

原子核基礎論B

京大基研 大西 明

Akira Ohnishi (YITP, Kyoto U.)

1. 原子核の集団運動とその微視的理解 (3 コマ)
 2. 原子核反応論基礎 (1 コマ)
 3. 核融合反応 (1 コマ)
 4. 核分裂: 現象論と微視的理論 (1 コマ)
 5. ニホニウムと超重元素の物理 (1 コマ)
-
6. 高温・高密度核物質概観 (1 コマ)
 7. 高エネルギー重イオン衝突 (2 コマ)
 8. 有限温度・密度における場の理論入門 (2 コマ)
 9. QCD 有効模型における相転移と相図 (1 コマ)
 10. 有限温度・密度格子 QCD と符号問題 (1 コマ)

萩野

大西

- ノーベル賞受賞理由 (2008)

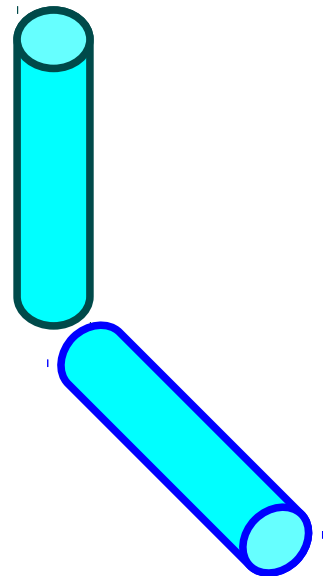
for the discovery of the mechanism of spontaneous broken symmetry in subatomic physics

素粒子・原子核物理において対称性が自発的に破れて粒子が質量を獲得する機構の発見に対して

- 対称性の自発的破れとは？

「まっすぐ立てた鉛筆は、どの方向に倒れる確率も同じ(等方的)だが、少しの揺らぎである方向に倒れ、元に戻ることはない。」

- 南部理論では、
カイラル対称性が自発的に破れる機構を発見し、
生の質量が小さい(5 MeV)クォークが
大きな質量を得ることを示した。



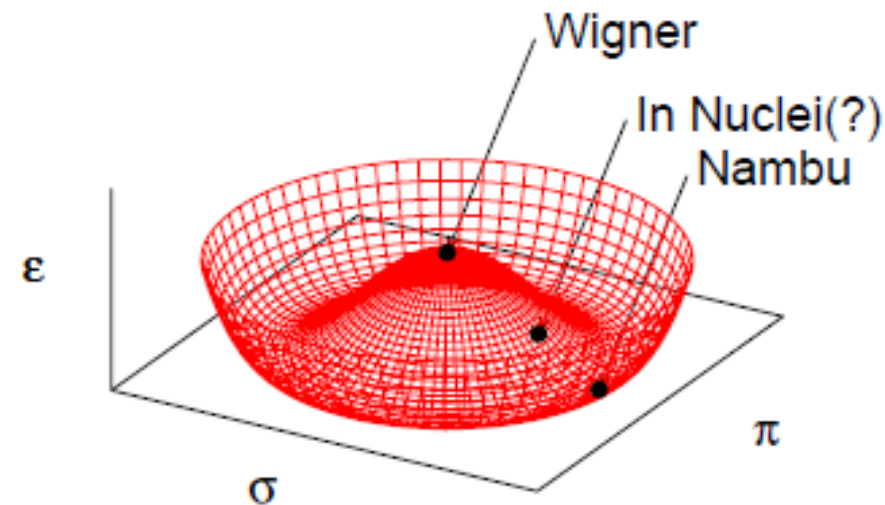
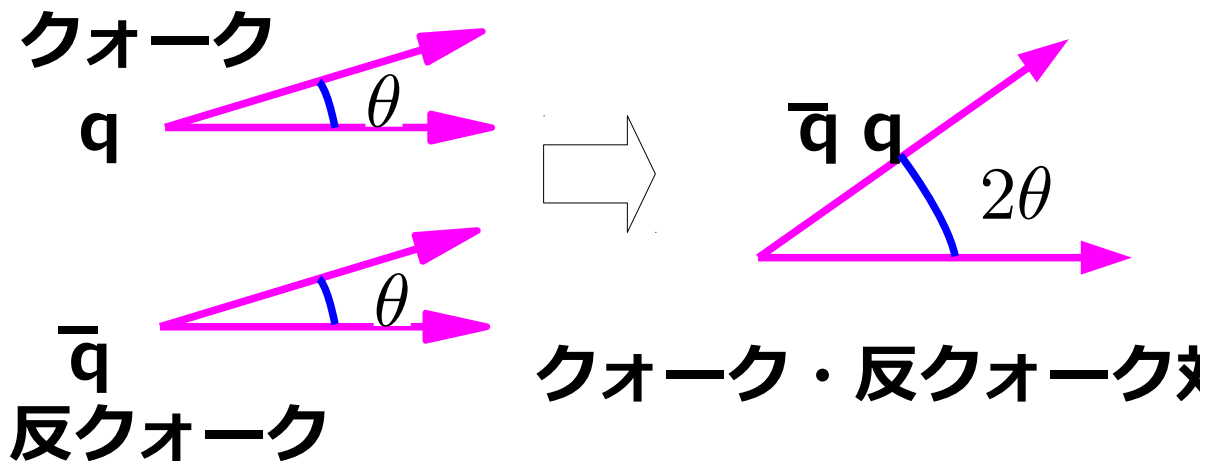
南部理論:カイラル対称性の自発的破れ

