原子核基礎論A（火2，大西・萩野）

- 授業計画と内容
  核力と量子色力学、核物質の性質、原子核構造に関して理論模型のいくつかをとりあげながら最近の発展を紹介する。

1. はじめに（原子核の基本的性質）（1コマ → 2コマ）
2. 核力とその起源（3コマ）
3. クォークとハドロン (1コマ)
4. 核物質の相図と状態方程式（2コマ）

大西

5. 殻模型と魔法数（1コマ）
6. 平均場理論と核変形（3コマ）
7. 中性子過剰核の物理（2コマ）
8. 非束縛核と共鳴散乱理論（1コマ）

萩野

- 成績評価の方法・観点及び達成度
  - レポート試験の成績（80％） 平常点評価（20％）
    平常点評価には、出席状況および討論への積極的な参加の有無を参考にする。
  - 前半 (大西担当分) では 10-15 問程度レポートを出します。
    半分程度以上解いて PandA から提出して下さい。

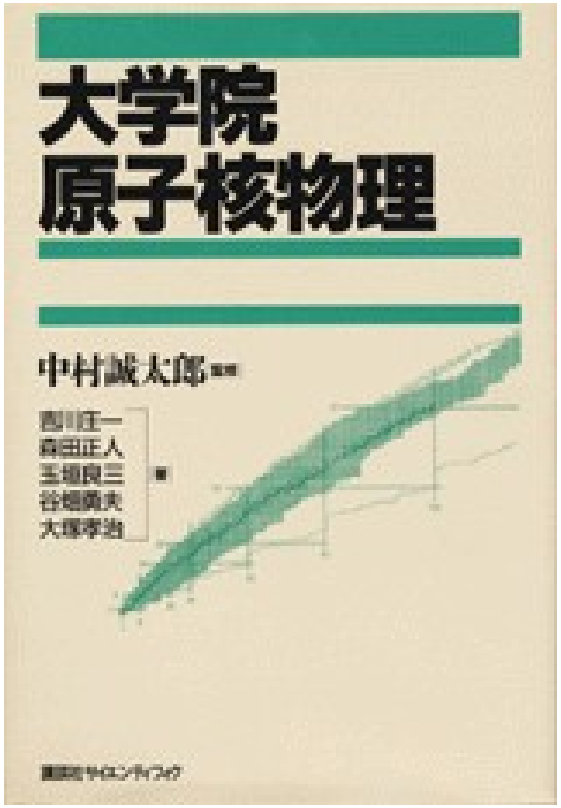
核力とその起源

- 核力の概要
- 非専門家向け場の理論入門
- π 粒子交換ポテンシャル
  - Feynman 振幅とポテンシャル、πN 結合、
    one pion exchange potential (OPEP) 、
    (場の理論と Feynman 則)
- 核力と位相差
  - 部分波展開、低エネルギー散乱、NN 散乱の位相差
- 核力の模型と斥力芯の起源
  - ベクトル中間子交換による斥力、クォーク模型、構造的斥力芯、
    格子 QCD 核力

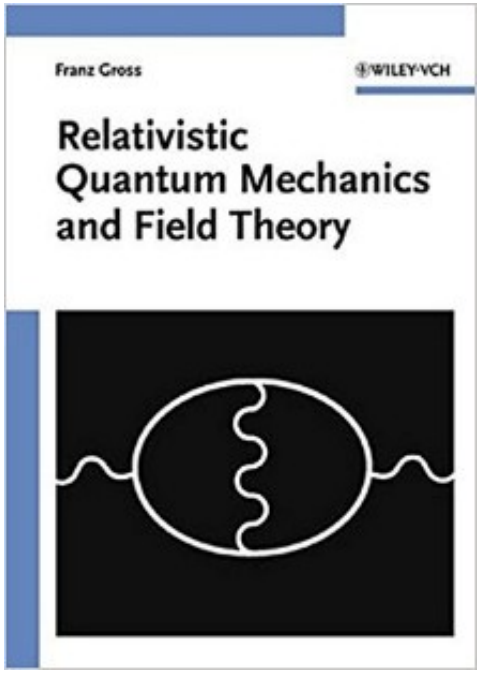
参考書

- Sec. 2 ではポッフ・リーツ・ショルツ・サッチャの教科書とともに、玉垣さんが執筆された大学院原子核物理 (第 4 章、核力の多様性) 、F. Gross の場の理論の教科書等を参考にしています

