原子核基礎論A（シラバス）

- 担当：大西（基研）、萩野（理学研究科・物2)
- 授業の概要・目的
  - まず原子核の基本的性質、およびスピン・アイソスピン依存性や斥力芯の存在などの核力の基本的性質について概観し、それらの起源について中間子交換や強い相互作用の基礎理論である量子色力学（QCD）に基づいて議論する。また、密度や温度を変化させたときの核物質の性質・状態方程式について概観する。
  - 次に、原子核の性質を理解することを目的に、原子核を核子の多体系として見た場合に核構造を記述するためにどのような描像があり得るのか、基本的な模型から現代的なアプローチまでを概観し、多様な現象のいくつかを解説する。
- 到達目標
  - 半径や質量、殻効果などの原子核の基本的性質、スピン・アイソスピン依存性や内部斥力芯の存在など核力の現象論的特徴を把握し、これらがどのような観測データから導かれるかを理解する。また核子・中間子自由度、およびQCDに基づく核力の起源、核力から原子核を記述する理論的枠組み、核物質の相図と状態方程式について、その概要を把握する。
  - 核力の理解を基礎に、核構造を記述する基本的な模型から平均場理論など現代的なアプローチの基本概念とその手法について理解する。宇宙での元素合成を含む多様な核現象を基礎理論に関連付けて理解する。

原子核基礎論A（シラバス, cont.)

- 授業計画と内容
  核力と量子色力学、核物質の性質、原子核構造に関して理論模型のいくつかをとりあげながら最近の発展を紹介する。

1. はじめに（原子核の基本的性質）（2コマ）
2. 核力とその起源（2コマ）
3. クォークとハドロン (2コマ)
4. 核物質の相図と状態方程式（1コマ）

大西

5. 殻模型と魔法数（2コマ）
6. 平均場理論と核変形（2コマ）
7. 中性子過剰核の物理（2コマ）
8. 非束縛核と共鳴散乱理論（1コマ）

萩野

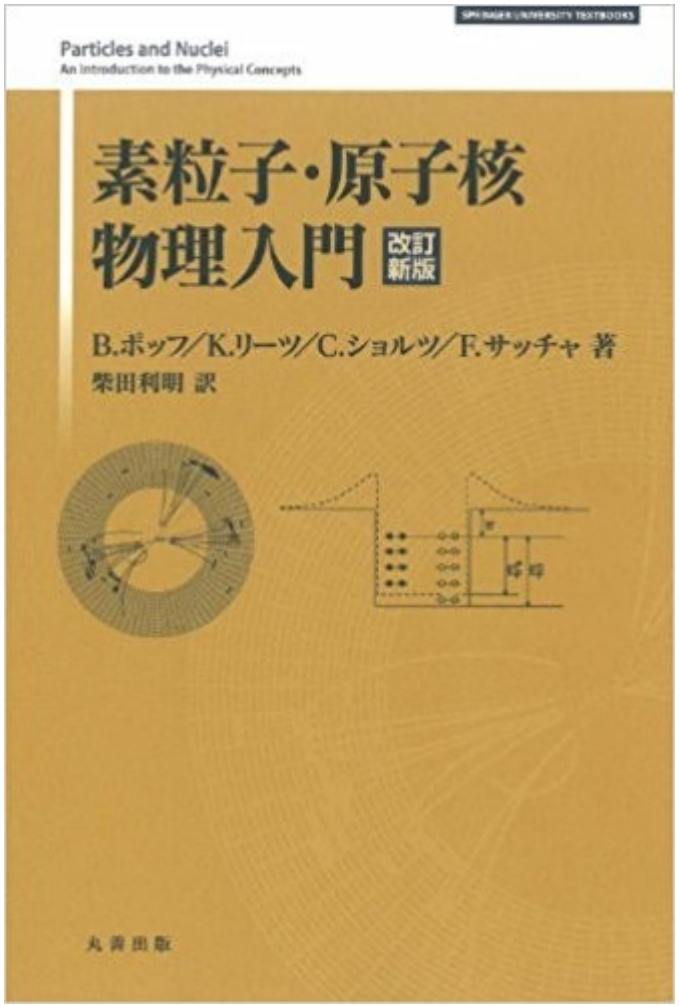
- 成績評価の方法・観点及び達成度
  - レポート試験の成績（80％） 平常点評価（20％）
    平常点評価には、出席状況および討論への積極的な参加の有無を参考にする。
  - 前半 (大西担当分) では 8-12 問程度レポートを出します。
    半分 (各章 1-2 問) 程度以上解いて提出して下さい。

§1 原子核の基本的性質

- 原子核とは
- 原子核物理学の広がり
- 原子核の大きさ
  - 微分断面積と散乱振幅，ラザフォード散乱と構造因子，原子核の密度分布，不安定原子核
- 原子核の質量
  - 質量公式
- 原子核の描像
- 原子核の安定性
- 原子核の Shell 構造

参考書

- Sec. 1 ではポッフ・リーツ・ショルツ・サッチャの教科書を参考にしています



5720 円 @amazon

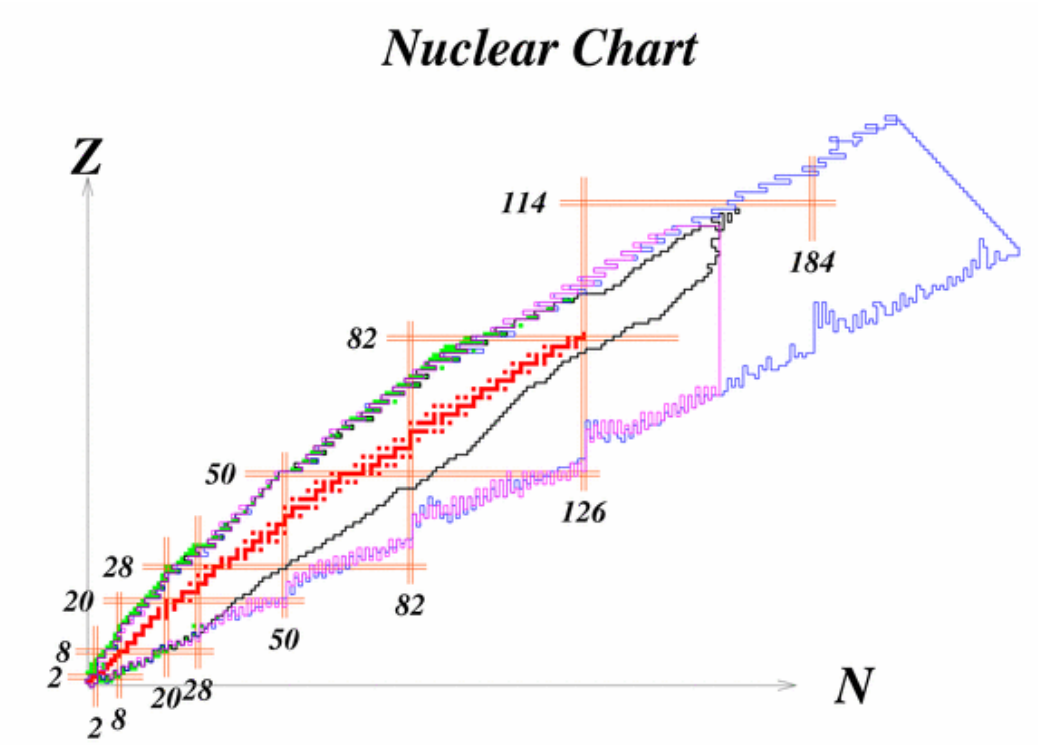
原子核とは

- 定義 1: 原子の中心にある核子 (陽子・中性子) からなる系
  - 陽子数 Z 、中性子数 N
  - 安定な原子核 287 種
  - 見つかっている原子核 ~3000 種
  - 存在が予言 ~9000 種

^{48}Ca

核子数 =(Z+N)=A

電荷 (= 陽子数 =Z) を表す記号



原子核とは

- 定義 2: 強い相互作用によって現れるハドロンの束縛・共鳴状態
  - 構成要素 = ハドロン
    核子 (p, n), ハイペロン (Λ, Σ, Ξ), 中間子 (K, η, …)
  - ハドロン = 強い相互作用で結合したクォーク・ハドロンの複合粒子
- ハイパー核

  電荷 =6

  バリオン数
  =(Z+N+1)=A

  $^{12}_{\Lambda}\mathrm{C}$

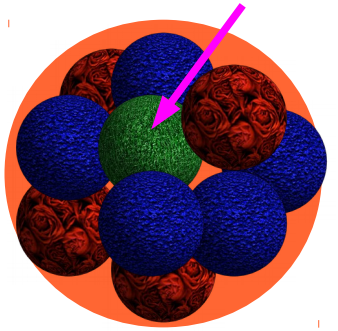
  Λ を一つ含む

  $$^{4}_{\Sigma}\mathrm{He} = \alpha \left| {}^{3}\mathrm{H} + \Sigma^{+} \right\rangle + \beta \left| {}^{3}\mathrm{He} + \Sigma^{0} \right\rangle$$

  $$^{6}_{\Lambda\Lambda}\mathrm{He} = {}^{4}\mathrm{He} + \Lambda + \Lambda$$
- 中間子原子核

  $$^{2}_{K}\mathrm{H} = \alpha \left| {}^{2}\mathrm{He} + K^{-} \right\rangle + \beta \left| {}^{2}\mathrm{H} + \bar{K}^{0} \right\rangle$$