■ カイラル対称性

クォークと反クォークを複素平面で同じ方向にまわしても
エネルギーは変わらない

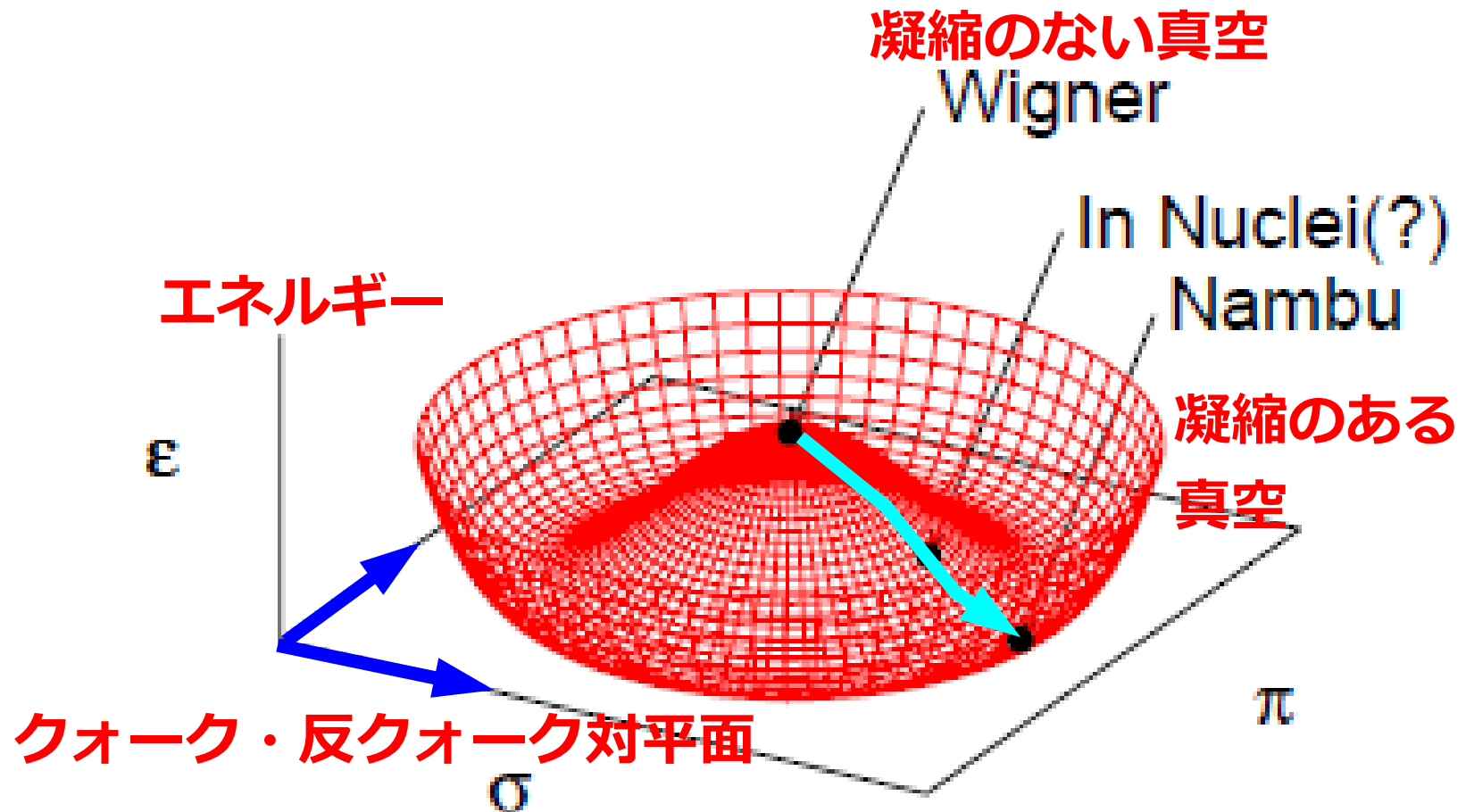
→ クォーク・反クォーク対を複素平面でまわしても
エネルギーは変わらない

■ クォークと反クォークの間には強い引力が働くので、
対を作って同じ方向に凝縮する(空間を埋め尽くす)。



南部理論:カイラル対称性の自発的破れ

- 最も安定な状態 (真空) ではクォーク・反クォーク対が凝縮
 - ある方向が選ばれる (真空での自発的対称性の破れ)
 - クォークは凝縮体にぶつかって動きにくくなる
 - 質量の増加



南部理論の功績

- 真空(エネルギー最小状態)において対称性が自発的に破れ、粒子が質量を獲得する仕組みを最初に発見
→ 現代の物理学全体の基本概念
- 真空での対称性の自発的破れに伴い、「まわる方向」に軽い粒子が現れる(南部・ゴールドストーン粒子)が現れることを予言
 - π 中間子の現れる機構の説明
- 軽いクォーク(約 5 MeV)が大きな質量(約 300 MeV)を獲得し、核子や中間子の大きな質量を生み出すことを示す
 - 我々の体の質量の 98 % はクォーク・反クォーク対の凝縮により生み出されている
 - カイラル対称性の自発的破れが部分的に回復すれば、構成子クォーク(とハドロン)の質量は軽くなる？
- 他にもクォークの基本的性質について多くの提案

クォーク・ハドロン物理の創始者

カイラル対称性とハドロン質量

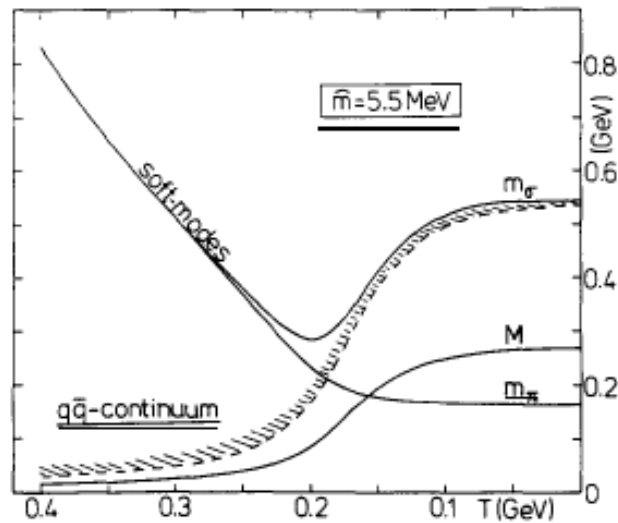
- カイラル対称性の自発的破れによりクォークが質量を獲得
Y. Nambu, G. Jona-Lasinio, Phys.Rev. 122 ('61) 345; 124 ('61) 246.
- 有限温度・密度においてカイラル対称性が部分的に回復
T.Hatsuda, T.Kunihiro, PTP74('85)765; Phys.Rep. 247 ('94) 221.
- 多くのハドロンの質量はカイラル凝縮の大きさとスケール
G.E.Brown, M.Rho, PRL66 ('91) 2720.

$$m_{\sigma}^*/m_{\sigma} \approx m_N^*/m_N \approx m_{\rho}^*/m_{\rho} \approx m_{\omega}^*/m_{\omega} \approx f_{\pi}^*/f_{\pi}$$

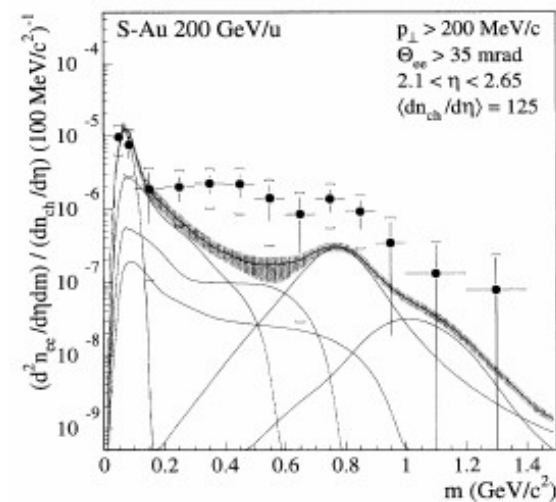
- 高エネルギーの重イオン衝突では ρ 中間子の質量が減っている
G. Agakichiev et al. (CERES), PRL75 ('95),1272.
- いや、幅が広がっているだけである。
R. Arnaldi et al.(NA60), PRL96 ('06) 162302; R.Rapp, J.Wambach (0901.3289)
- pA 衝突では質量が変化している
R. Muto et al. (KEK-E325), PRL98 ('07),042501.

