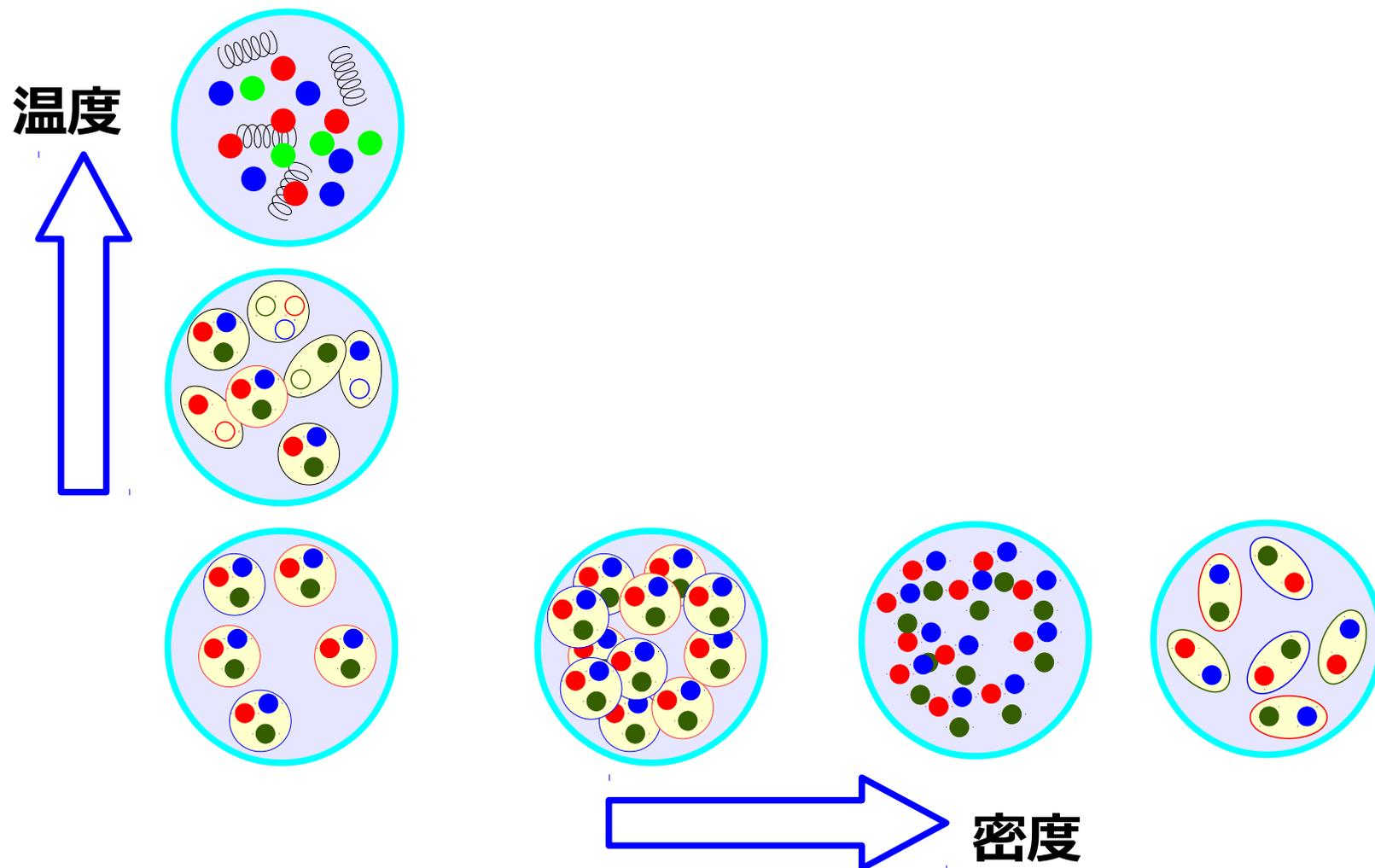
Based on Tews et al. ('17)

---

# 重イオン衝突で探る 高密度物質の相転移

# QCD 相転移

- 漸近的自由性 (大きなエネルギースケールでは結合定数  $\rightarrow 0$ )  
→ 核物質 (ハドロン物質) は、高温・高密度においてはクォーク・グルーオンからなる物質になるはず (QCD 相転移)



# QCD 相転移温度の簡単な評価

- Massless Free Gas (Stefan-Boltzmann 則)

$$P = \frac{\pi^2}{90} T^4 \left( \sum_B g_B + \frac{7}{8} \sum_F g_F \right)$$

- Hadron gas ~ massless free pion gas

$$P_H = \frac{\pi^2}{90} T^4 \times 3$$

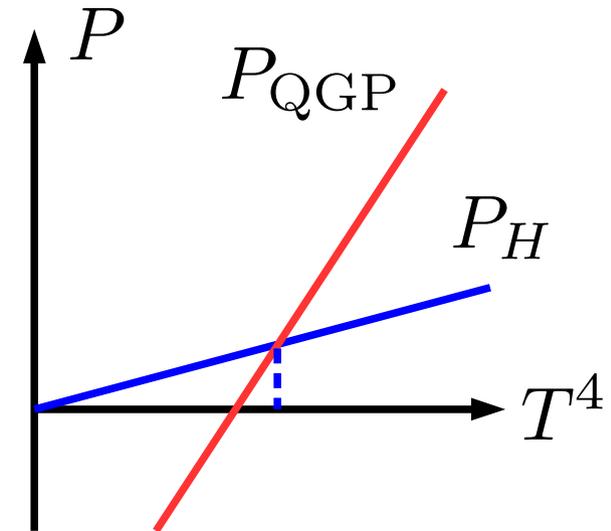
- Quark Gluon Plasma (QGP)

~ (massless free) quarks and gluons + vacuum

$$P_{\text{QGP}} = \frac{\pi^2}{90} T^4 \left( 2 \times (N_c^2 - 1) + \frac{7}{8} \times 4 \times N_c \times N_f \right) - B$$
$$= \frac{\pi^2}{90} T^4 \times 37 - B$$

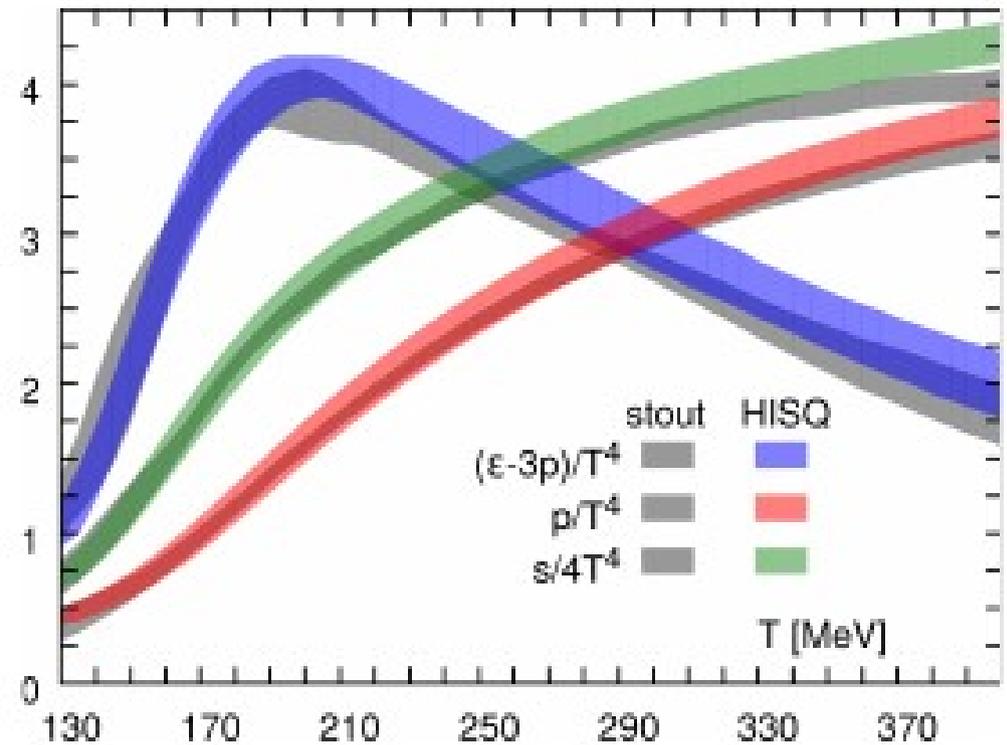
- QCD 相転移

$$P_H = P_{\text{QGP}} \rightarrow T_c = \left[ \frac{90}{34\pi^2} \right]^{1/4} B^{1/4} \simeq 0.72 B^{1/4} \simeq 158 \text{MeV}$$



# クォーク・グルーオン・プラズマの発見 (理論)

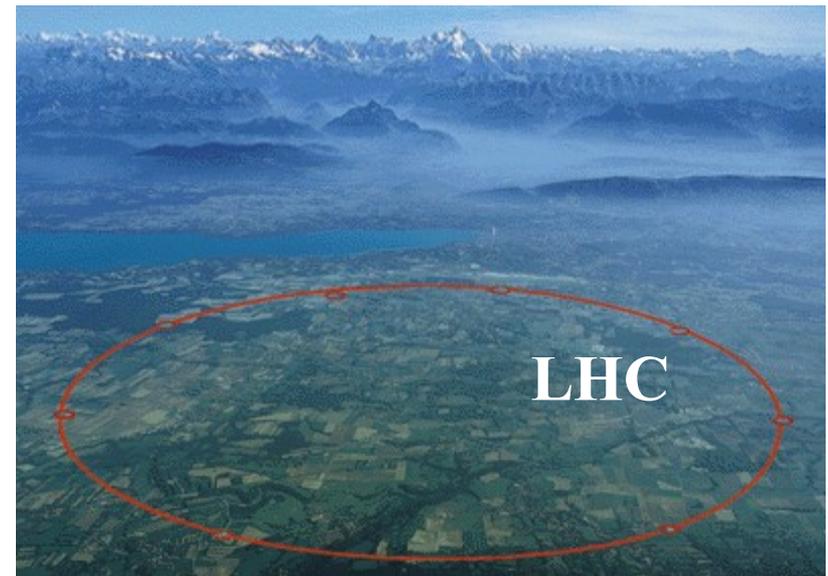
- 量子色力学 (QCD) に基づく第一原理計算  
= 格子 QCD シミュレーション
  - 図:  $T^4$  で規格化したエネルギー密度と圧力
  - $T = 150\text{-}200$  MeV 程度で
    - 急激なエネルギー密度の変化
    - 圧力はやや滑らかに増加
- QGP への相転移  
 $T_c = 154 \pm 9$  MeV



*A. Bazavov et al. [HotQCD], PRD90('14)094503.  
S. Borsanyi et al., PLB 730 ('14) 99.*