Λ 粒子



原子核物理の広がり

- 安定核から不安定核へ
- 核子多体系からハドロン多体系へ
- 基底状態から励起状態へ
- 原子核から様々な温度・密度の核物質へ

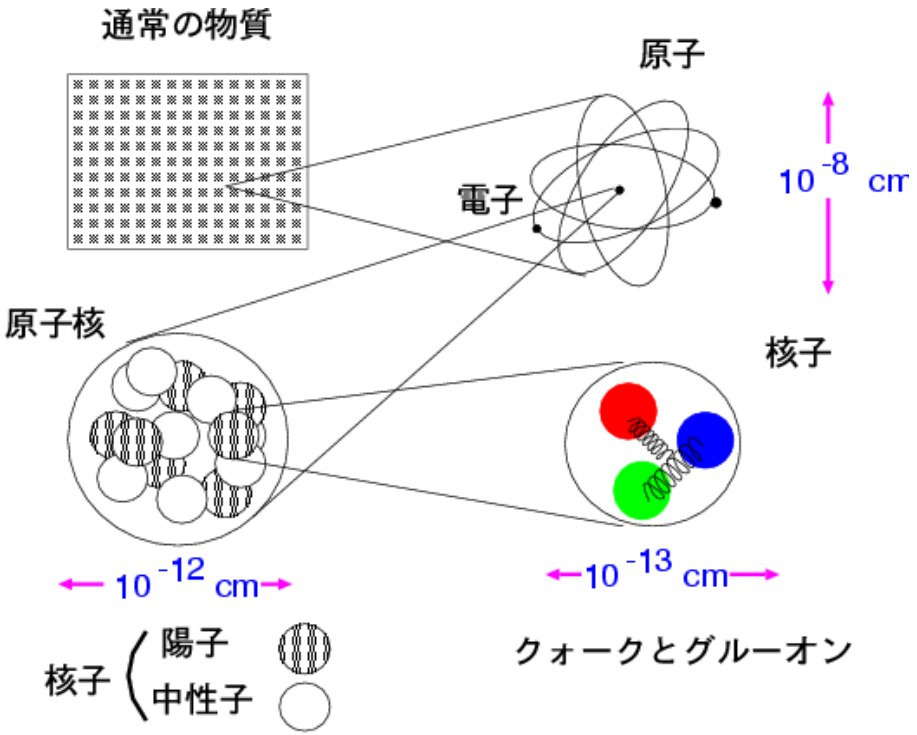
原子核の大きさ

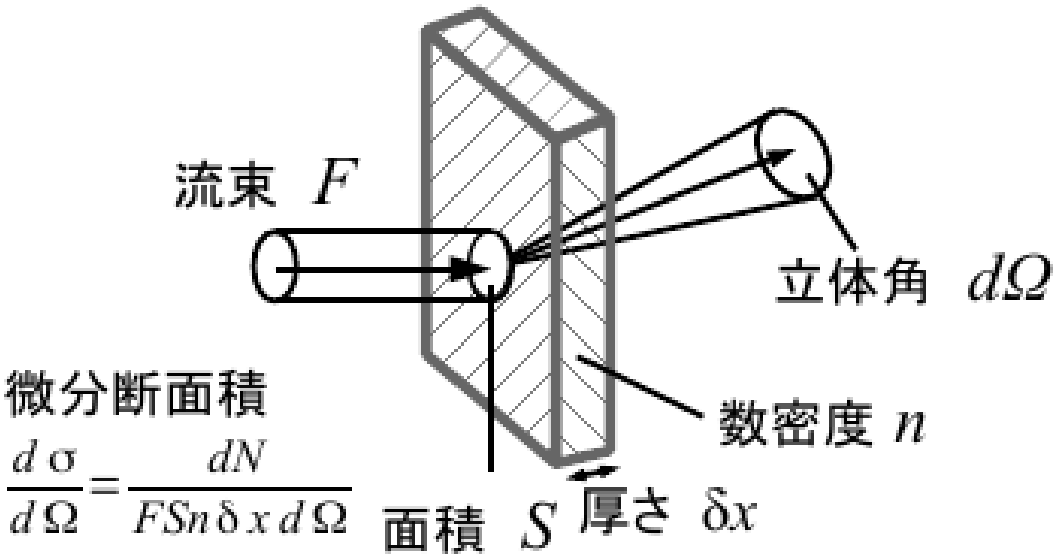
断面積

- 原子核の大きさ : R ~ 10^{-14} m (原子 ~ 10^{-10} m の 1 万分の1)
- 「目で見えない」小さなものをどうやってみるか？
  → 粒子をぶつけて散乱させて測る
- 散乱断面積

$$\sigma = \frac{N}{FSn\delta x}$$

  - 単位入射流束当たり一つの標的で散乱される確率 (面積の次元)





散乱波動関数

- シュレディンガー方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}+V(\mathbf{r})\right]\Psi(\mathbf{r})=E\Psi(\mathbf{r})$$

$$p=-i\hbar\nabla$$

短く書くと

$$(H_0+V)\Psi(\mathbf{r})=E\Psi(\mathbf{r}) \qquad \left(H_0=-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\right)$$

- 束縛状態：遠方で波動関数 ψ がゼロに近づく。
- 散乱状態：遠方から定常的に流れ込み、
  標的で散乱されて流れ出る波動関数

$$\Psi(\mathbf{r}) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}+f(\theta,\varphi)\frac{e^{ikr}}{r}$$

$f=$ 散乱振幅
$\mathbf{k}=$ 入射波束
$k=|\mathbf{k}|$

波動関数は規格化されていないが、
流れの密度を用いて (相対的な) 確率解釈が可能。

散乱振幅と微分断面積

- 流れの密度

$$\mathbf{j} = -i\hbar[\Psi^*\nabla\Psi - (\nabla\Psi^*)\Psi]/2m$$

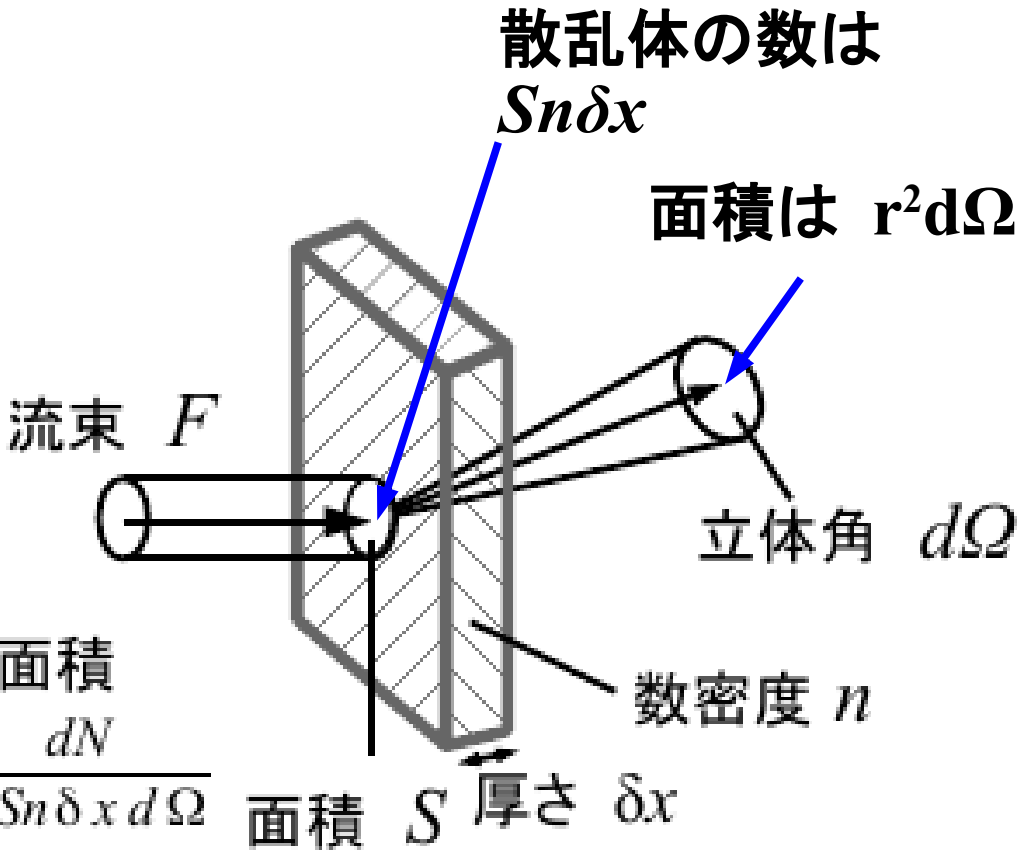
- 入射流束・外向き球面波の流れの密度

$$F = \hbar k/m\ , \quad j_r = \hbar k|f(\theta,\phi)|^2/mr^2$$

- 微分断面積

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{j_r r^2 d\Omega}{F d\Omega} = |f(\theta,\phi)|^2$$

- 散乱振幅 f と
  ポテンシャル V の関係は？



散乱波動関数の形式解

- シュレディンガー方程式

$$(E - H_0)\Psi = \Phi \ , \quad \Phi \equiv \hat{V}\Psi$$

- Φ が与えられているとすると、一般解は特解 + 斉次方程式の解
  斉次項を入射平面波にとると、

$$\Psi = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + (E - H_0)^{-1}\Phi$$

- グリーン関数 G を用いてあらわに座標表示

$$(E - H_0)G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rightarrow G(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2}\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\Psi(r) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \int dr\, G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')V(\mathbf{r}')\Psi(\mathbf{r}')$$

$$\xrightarrow{r\to\infty} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{1}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2}\frac{e^{ikr}}{r}\int d\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{k}_f\cdot\mathbf{r}'}\, V(\mathbf{r}')\Psi(\mathbf{r}')$$

$$= e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \boxed{-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\langle \mathbf{k}_f|V|\Psi\rangle}\frac{e^{ikr}}{r}$$

$f(\theta, \phi)$

$\mathbf{k}_f = \mathbf{r}$ 方向の
波数ベクトル

グリーン関数の導出

- **フーリエ変換**

$$G(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \widetilde{G}(\mathbf{q}) \to \frac{\hbar^2}{2m}\,(k^2 - q^2)\widetilde{G}(\mathbf{q}) = 1$$

$$\to \widetilde{G}(\mathbf{q}) = \frac{2m}{\hbar^2}\,\frac{1}{k^2 - q^2} = \frac{1}{E - E_q} \qquad (E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m})$$

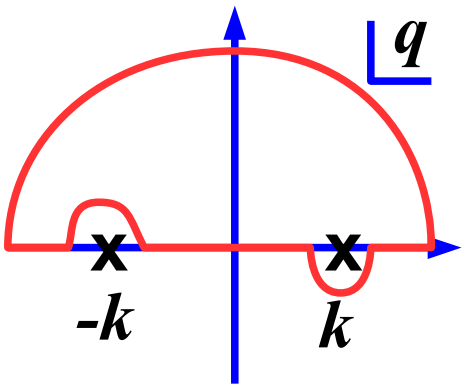
- **逆フーリエ変換**

$$G(\mathbf{r}) = \frac{2m}{\hbar^2} \int \frac{q^2 dq\, d(\cos\theta)\, d\phi}{(2\pi)^3} e^{iqr\cos\theta} \frac{1}{k^2 - q^2}$$

$$= \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \int_0^\infty q dq \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{k^2 - q^2}$$

$$= \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \int_{-\infty}^\infty q dq \frac{e^{iqr}}{k^2 - q^2 + i\varepsilon}$$

$$= \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir}\, 2\pi i \times\, k\, e^{ikr} \,\times \frac{-1}{2k} = -\frac{2m}{\hbar^2}\,\frac{e^{ikr}}{4\pi r}$$



Cauchy の積分定理で
遠方で外向き球面波となるよう
q=k の pole をとる。(iε 処方)

ボルン近似

- 散乱振幅

$$f(\theta,\varphi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\langle \mathbf{k}_f|V|\Psi\rangle$$

右辺のψを平面波で近似(ボルン近似)

$$f_{\mathrm{Born}}(\theta,\varphi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\langle \mathbf{k}_f|V|\mathbf{k}\rangle$$

$$\langle \mathbf{k}'|V|\mathbf{k}\rangle = \int d\mathbf{r}\, e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}}\, V(\mathbf{r})\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \widetilde{V}(\mathbf{k}'-\mathbf{k})$$

