原子核基礎論B

京大基研　大西　明

Akira Ohnishi (YITP, Kyoto U.)

1. 原子核の集団運動とその微視的理解（3コマ）
2. 原子核反応論基礎（1コマ）
3. 核融合反応（1コマ）
4. 核分裂：現象論と微視的理論（1コマ）
5. ニホニウムと超重元素の物理（1コマ）　萩野

6. 高温・高密度核物質概観（1コマ）
7. 高エネルギー重イオン衝突（2コマ）
8. 有限温度・密度における場の理論入門（2コマ）
9. QCD 有効模型における相転移と相図（1コマ）
10. 有限温度・密度格子 QCD と符号問題（1コマ）　大西

Field Theory at Finite T & ρ
– Short Course –

経路積分

- 量子力学での経路積分 (Path Integral)
  - 時刻 t_i に位置 q_i にいた粒子が時刻 t_f に位置 q_f に到着する振幅

$$S_{fi} = \left\langle q_f, t_f \mid e^{-i\hat{H}(t_f - t_i)} \mid q_i, t_i \right\rangle = \int_{q(t_i)=q_i, q(t_f)=q_f} \mathcal{D}q \, e^{iS[q]}$$

$$S[q] = \int dt \, L(q, \dot{q}) \ ,$$

  - 特徴
    - 演算子の代わりに通常の数 (c-number) で表せる
    - 作用 S の構成時に正準交換関係を用いることにより「量子論」の性質を取り込む
- 場の理論 = 各点での場の振幅 φ(x,t) を座標とする量子力学

$$S_{fi} = \left\langle \Psi_f \mid e^{-i\hat{H}(t_f - t_i)} \mid \Psi_i \right\rangle = \int_{\Psi(t_i)=\Psi_i, \Psi(t_f)=\Psi_f} \mathcal{D}\phi \, e^{iS[\phi]}$$

$$S[\phi] = \int d^4x \, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \ .$$

分配関数とユークリッド化

分配関数

$$\mathcal{Z}(T) = \sum_n \exp(-E_n/T) = \sum_n \left\langle n \mid e^{-\hat{H}/T} \mid n \right\rangle$$

$$= \sum_n \left\langle n \mid e^{-i\hat{H}(t_f - t_i)} \mid n \right\rangle_{t_f - t_i = -i/T} = \int_{\phi(x,\beta)=\phi(x,0)} \mathcal{D}\phi \, e^{-S_E[\phi]}$$

$$S_E[\phi] = \int_0^\beta d\tau d^3x \mathcal{L}_E(\phi, \partial_i\phi, \partial_\tau\phi)$$

$$\mathcal{L}_E(\phi, \partial_i\phi, \partial_\tau\phi) = -\mathcal{L}(\phi, \partial_i\phi, \partial_t\phi \to i\partial_\tau\phi)$$

$$t = -i\tau, \partial_t = i\partial_\tau, \beta = 1/T$$

$$iS = i\int_0^{-i\beta} dt \int d^3x \mathcal{L} = \int_0^\beta d\tau \int d^3x L = -\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E$$

- 統計力学の分配関数は虚時間発展の振幅の和である。
- 全ての状態について和 → τ=0, β で周期境界条件をつけて任意の φ(x,t) について足し合わせる。

Example: Scalar Field

- **Lagrangian density**

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - U(\phi)$$

Euler-Lagrange equation (principle of least action)

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0 \;\rightarrow\; \partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi + \frac{\partial U}{\partial\phi} = 0 \text{ (Klein-Gordon eq.)}$$

- **Euclidean Lagrangian**
  - **Euclid 化のルール** $t = -i\tau$, $x_4=\tau$, $g_{\mu\nu}=(1,1,1,1)$, $L_E=-L$