# High Energy Heavy-Ion Collision Experiments

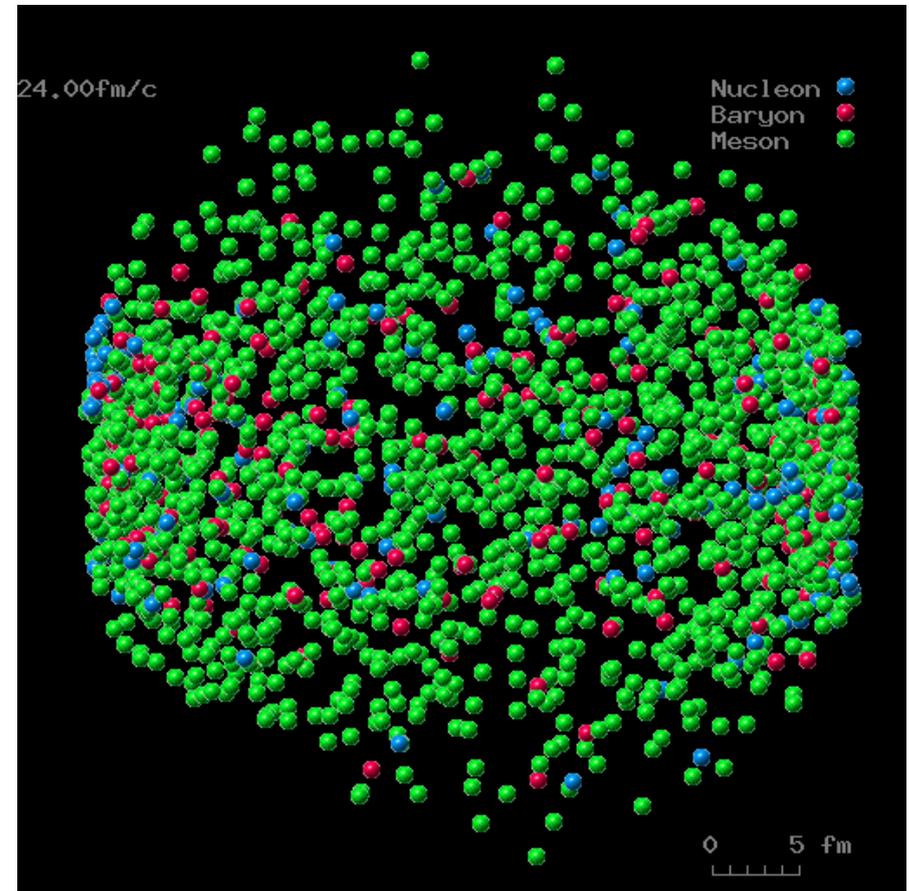
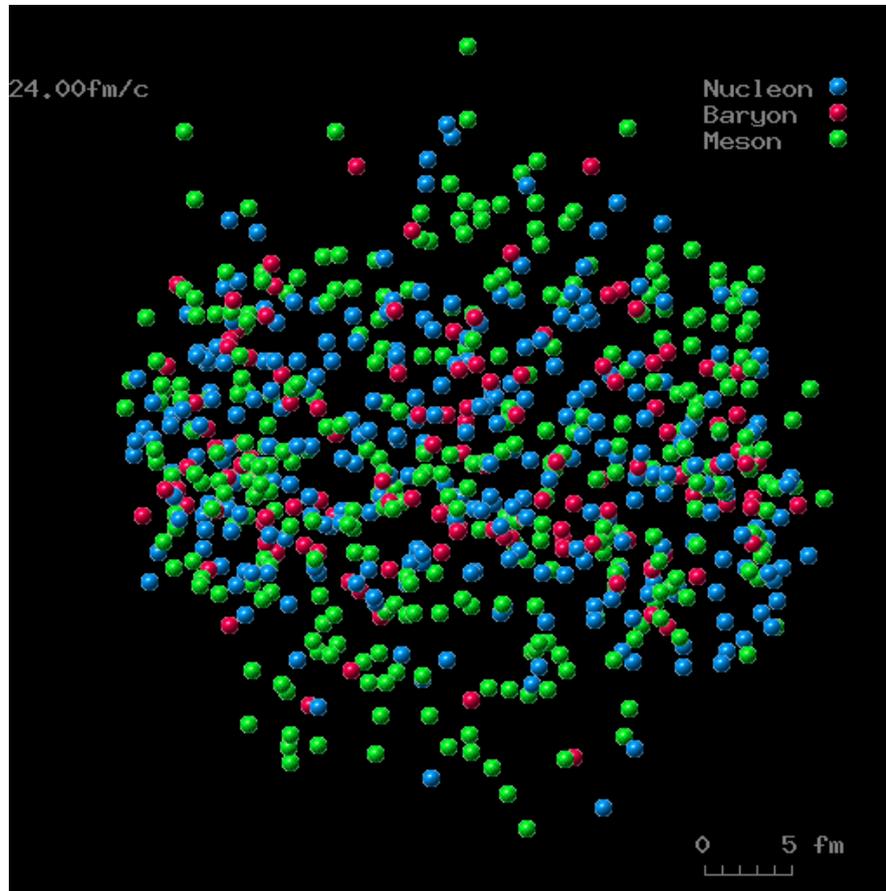
- Heavy-ion physicists wanted to create QGP for a long time ...
  - LBL-Bevalac: 800 A MeV
  - GSI-SIS: 1-2 A GeV
  - BNL-AGS (1987-): 10 A GeV
  - CERN-SPS (1987-): 160 A GeV
  - BNL-RHIC (2000-): 100+100 A GeV
  - CERN-LHC (2008-): 3 + 3 A TeV



# How do heavy-ion collisions look like ?

Au+Au, 10.6 A GeV

Pb+Pb, 158 A GeV



$$\sqrt{s_{NN}} \sim 5 \text{ GeV}$$

$$\sqrt{s_{NN}} \sim 20 \text{ GeV}$$

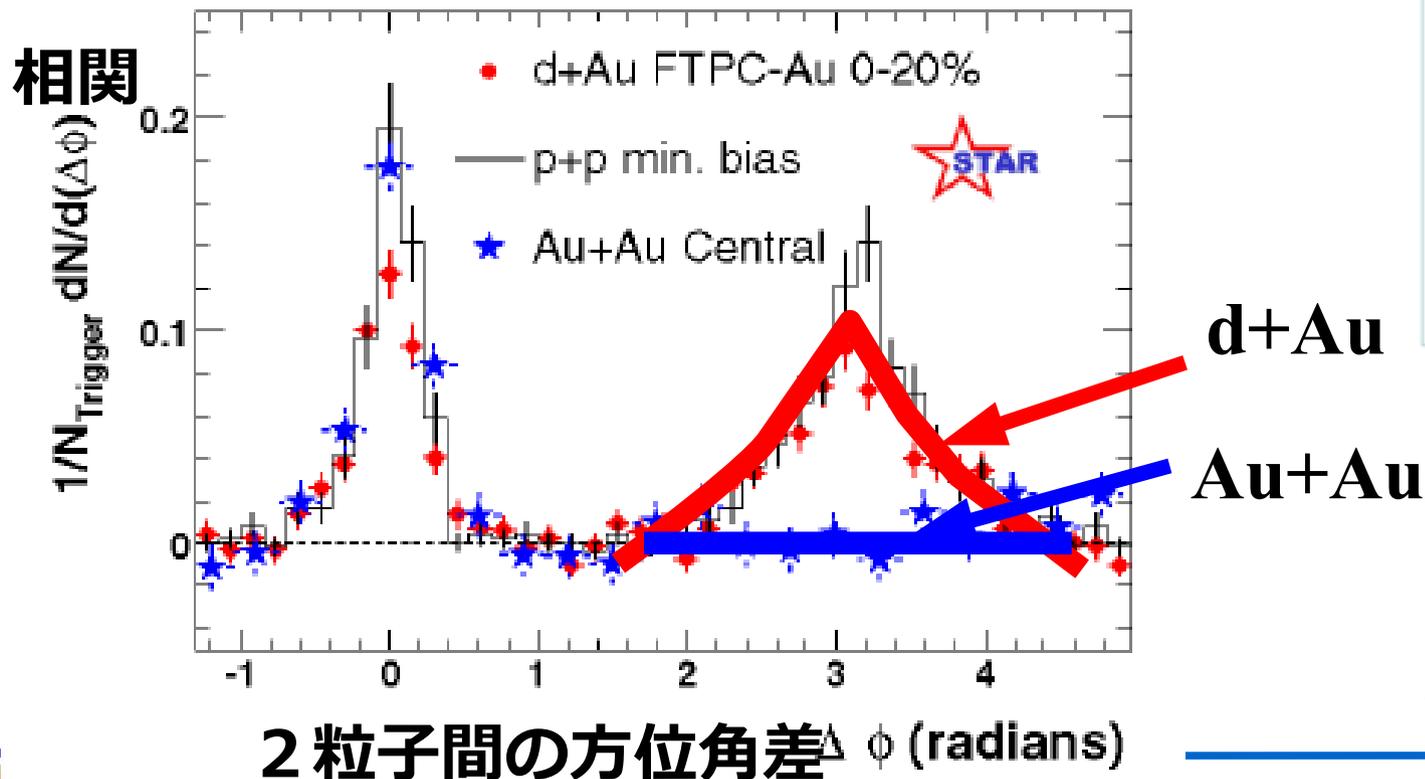
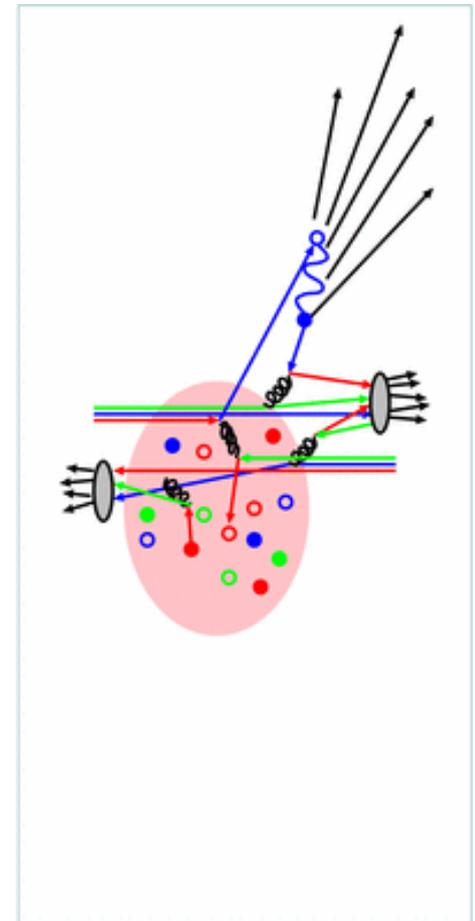
JAMming on the Web

<http://www.jcprg.org/jow/>

# クォーク・グルーオン・プラズマの発見 (実験)

## ■ QGP 中でのジェットのエネルギー損失

- 真空中ではパートン (クォーク、グルーオン) が激しく散乱 + ハドロン化 → 強い方位角 180 度相関
- QGP が作られると色電荷の分布によりパートンがエネルギーを失う → 後方での方位角相関の消失
- RHIC での実験で d+Au ではそのまま、Au+Au 衝突では後方相関が消失