さて、ハドロン質量は有限温度・有限密度で変わるのだろうか？

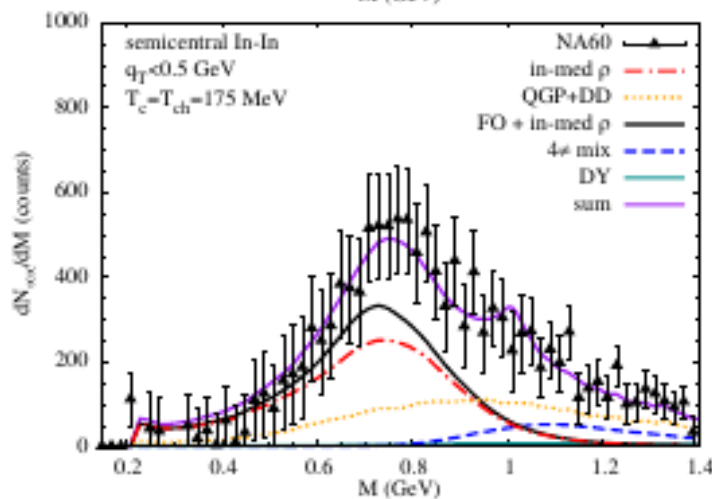
カイラル対称性とハドロン質量



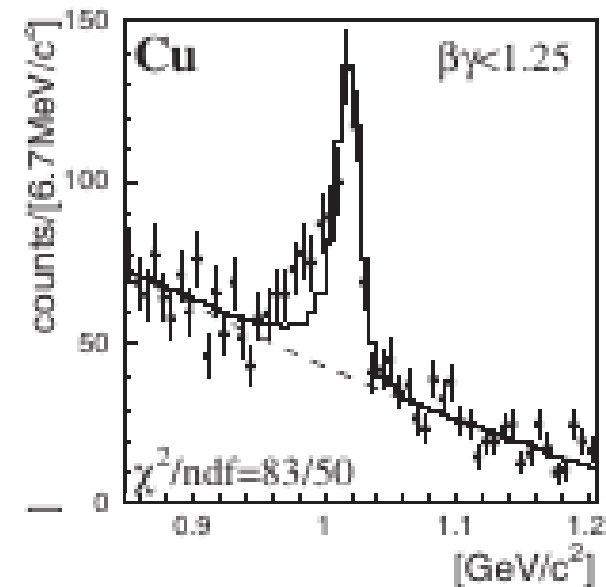
*T.Hatsuda, T.Kunihiro,
Phys.Rep. 247 ('94) 221.*



CERES Collab., PRL75 ('95),1272.



*NA60 Collab., PRL96 ('06) 162302;
R.Rapp, J.Wambach (0901.3289)*



KEK-E325 Collab., PRL98 ('07),042501.

■ 分配関数とユークリッド化

$$\mathcal{Z}(T) = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]}, \quad S_E[\phi] = \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E(\phi, \partial_i \phi, \partial_\tau \phi)$$

$$\mathcal{L}_E(\phi, \partial_i \phi, \partial_\tau \phi) = -\mathcal{L}(\phi, \partial_i \phi, \partial_t \phi \rightarrow i\partial_\tau \phi)$$

■ スカラー場 (2行目以降、自由場 (U=0) とする)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - U(\phi), \quad \mathcal{L}_E = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + U(\phi)$$

$$S_E = \frac{1}{2} \sum_{n, \mathbf{k}} (\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2) \phi_n^*(\mathbf{k}) \phi_n(\mathbf{k})$$

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E} = N \prod_{n, \mathbf{k}} \sqrt{2\pi} (\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2)^{-1/2}$$

$$\Omega = \frac{T}{2} \sum_{\mathbf{k}} \log[\sinh(E_{\mathbf{k}}/T)] \rightarrow V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{E_{\mathbf{k}}}{2} + T \log(1 - e^{E_{\mathbf{k}}/T}) \right]$$

松原和

■ 松原和

$$S = T \sum_n g(\omega_n) = \mp i \sum_{\omega_0} \frac{\text{Res } g(\omega_0)}{e^{i\beta\omega_0} \mp 1} \quad (\omega_n = 2\pi nT, \pi(2n+1)T)$$

■ フェルミオン (ボソンについては平均場近似)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M + \gamma^0 \mu^*)\psi + \mathcal{L}_\Phi, \quad \mathcal{L}_E = \bar{\psi} D \psi + \mathcal{L}_{E,\Phi}$$

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\Phi \, e^{-\int d^4x \mathcal{L}_E} = \int \mathcal{D}\Phi \, e^{-S_{\text{eff}}(\Phi; T, \mu)} \simeq e^{-S_{\text{eff}}(\Phi_{\text{eq}}; T, \mu)}$$

$$S_{\text{eff}} = S_{\text{eff}}^{(F)} + S_{E,\Phi} = -\log \det D + \int d^4x \mathcal{L}_{E,\Phi}$$

$$(M = m + g_\sigma \sigma, \mu^* = \mu - V_0, \gamma_\tau = i\gamma_0, D = -i\gamma_\mu \partial_\mu - \mu^* \gamma^0 + M)$$

$$\Omega_F = -T \log \det D = - \sum_k \left[\frac{T}{2} \sum_n \log((E_k - \mu)^2 + \omega_n^2) \right]$$

$$= -T \sum_k \log[\cosh((E_k - \mu)/T)] \quad \text{松原和}$$

$$= - \sum_k \frac{|E_k|}{2} - \sum_{k, E_k > 0} T \log(1 + e^{-\beta(E_k - \mu)}) - \sum_{k, E_k < 0} T \log(1 + e^{-\beta(|E_k| + \mu)})$$

Spontaneous Chiral Symmetry Breaking in the NJL model

Chiral Symmetry in Quantum Chromodynamics

■ QCD Lagrangian

notation: Yagi, Hatsuda, Miake

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m) - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

■ Chiral symmetry: $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$

- Left- and Right-handed quarks can rotate independently

$$q_L = (1 - \gamma_5)q/2, q_R = (1 + \gamma_5)q/2 \rightarrow V_L q_L, V_R q_R$$

$$\mathcal{L}_q = \bar{q}_L(i\gamma^\mu D_\mu)q_L + \bar{q}_R(i\gamma^\mu D_\mu)q_R - \underbrace{m(\bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L)}_{\text{invariant}} \quad \text{small (for u, d)}$$