5,720 円



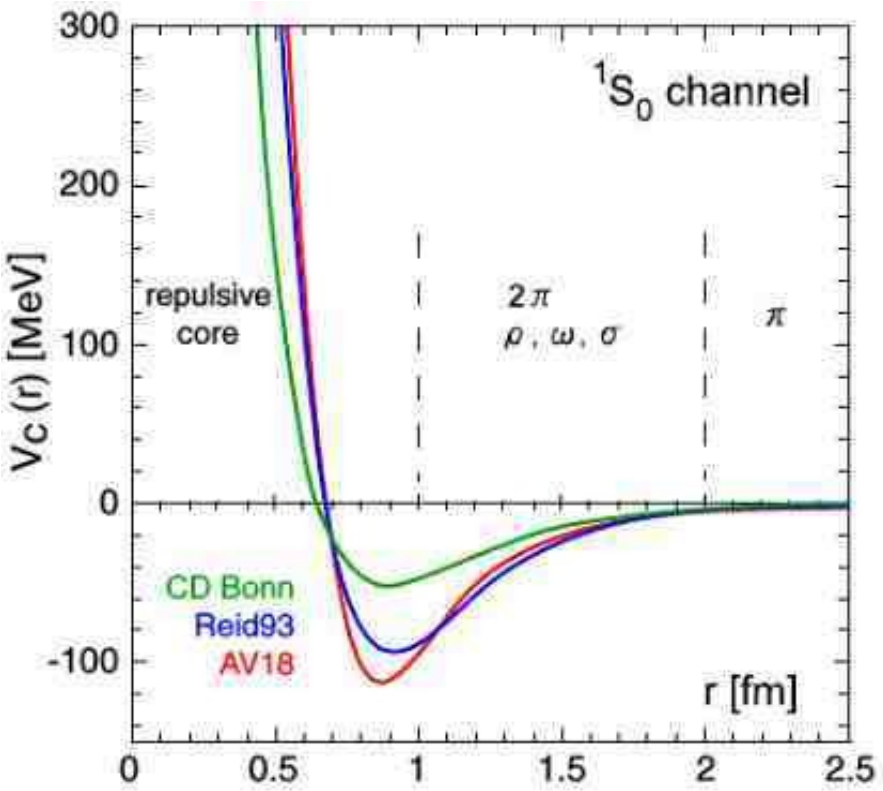
在庫なし



18,842 円 ~

核力の概観

- 核力の3領域
  - 遠方 (r > 2 fm) → 1π 交換力
    Yukawa ('35)
  - 中距離 → ボソン交換 (2π, ρ, ω, σ, …)
    E.g. Machida, Toyoda ('56), Nambu–Jona-Lasinio ('61)
  - 短距離 → 斥力芯
    Jastrow ('51)
- 強いスピン・アイソスピン依存性
  - 中心力、スピン軌道力、
    テンソル力、...
  - アイソスピン対称性
    T=1 状態 (pp, nn, (pn+np)/√2)
    T=0 状態 ((pn-np)/√2)



Aoki, Hatsuda, Ishii ('07)

Pion Exchange Potential

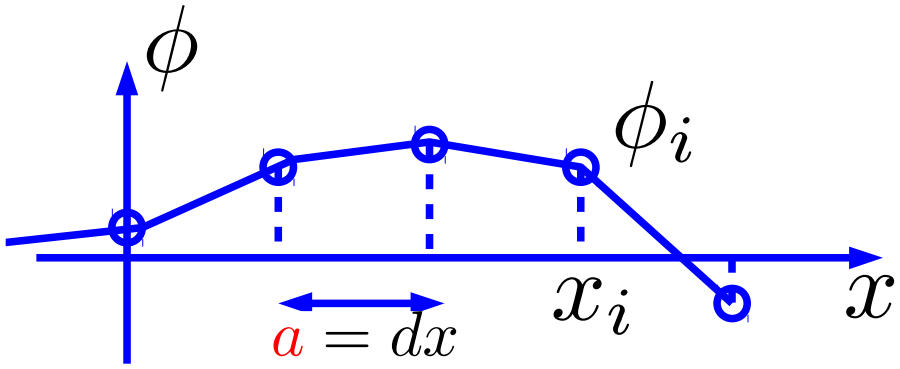
の前に

場の理論の入門
– 非専門家向け–

場の理論入門(1)