ボルン近似での散乱振幅はポテンシャルのフーリエ変換に比例

畳み込みポテンシャルと構造因子

- 畳み込みポテンシャル（原子核と粒子のポテンシャル）

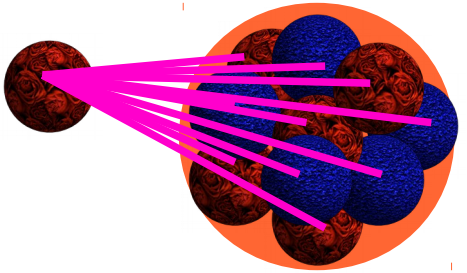
$$V(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}'\, v(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')$$

v= 入射粒子 - 核子ポテンシャル
ρ = 密度

フーリエ変換

$$\widetilde{V}(\mathbf{q}) = \widetilde{v}(\mathbf{q})\widetilde{\rho}(\mathbf{q}) = \widetilde{v}(\mathbf{q})F(\mathbf{q})$$

構造因子



- 散乱断面積

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 |\widetilde{v}(\mathbf{q})|^2\, |F(\mathbf{q})|^2\ , \quad F(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r}\, \rho(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$$

原子核との散乱断面積 = 核子との散乱断面積 × | 構造因子 |^2
(ボルン近似 & 畳み込みの場合)

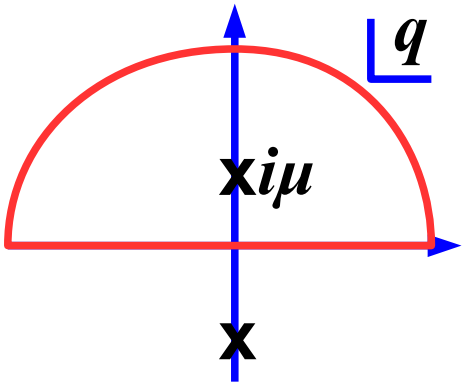
フーリエ変換

- **畳み込みのフーリエ変換 = フーリエ変換の積**

$$A(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' B(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, C(\mathbf{r}')$$

$$= \int d\mathbf{r}' \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'} \widetilde{B}(\mathbf{k})\, \widetilde{C}(\mathbf{k}')$$

$$= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \widetilde{B}(\mathbf{k})\, \widetilde{C}(\mathbf{k})$$



- **湯川関数のフーリエ変換 =Lorentzian**

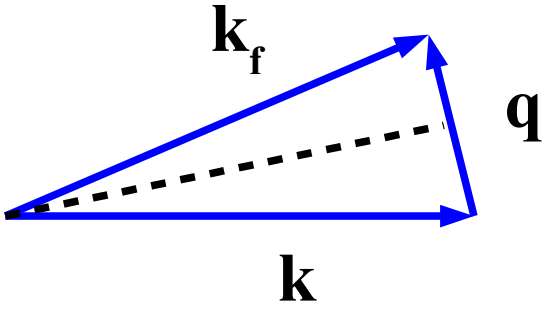
$$V(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{\mu^2+q^2} = \frac{1}{ir} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q\, dq}{(2\pi)^2} \frac{e^{iqr}}{\mu^2+q^2}$$

$$= \frac{1}{ir} \times 2\pi i \times \frac{i\mu}{(2\pi)^2} \frac{e^{-\mu r}}{2i\mu} = \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r}$$

ラザフォード散乱

- 湯川ポテンシャル

$$v(\mathbf{r}) = \frac{C\exp(-\mu r)}{r} \rightarrow \tilde{v}(\mathbf{q}) = \frac{4\pi C}{\mu^2 + q^2}$$



- クーロンポテンシャル

$$v(\mathbf{r}) = \frac{C}{r} \rightarrow \tilde{v}(\mathbf{q}) = \frac{4\pi C}{q^2}$$

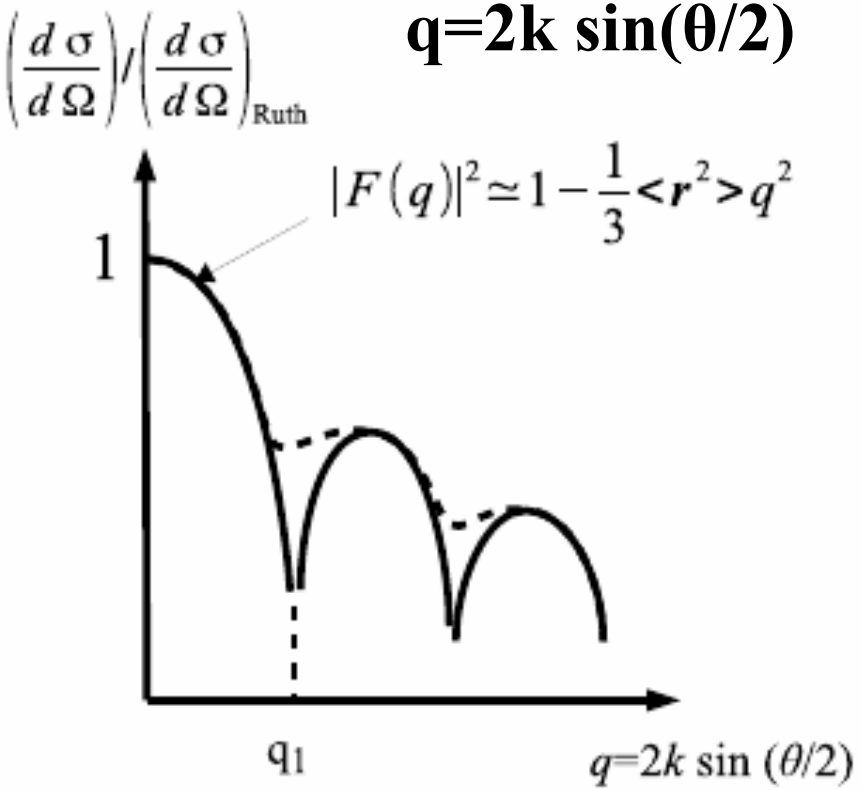
- ラザフォード散乱（クーロン散乱）

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{Ruth}} |F(\mathbf{q})|^2$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{Ruth}} = \left(\frac{2m\alpha Z_1 Z_2}{q^2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\alpha Z_1 Z_2}{4E\,\sin^2(\theta/2)}\right)^2$$

q=2k sin(θ/2)



（自然単位系。
ρ は規格化されているとする。）

構造因子

- 密度が球対称である場合

$$F(\mathbf{q}) = \int d^3 r e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}) = \int 4\pi r^2 dr \rho(r) \frac{\sin qr}{qr}$$

$$= \int 4\pi r^2 dr \rho(r) \left(1 - \frac{1}{6} q^2 r^2 + \mathcal{O}(q^4)\right)$$

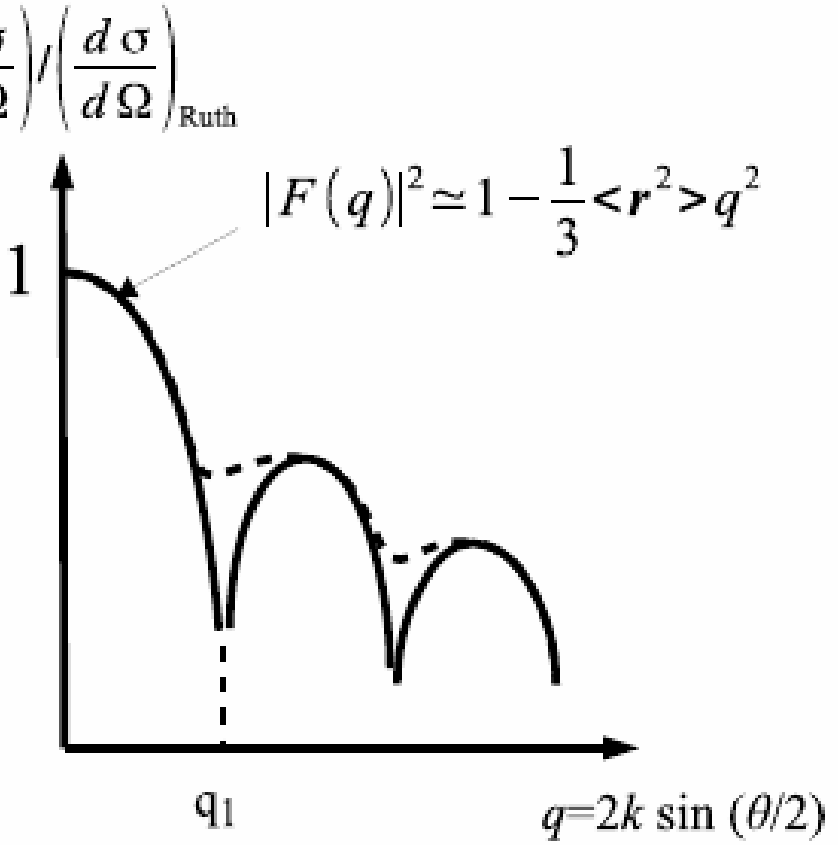
$$= 1 - \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle q^2 + \mathcal{O}(q^4)$$

小さな q での形から
平均自乗半径が分かる

- 半径 R の一様球の場合

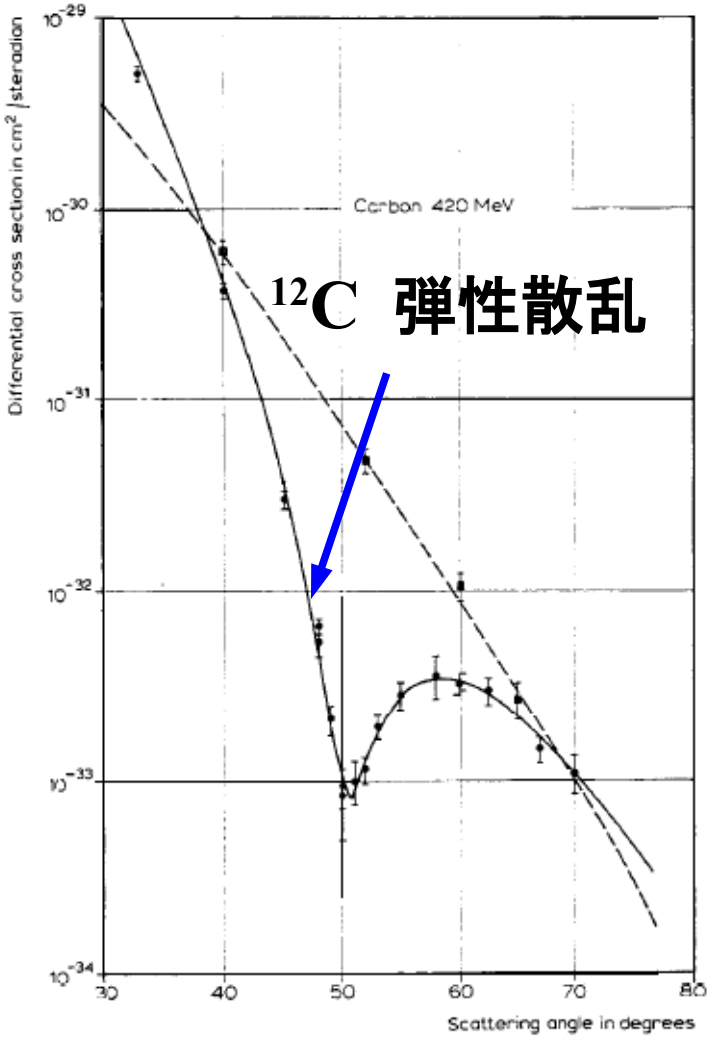
$$F(\mathbf{q}) = \frac{3}{q^3 R^3} (\sin qR - qR \cos qR)$$