STAR, white paper

# 有限バリオン密度での相転移

## ■ 重イオン衝突実験

- (RHIC や LHC よりも) 低い入射エネルギーでは高密度側の領域を通過  
→ 有限バリオン密度での QCD 相転移が起こっている可能性あり。

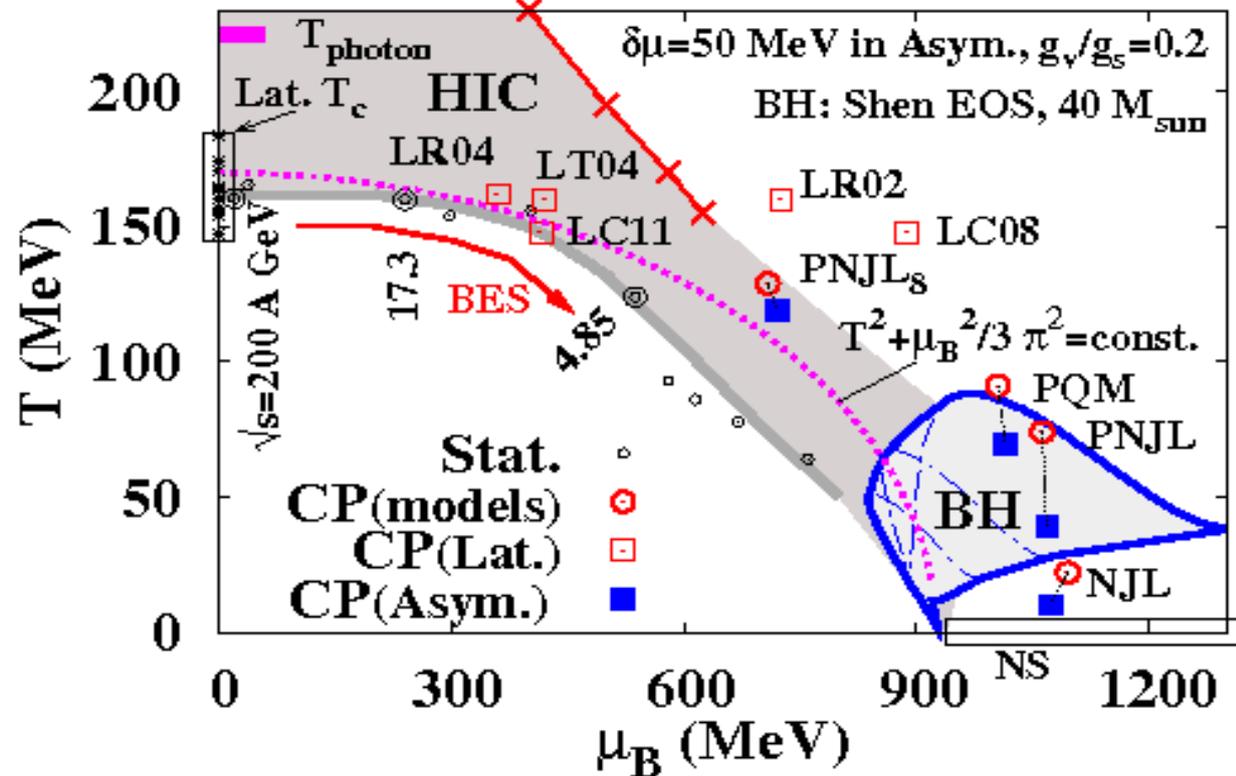
## ■ 格子 QCD 計算

- 符号問題のため、有限密度での精密計算は困難

## ■ 有効模型

E.g. Nambu-Jona-Lasini (NJL) 模型

- 低温では1次相転移の可能性あり  
→ QCD 臨界点
- 低温での相転移次数や臨界点の位置には大きな模型依存性



---

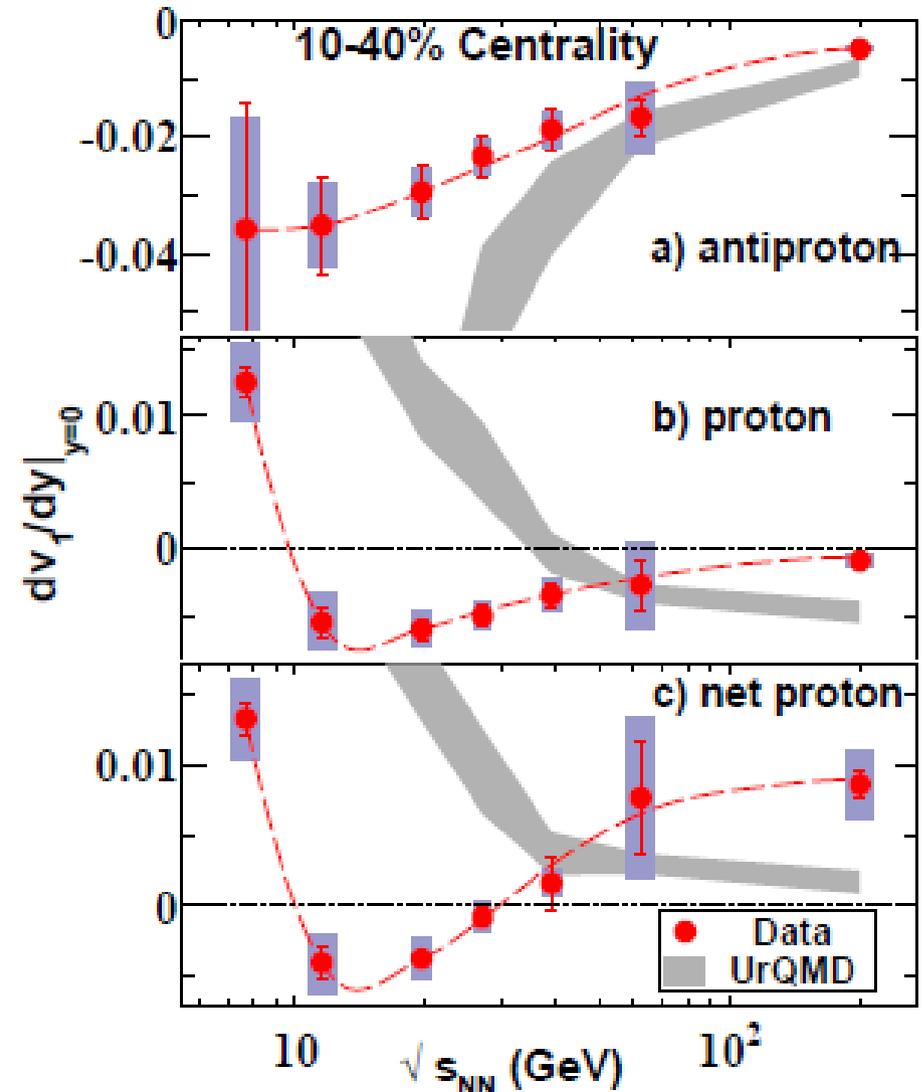
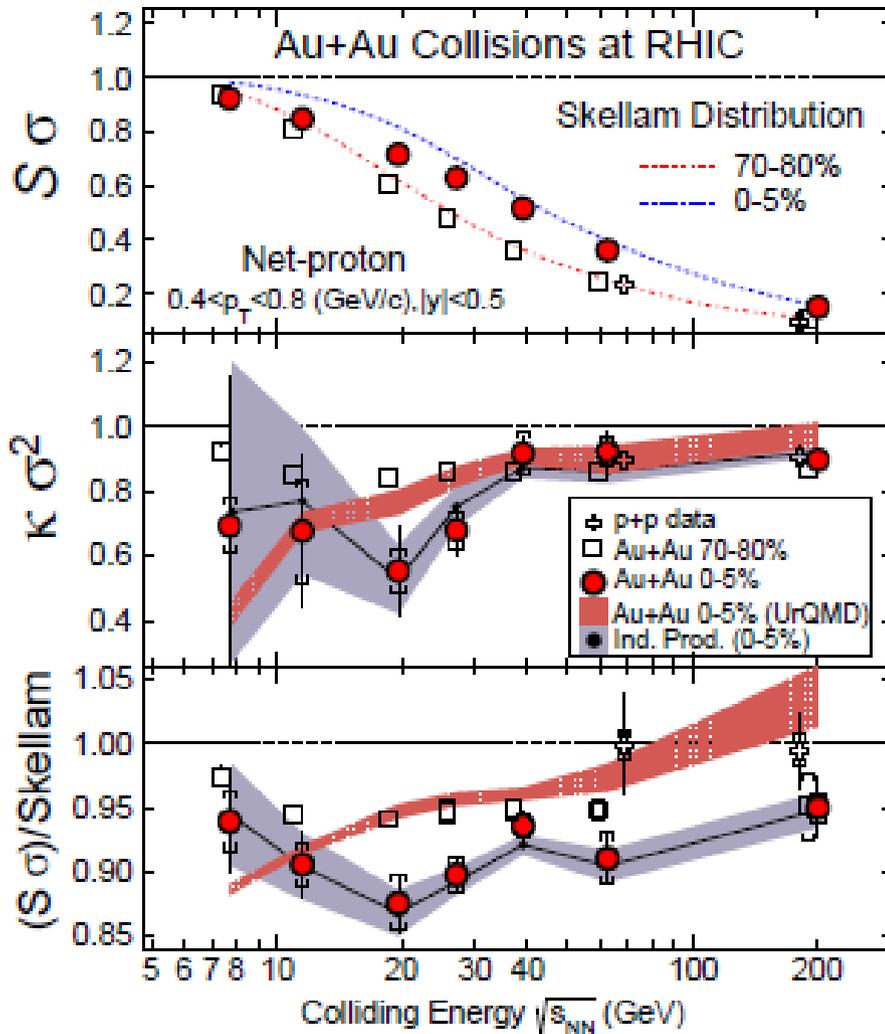
クォーク・グルーオン・プラズマは  
RHIC と LHC で (多分) 見つかった。  
精緻な QGP 物性研究や  
極端な状況下での新奇な現象探索が進んでいる。

しかし低密度での転移はクロスオーバー  
(真の相転移ではない)。

1次、あるいは2次の QCD 相転移を  
人類は見つけられるのだろうか？

# QCD 一次相転移は見たか？

- 衝突エネルギー関数として非単調性が見えている ( $\kappa\sigma^2$ ,  $dv_1/dy$ )

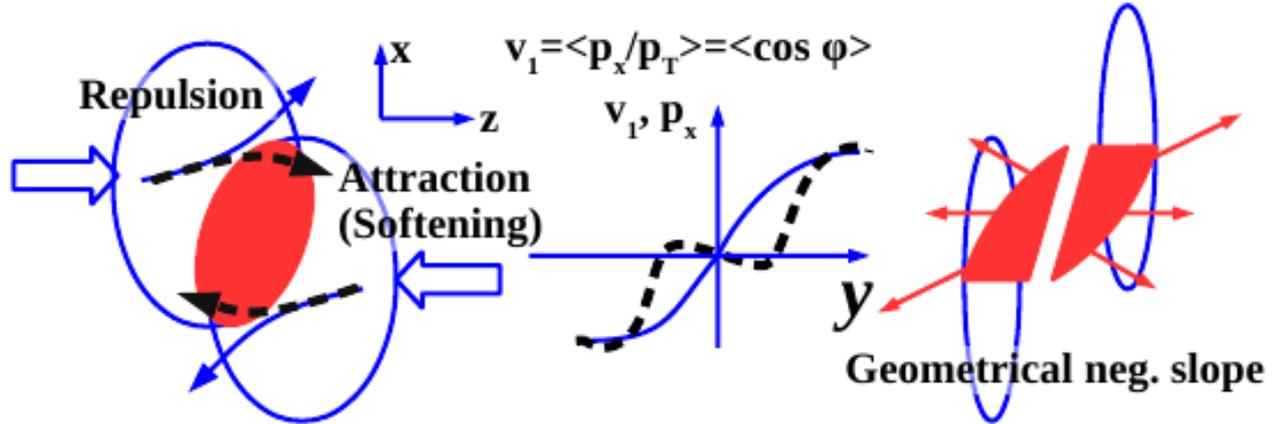


STAR Collab., PRL 112('14)032302.

STAR Collab., PRL 112('14)162301.

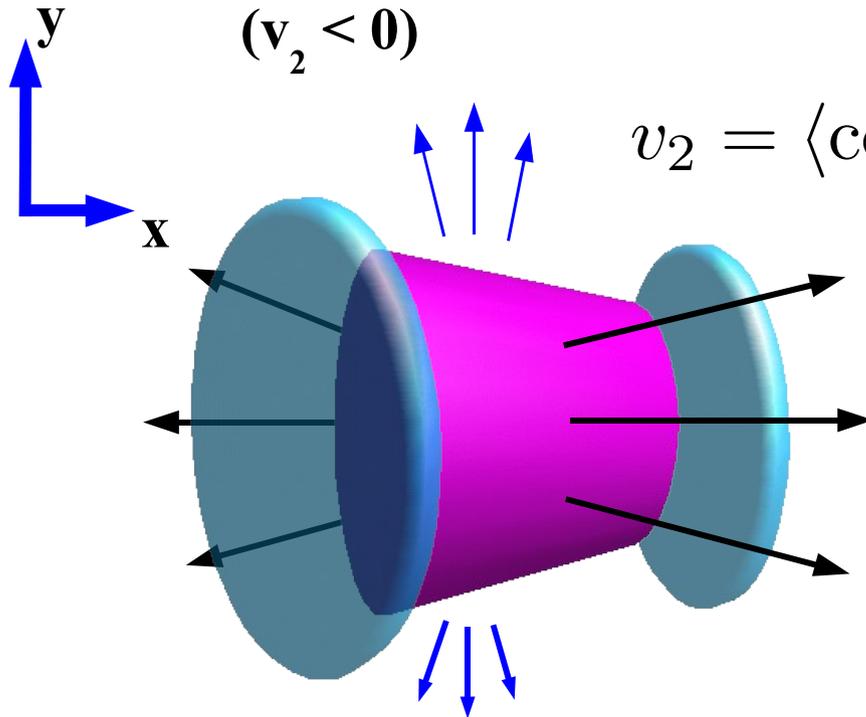
- Directed flow ( $v_1, \langle p_x \rangle$ ), Elliptic flow ( $v_2$ )

→ 衝突初期に作られ、高密度の状態方程式 (EOS) に敏感



Out-of-Plane Flow  
( $v_2 < 0$ )