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + U(\phi)$$

→ 相互作用がない場合に実際に経路積分してみましょう。

Partition Func. of Free Scalar Field

- 自由スカラー場の分配関数
  - 有限のサイズの箱 (体積 V) の中で自由スカラー場 (U=0)
  - フーリエ変換

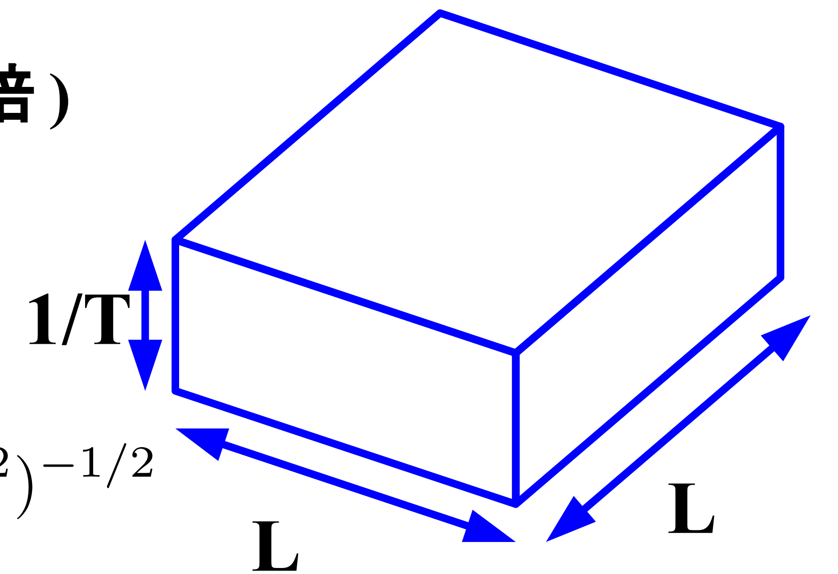
$$\phi(\tau,\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V/T}} \sum_{n,\mathbf{k}} \exp(-i\omega_n \tau + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\phi_n(\mathbf{k})$$

$$\text{Periodic Boundary Condition} \quad \omega_n = 2\pi n T,\ k_i = 2\pi n_i/L$$

$$\text{Euclidean action} \quad S_E = \frac{1}{2}\sum_{n,\mathbf{k}} (\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2)\,\phi_n^*(\mathbf{k})\phi_n(\mathbf{k}) \ ,$$

  - フーリエ変換はユニタリー変換だから、積分の測度は変わらない。(高々定数倍)

$$\mathcal{D}\phi = N \prod_{n,\boldsymbol{k}} d\phi_n(\boldsymbol{k})$$



  - ガウス積分 → 分配関数

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E} = N \prod_{n,\boldsymbol{k}} \sqrt{2\pi}(\omega_n^2 + \boldsymbol{k}^2 + m^2)^{-1/2}$$

Partition Func. of Free Scalar Field (cont.)

- 自由エネルギー

$$\Omega = -T\log\mathcal{Z} = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}\left[T\sum_n \log(\omega_n^2 + \underbrace{\boldsymbol{k}^2 + m^2}_{E_{\boldsymbol{k}}^2})\right] = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}} I(E_{\boldsymbol{k}}, T) + \text{const.}$$

- 松原和 (Matsubara Frequency summation)

$$\sum_n \frac{T}{\omega_n^2 + E^2} = \begin{cases} \frac{1}{2E}\frac{\cosh(\beta E/2)}{\sinh(\beta E/2)} & (\omega_n = 2\pi n T) \\ \frac{1}{2E}\frac{\sinh(\beta E/2)}{\cosh(\beta E/2)} & (\omega_n = \pi(2n+1)T) \end{cases}$$

$$\frac{\partial I(E,T)}{\partial E} = \sum_n \frac{2ET}{\omega_n^2 + E^2} = \begin{cases} \coth(\beta E/2) & (\omega_n = 2\pi n T) \\ \tanh(\beta E/2) & (\omega_n = \pi(2n+1)T) \end{cases}$$

$$I(E,T) = E + 2T\log(1 - e^{-E/T}) + \text{const.}$$

Partition Func. of Free Scalar Field (cont.)