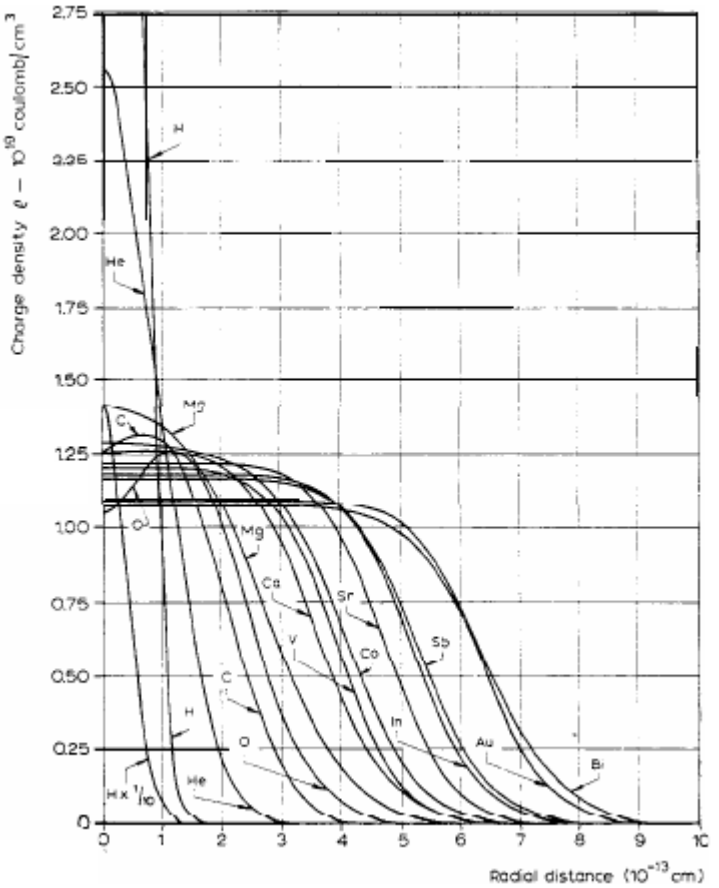
F が小さくなる q から半径が
推定できる！



原子核の密度分布

- 電子散乱による原子核の密度分布研究
  Robert Hofstadter (Nobel prize in Physics, 1961)





http://www.nobelprize.org/

原子核の密度分布

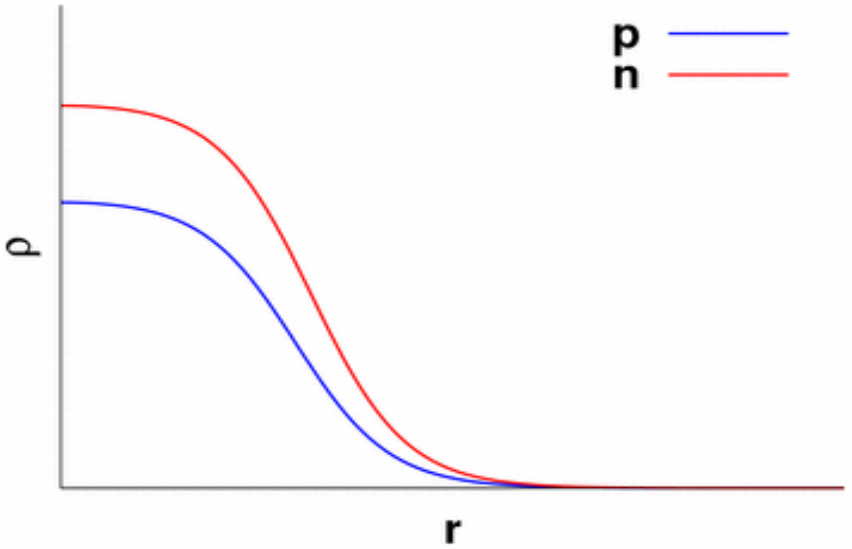
- 原子核における核子の密度: Woods-Saxon (または Fermi) 型

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left[\frac{r - R_{\rm WS}}{d}\right]}$$

$$R_{\rm WS} \simeq 1.07 A^{1/3}\ {\rm fm}, \quad d \simeq 0.54\ {\rm fm}\ , \quad \rho_0 \simeq 0.16\ {\rm fm}^{-3}$$

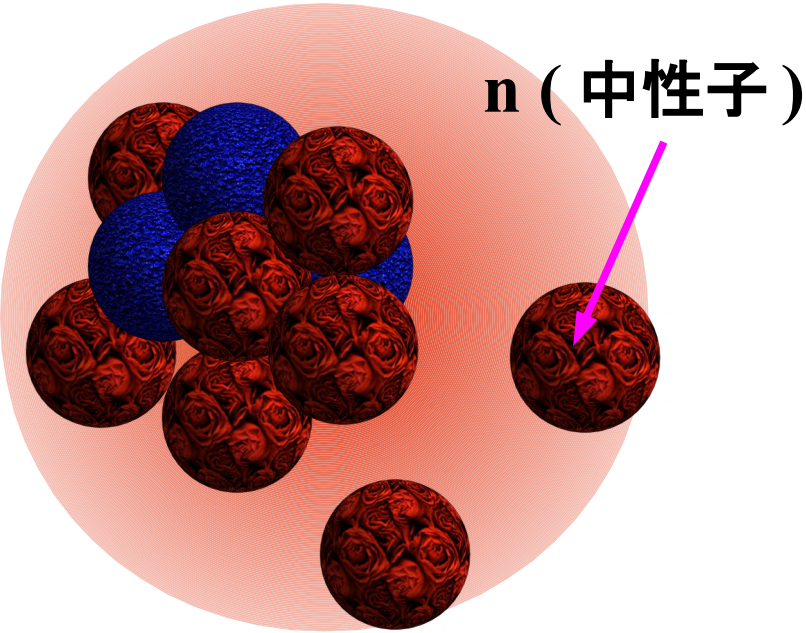
一様球として平均自乗半径を説明するには
$R = r_0 A^{1/3}$, r_0=1.21 fm

半径 $\propto A^{1/3} \rightarrow$ 体積 $\propto A$
→ 大きな原子核の中心部は
密度が原子核によらず
一定の値 ρ_0 をとる
→「核物質」



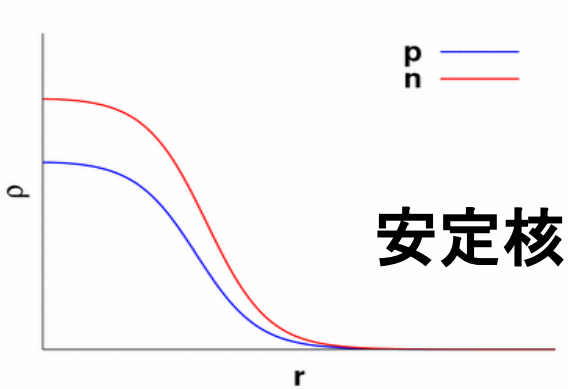
不安定原子核

- 安定核の半径 $R \sim 1.1\ A^{1/3}$ (fm) → 密度は原子核によらず一定
- 中性子過剰核の半径 $R \gg 1.1\ A^{1/3}$ (fm) (公式はまだない)
  → 外側の中性子が大きく広がっている「ハロー構造」
  （ハロー＝太陽の回りに見える暈）

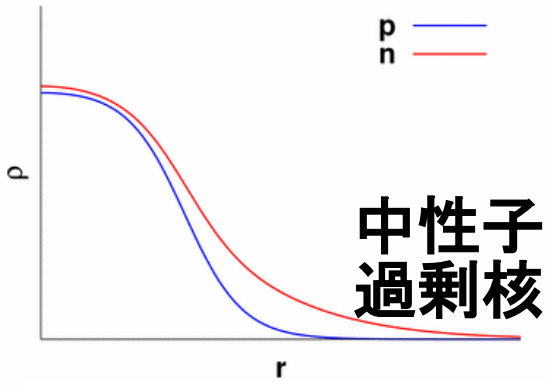


中性子過剰核 N≫Z

例 : ^{11}Li (Z=3, N=8)



安定核



中性子過剰核

注意点

- ポテンシャル問題から2体問題に移るには、
  質量 (m) を換算質量 ($\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$) に置き換えが必要
- 相対論効果・反跳効果・強い相互作用効果を無視していることにも注意。
- 電子散乱では Rutherford 散乱断面積を、スピンの効果を含めた Mott 散乱断面積に書き換える必要あり。

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{Mott}} = \frac{(2Z_1 Z_2 \alpha E)^2}{q^4}\left[1 - v^2 \sin^2(\theta/2)\right]$$

(自然単位系 $\hbar$=c=1, E は質量エネルギーを含む)