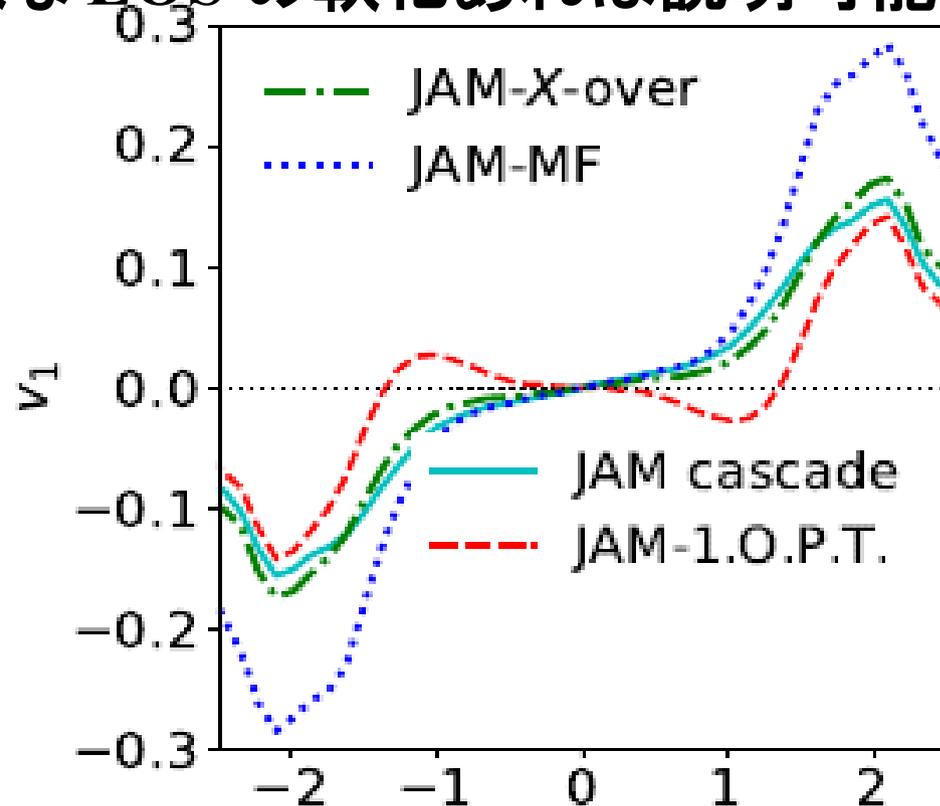
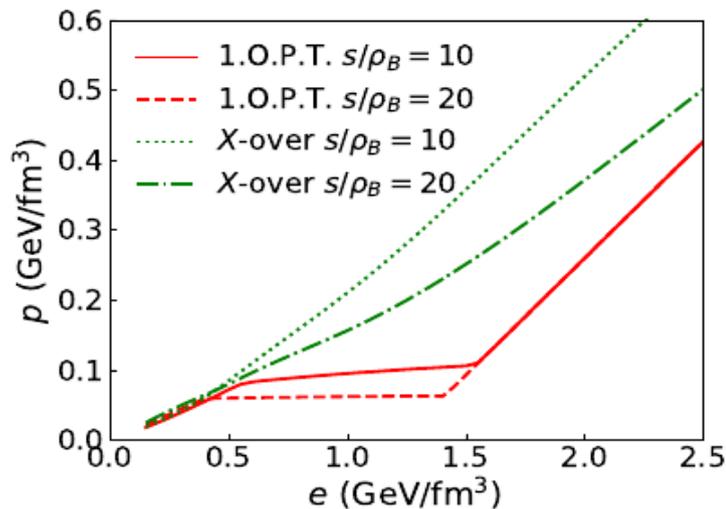
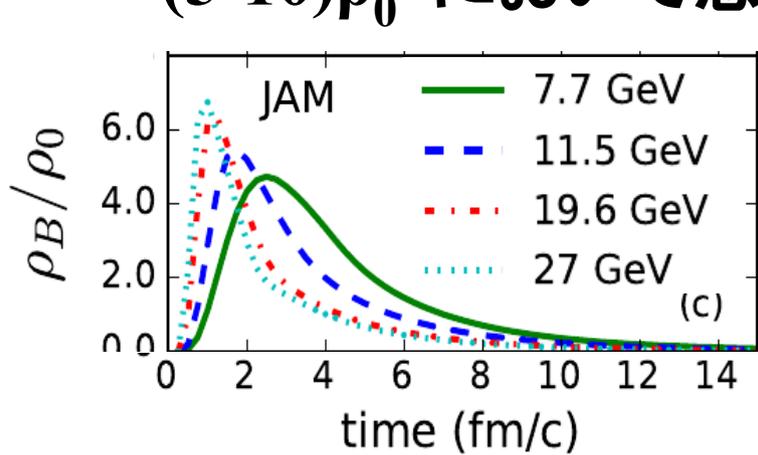
$$v_2 = \langle \cos 2\phi \rangle$$



In-Plane Flow  
( $v_2 > 0$ )

# 負のフローとEOSの軟化

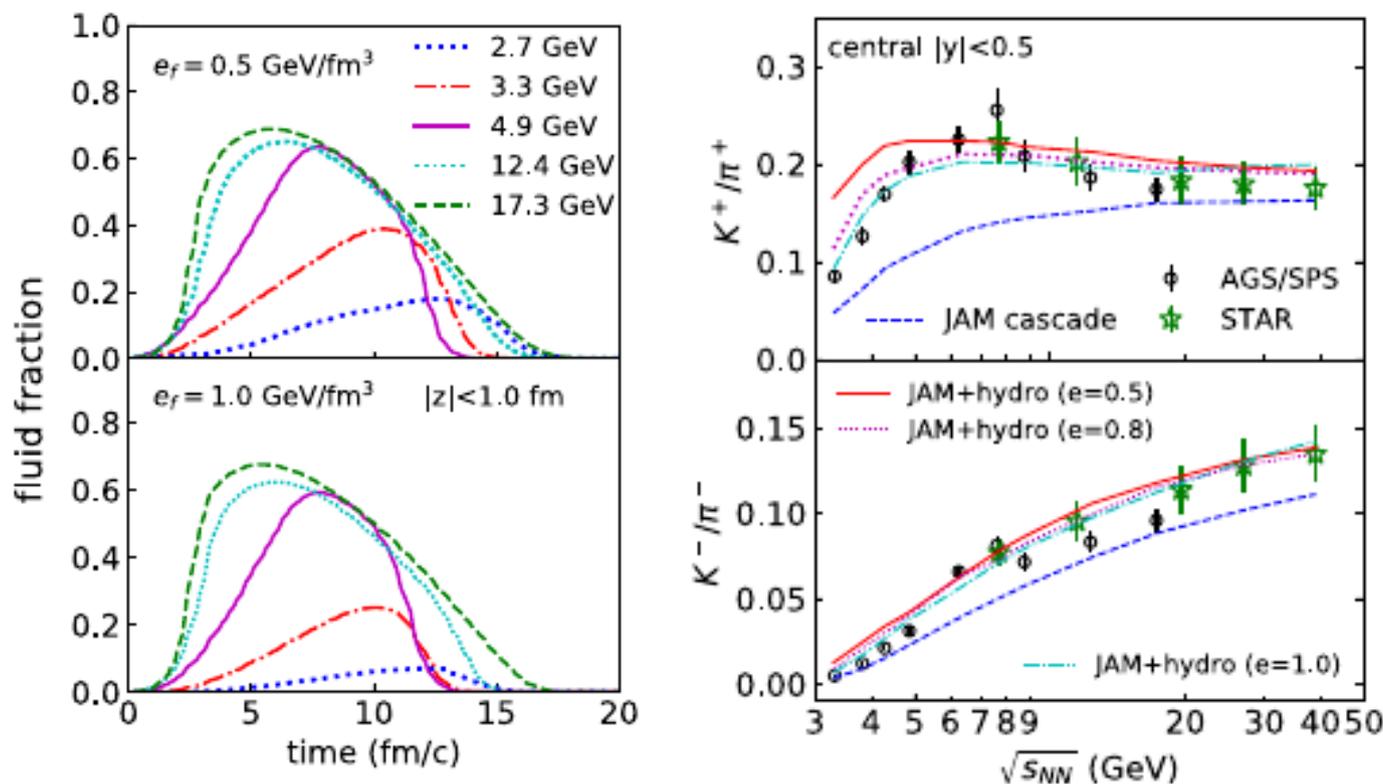
- ビリアル定理を使って任意のEOSを取り込めるように拡張した輸送モデルでの計算例
- $\sqrt{s_{NN}} = 11.5$  GeVで見られる負のフロー ( $dv_1/dy < 0$ )  
 →  $(5-10)\rho_0$  において急激なEOSの軟化あれば説明可能



*Y.Nara, H.Niemi, AO, H.Stoecker, PRC94('16)034906.*  
*Y. Nara, H. Niemi, AO, J. Steinheimer, X.-F. Luo,*  
*H. Stoecker, EPJA 54 ('18)18*

# 粒子・流体統合模型

- QGP 生成はどのエネルギー密度から始まる？
  - 粒子 (ハドロン) での輸送模型：低エネルギー・終状態で有効
  - 流体力学：高エネルギー・高温状態で有効
  - これらを組み合わせて切り替わるエネルギー密度を見てみよう。



*Y. Akamatsu et al.,  
PRC98('18)024909*

流体化(粒子化) エネルギー密度  $e_f \sim 1 \text{ GeV/fm}^3$  ( $e_p = 0.5 \text{ GeV/fm}^3$ )  
 のとき、データをよく説明

$(5-10)\rho_0$  で  $QCD$  相転移がありそう。

軟化が必要なことから (対称核物質では)  
一次相転移が想定される(?)

カイラル有効模型でも一次相転移が予想される。  
一方、連続的な転移を示唆する理論もあり、  
有限 (バリオン) 密度での相転移の次数はまだ不明。

ゼロバリオン密度での転移エネルギー密度は  
格子  $QCD$  計算から  $\varepsilon=0.5 \text{ GeV}/\text{fm}^3$  程度。

有限バリオン密度では  $\varepsilon=1 \text{ GeV}/\text{fm}^3$  程度か？

$J\text{-PARC}$  で重イオン衝突実験を行えば  
流体成分 ( $\sim QGP$ ) が作られているかもしれない。

---

# 中性子星で探る 高密度物質の状態方程式

# 連星中性子星合体

## ■ GW170817

*B. P. Abbott et al. (LIGO and Virgo)*  
*PRL 119, 161101 (2017)*

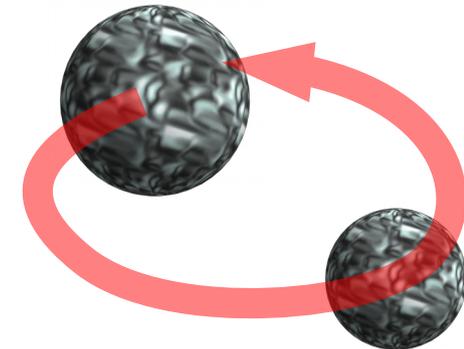
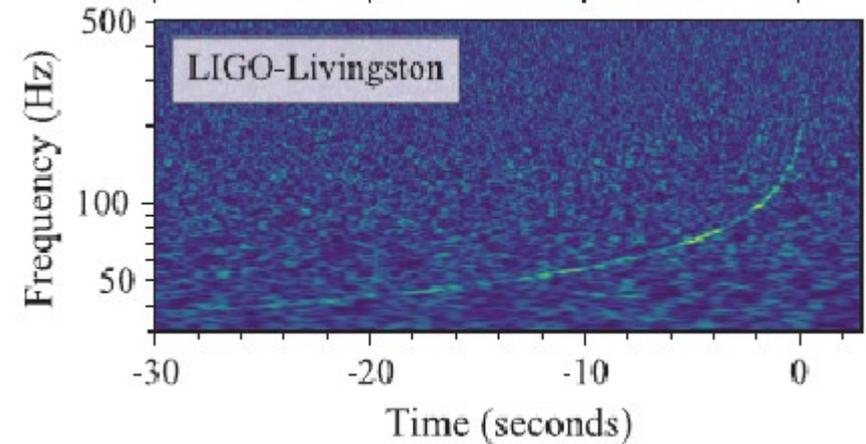
- 質量和  $M = 2.74^{+0.04}_{-0.01} M_{\odot}$
- それぞれの質量  $1.17\text{-}1.60 M_{\odot}$   
→ 連星中性子星合体  
(Binary Neutron Star Merger)
- Gamma Ray Burst (GRB170717A) が  
1.7 s 後に起こる。  
→ GRB の起源 ( の一つ ) を特定