- **自由エネルギー (グランド・ポテンシャル)**

$$\Omega = \sum_{\boldsymbol{k}} \left[\frac{E_{\boldsymbol{k}}}{2} + T \log(1 - e^{E_{\boldsymbol{k}}/T}) \right] + \text{const.}$$

$$\to V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\underbrace{\frac{E_{\boldsymbol{k}}}{2}}_{\text{ゼロ点エネルギー}\,(\hbar\omega/2)} + \underbrace{T \log(1 - e^{E_{\boldsymbol{k}}/T})}_{\text{熱的励起}} \right]$$

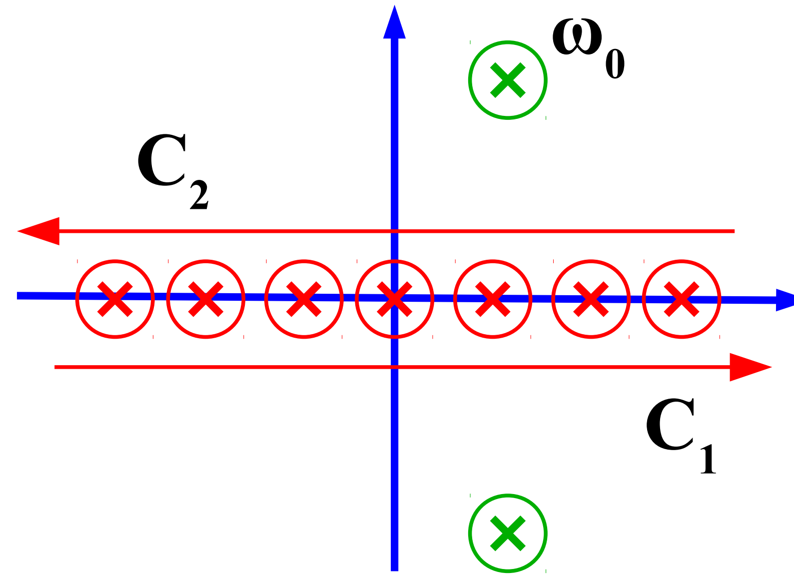
ゼロ点エネルギー部分を無視して部分積分すると、通常の圧力を得る。

$$P = -\Omega/V = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\boldsymbol{k}^2}{3E_{\boldsymbol{k}}} \frac{1}{e^{E_{\boldsymbol{k}}/T} - 1}$$

場の理論 → Euclid 化 + Imag. Time → 統計力学

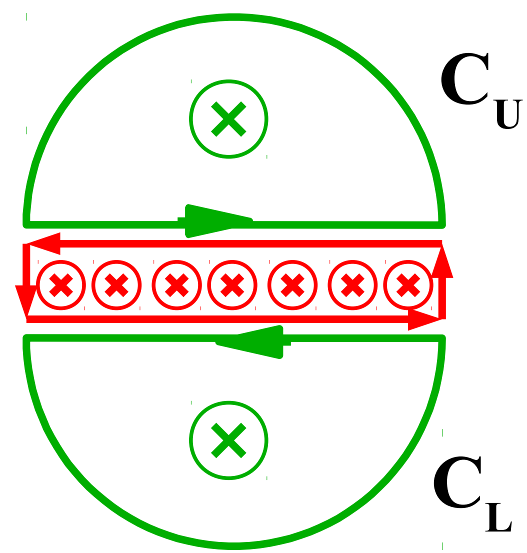
- **Contour integral technique**

$$S = T\sum_n g(\omega_n = 2\pi nT, \pi(2n+1)T)$$
$$= \pm \int_{C_1+C_2} \frac{dz}{2\pi}\frac{g(z)}{e^{i\beta z}\mp 1} = \mp i \sum_{\omega_0} \frac{\text{Res } g(\omega_0)}{e^{i\beta\omega_0}\mp 1}$$