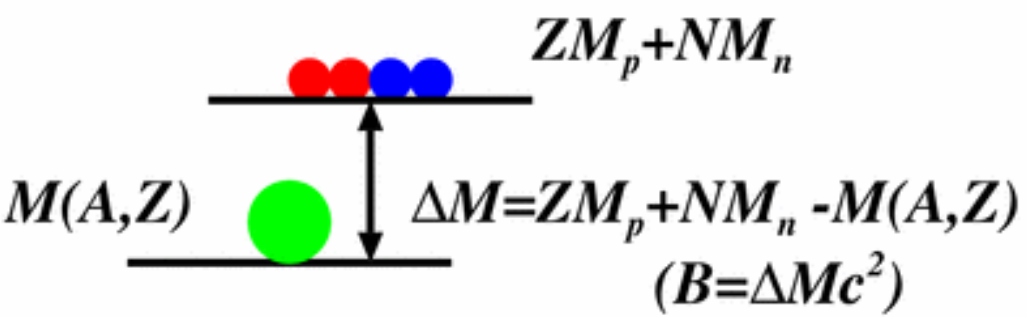
原子核の質量

原子核の束縛エネルギー

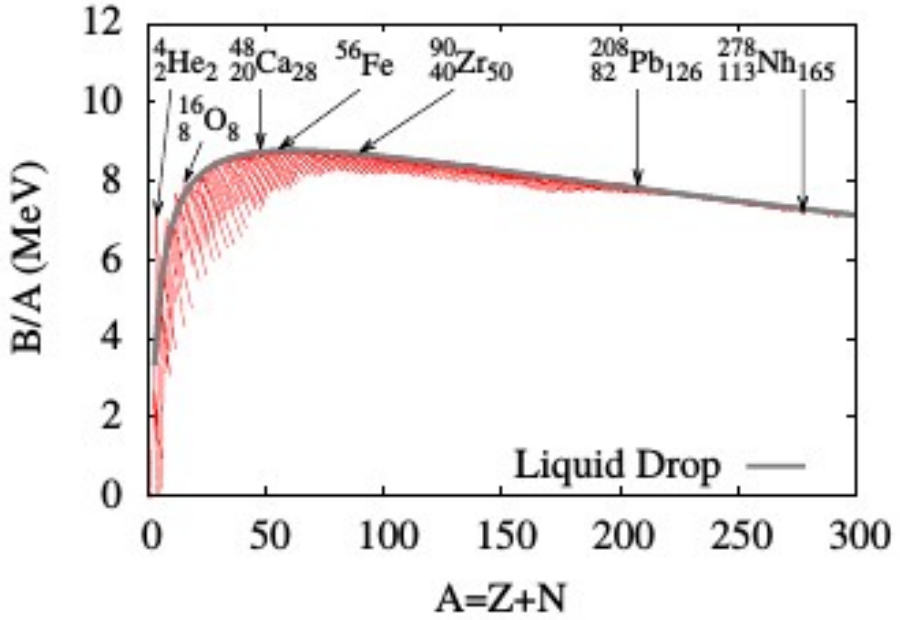
- 束縛エネルギー

$$B(A,Z) = ZM_p + NM_n - M(A,Z)$$

  - 陽子数 Z, 中性子数 N, 陽子質量 M_p, 中性子質量 M_n, 原子核質量 M(A,Z)
  - 原子核の質量は、核子の質量の和より小さい（質量欠損）
- 束縛エネルギーの観測値 : 16 ≤ A≤ 240 において、B/E ~ 8 MeV



質量欠損 = 核子質量の和 − 原子核の質量
束縛エネルギー = 質量欠損 x c^2



質量公式

- **Weizsäcker の半経験的質量公式**

$$B(A,Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N-Z)^2}{A} + a_p \frac{\delta_p}{A^\gamma}$$

体積　表面　クーロン　対称エネルギー　対エネルギー

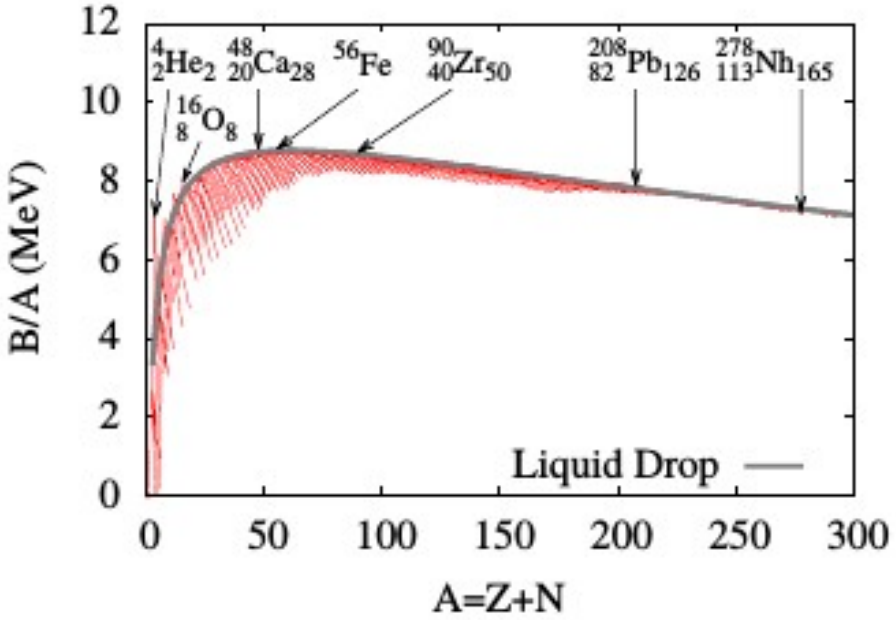
- 体積項、表面項 → 表面張力のある液滴
- 一様帯電球 (半径 $R = r_0 A^{1/3}$, 電荷 $Q=Ze$) のクーロンエネルギー

$$E_C = \frac{3}{5} \frac{\alpha \hbar c}{r_0} \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

- 対称エネルギー、対エネルギーは液滴描像からは出てこない。

a_v	a_s	a_C	a_a	a_p
15.85	18.34	0.71	23.21	12.0

単位 MeV (γ=1/2 の場合)



フェルミガス模型 (1)

- フェルミガス模型
  - 核子はフェルミオン → 一つの量子状態に1粒子までしか入れない
  - フェルミ分布関数

$$f(E) = \frac{1}{1+\exp\left[(E-\mu)/T\right]} \overset{T\to 0}{\longrightarrow} \Theta(\mu - E)$$

温度ゼロではエネルギーが化学ポテンシャル μ までの状態に
びっしりと粒子が詰まる。

$$A = 2\times 2\times \sum_n f(E_n) = 4V\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\Theta\left(\mu - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right) = \frac{4V}{(2\pi)^3}\frac{4\pi k_{\rm F}^3}{3}$$

- 体積 $V=4\pi r_0^3 A/3$ よりフェルミ波数 k_F、運動エネルギーが求まる

$$E_{\rm F} = \frac{\hbar^2 k_{\rm F}^2}{2m} \simeq 33\ {\rm MeV}\ , \quad E_K = \frac{1}{A}\frac{4V}{(2\pi)^3}\int_{|k|<k_{\rm F}} d\mathbf{k}\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{3}{5}E_{\rm F} \simeq 20\ {\rm MeV}$$

質量公式の体積項の説明には、核子あたり -36 MeV の相互作用エネルギー(引力) が必要！

量子力学と位相空間

- 状態数 ＝ 位相空間
  - 1 次元の箱 (長さ L, 周期境界条件)

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik_n x} \ , \quad k_n = \frac{2\pi}{L} n$$

L が十分大きいとき、n=Lk/2π

$$\sum_n = \frac{L}{2\pi} \Delta k \sum_{k_n} \to \frac{L}{2\pi} \int dk$$

  - 3 次元の箱 (体積 $V=L^3$, 周期境界条件)

$$\sum_{\mathbf{n}} \to \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} = \int \frac{d\mathbf{r} d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}$$

フェルミガス模型 (2)

- **陽子数と中性子数が異なる場合 → フェルミ波数がずれる**

$$k_{\mathrm{F}p} = k_{\mathrm{F}} \left(\frac{2Z}{A}\right)^{1/3} = k_{\mathrm{F}} \left(1-\delta\right)^{1/3} , \quad k_{\mathrm{F}n} = k_{\mathrm{F}} \left(\frac{2N}{A}\right)^{1/3} = k_{\mathrm{F}} \left(1+\delta\right)^{1/3}$$

非対称度

$$\delta = (N-Z)/A$$

- **核子あたりの運動エネルギー**

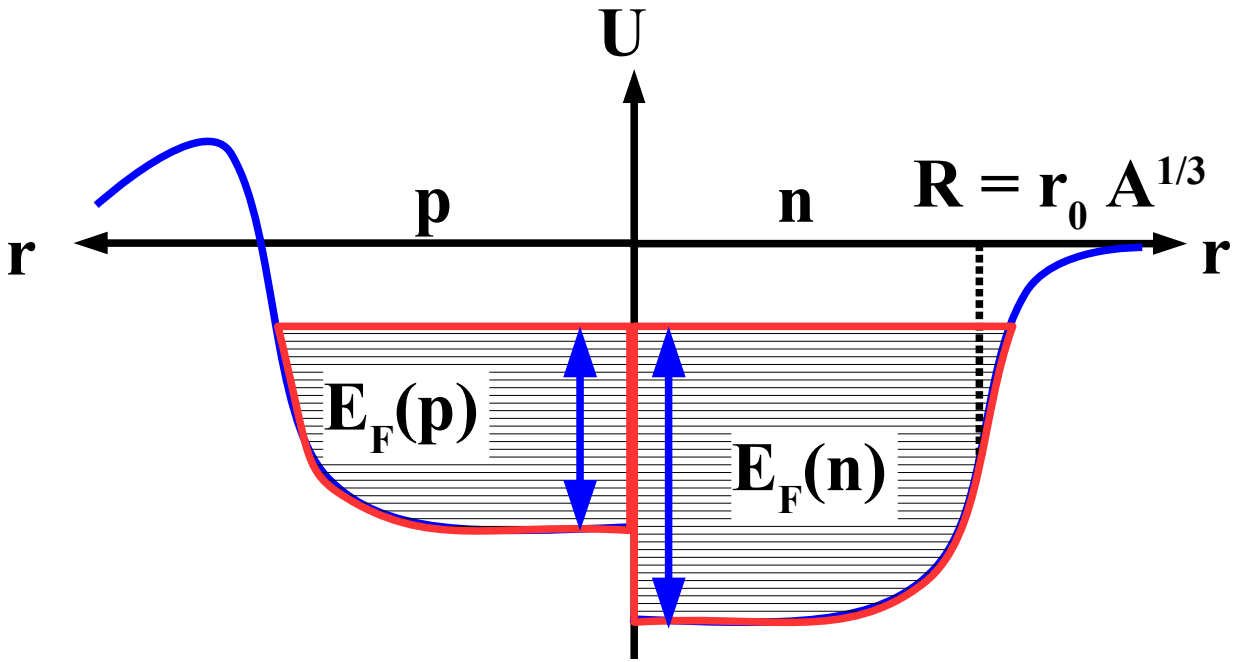
$$\begin{aligned} E_K =& \frac{Z}{A}\frac{3}{5}\frac{\hbar^2 k_{\mathrm{F}p}^2}{2m} + \frac{N}{A}\frac{3}{5}\frac{\hbar^2 k_{\mathrm{F}n}^2}{2m} = \frac{3}{5}E_{\mathrm{F}} \times \frac{1}{2}\left[(1-\delta)^{5/3} + (1+\delta)^{5/3}\right] \\ \simeq& \frac{3}{5}E_{\mathrm{F}} + \frac{1}{3}E_{\mathrm{F}}\delta^2 + \mathcal{O}(\delta^4) \end{aligned}$$