■ Chiral transf. of hadrons

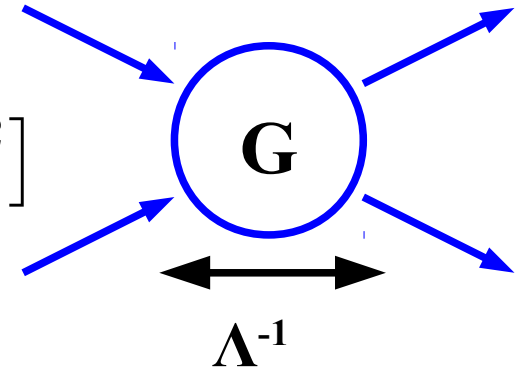
$$\sigma = \bar{q}q, \pi^a = \bar{q}i\gamma_5\tau^a q \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma' \\ \pi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ \pi \end{pmatrix}$$

- σ ($J^\pi=0^+$) and π ($J^\pi=0^-$) mix via chiral transf. but have diff. masses.
→ Spontaneous breaking of chiral symmetry.

Nambu-Jona-Lasinio (NJL) model

■ NJL Lagrangian

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q + \frac{G^2}{2\Lambda^2} [(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} q)^2]$$



■ Integrating out gluons and hard quarks in QCD → Effective theory of quarks with the same symmetry as QCD

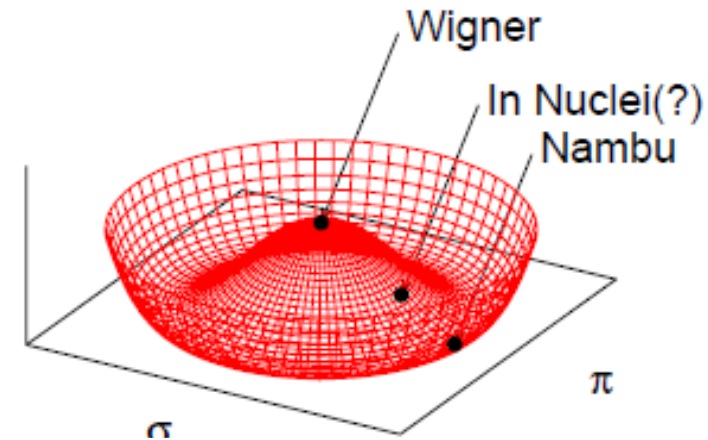
$$S = \bar{q}q, \mathbf{P} = \bar{q}i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} q$$

$$\rightarrow S^2 + \mathbf{P}^2 = \text{inv. under chiral transf.}$$

■ Euclidean action

$$(x_\mu)_E = (\tau = it), (\gamma_\mu)_E = (\gamma_4 = i\gamma^0, \boldsymbol{\gamma})$$

$$\mathcal{L} = \bar{q}(-i\gamma_\mu \partial_\mu + m)q - \frac{G^2}{2\Lambda^2} [(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} q)^2]$$



Nambu, Jona-Lasinio ('61), Hatsuda, Kunihiro ('94)

Partition Function in NJL

■ Bosonization (Hubbard-Stratonovich transf.)

$$-\frac{G^2}{2\Lambda^2} [(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}q)^2] \rightarrow \frac{\Lambda^2}{2}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) + G\bar{q}\underbrace{(\sigma + i\gamma_5\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi})q}_{\Sigma}$$

■ Partition Function

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\text{NJL}} &= \int \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} \exp \left[- \int d^4x \mathcal{L}_{\text{NJL}} \right] \\ &= \int \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}\Sigma \exp \left[- \int d^4x \left[\underbrace{\bar{q}(-i\gamma\partial + m + G\Sigma)q}_D + \frac{\Lambda^2}{2}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) \right] \right] \\ &= \int \mathcal{D}\Sigma \exp [-S_{\text{eff}}(\Sigma; T)] \end{aligned}$$



$$G = G_0 - G_0 \Sigma G$$

■ Effective Action

$$S_{\text{eff}}(\Sigma; T) = -\log \det D + \int d^4x \frac{\Lambda^2}{2} [\sigma^2(x) + \boldsymbol{\pi}^2]$$

Bosonization & Grassman Integral

■ Bosonization (Hubbard-Stratonovich transf.)

$$\exp \left[\frac{G^2 S^2}{2\Lambda^2} \right] = \int d\sigma \exp \left[-\frac{\Lambda^2}{2} \left(\sigma - \frac{GS}{\Lambda^2} \right)^2 + \frac{G^2 S^2}{2\Lambda^2} \right]$$
$$\exp \left[\frac{G^2 (P^a)^2}{2\Lambda^2} \right] = \int d\pi^a \exp \left[-\frac{\Lambda^2}{2} \left(\pi^a - \frac{GP^a}{\Lambda^2} \right)^2 + \frac{G^2 (P^a)^2}{2\Lambda^2} \right]$$

■ Grassman number

$$\int d\chi \cdot 1 = \text{anti-comm. const.} = 0, \quad \int d\chi \cdot \chi = \text{comm. const.} = 1$$
$$\int d\chi d\bar{\chi} \exp [\bar{\chi} A \chi] = \int d\chi d\bar{\chi} \frac{1}{N!} (\bar{\chi} A \chi)^N = \dots = \det A$$
$$= \exp [-(-\log \det A)]$$

Bi-linear Fermion action leads to $-\log(\det A)$ effective action

Fermion Determinant in Mean Field Approximation

- Mean Field approx.+Fourier transf.→ Diagonal Fermion matrix

$$D_{n,\mathbf{k}} = -i\omega_n \gamma^0 + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} + m + g_\sigma \sigma, E^* = \sqrt{\mathbf{k}^2 + M^{*2}}, M^* = m + g_\sigma \sigma$$

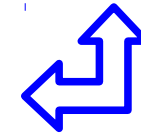
$$\rightarrow \det D_{n,\mathbf{k}} = [\omega_n^2 + E_{\mathbf{k}}^{*2}]^2$$

$$\rightarrow \det D = \prod_{n,\mathbf{k}} (\omega_n^2 + E_{\mathbf{k}}^2)^{d/2} (d_f = 4N_c N_f = \text{Fermion dof})$$

- Effective Potential

$$F_{\text{eff}} = \Omega/V = -\frac{T}{V} \log \mathcal{Z} = \frac{\Lambda^2}{2} \sigma^2 - \frac{T}{V} \sum_{n,\mathbf{k}} \log(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + M^2)^{d_f/2}$$

$$= \frac{\Lambda^2}{2} \sigma^2 - d_f \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\frac{E_k}{2} + \frac{k^2}{3E_k} \frac{1}{e^{E_k/T} + 1} \right]$$