● inspiral ( 徐々に近づいていく段階 ) における振動数変化を観測  
→ 中性子星半径を制限

- 放出された物質の速度から中性子星の最大質量を制限  
*M. Shibata et al., 1710.07579*

$$M_{\max} = (2.15\text{-}2.25) M_{\odot} \text{ (c.f. ハイペロンパズル)}$$

- r- 過程元素生成の示唆



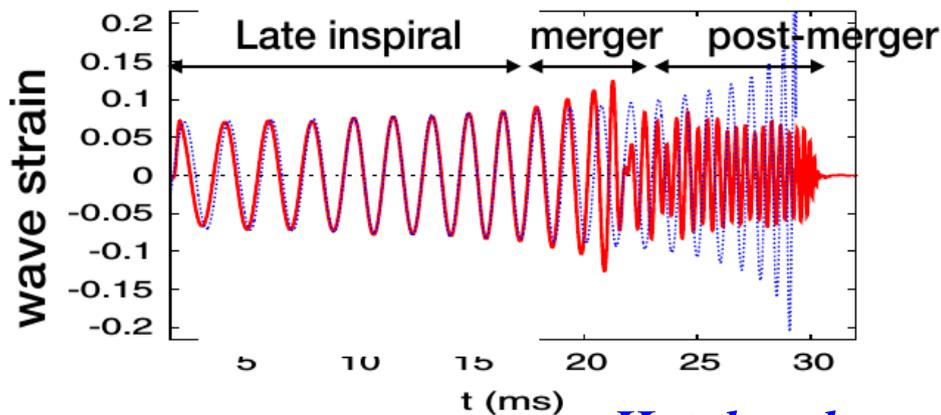
# 重力波から中性子星半径へ

## ■ Inspiral phase での重力波 → 潮汐変形により位相が進む

- Tidal deformability  $Q_{ij} = -\lambda E_{ij}$  ,  $\lambda = \frac{\Lambda}{G} (GM/c^2)^5$

- 大きな半径 (硬い EOS) → 変形しやすい → 大きな  $\Lambda$

- 中性子星半径は対称エネルギーパラメータ ( $S_0, L$ ) に大きく依存  
→ 高次のパラメータの影響は？



*Hotokezaka*

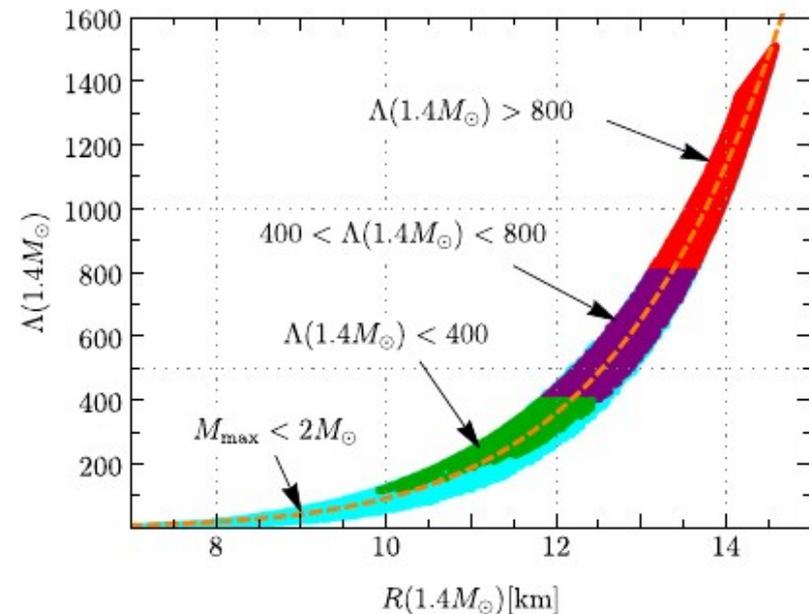
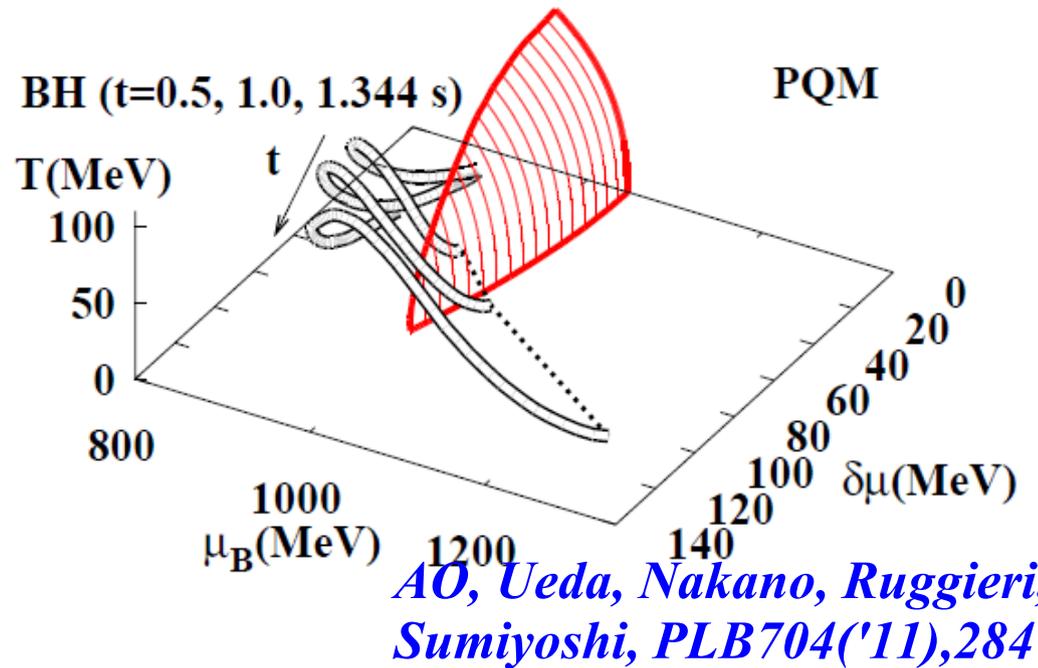
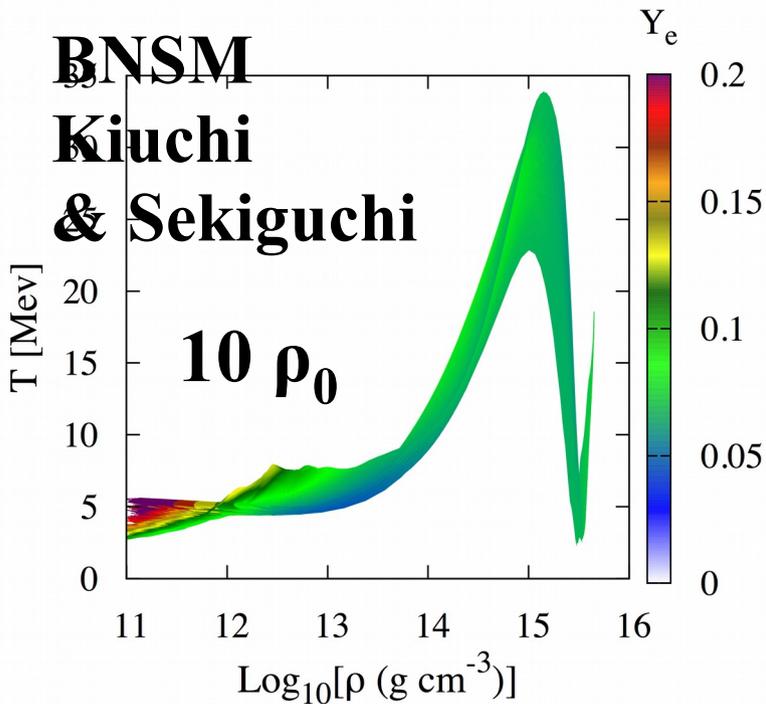
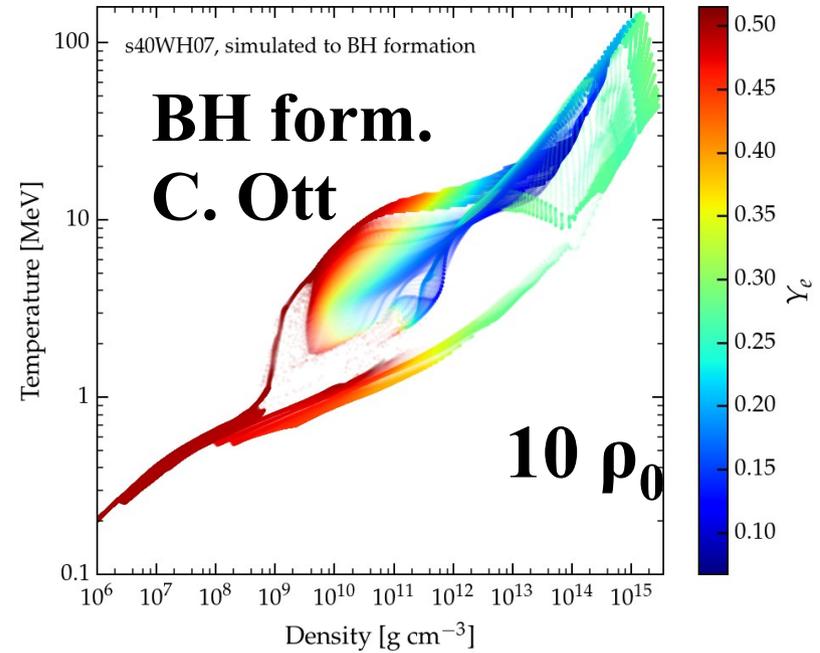
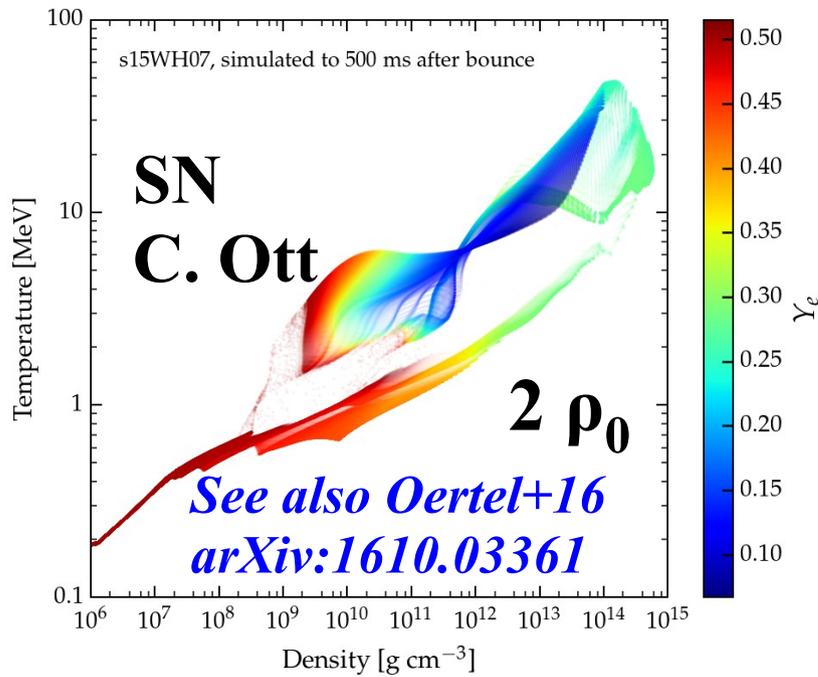


FIG. 2. The  $\Lambda$  values for stars with  $M = 1.4 M_{\odot}$  as functions of the corresponding radius. The color coding follows Fig. 1, while the orange dashed line  $\Lambda = 2.88 \times 10^{-6} (R/\text{km})^{7.5}$  has been included just to guide the eye.