フェルミガス模型の運動エネルギーから現れる
対称エネルギーは $E_F/3 \sim 11$ MeV

→ 陽子-陽子、中性子-中性子間の引力よりも強い
陽子-中性子間の引力が必要

原子核の描像

- 中心部分はほぼ密度一定の「核物質」
- 核子間に引力が働き、一粒子ポテンシャル中を核子が運動
- 表面では密度・ポテンシャルともに小さくなる
  → 質量公式の表面項



原子核の安定性

- **陽子・中性子・α 粒子放出**

$$S_p = B(A,Z) - B(A-1,Z-1)$$
$$S_n = B(A,Z) - B(A-1,Z)$$
$$S_\alpha = B(A,Z) - B(A-4,Z-2)$$

分離エネルギーが負 (S<0) の場合、粒子放出により崩壊 (2p, 2n 放出についても考える必要あり)
例 :

$$^{210}_{84}\mathrm{Po}_{126} \rightarrow {}^{206}_{82}\mathrm{Pb}_{124} + \alpha$$

- **弱崩壊 : 陽子・中性子が入れ替わって核種が変化**

$$\text{"}n\text{"} \rightarrow \text{"}p\text{"} + e^- + \bar{\nu}_e \quad (\beta \text{ decay})$$
$$\text{"}p\text{"} \rightarrow \text{"}n\text{"} + e^+ + \nu_e \quad (\beta^+ \text{ decay})$$
$$\text{"}p\text{"} + \text{"}e\text{"} \rightarrow \text{"}n\text{"} + \nu_e \quad (\text{electron capture})$$

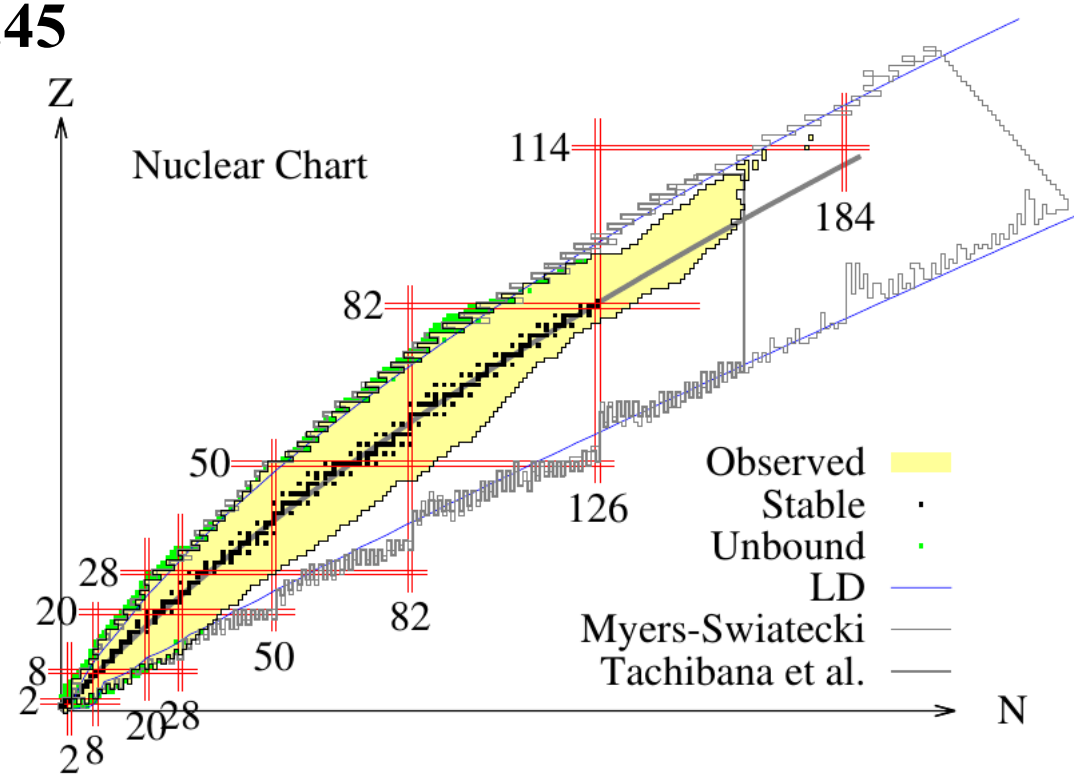
- **粒子放出に対して安定であり、同重体 (A が一定) の中で最も質量が小さい場合、原子核は安定である。**

原子核の安定性

- ハイゼンベルグの谷
  同重体の中で最も安定な原子核を繋いだ線
  - 質量公式による安定条件 (対エネルギーは無視)

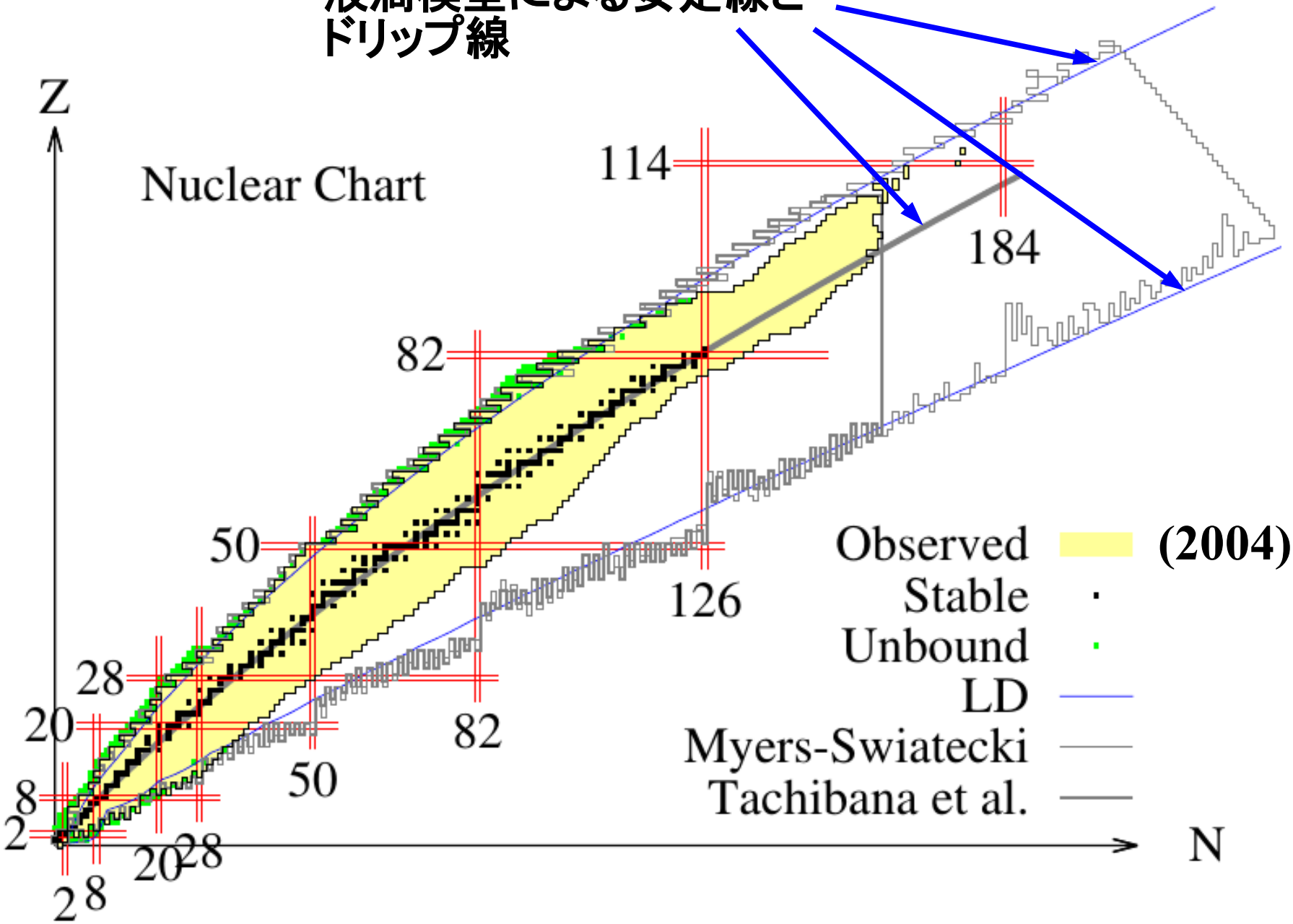
$$Y_p \equiv \frac{Z}{A} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a_c A^{2/3}}{4a_a}\right)^{-1}$$