Matsubara sum

Fermion det. → Zero point energy ($\hbar \omega/2$) + Thermal pressure

Effective potential of NJL model

■ Effective potential (Grand pot. density)

$$F_{\text{eff}} = \frac{\Lambda^2}{2} \sigma^2 - d_f \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\frac{E_k}{2} + \frac{k^2}{3E_k} \frac{1}{e^{E_k/T} + 1} \right]$$

Zero point energy + Thermal (particle) excitation + Aux. Fields

■ Effective potential in vacuum (T=0, μ=0) in the chiral limit (m=0)

$$F_{\text{eff}} = \frac{\Lambda^2}{2} \sigma^2 - \underbrace{\frac{d_f}{2} \int^{\Lambda} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} E_k}_{\Lambda^4 I(x)} = \Lambda^4 \left[-\frac{d_f}{2} I(x) + \frac{x^2}{2G^2} \right] \quad (x = M/\Lambda)$$

$$\frac{F_{\text{eff}}}{\Lambda^4} = -\frac{d_f}{16\pi^2} + \frac{x^2}{2} \left[\frac{1}{G^2} - \frac{1}{G_c^2} \right] + \mathcal{O}(x^4 \log x) \quad (G_c^2 = 8\pi^2/d_f)$$

$G > G_c \rightarrow 2\text{nd coef.} < 0 \rightarrow \text{Spontaneous Chiral Sym. Breaking}$

$$I(x) = \frac{1}{16\pi^2} \left[\sqrt{1+x^2} (2+x^2) - x^4 \log \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \right] \simeq \frac{1}{8\pi^2} \left[1 + x^2 + \frac{x^4}{8} \left(1 + 4 \log \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^6) \right) \right]$$

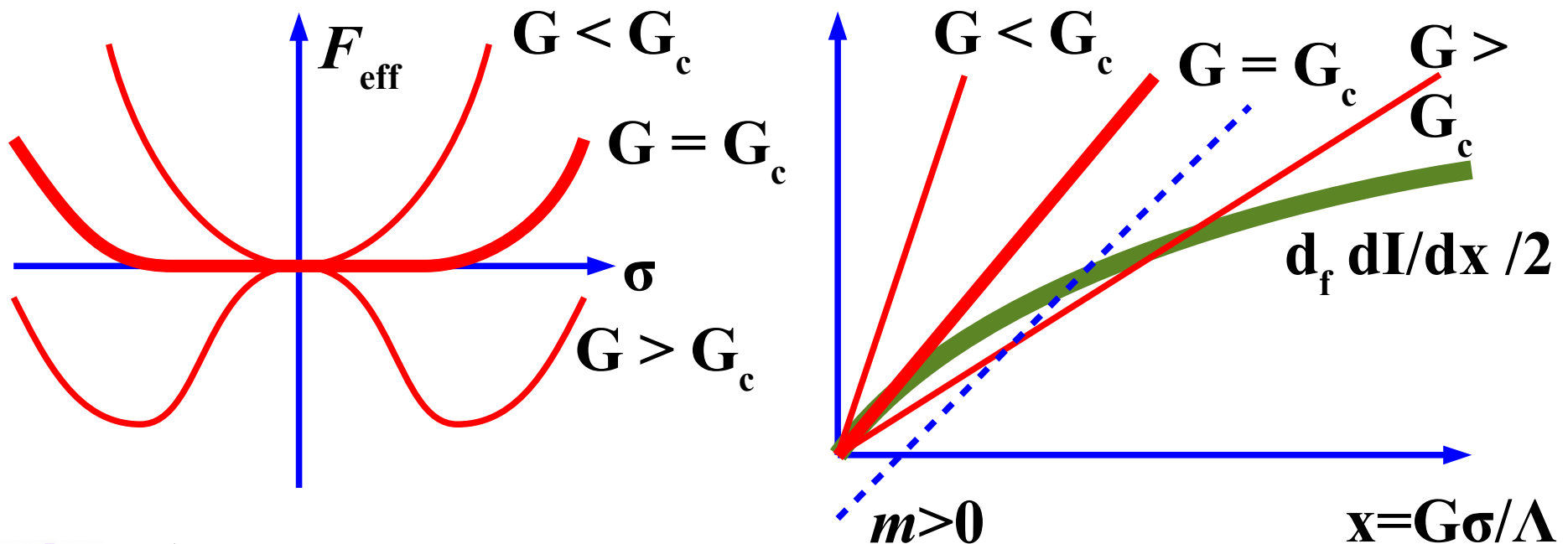
Spontaneous breaking of chiral symmetry

- σ is chosen to minimize F_{eff} (Gap equation)

$$\frac{1}{\Lambda^4} \frac{\partial F_{\text{eff}}}{\partial x} = -\frac{d_f}{2} \frac{dI(x)}{dx} + \frac{x}{G^2} = 0$$

For $G > G_c \rightarrow$ finite $\sigma(\sim q^{\text{bar}} q)$ solution gives min. energy state.

If the interaction is strong enough, $\sigma(\sim q^{\text{bar}} q)$ condensates and quark mass is generate. (Nambu, Jona-Lasinio ('61))



*Chiral phase transition at finite T and μ
(Chiral Limit)*

■ NJL Lagrangian

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m + \gamma^0 \mu)q + \frac{G^2}{2\Lambda^2} [(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} q)^2]$$

$$\mathcal{L}_E = \bar{q}(-i\gamma_\mu \partial_\mu + m - \gamma_0 \mu)q - \frac{G^2}{2\Lambda^2} [(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} q)^2]$$

■ Effective Action

$$S_{\text{eff}} = -\log \det D + \int d^4x \frac{\Lambda^2}{2} [\sigma^2(x) + \boldsymbol{\pi}^2(x)]$$

$$D = -i\gamma_\mu \partial_\mu u - \gamma_0 \mu + M (M = m + G\Sigma)$$

$$\text{MF} + \text{Fourier} \rightarrow D = -\gamma_0(i\omega + \mu) + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} + M (M = m + G\sigma)$$

■ Free energy density

$$F_{\text{eff}} = \frac{\Lambda^2}{2} \sigma^2 - \frac{T}{V} \sum_{n, \mathbf{k}} \log((\omega_n - i\mu)^2 + \mathbf{k}^2 + M^2)^{d_f/2}$$

$$= \frac{\Lambda^2}{2} \sigma^2 - d_f \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{E_k}{2} + \frac{k^2}{3E_k} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^{(E_k - \mu)/T} + 1} + \frac{1}{e^{(E_k + \mu)/T} + 1} \right) \right]$$