(R-A) E. Annala+, PRL120('18)172703

# $(\rho, T, Y_e)$ during SN, BH formation, BNSM



# 中性子星の構造

- 中性子星の内側は見えないのに、  
どうやって組成がわかるのですか？  
→ 質量や半径からある程度推測できます。

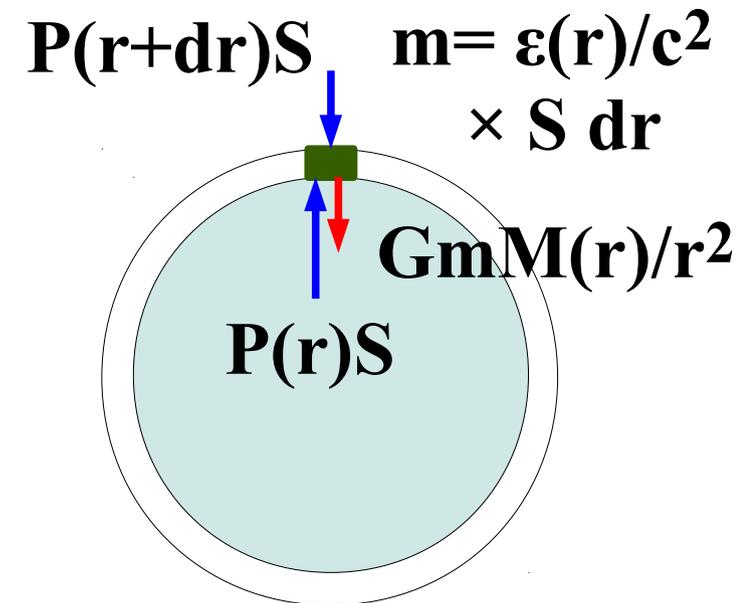
- 静水圧平衡  
小さな箱を考えて、  
外の圧力 + 重力 = 内の圧力

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M \epsilon / c^2}{r^2}$$

- Tolman-Oppenheimer-Volkoff 方程式  
(一般相対論補正を含む静水圧平衡)

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{(\epsilon/c^2 + P/c^2)(M + 4\pi r^3 P/c^2)}{r^2(1 - 2GM/rc^2)}$$

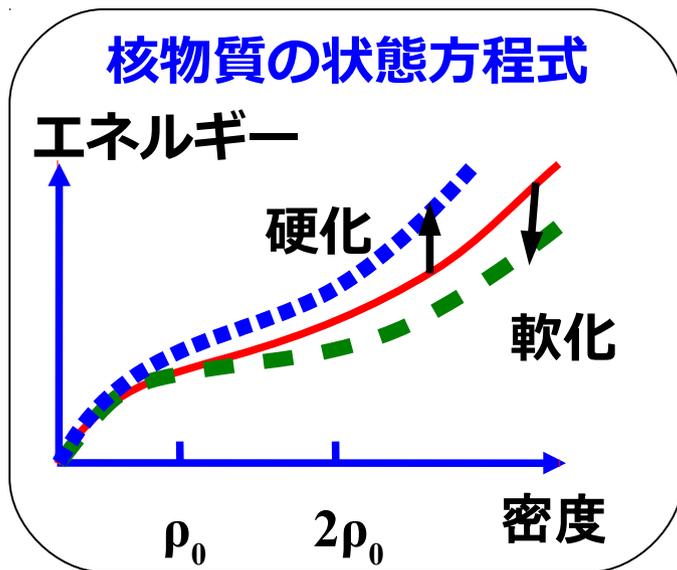
$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon / c^2, \quad P = P(\epsilon) \quad (\text{EOS})$$



$M(r)$ :  $r$  までの質量  
 $\epsilon(r)$ : エネルギー密度  
 $P(r)$ : 圧力

# 状態方程式とMR(質量-半径)曲線

- 状態方程式が与えられると質量と半径の関係 (MR 曲線) が一意的に求まる。  
→ 中性子星の MR 曲線は相互作用モデルを判別する

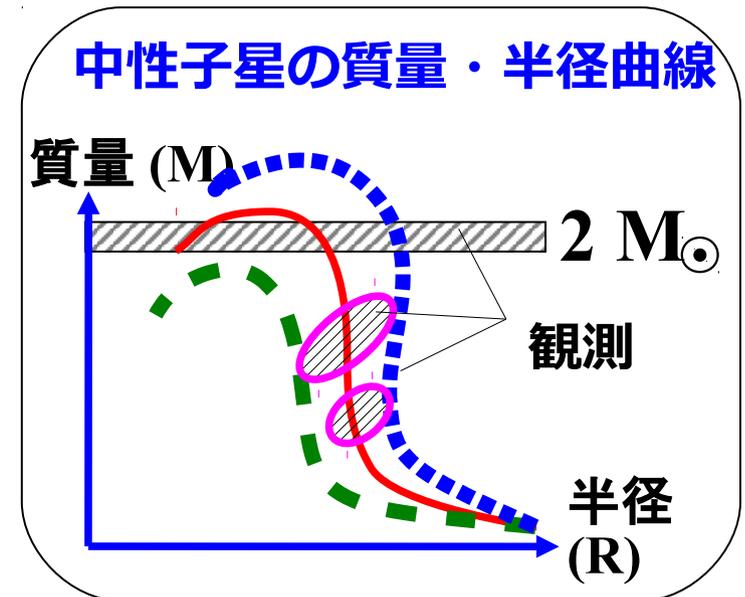


予言

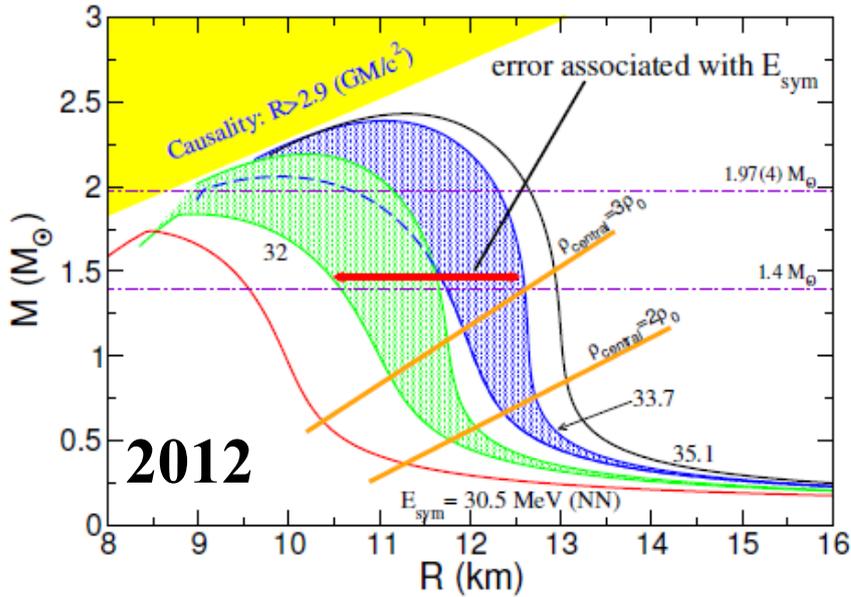
TOV 方程式

$$\frac{dP}{dr} \simeq - \frac{GM \varepsilon / c^2}{r^2}$$

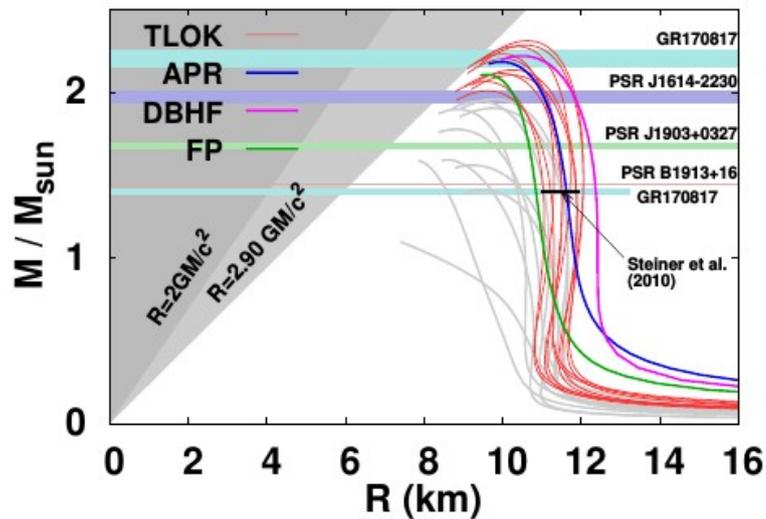
検証



# 中性子星のMR 曲線

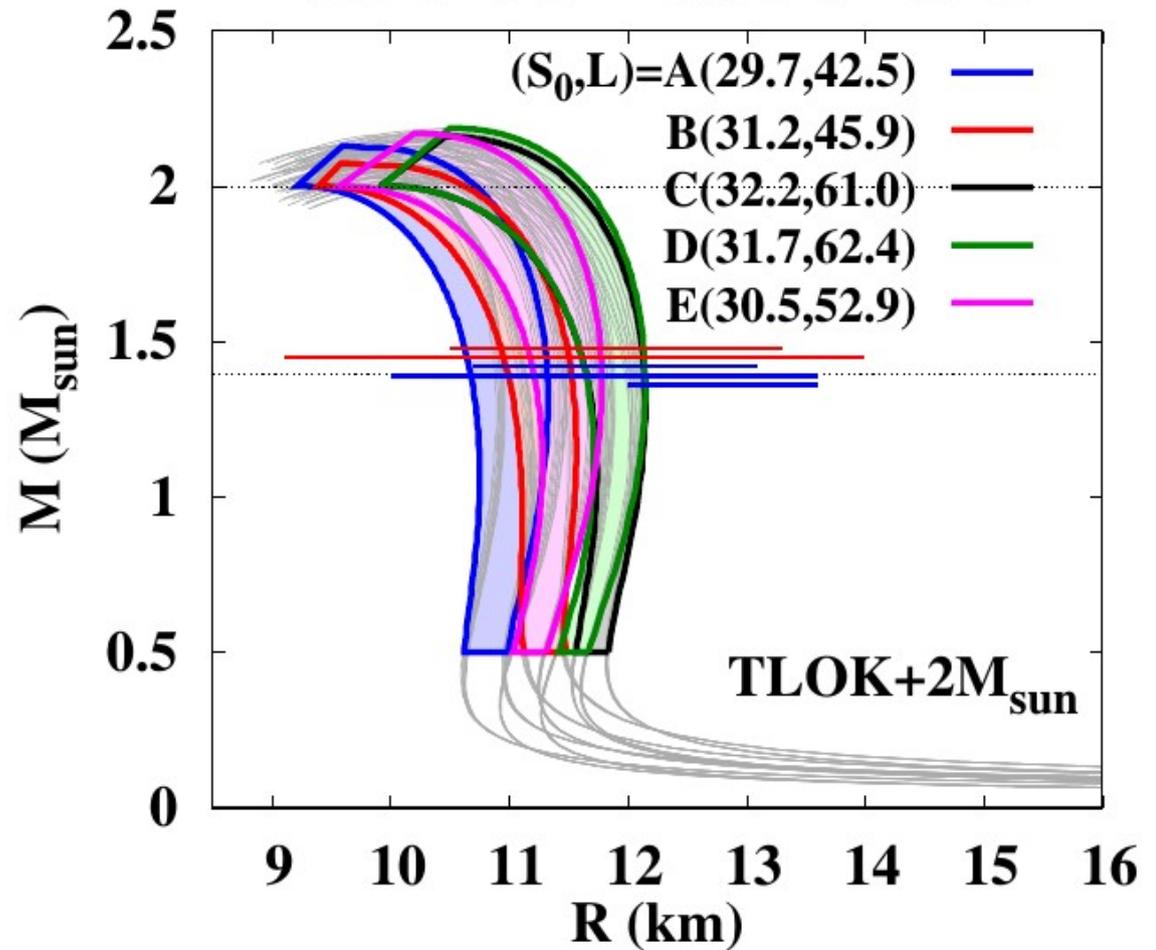


*Gandolfi, Carlson, Reddy,  
PRC85('12) 032801.*



2018

## Neutron Star Mass and Radius



*Based on Tews et al. ('17); not yet published*

# 質量公式と状態方程式

- $A \rightarrow \infty$  における核子あたりのエネルギー  
(クーロンエネルギーは無視)

$$E = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{-B(A, Z)}{A} = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ -a_v + a_s A^{-1/3} + a_a \frac{(N - Z)^2}{A^2} - a_p \frac{\delta_p}{A^{\gamma+1}} \right]$$

$$= -a_v + a_a \delta^2$$

- 密度と非対称度の関数と考えると、  
核子あたりのエネルギーが最小となる密度が実現する

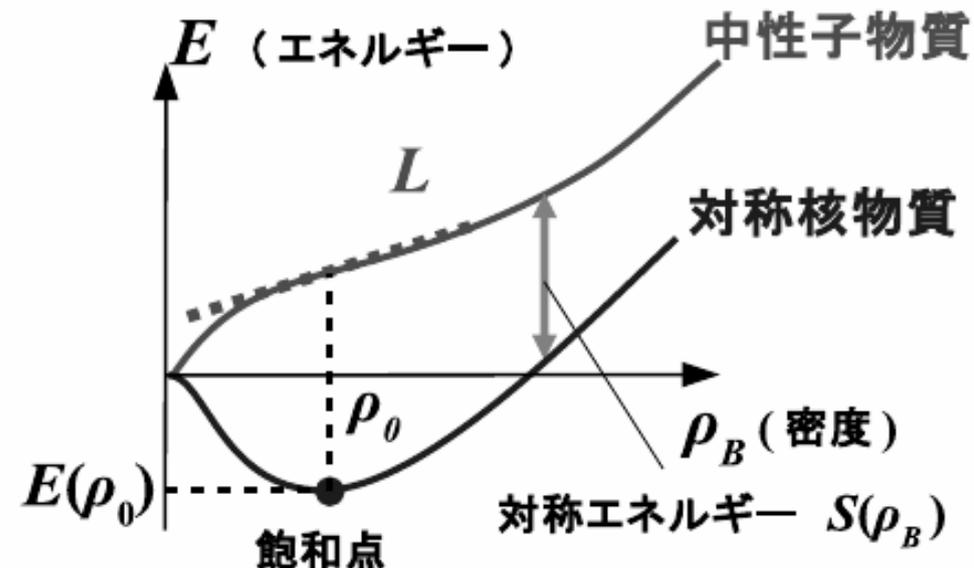
$$E = E(\rho_B, \delta)$$

→ 核物質の飽和性

- 飽和点

$$(\rho_0, E_0) \simeq (0.16 \text{ fm}^{-3}, -16 \text{ MeV})$$

状態方程式 (EOS)