- 場の量子論 ＝ 各空間点での場の振幅 φ を
  力学変数 (座標) とする量子力学
- 例：一次元鎖

$$L = a\sum_i \left(\frac{M}{2}\dot{\phi}_i^2 - \frac{\kappa}{2}\left(\frac{\phi_{i+1}-\phi_i}{a}\right)^2 - \frac{m^2}{2}\phi_i^2 \right)$$



  - 力学変数は平衡位置からのズレ φ_i
  - 運動方程式 → M=κ=1 とすると、Klein-Gordon 方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_i} - \frac{\partial L}{\partial \phi_i} = a\left[M\ddot{\phi}_i - \kappa\frac{(\phi_{i+1}-2\phi_i+\phi_{i-1})}{a^2} + m^2\phi_i \right] = 0$$

$$\rightarrow M\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \kappa\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + m^2\phi = 0 \rightarrow \partial_t^2\phi - \partial_x^2\phi + m^2\phi = 0 \ (M=\kappa=1)$$

  - 作用 = Lagrangian を時間積分 =Langrangian 密度を時空積分

$$S = \int L dt \rightarrow \int dt dx\, \mathcal{L}\ , \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_t\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

場の理論入門(2): 運動方程式

- **最小作用の原理 (運動方程式)**

$$S = \int d^4x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$$

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) \right] = -\int d^4x \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \right] \delta\phi = 0$$

$$\rightarrow \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad \text{(Euler-Lagrange equation)}$$

  - **自由スカラー場の場合 → Klein-Gordon 方程式**

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi\, \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\nabla} \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

$$\rightarrow \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = (\partial_t^2 - \boldsymbol{\nabla}^2) \phi + m^2 \phi = 0$$

- **場の理論での力学変数 (座標と運動量)**

$$\hat{x} \rightarrow \phi(x), \hat{p} \rightarrow \pi(x) = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\phi}(x)$$

自由スカラー場の場合

$$\pi(x) = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\phi}(x) = \dot{\phi}(x)$$

場の理論入門(3): 量子化

- **量子力学での量子化 :** $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\,\delta_{ij}$
- **場の理論での量子化 : Heisenberg 描像での同時刻正準交換関係**

$$[\phi(\boldsymbol{x}, t), \pi(\boldsymbol{y}, t)] = i\hbar\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$

一次元鎖では $[\phi_i, \pi_j] = i\hbar\delta_{ij}$ *(*i, j *は空間座標)*
場の変数が時空の関数と考えると「同時刻交換関係」とみなせる。

- **例 : 体積 V=L³ の箱の中での自由スカラー場 (w/ 周期境界条件)**
  - **運動方程式の一般解**

$$\phi(x) = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\mathcal{N}_{\boldsymbol{k}}}{\sqrt{V}} \left[\hat{a}_{\boldsymbol{k}} e^{-ikx} + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} e^{ikx}\right] \quad (k_0 = \omega_{\boldsymbol{k}} = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2})$$

  - **係数を「演算子」と考える (定数変化法) と $a^\dagger$, a は生成消滅演算子**

$$\pi(x) = \dot{\phi}(x) = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{-i\omega_{\boldsymbol{k}}\mathcal{N}_{\boldsymbol{k}}}{\sqrt{V}} \left[\hat{a}_{\boldsymbol{k}} e^{-ikx} - \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} e^{ikx}\right]$$

assuming $[\hat{a}_{\boldsymbol{k}}, \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}'}] = \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}$, we get

$$[\phi(\boldsymbol{x}, t), \pi(\boldsymbol{y}, t)] = i\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \quad (\mathcal{N}_{\boldsymbol{k}} = 1/\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}}})$$