T, μ and m dependence of thermal pressure

■ Thermal pressure as a function of T, μ , and m (Fermions)

Kapusta ('89), Kapusta, Gale (2006)

$$P^F/d_F = \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{90} T^4 + \frac{1}{24} \mu^2 T^2 + \frac{\mu^4}{48\pi^2} \quad \text{Stefan-Boltzmann (m=0)}$$

$$- \frac{m^2}{16\pi^2} \left[\frac{\pi^2}{3} T^2 + \mu^2 \right]$$

m^2 term $\rightarrow$ phase transition

$$- \frac{m^4}{32\pi^2} \left[\log \left(\frac{m}{\pi T} \right) - \frac{3}{4} + \gamma_E - H^\nu \left(\frac{\mu}{T} \right) \right] + \mathcal{O}(m^6)$$

m^4 term $\rightarrow$ critical point

New

$$H^\nu(\nu) = \left(\frac{\nu}{\pi} \right)^2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2}{(2l-1)[(2l-1)^2 + (\nu/\pi)^2]} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{\nu}{\pi} \right)^{2k} \left(2 - \frac{1}{2^{2k}} \right) \zeta(2k+1)$$

Mass reduces pressure (enh. Feff) $\rightarrow$ phase transition ?

Chiral Transition at Finite T

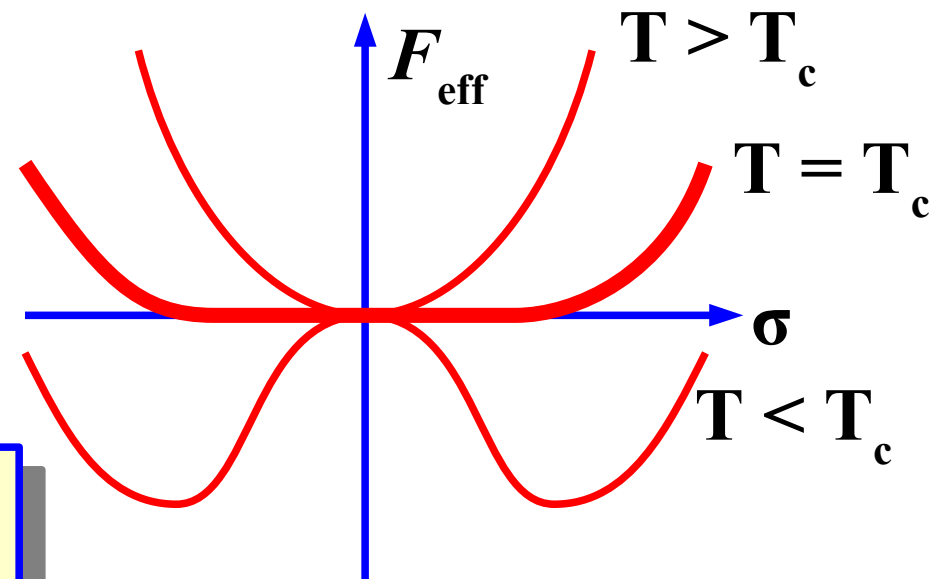
■ Effective potential at finite T in NJL

$$\begin{aligned}\frac{F_{\text{eff}}}{\Lambda^4} &= -\frac{d_f}{2} I(x) + \frac{x^2}{2G^2} - \frac{P^F}{\Lambda^4} \\ &= -\frac{d_f}{16\pi^2} - \frac{d_f \pi^2}{90} \frac{7}{8} \left(\frac{T}{\Lambda}\right)^4 + \frac{x^2}{2} \left[\frac{1}{G^2} - \frac{1}{G_c^2} \left(1 - \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{T}{\Lambda}\right)^2 \right) \right]\end{aligned}$$

Stefan-Boltzmann

Correction from T

- Chiral transition should occur at $T < 3^{1/2} \Lambda/\pi$.



Chiral Transition at finite T is suggested by NJL !

High-Temperature Expansion (1)

■ Thermal pressure (Fermions)

$$P^F = \frac{d_F}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{3\omega} \left[\frac{1}{e^{(\omega-\mu)/T} + 1} + \frac{1}{e^{(\omega+\mu)/T} + 1} \right]$$

$$\omega = \sqrt{p^2 + m^2}$$

■ High-Temperature Expansion = Expansion in m/T

- Important to discuss chiral transition ($m = G\sigma$)
- Naive expansion does not work (non-analytic term in m)

■ Kapusta method

- Recursion formula: simpler integral $\rightarrow$ pressure

$$P^F = \frac{4T^4 d_F}{\pi^2} h_5^F \left(y = \frac{m}{T}, \nu = \frac{\mu}{T} \right), \quad \frac{dh_{n+1}}{dy} = -\frac{y}{n} h_{n-1}$$

- Replace integrand

$$\frac{1}{2\omega} \left[\frac{1}{e^{\omega-\nu} + 1} + \frac{1}{e^{\omega+\nu} + 1} \right] = \frac{1}{2\omega} - \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + [\pi(2l-1) - i\nu]^2}$$

High-Temperature Expansion (2)

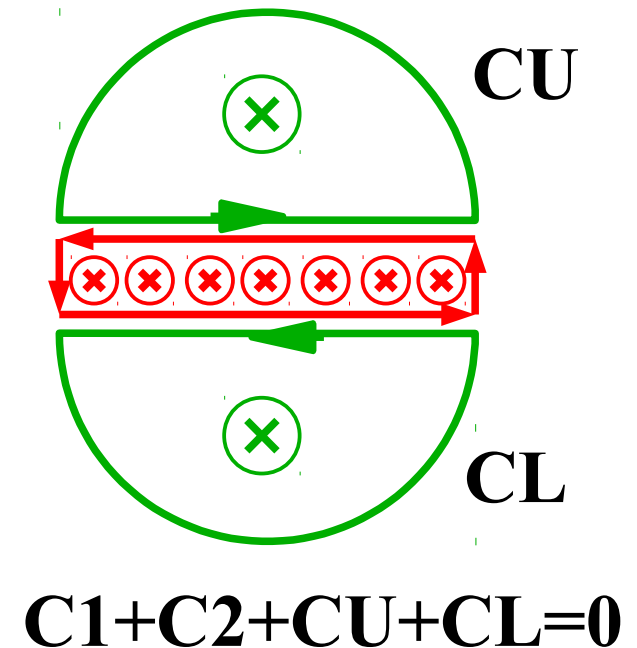
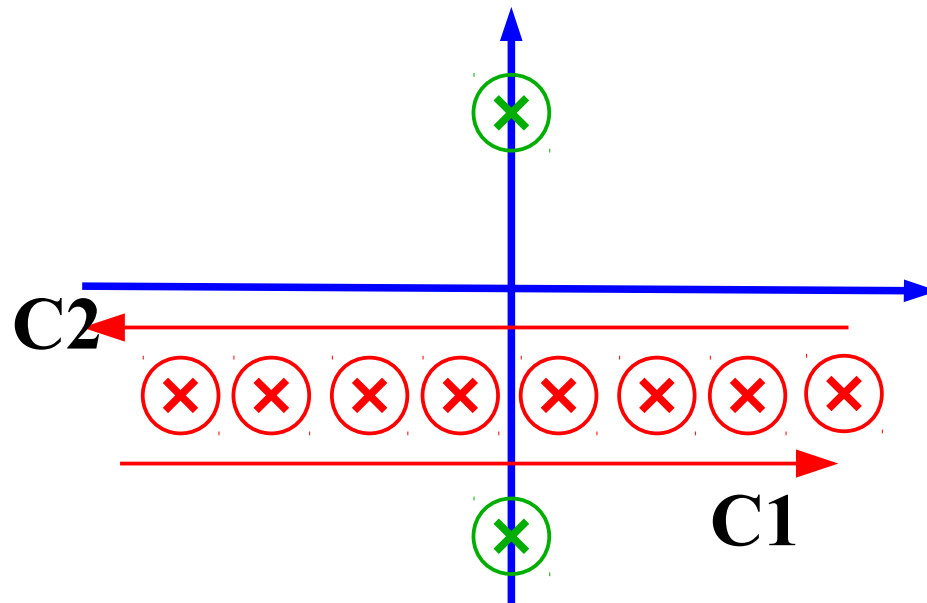
- Following identity is obtained from contour integral.