(g: meromorphic (有理型),
no pole on real axis,
decreases faster than 1/ω at ω → ∞)

- **Applicable to more general cases !**
- **Anti-periodic condition → Fermi-Dirac dist.**



- **Example:** $g(\omega)=1/(\omega^2+E^2)$
$\rightarrow \omega_0 = \pm iE$, **Res** $g = \pm 1/2iE$

$$S = \frac{1}{2E}\frac{e^{\beta E}\pm 1}{e^{\beta E}\mp 1}$$

$C_1+C_2+C_U+C_L=0$

Fermion (1): Euclidean action とGrassmann 積分

- **Lagrangian**

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

- **Euclidean action**

$$(x_\mu)_E = (\tau = it, \boldsymbol{x}), (\gamma_\mu)_E = (i\gamma^0, \boldsymbol{\gamma})$$

$$\mathcal{L}_E = \overline{\psi}(-i\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi$$

- **Grassman number**
経路積分において、フェルミオンは反可換な Grassmann 数

$$\int d\chi \cdot 1 = \text{anti-comm. const.} = 0 \ , \int d\chi \cdot \chi = \text{comm. const.} = 1$$

$$\int d\chi d\bar{\chi} \exp\left[\bar{\chi} A \chi\right] = \int d\chi d\bar{\chi} \frac{1}{N!}(\bar{\chi} A \chi)^N = \cdots = \det A$$

$$= \exp\left[-(-\log\det A)\right]$$

Bi-linear Fermion action leads to -log(det A) effective action

Fermion (2): 自由 Fermion の分配関数

- **Fermion 行列の determinant (自由 Fermion の場合)**

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V/T}} \sum_{n,\boldsymbol{k}} e^{-i\omega_n\tau + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \psi_n(\boldsymbol{k})$$

$$S_E = \int_0^\beta d\tau \int d^3x \, \mathcal{L}_E = \sum_{n,\boldsymbol{k}} \bar{\psi}_n(\boldsymbol{k}) D_n(\boldsymbol{k}) \psi_n(\boldsymbol{k})$$

$$D_n(\boldsymbol{k}) = -\gamma_\tau \omega_n + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma} + m = -i\gamma^0\omega_n + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma} + m$$

- **通常の (Minkowski 空間での)Dirac 演算子の Fourier 成分**

$$D_M = i\gamma^\mu \partial_\mu - m \to D_M(\omega, \boldsymbol{k}) = \omega\gamma^0 - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma} - m$$

Dirac 方程式の解より $\det D_M(\omega, \boldsymbol{k}) = (\omega^2 - E_{\boldsymbol{k}}^2)^2 \quad (E_{\boldsymbol{k}} = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2})$

- **分配関数**
Euclidean での Fermion 行列との関係から分配関数をえる

$$D_n(\boldsymbol{k}) = -D_M(i\omega_n, \boldsymbol{k}) \to \det D_n(\boldsymbol{k}) = (\omega_n^2 + E_{\boldsymbol{k}}^2)^2$$

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S_E} = \prod_{n,\boldsymbol{k}} \det D_n(\boldsymbol{k}) = \prod_{n,\boldsymbol{k}} (\omega_n^2 + E_{\boldsymbol{k}}^2)^2$$

Fermion (3): 自由 Fermion の自由エネルギー

- **自由エネルギー : Boson の場合と同様に。**

$$\Omega = -T\log\mathcal{Z} = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}\left[T\sum_{n}\log(\omega_n^2+E_{\boldsymbol{k}}^2)\right] = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}} I(E_{\boldsymbol{k}},T) + \text{const.}$$

$$= -2\sum_{\boldsymbol{k}}\left[E_{\boldsymbol{k}} + 2T\log(1+e^{-E_{\boldsymbol{k}}/T})\right]$$

$$\to -d_f V\int\frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\left[\frac{E_{\boldsymbol{k}}}{2} + T\log(1+\exp(-E_{\boldsymbol{k}}/T))\right]$$

$$= -d_f V\int\frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\left[\underbrace{\frac{E_{\boldsymbol{k}}}{2}}_{\text{ゼロ点 E}} + \underbrace{\frac{\boldsymbol{k}^2}{3E_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{e^{E_{\boldsymbol{k}}/T}+1}}_{\text{粒子(と反粒子)からの圧力}}\right] \quad (d_f = \text{Fermion dof} = 4)$$