  - 小さな原子核では Yp ~ 0.5
    鉄近辺の原子核では Yp ~ 0.45
    大きな原子核 (A~200) では
    Yp ~ 0.4



原子核の安定性

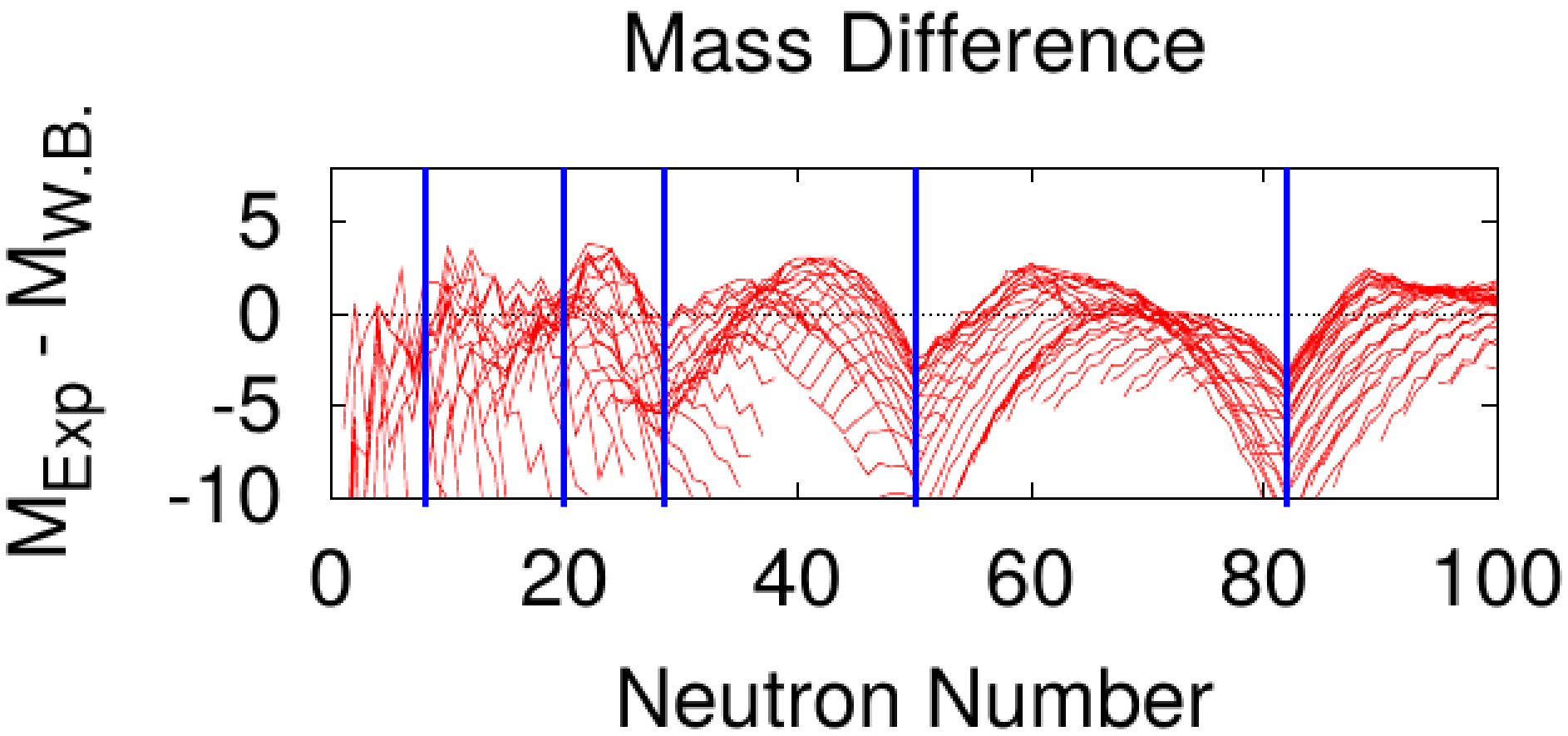
液滴模型による安定線と
ドリップ線



原子核の殻構造

原子核の殻構造

- **魔法数 (Magic Number)**
  N or Z=2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 において原子核は安定
- **殻構造**
  縮退した1粒子状態が埋まると系は安定となる



魔法数

- 3次元調和振動子の魔法数
  - k 個の量子を3つに分ける

$$\mathrm{M.N.} = 2\sum_{k=0}^{n} {}_{k+2}\mathrm{C}_2 = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$$

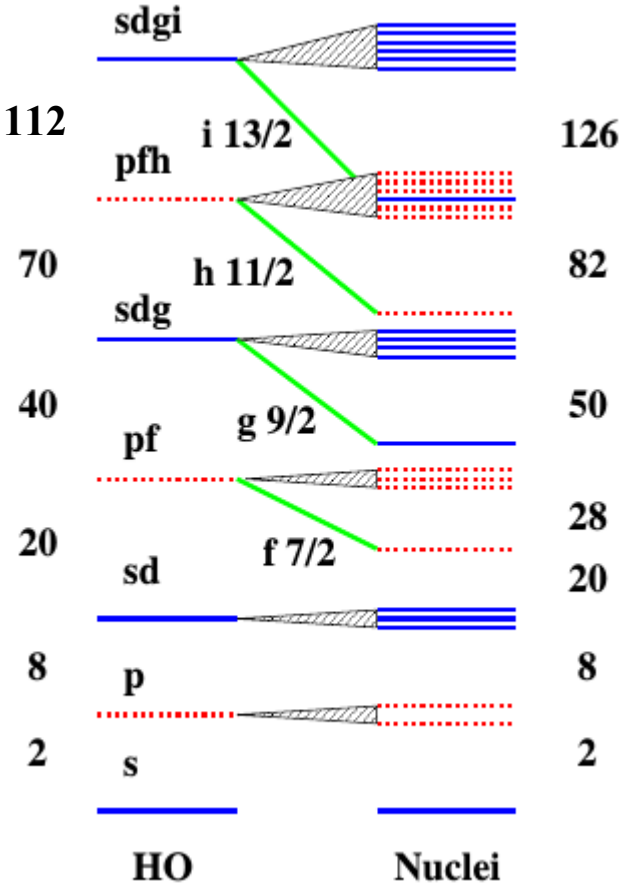
  - 魔法数 =2, 8, 20, 40, 70, 112, 168, ...
- それぞれの shell (n ≧ 3) において最大の j 状態

  $f_{7/2}$(L=3), $g_{9/2}$(L=4), $h_{11/2}$(L=5), $i_{13/2}$(L=6)

  が大きく下がると、魔法数

  2, 8, 20, 28, 50, 82, 126

  が説明可能

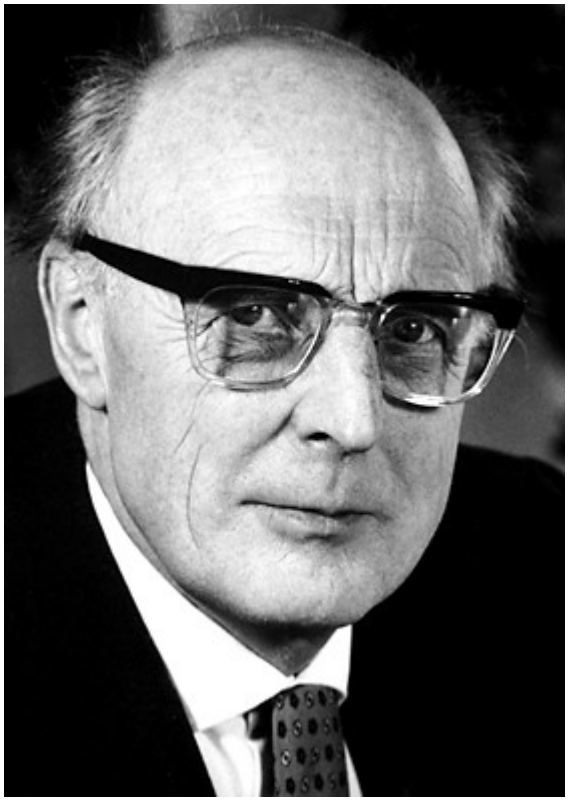


強い軌道スピン(LS) 力による魔法数の説明
Mayer-Jensen ('49)
[Nobel prize in phys. ('63)]

Nobel prise in physics (1963)

- **Mayer & Jensen, Nobel prise in physics (1963)**
  for their discoveries concerning nuclear shell structure

Maria Goeppert Mayer



J. Hans D. Jensen

https://www.nobelprize.org

$\hbar\omega \sim 41\, A^{-1/3}$ MeV

- **n と A の関係**

$$A = \int^{n} dk\ 4 \times \frac{n^2}{2} = \frac{2}{3}n^3 \rightarrow n = (3A/2)^{1/3}$$

- **エネルギー (3D HO)**

$$E \simeq \int^{n} dn'\, \hbar\omega n'\, 4 \times \frac{n'^2}{2} = \hbar\omega \times \frac{1}{2}n^4$$

$$\frac{1}{2}m\omega^2 A\langle r^2\rangle = \frac{1}{2}E$$

- **半径 ∝ $A^{1/3}$ を利用**

$$\hbar\omega = \frac{5\hbar^2}{4mr_0^2}\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} A^{-1/3} \simeq 41\, A^{-1/3}\ \mathrm{MeV}$$

(経験的な値と一致)

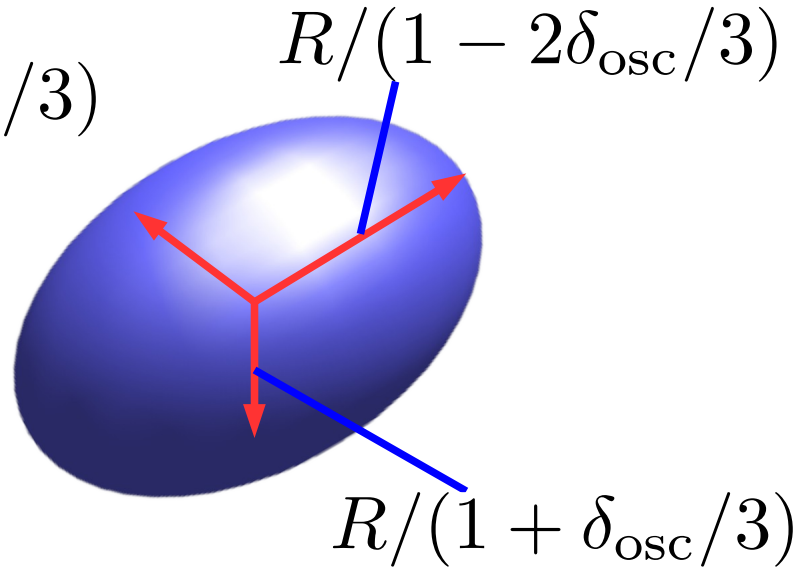
原子核の変形

- 陽子数・中性子数が魔法数の原子核 (閉核)= 球形
  - Lj の決まった状態を全て埋めると密度分布は球対称
- 魔法数から離れた多くの原子核は変形
  - 液滴は球形を好む (表面張力) → 変形は量子効果 (1 粒子軌道)
- 3 次元調和振動子
  - 伸びた方向の ω が小さくなる

$$\delta_{\rm osc} = (\omega_\perp - \omega_z)/\bar{\omega},\ \bar{\omega} = \frac{1}{3}(2\omega_\perp + \omega_z)$$

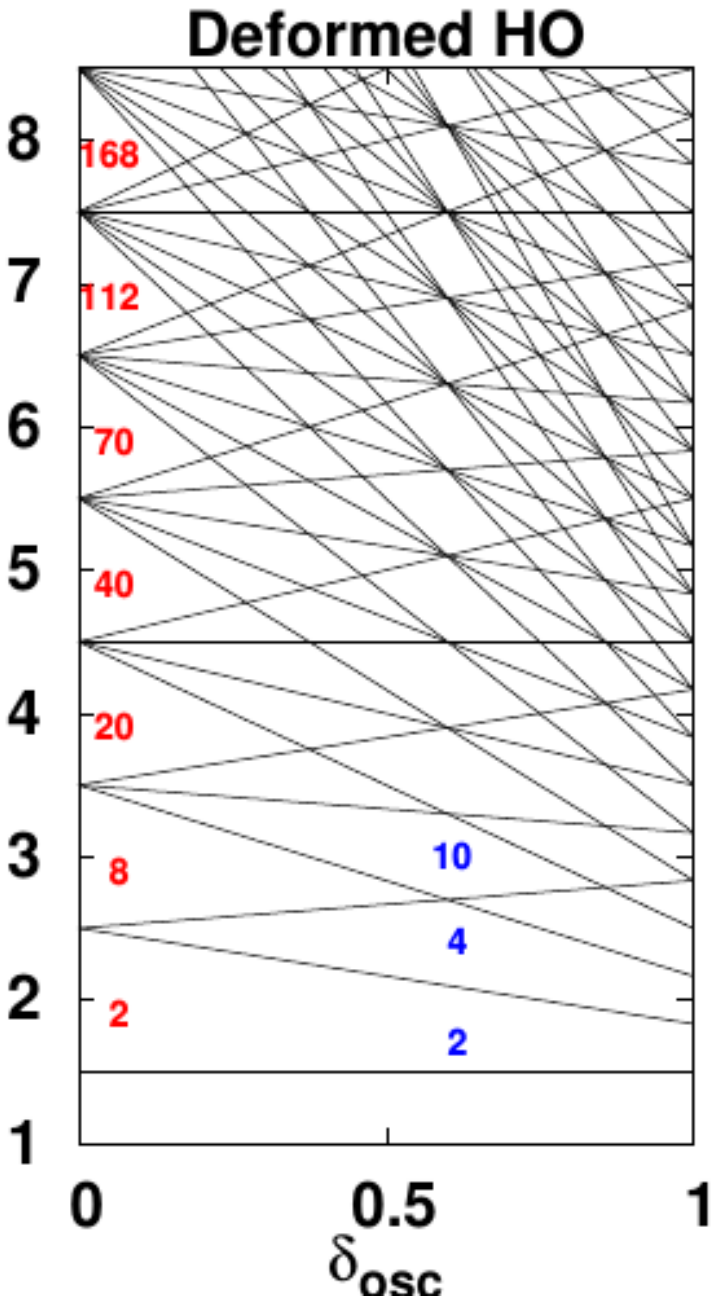
$$\omega_\perp = \bar{\omega}(1 + \delta_{\rm osc}/3),\ \omega_z = \bar{\omega}(1 - 2\delta_{\rm osc}/3)$$