$$\frac{1}{2\omega} \left[\frac{1}{e^{\omega-\nu} + 1} + \frac{1}{e^{\omega+\nu} + 1} \right] = \frac{1}{2\omega} - \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + [\pi(2l-1) - i\nu]^2}$$

$$\oint_{C_U+C_L} \frac{dz}{2\pi} \frac{1}{e^{iz-\nu} + 1} \frac{1}{z^2 + \omega^2} = - \oint_C \frac{dz}{2\pi} \frac{1}{e^{iz-\nu} + 1} \frac{1}{z^2 + \omega^2}$$

pole at $z = \pm i\omega$

pole at $z = \pi(2l-1) - i\nu$



High-Temperature Expansion (3)

■ Recursion relation of h-functions

$$h_n^F(y, \nu) = \frac{1}{2(n-1)!} \int_0^\infty \frac{x^{n-1} dx}{\omega} \left\{ \frac{1}{e^{\omega-\nu} + 1} + \frac{1}{e^{\omega+\nu} + 1} \right\}$$

$$\frac{dh_{n+1}}{dy} = -\frac{y}{n} h_{n-1}$$

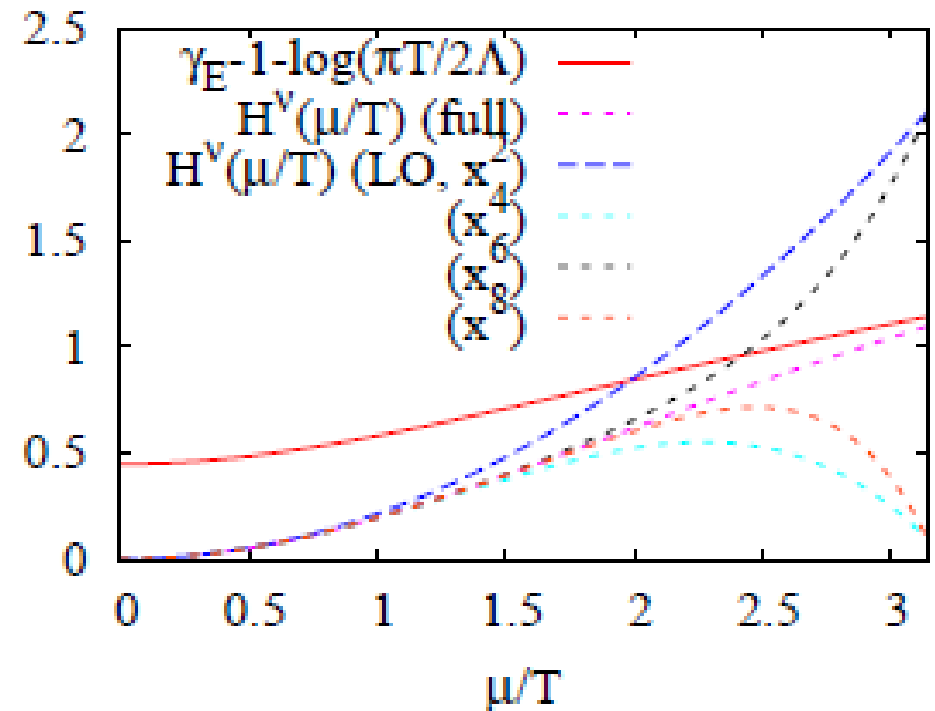
● From $h_1(y, \nu)$, $h_3(0, \nu)$, $h_5(0, \nu)$, we obtain $h_5(y, \nu)$ and pressure.

■ Key function= $h_1(y, \nu)$

$$\begin{aligned} h_1^F(y, \nu) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi L} dx \left[\frac{1}{2\omega} - \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + [\pi(2l-1) - i\nu]^2} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \log \frac{y}{\pi} - \frac{1}{2} \gamma_E - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{\pi}{\omega_l} + \frac{\pi}{\omega_l^*} - \frac{2}{2l-1} \right] \\ &\quad (\omega_l = \sqrt{y^2 + [\pi(2l-1) - i\nu]^2}) \end{aligned}$$

(Tri)Critical Point

- Do we expect the existence of (Tri)Critical Point in NJL ?
 - Yes, as first shown by Asakawa, Yazaki ('89)
 - TCP in the chiral limit $\rightarrow$ CP at finite bare quark mass
- Estimate from high-temperature expansion
 - TCP: $c_2 = 0$ and $c_4 = 0$ simultaneously.
 - c_4 decreases as μ/T increases.
 - Existence is probable,
Position is sensitive
to parameters and treatment.