場の理論入門(4): 相互作用描像

- 散乱を考えるとき、自由運動の時間発展を除いて考えたい！
  → 相互作用描像
  (演算子は自由場の発展、状態は相互作用での発展)

$$H = H_0 + V$$

$$|\Psi_I(t)\rangle = e^{iH_0 t}|\Psi_S(t)\rangle = U(t,t_0)|\Psi_I(t_0)\rangle$$

$$U(t,t_0) = e^{iH_0 t}e^{-iH(t-t_0)}e^{-iH_0 t_0}$$

$$i\frac{\partial U(t,t_0)}{\partial t} = V_I(t)U(t,t_0)\ \ (V_I(t) = e^{iH_0 t}Ve^{-iH_0 t})$$

$$\rightarrow U(t,t_0) = T\exp\left[-i\int_{t_0}^{t} dt' V_I(t')\right]$$

自由な伝播部分を除いた波動関数

$\psi_{I,S}$ = 相互作用描像 & Schr. 描像での波動関数

T: 時間順序積

- S 行列

$$S = U(+\infty,-\infty) = T\exp\left[-i\int_{-\infty}^{\infty} dt' V_I(t')\right] = Te^{i\int d^4x \mathcal{L}_{\rm int}(x)}$$

$$S_{fi} = \langle f \mid S \mid i\rangle$$

場の理論入門(5): S-matrix

- 設定
  - 求めたいものは始状態から終状態への遷移振幅 $< f \mid S \mid i >$
  - 始状態・終状態は粒子の運動量が決まった状態

$$S_{fi} = \langle f \mid S \mid i \rangle = \mathcal{N} \langle 0 \mid \hat{a}_{\boldsymbol{p}'_1} \hat{a}_{\boldsymbol{p}'_2} \left[T e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{\rm int}(x)} \right] \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{p}_2} \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{p}_1} \mid 0 \rangle$$

$$\mathcal{N} = \prod_{i=1,2,1',2'} \sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}_i}}$$

(1 粒子状態の規格化は 2ω で与えられていることに注意)

- 使う道具
  - Wick の定理を使って真空期待値を求める
    (演算子の積の真空期待値 = 全ての縮約 (contraction) の和)

$$\begin{aligned} \langle ABCD \rangle &= \langle \overbrace{A\,B\,C\,D} \rangle + \langle \overbrace{A\,B\,C\,D} \rangle + \langle \overbrace{A\,B\,C\,D} \rangle \\ &= \langle AB \rangle \langle CD \rangle + \langle AC \rangle \langle BD \rangle + \langle AD \rangle \langle BC \rangle \end{aligned}$$

  - Feynman propagator = 2 つの場の演算子の T 積の真空期待値

場の理論入門(6): S-matrix (cont.)

- 例:スカラー理論、摂動の1次

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{24}\phi^4$$

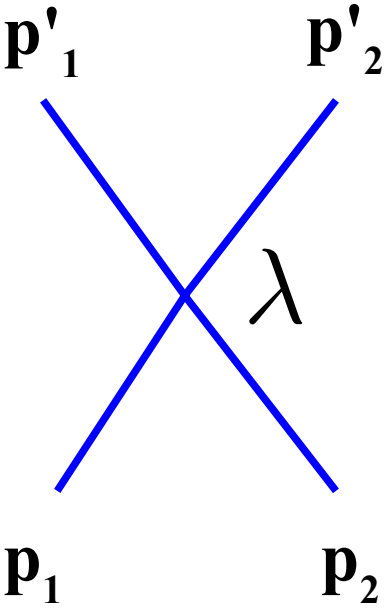
$$S^{(1)}_{fi} = -i\frac{\lambda}{24}\mathcal{N}\langle 0 \mid \hat{a}_{\boldsymbol{p}'_1}\hat{a}_{\boldsymbol{p}'_2}\left[\int d^4x\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\right]\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{p}_2}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{p}_1} \mid 0\rangle$$

$$= -i\lambda\int d^4x e^{ip'_1x}e^{ip'_2x}e^{-ip_1x}e^{-ip_2x}$$

$$= -i\lambda(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-p'_1-p'_2)$$

$$= -i(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-p'_1-p'_2)\times\mathcal{M}$$