# 対称エネルギー

## ■ 非対称核物質 ( $N \neq Z$ ) のエネルギー

$$E(\rho_B, \delta) = E(\rho_B, \delta = 0) + S(\rho_B)\delta^2 \quad P = \rho^2 \partial E / \partial \rho$$

## ■ 対称エネルギー

$$S(\rho_B) = E(\text{中性子物質}) - E(\text{対称核物質})$$

## ■ 飽和密度でのパラメータ

- 非圧縮率  $K \equiv 9 \rho_0^2 \left. \frac{\partial^2 E(\rho_B)}{\partial \rho_B^2} \right|_{\rho_B = \rho_0}$

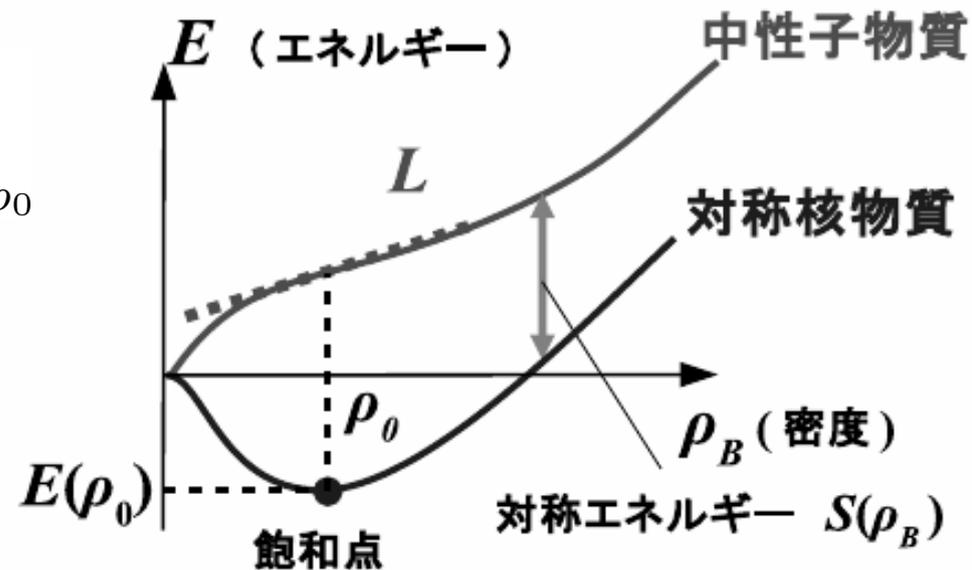
- 対称エネルギーの値と微分

$$S_0 \equiv S(\rho_0), \quad L \equiv 3 \rho_0 \left. \frac{dS(\rho_B)}{d\rho_B} \right|_{\rho_B = \rho_0}$$

$$E(\rho_B, \delta) \simeq E_0 + S_0 \delta^2 + \frac{L}{3} x \delta^2 + \frac{K}{18} x^2$$

$$(x = (\rho_B - \rho_0) / \rho_0)$$

状態方程式 (EOS)

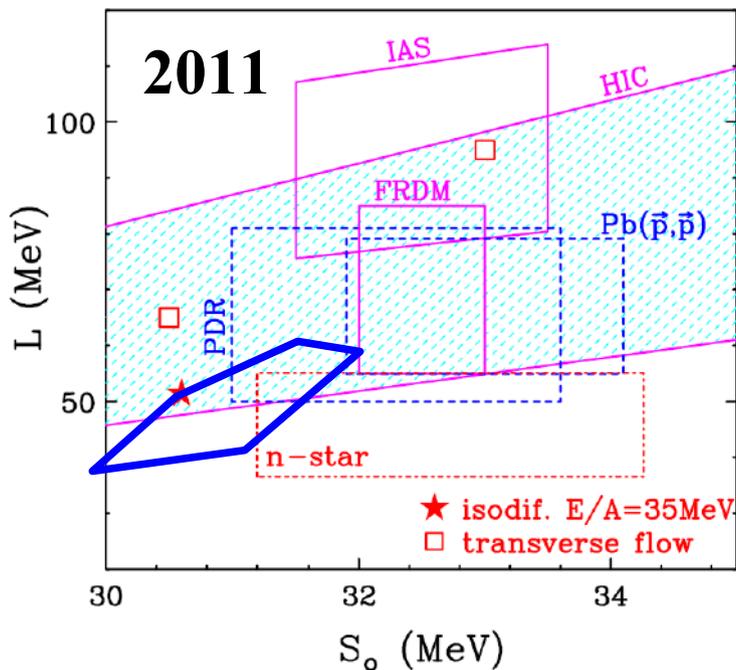


# Unitary Gas Constraint on Symmetry Energy Parameters

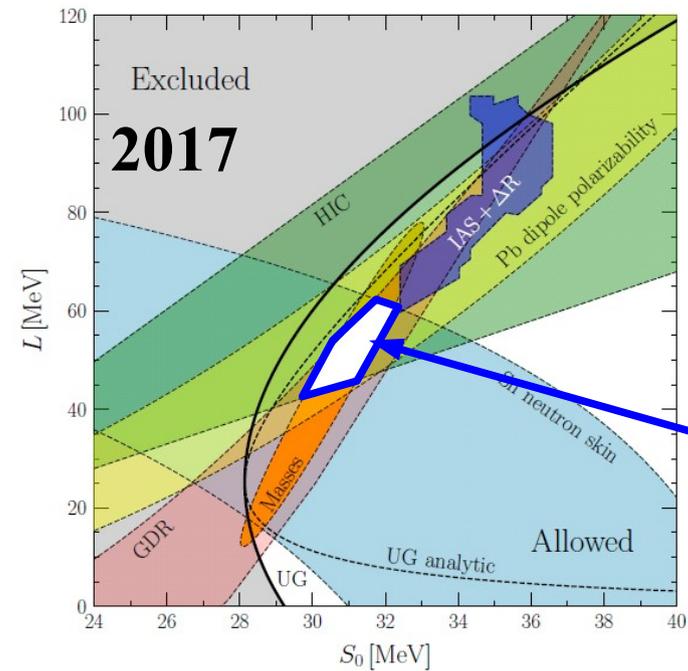
## ■ 対称エネルギー

- 様々な実験データを用いた絞り込み  
(例: 不安定核衝突からの  $\pi$  生成比、 $S\pi$ RIT 実験、Ikeno+('16))
- 「ユニタリーガスが中性子物質エネルギーの下限を与える」との conjecture から対称エネルギーパラメータ ( $S_0, L$ ) を制限

*I. Tews, J.M.Lattimer, AO, E.E.Kolomeitsev (TLOK), ApJ 848 ('17)105*



*Tsang et al. ('12): NuSYM 2011*



五角形

*Lattimer, Lim ('13), Lattimer, Steiner ('14)  
Tews, Lattimer, AO, Kolomeitsev ('17)*

# 対称エネルギーパラメータから状態方程式へ

## ■ 対称エネルギー (中性子物質と対称核物質のエネルギー差)

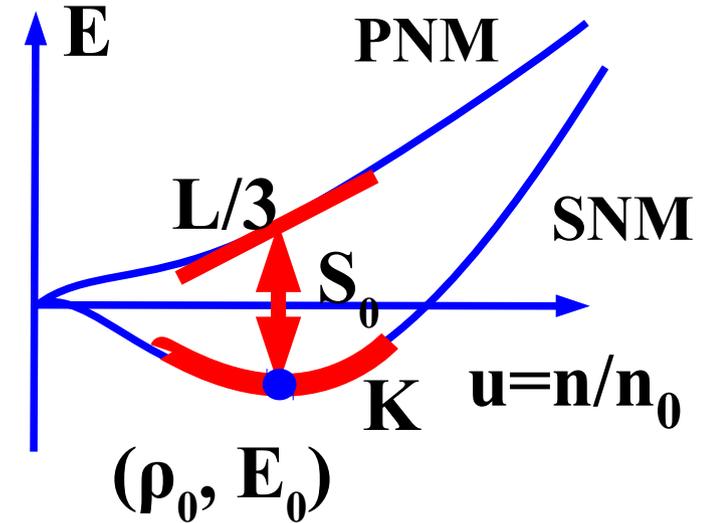
### ● 飽和点 & 対称エネルギーパラメータ

$$E_{\text{NM}}(u, \alpha) = E_{\text{SNM}}(u) + \alpha^2 S(u)$$

$$E_{\text{SNM}}(u) \simeq E_0 + \frac{K_0}{18}(u-1)^2 + \frac{Q_0}{162}(u-1)^3$$

$$S(u) \simeq S_0 + \frac{L}{3}(u-1) + \frac{K_s}{18}(u-1)^2 + \frac{Q_s}{162}(u-1)^3$$

$$(u = n/n_0, \alpha = (n_n - n_p)/n)$$



## ■ フェルミ運動量展開 $k_F \propto u^{1/3}$

$$E_{\text{SNM}}(u) \simeq T_0 u^{2/3} + \underbrace{a_0 u}_{\text{2体力}} + \underbrace{b_0 u^{4/3}}_{\text{密度依存力}} + \underbrace{c_0 u^{5/3}}_{\text{密度依存力}} + \underbrace{d_0 u^2}_{\text{密度依存力}}$$

$$S(u) \simeq T_s u^{2/3} + \underbrace{a_s u}_{\text{2体力}} + \underbrace{b_s u^{4/3}}_{\text{密度依存力}} + \underbrace{c_s u^{5/3}}_{\text{密度依存力}} + \underbrace{d_s u^2}_{\text{密度依存力}}$$

運動 E.