Chiral Transition at Finite μ

Effective potential at finite μ in NJL

$$F_{\text{eff}}(m; T, \mu) = F_{\text{eff}}(0; T, \mu) + \frac{c_2(T, \mu)}{2} m^2 + \frac{c_4(T, \mu)}{24} m^4 + \mathcal{O}(m^6)$$

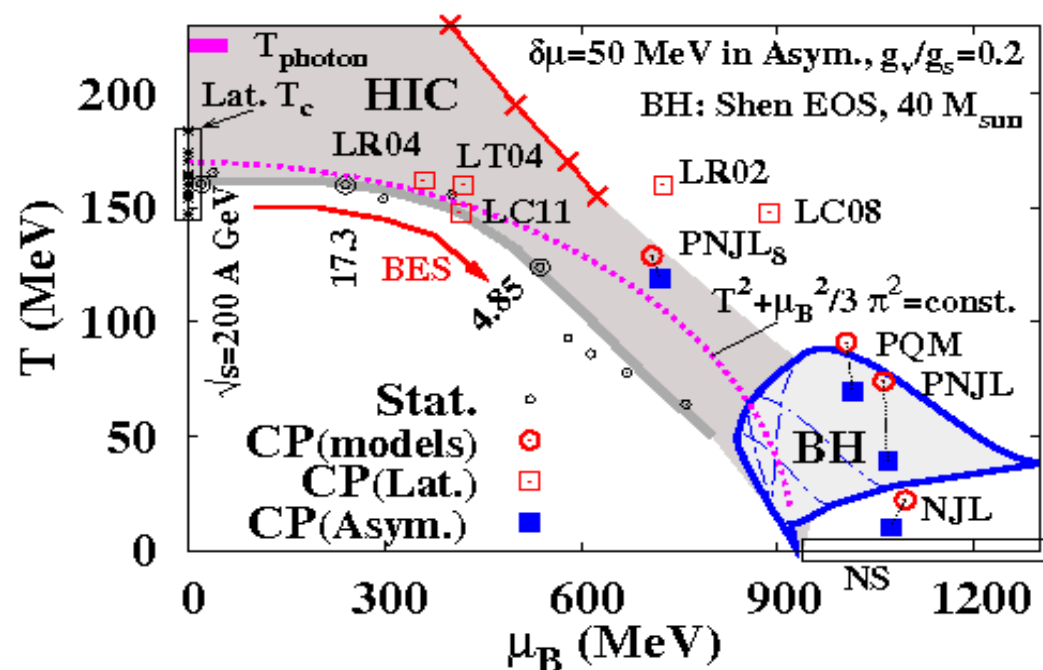
$$c_2(T, \mu) = -\frac{d_F}{24} \left[\frac{3}{\pi^2} \Lambda^2 \left(1 - \frac{8\pi^2}{d_F G^2} \right) - \left(T^2 + \frac{3}{\pi^2} \mu^2 \right) \right]$$

$$T_c^2(\mu=0)$$

2nd order phase boundary

$$T^2 + \frac{3}{\pi^2} \mu^2 = T_c^2(\mu=0)$$

Roughly matches
chem. freeze-out line.



Chiral Transition at Finite μ

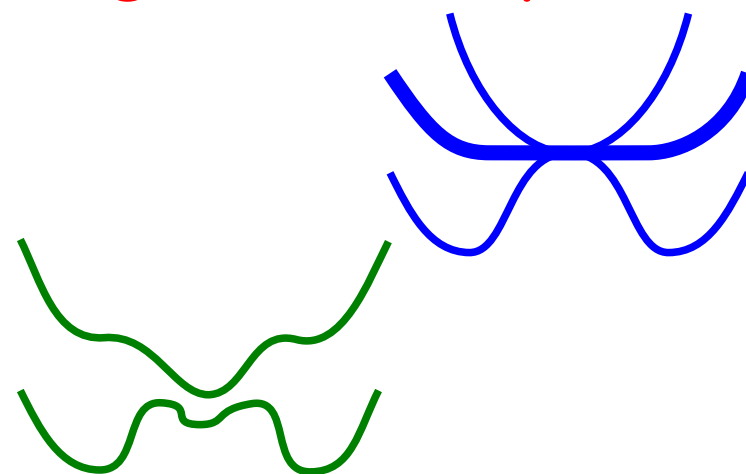
Effective potential at finite μ in NJL

$$F_{\text{eff}}(m; T, \mu) = F_{\text{eff}}(0; T, \mu) + \frac{c_2(T, \mu)}{2} m^2 + \frac{c_4(T, \mu)}{24} m^4 + \mathcal{O}(m^6)$$

$$c_2(T, \mu) = -\frac{d_F}{24} \left[\frac{3}{\pi^2} \Lambda^2 \left(1 - \frac{8\pi^2}{d_F G^2} \right) - \left(T^2 + \frac{3}{\pi^2} \mu^2 \right) \right]$$

$$c_4(T, \mu) = \frac{3d_F}{4\pi^2} \left[\underbrace{\gamma_E - 1 - \log \left(\frac{\pi T}{2\Lambda} \right)}_{\mu=0} - \underbrace{H^\nu(\mu/T)}_{\text{negative at finite } \mu} \right]$$

- $c_2 = 0$ and $c_4 > 0 \rightarrow$ 2nd order
- $c_2 \geq 0$ and $c_4 < 0 \rightarrow$ 1st order
- $c_2 = 0$ and $c_4 = 0 \rightarrow$ tricritical point



Short Summary

- フェルミオンを含む有限温度・密度の場の理論 (NJL 模型) でボソンについて平均場近似を行うことにより、自由エネルギーを導出した。
 - ゼロ点エネルギー (の変化) は場の理論からみれば必要。
 - 負のエネルギーが現れても (ゼロ点エネルギー以外では) 松原和の発散は起こらない。
- NJL 模型 ($N_f=2$) では高密度において QCD(1 次) 相転移と臨界点の存在が期待される。
 - フェルミオンのゼロ点エネルギーが対称性を自発的に破る起源
 - 高温・高密度では粒子圧力の寄与によりカイラル対称性が回復
 - NJL 模型から期待される 2 次相転移線の「楕円」は実験から示唆される化学凍結線とほぼ一致

レポート問題 (Sec. 9)

- 大西担当分全体 (*) で半分程度解いて提出してください。
[* 全部で 2+3+2+1 (Sec.6,7,8,9)=8 問でした。×切は 1 月末]
- Rep.9-1: ボソン化した NJL 模型の作用から平均場近似の下で有効ポテンシャルを求めよ。
余裕があれば、有限温度・有限密度 (有限化学ポテンシャル) での有効ポテンシャルを構成子クォーク質量で 2 次まで展開し、カイラル極限で 2 次相転移線が

$$T^2 + \frac{3}{\pi^2} \mu^2 = T_c^2 (\mu = 0)$$

で与えられることを示せ。

(前半は比較的簡単。後半はかなり面倒。Kapusta-Gale, あるいは <http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~akira.ohnishi/Lec2019/HighTExp.pdf> を参考に、遊んでみてください。無理しないように。)

- Rep.9-2: 物理現象における 1 次相転移、および 2 次相転移の例を挙げ、その特徴をまとめよ。(レポート用紙 1 枚程度で述べること。)[分母としては数えません。]