ファインマンの不変振幅



$|S_{fi}|^2$ は単位体積・単位時間あたりの遷移確率であり、「断面積」の計算に用いることができる！

$$\langle\phi(x)a^\dagger_{\boldsymbol{p}}\rangle = \int\frac{d^3k}{2\omega_{\boldsymbol{k}}(2\pi)^3}\langle(a_{\boldsymbol{k}}e^{-ikx}+a^\dagger_{\boldsymbol{k}}e^{ikx})a^\dagger_{\boldsymbol{p}}\rangle = \frac{e^{-ipx}}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}$$

場の理論入門(7): Propagator

- **連続極限**

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}}}}(a_{\boldsymbol{k}}e^{-ikx} + a^\dagger_{\boldsymbol{k}}e^{ikx}), \quad [a_{\boldsymbol{k}}, a^\dagger_{\boldsymbol{k}'}] = (2\pi)^3\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$$

- **Feynman propagator**

aa† のみ残る

$$\langle T[\phi(x)\phi(y)]\rangle = \int \frac{d^3kd^3k'}{(2\pi)^6\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}'}}} \left\langle T(a_{\boldsymbol{k}}e^{-ikx} + a^\dagger_{\boldsymbol{k}}e^{ikx})(a_{\boldsymbol{k}'}e^{-ik'y} + a^\dagger_{\boldsymbol{k}'}e^{ik'y})\right\rangle$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{k}}}\left(e^{-ik(x-y)}\Theta(x^0-y^0) + e^{ik(x-y)}\Theta(y^0-x^0)\right)$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{k}}}\frac{d\omega}{2\pi i}\left[-\frac{e^{-ik(x-y)-i\omega(x^0-y^0)}}{\omega+i\varepsilon} + \frac{e^{ik(x-y)-i\omega(x^0-y^0)}}{\omega-i\varepsilon}\right] (k^0 = \omega_{\boldsymbol{k}})$$

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik(x-y)}\frac{i}{k^2-m^2+i\varepsilon} \quad (k^0 = \omega \text{ in the last line})$$

$$i\Delta(k) = \text{F.T.}\,[\langle T[\phi(x)\phi(y)]\rangle] = \frac{i}{k^2-m^2+i\varepsilon}$$

$$\Theta(t) = -\int \frac{d\omega}{2\pi i}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega+i\varepsilon}$$

場の理論入門：まとめ

- 場の量子論は各空間点での場の振幅 φ を力学変数 (座標) とする量子力学である。
- 場の理論における作用は Lagrangian 密度の時空体積積分で与えられ、運動方程式は最初作用の原理から導かれる。
- 量子化は (同時刻での) 正準交換関係により行われる。
  結果として場の変数は粒子の生成・消滅を記述することが分かる。
- 散乱や崩壊などの過程を記述する上では、相互作用描像 (朝永 - Dirac 描像) が便利であり、波動関数の時間発展は時間順序積 (T 積) を課した $T[\int dt \exp(-iV(t))]$ で記述される。
- 散乱行列 (S 行列) は始状態から終状態への遷移を表し、Wick の定理を用いれば、演算子積の真空期待値を用いて求められる。
  これを系統的に評価する手続きが Feynman rules である。

- より正確・広範な内容については、場の理論の講義やセミナーで学んで欲しい。

Pion Exchange Potential

ファインマン振幅とポテンシャル

- **ファインマン振幅と断面積**

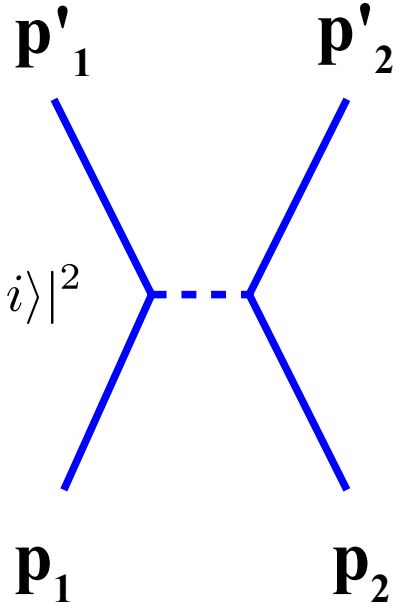
参考 : F. Gross (John-Wiley & Sons., '93)

$$d\sigma = \frac{1}{v}\frac{1}{4E_1E_2}\left[\prod_i \frac{d^3p'_i}{(2\pi)^3 2E'_i}\right](2\pi)^4\delta(p_1+p_2-\sum_i p'_i)\,|\mathcal{M}|^2\ ,$$