  - 変形により下がる1粒子状態を核子が占め、より安定となる
    → 閉核から離れた原子核が変形



変形核での魔法数

- 変形核での 1 粒子エネルギー
  (Nilsson diagram)
  → 球形とは異なる粒子数で
  縮退が起こる
- 超変形状態 (super deformation)
  - 長軸 : 短軸 = 2:1 (δ = 0.6)
  - 新しい魔法数
    2, 4, 10, ...
  - 超変形核は大きな慣性能率をもち、
    高い角運動量 (J ~ 60) まで
    回転バンドが存在する
    P. Twin et al., PRL57('86)811



Superdeformed Band of ^{152}Dy

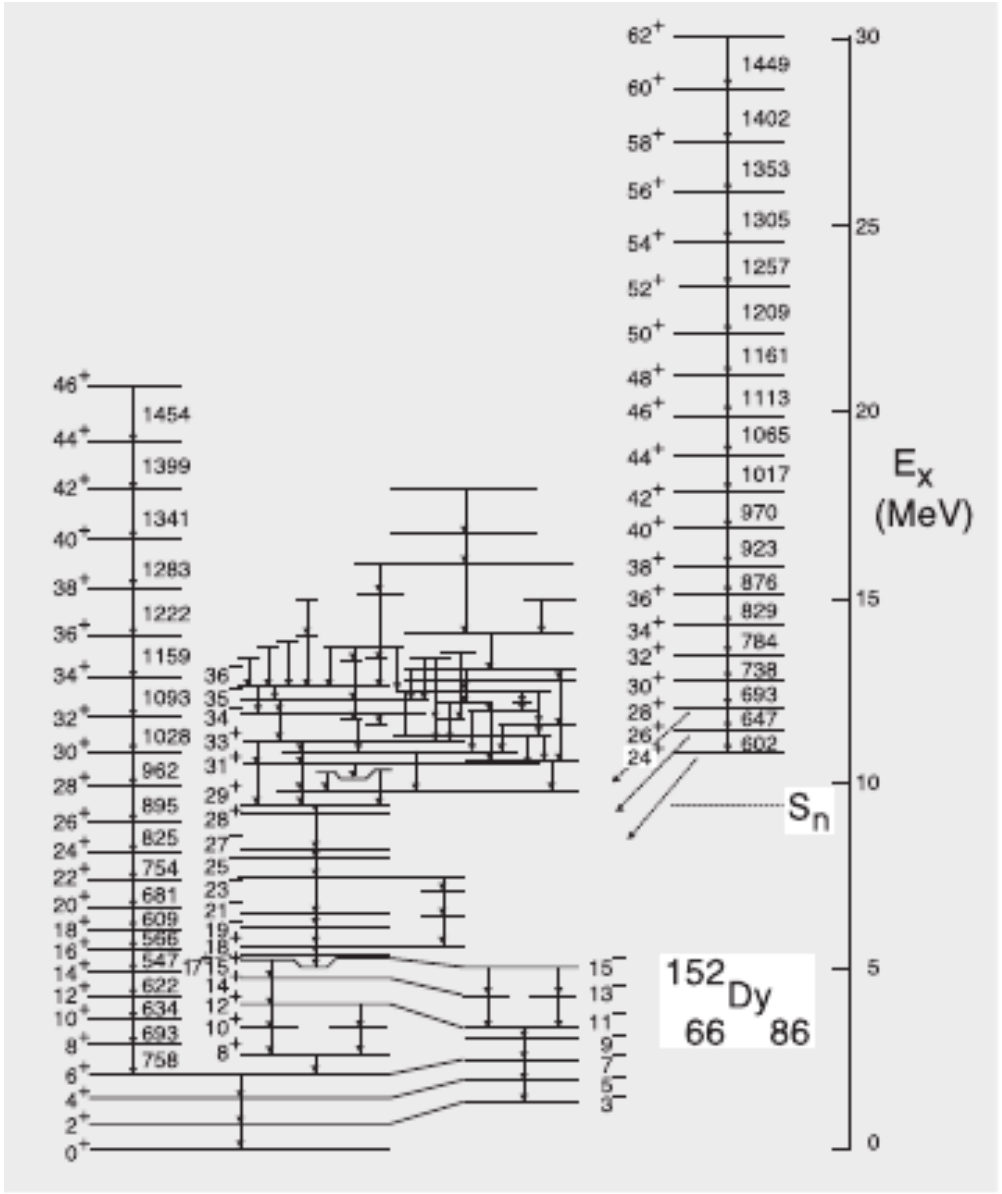
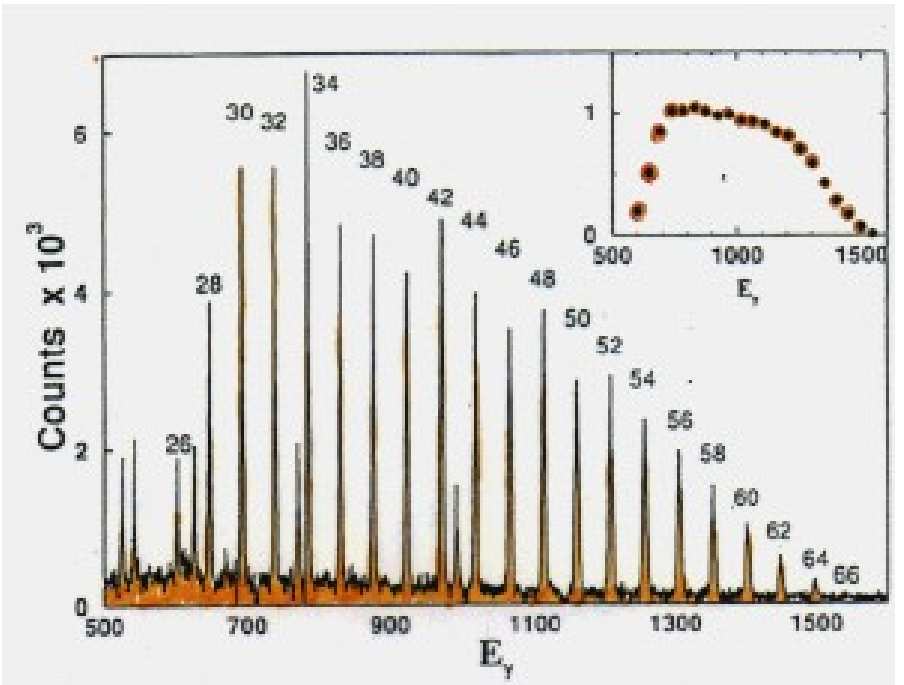


Figure 5. Superdeformed band in ^{152}Dy.

Heyde, Wood, Phys. Scr. 91 ('16) 083008.



P. Twin et al., PRL57('86)811

注意点

- 調和振動子は大きな原子核のポテンシャルとしてはよくない。L^2 に比例する項を加える、または密度分布と同様に、Woods-Saxon 型のポテンシャルでの議論が必要。
- Nilsson diagram において、より正確な計算では 1 粒子エネルギーは変形度の1次関数でなく、より複雑な振る舞いをすることに注意。

- 核構造のこの先については講義後半 (担当 : 萩野) 、原子核理論ゼミ (担当 : 吉田) を参考のこと。
  - 原子核の励起
    - 1 粒子励起、集団励起 (振動、回転) 、巨大共鳴
  - 原子核の模型
    - 殻模型、クラスター模型、平均場模型

レポート問題 (Sec. 1)

1. 密度分布が点状、指数関数、ガウス型、一様球、の場合に、形状因子を求めよ。

$$\rho(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}), \rho(\mathbf{r}) = \frac{a^3}{8\pi}\exp(-ar), \rho(\mathbf{r}) = \left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{3/2}\exp(-a^2r^2/2),$$

$$\rho(\mathbf{r}) = (4\pi R^3/3)^{-1}\,\Theta(R-r)$$

2. 中性子星を中性子のみからなり、重力を含む質量公式

$$M(A,Z) = M_N A - B(A,Z) - \frac{3}{5}\frac{GM_N^2A^2}{R}$$

に従う密度一定の巨大な原子核とする。このとき中性子星の最大質量を求めよ。対エネルギー・表面エネルギーは無視して良い。ただし、以下の数字を用いて良い。

$$\frac{GM_N^2}{\hbar c} = 5.9\times10^{-39}, M_\odot = 1.9884\times10^{30}\ \mathrm{kg}, \hbar c = 197\ \mathrm{MeV\cdot fm},$$

$$M_N = 939\ \mathrm{MeV}/c^2 = 1.66\times10^{-27}\ \mathrm{kg}, r_0 = 1.07\ \mathrm{fm}$$

(最大質量の結果は非現実的。信じないように。)

レポート問題 (Sec. 1)

3. 質量公式の項で示したパラメータは最新の原子核質量の情報を使わずに得られている。2003 年時点での比較的新しい質量・束縛エネルギーは
G.Audi, A.H.Wapstra, C.Thibault, NPA729 (2003), 337-676
などに示されており、講義のリソースに mass2003.txt としておいてある。これを用いてフィッティングを行い、質量公式のパラメータがどの程度変化するか調べよ。
(いろいろ遊んだ結果も述べてくれると嬉しい。)

前半(大西担当分)では8-12 問程度レポートを出します。半分程度以上解いて提出して下さい。
(〆切は後の講義開始時としますので、講義中に提出してくれると手間がかからず助かります。)