ゼロ点 E　　粒子 (と反粒子) からの圧力

$$\frac{\partial I(E,T)}{\partial E} = \sum_n \frac{2ET}{\omega_n^2+E^2} = \tanh(E/2T)\ (\omega_n = \pi(2n+1)T, \text{Fermion})$$

$$I(E,T) = 2T\log(\cosh(E/2T)) + \text{const.} = E + 2T\log(1+e^{-E/T}) + \text{const.}$$

場の理論からの自由エネルギー = ゼロ点 *E - PV*

***Fermion* ではゼロ点 *energy* が引力 (負)**

Relativistic Mean Field

- **Example: Relativistic Mean Field (RMF)**

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m - \Sigma)\psi + \mathcal{L}_{\mathrm{meson}}$$

$$\Sigma = g_\sigma \sigma + \gamma^\mu (g_\omega \omega_\mu + g_\rho \boldsymbol{\rho}_\mu \cdot \boldsymbol{\tau})$$

- **Euclid 化＋化学ポテンシャルの導入**

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\overline{\psi} \mathcal{D}\Phi \exp\left[-\int d^4x (L - \mu \psi^\dagger \psi)\right] \\
&= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\overline{\psi} \mathcal{D}\Phi \exp\left[-\int d^4x (\overline{\psi} D \psi + \mathcal{L}_{\mathrm{meson}})\right] \\
&= \int \mathcal{D}\Phi \exp\left[-S_{\mathrm{eff}}(\Phi; T, \mu)\right]
\end{aligned}$$

$$D = -i\gamma_\mu \partial_\mu - \mu\gamma^0 + m + \Sigma$$

- **一様平均場近似 (meson field=const.) → 有効作用**

$$S_{\mathrm{eff}} = S_{\mathrm{eff}}^{(F)} + S_{\mathrm{meson}} = -\sum_{n,\boldsymbol{k}} \log\det D_{n,\boldsymbol{k}} + \int d^4x \mathcal{L}_{\mathrm{meson}}$$

RMF: Uniform Field

- **一様な場を仮定 → Fourier 変換により D をブロック対角化**

$$D_{n,\mathbf{k}} = \gamma^0(-i\omega_n - (\mu - V^0)) + \gamma\cdot\mathbf{k} + M + g_\sigma\sigma$$

$$\to \det D_{n,\mathbf{k}} = \left[(\omega_n + i\mu^*)^2 + E_{\mathbf{k}}^{*2}\right]^2$$

$$\mu^* = \mu - g_\omega\omega^0 - g_\rho\rho^0\tau\ ,\quad E^* = \sqrt{\mathbf{k}^2 + M^{*2}}\ ,\quad M^* = m + g_\sigma\sigma$$

- **松原振動数和を実行** $\mathcal{F}_{\mathrm{eff}}^{(F)} = \Omega^{(F)}/V$

$$\mathcal{F}_{\mathrm{eff}}^{(F)} = -d_f\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[\underbrace{\frac{E^*}{2}}_{\text{ゼロ点}} + \underbrace{\frac{T}{2}\log(1+e^{-(E^*-\mu^*)/T})}_{\text{粒子(核子)}} + \underbrace{\frac{T}{2}\log(1+e^{-(E^*+\mu^*)/T})}_{\text{反粒子(反核子)}}\right]$$