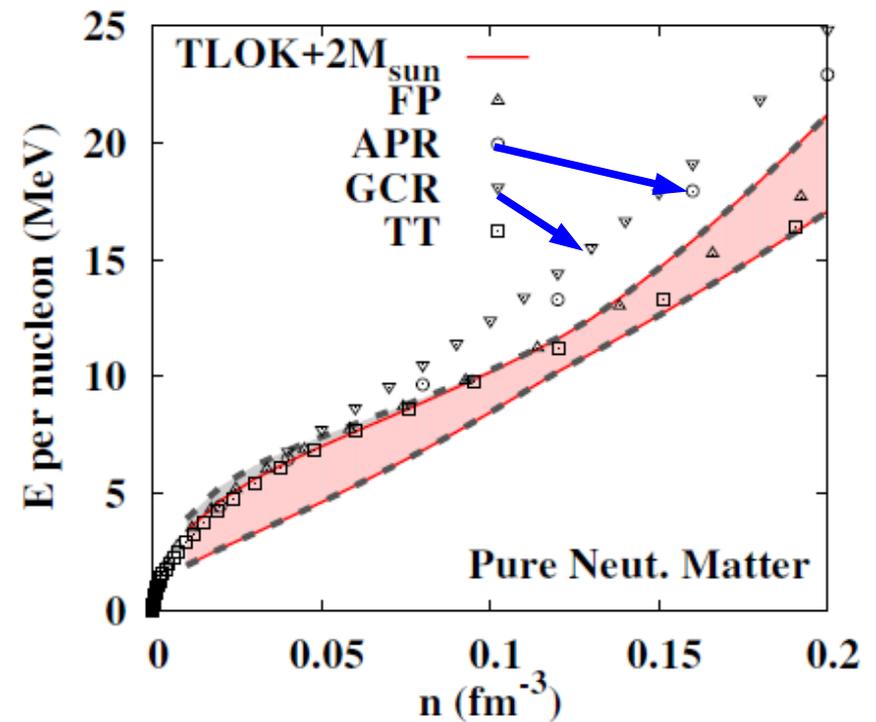
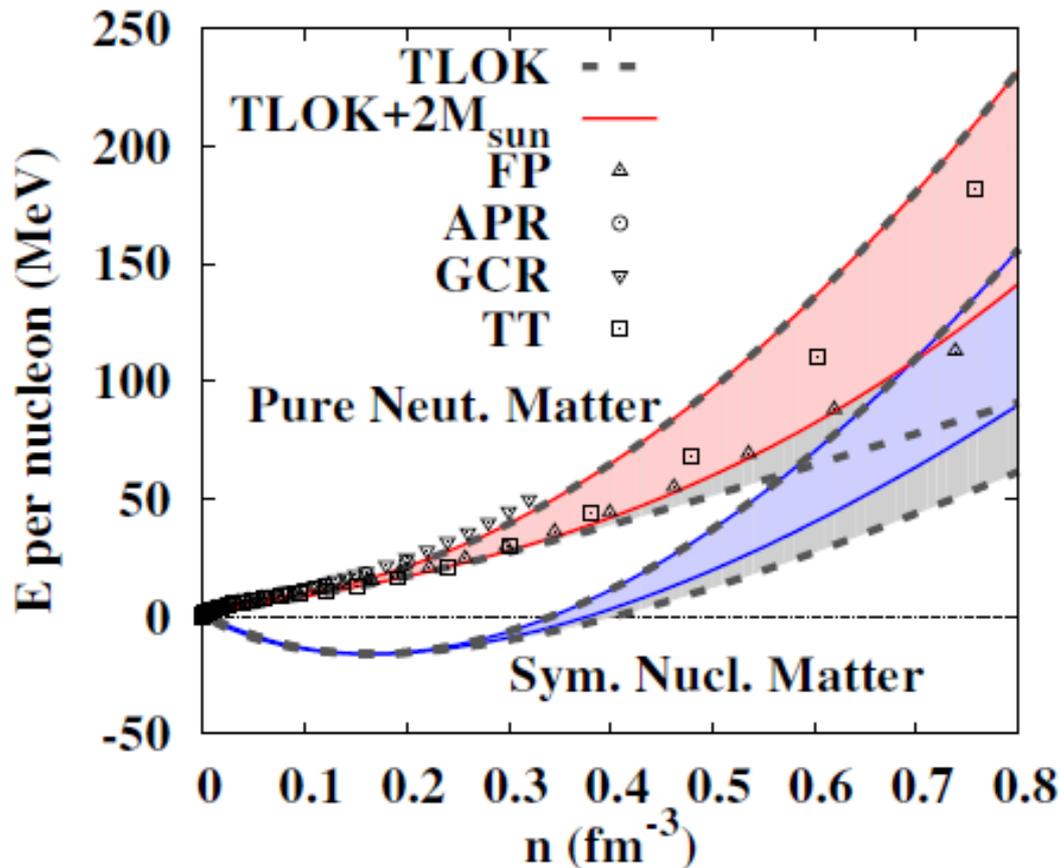
2体力

密度依存力

有効質量  $m^*$

# $TLOK+2M_{\odot}$ 条件に基づく状態方程式

- $2M_{\odot}$  条件を加えることで EOS の下限があがる
- 変分計算 (Friedman-Pandharipande, Togashi-Takano) と無矛盾
- APR, GCR 状態方程式は  $S_0$  が 5 角形の外  
→ 第一原理計算の選別へ (?)



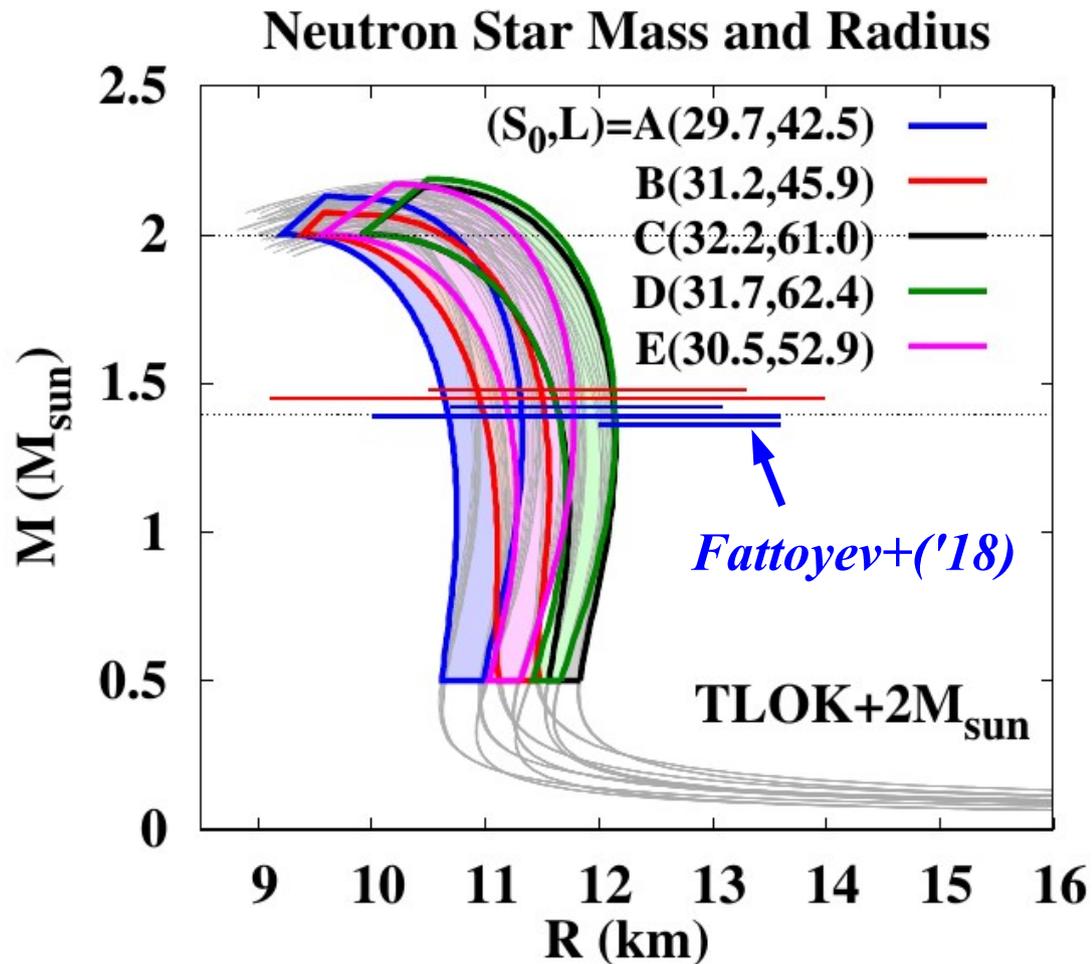
*OKLTW, in prog.*

# Neutron Star MR curve

- TLOK +  $2 M_{\odot}$  条件  $\rightarrow R_{1.4}=(10.6-12.2)$  km
- 他の多くの結果と consistent
  - LIGO-Virgo (Tidal deformability  $\Lambda$  from BNSM)
    - (10.5-13.3) km *Abbott+('18b)*
    - (9.1-14.0) km *De+('18) ( $\Lambda$ )*
  - Theoretical Estimates
    - (10.7-13.1) km  
*Lattimer+, PRep.621('16)127*
    - (10.0-13.6) km  
*Annala+, PRL120('18)172703*
    - (9-13.6) km  
*Tews+, PRC98 ('18)045804*

(12.0-13.6) km  
*F.J.Fattoyev+(PREX),  
PRL120 ('18)172702*

*Parity violating obs.  
Large error bar*



原子核の情報 ( $+2M_{\odot}$ ) から直接的に表した

中性子星物質状態方程式は  
重力波からの半径制限と無矛盾。

$(2-3)\rho_0$  までは滑らかな外挿が成り立っているようである。

ただし、こうした EOS は  
実際に高密度状態が作られる実験 (e.g. 重イオン衝突)、  
あるいは第一原理計算 (e.g. 格子 QCD 計算)  
で確かめられていない。

さらに摂動論的 QCD の結果につなげられていない。

# まとめ

- 高温・高密度核物質の理解が大きく進みつつある
  - 重イオン衝突・対称エネルギー・中性子星・重力波
  - 進みつつあるとはいえ、まだまだ「未開の沃野」
- 高温・高密度核物質の理解に必要な理論の枠組み
  - 高エネルギー重イオン衝突における輸送理論（輸送模型、流体力学）
  - 有限温度・密度における場の理論（松原和、摂動論）
  - QCD 有効模型における相転移と相図（NJL 模型を例として）
  - 有限温度・密度格子 QCD と符号問題
  - （バリオン多体系としての状態方程式を求める多体手法、中性子星・中性子星合体の性質 → 他の講義でお願い）
- 原子核基礎論 B 後半（大西担当分）では、これらの内容について講義します。

# レポート問題 (Sec. 6)

- 大西担当分全体で半分程度解いて提出してください。  
[ 前期 ( 基礎論 A ) と同様 ]
- ✕切は2週間後 (12/15 の講義が始まるまで)
- Report 6-1 有限温度相転移の場合と同様に、有限密度での相転移が記述できるかどうか、確かめてみよう。  
massless free fermion に対して、粒子からの圧力は

$$P_F^{(\text{particle})} / d_F = \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{90} T^4 + \frac{\mu_F^2 T^2}{24} + \frac{\mu_F^4}{48\pi^2} \quad (d_Q = 4N_c N_f, d_N = 8)$$

と与えられる。  $d_F$  は fermion 自由度、  $\mu_F$  は化学ポテンシャル。

$\mu_N = N_c \mu_Q$  であること、有限温度の場合と同様にクォーク物質の圧力には真空からの補正が加わることに注意して、クォーク物質・核物質 ( 質量ゼロのクォーク気体・核子気体とする ) の圧力を  $\mu_Q$  の関数として表わせ。相転移は起こるか？ 起こるとすればそのときの  $\mu_Q$  を求めよ。

## レポート問題 (Sec. 6)(cont.)

- Report 6-2 (講義で紹介した場合よりさらに) 簡単な状態方程式モデルを考えよう。核子あたりのエネルギーが

$$E = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} + \alpha \frac{\rho}{\rho_0} + \beta \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma$$
$$= T_0 u^{2/3} + \alpha u + \beta u^\gamma \quad (u = \rho/\rho_0)$$

と与えられるとする。

$\gamma=7/6, 4/3, 2$  の場合、飽和密度  $\rho_0=0.16 \text{ fm}^{-3}$ 、飽和エネルギー  $E_0 = -16 \text{ MeV}$  を再現するようにパラメータ  $\alpha, \beta$  を求めよ。またこの時に非圧縮率  $K$  の値を求めよ。

現象論的には  $K \sim 230 \text{ MeV}$  と知られている。 $\gamma$  の値はどれが適当であるか？

( $T_0$  は飽和密度の対称核物質における平均運動エネルギーであり、この問題の条件では  $T_0=22.13 \text{ MeV}$  である。)

# レポート問題 (Sec. 6)(cont.)

- Report 6-3 (とても面倒くさい問題です。分子としては数えますが、分母からは外します。)

簡単な状態方程式で Tolman-Oppenheimer-Volkoff 方程式

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{(\varepsilon + P)(M + 4\pi r^3 P)}{r^2(1 - 2GM/r)}, \quad \frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon, \quad P = P(\varepsilon) \text{ (EOS)}$$

を解き、中性子星の質量 - 半径曲線 (MR 曲線) を求めてみよう。

次の3つの EOS について中心密度を変化させ、圧力がゼロとなる半径、および最大質量を求めよ。

$$(1) P = \varepsilon \text{ (causal EOS)}, \quad (2) P = \frac{\varepsilon}{3} \text{ (massless free particle EOS)},$$

$$(3) E/A = m + T_0 u^{2/3} \text{ (non-rel. free nucleon, } P = \rho^2 \frac{\partial(E/A)}{\partial \rho} \text{)}$$

数値は 次のもの (原子核基礎論 A, Report 1-2) で与えたものを利用してよい。

$$\frac{GM_N^2}{\hbar c} = 5.9 \times 10^{-39}, \quad M_\odot = 1.9884 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad \hbar c = 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm},$$

$$m = 939 \text{ MeV}/c^2 = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}, \quad r_0 = 1.07 \text{ fm}$$