- **温度 0 の場合**

$$\mathcal{F}_{\mathrm{eff}}^{(F)} = -\frac{d_f}{2}\int^{\Lambda}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}E^* + d_N\int^{k_F}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}E^* - \mu^*\rho_B\,(d_N = d_f/2)$$

ゼロ点エネルギーは核子のループから現れる
(RMF では通常無視)

補足

- 通常の Dirac 方程式 (Minkowski metric) に平面波を代入すると

$$(i\gamma^0\partial_t + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} - m)\psi = D\psi = 0$$

$$(\gamma^0 E - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{k} - m)\chi = D_{E,\boldsymbol{k}}\chi = 0$$

解は $E^2=k^2+m^2$ を満たすので、行列式が E の 4 次式であることを用いると

$$\det D_{E,\boldsymbol{k}} = (E^2 - E_{\boldsymbol{k}}^2)^2 \quad (E_{\boldsymbol{k}}^2 = \boldsymbol{k}^2 + m^2)$$

YITP YUKAWA INSTITUTE FOR THEORETICAL PHYSICS

RMF: non-uniform meson field

- 中間子場が非一様な場合 (e.g. 原子核) には
  平面波基底が使えない → 一粒子基底
- 静的な中間子場での Dirac Eq. と一粒子基底

$$\hat{K} = \gamma^0 \left[-i\gamma \cdot \nabla + M^*(x) + \gamma^0 V_0(x) \right]$$

$$\hat{K}\psi_k = E\psi_k \ (\text{Dirac. Eq.}, E_k \in \mathbb{R})$$

- 一粒子基底を使って γ⁰D は対角化可能

$$\psi_{n,k}(x) = e^{-i\omega_n t}\psi_k(x)$$

$$\gamma^0 D = \hat{K} + \partial_\tau - \mu$$

$$\gamma^0 D\psi_{n,k} = (E_k - \mu - i\omega_n)\psi_{n,k} = (\varepsilon_k - i\omega_n)\psi_{n,k}$$

- 行列式

$$T \log \det D = T \log \det(\gamma^0 D)$$

$$= \sum_k \left[T \sum_n \log(\varepsilon_k - i\omega_n) \right] = \sum_k \left[\frac{T}{2} \sum_n \log(\varepsilon_k^2 + \omega_n^2) \right]$$

RMF: non-uniform meson field (cont.)

- 自由エネルギー（フェルミオン部分）

$$\Omega_F = -\sum_k \left[\frac{\varepsilon_k}{2} + T\log(1+\exp(-\beta\varepsilon_k))\right]$$

$$= -\sum_k \frac{|E_k|}{2} - \underbrace{\sum_{k,E_k>0} T\log(1+e^{-\beta(E_k-\mu)})}_{\text{粒子}} - \underbrace{\sum_{k,E_k<0} T\log(1+e^{-\beta(|E_k|+\mu)})}_{\text{反粒子}}$$

- **T → 0**

$$\Omega_F \to -\sum_k \frac{|E_k|}{2} + \sum_{k,0<E_k<\mu} (E_k-\mu)$$

レポート問題 (Sec. 8)

- 大西担当分全体で半分程度解いて提出してください。
  [前期 (基礎論 A) と同様]
- 〆切は~~出題後2週間後の講義が始まるまで~~ →1 月末
- Rep.8-1: 松原和を求める際に用いた次の式を導出せよ。

$$S = T\sum_n g(\omega_n = 2\pi nT, \pi(2n+1)T) = \mp i \sum_{\omega_0} \frac{\mathrm{Res}\ g(\omega_0)}{e^{i\beta\omega_0} \mp 1}$$

- Rep.8-2: RMF の平均場近似において、粒子数・エントロピー・エネルギー密度を求める表式を求めよ。
  (uniform field の場合でよい。)
- Rep.8-3 (サービス問題): 量子力学における経路積分の表式

$$S_{fi}[q] = \int_{t_i, q=q_i}^{t_f, q=q_f} dt\, L(q, \dot{q})$$

を導出せよ。(分母としては数えません。)