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\rm CMS} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^2 16(E_1+E_2)^2}$$

$$v = \sqrt{(p_1p_2)^2 - m_1^2m_2^2}/E_1E_2$$
$$= p(E_1+E_2)/E_1E_2 \ \ ({\rm CMS})$$

$$d^3p'_1d^3p'_2\delta^{(4)}(p_1+p_2-p'_1-p'_2) = d^3p'_1\delta(E_1+E_2-E'_1-E'_2)$$
$$= d\Omega p'^2dp'\delta(E'_1+E'_2-(E_1+E_2))(E'_1=\sqrt{p'^2+M_1^2}, E'_2=\sqrt{p'^2+M_2^2})$$
$$= d\Omega p'^2(p'/E'_1+p'/E'_2)^{-1} = d\Omega p'E'_1E'_2/(E'_1+E'_2) \quad ({\rm in\ CMS})$$



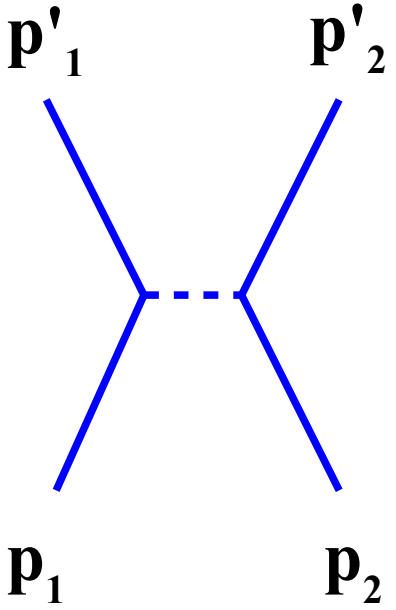
- **断面積 ＝ 遷移確率 / 入射流速**
- **遷移確率は Fermi の黄金率で評価** $\frac{dW}{dt} = 2\pi\rho_f(E)|\langle f|V|i\rangle|^2$
  Feynman 振幅が行列要素に対応
  level density は運動量積分・エネルギー保存の δ から。
- **波動関数は 2E で規格化されているので**
  それぞれの粒子、始状態・終状態について 2E で割る

ファインマン振幅とポテンシャル

- ボルン近似と比較

参考 : F. Gross (John-Wiley & Sons., '93)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{m_1 m_2}{2\pi(m_1+m_2)}\right]^2 |\langle f \mid V \mid i\rangle|^2$$



→ ポテンシャルのフーリエ変換 ∝ファインマン振幅

$$\tilde{V}(\boldsymbol{q}) = \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\frac{1}{4(E_1+E_2)}\mathcal{M} \overset{\text{Non.Rel.}}{\longrightarrow} \frac{\mathcal{M}}{4m_1 m_2}$$

ファインマン振幅とポテンシャルの関係

$$\tilde{V}(q) \simeq \frac{\mathcal{M}}{4m_1 m_2}$$

S 行列・散乱振幅・ファインマン振幅

- **散乱振幅とS 行列 (s 波のみで考える) [Sec.2, 後述]**

$$\psi(r) \to \frac{1}{2ikr}\left(S(k)e^{ikr} - e^{-ikr}\right) = \frac{\sin kr}{kr} + f(k)\frac{e^{ikr}}{r}$$
$$S(k) = 1 + 2ikf(k)$$

- **散乱振幅とポテンシャル [Sec.1]**

$$f(\boldsymbol{k}_f, \boldsymbol{k}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\langle \boldsymbol{k}_f | V | \Psi_{\boldsymbol{k}} \rangle \to S_{fi} \simeq 1 - iAV_{fi} \ (A = \text{const.}, A > 0)$$

(A は規格化や波動関数のとり方によるので、ここでは定めない。)

- **S 行列とファインマン振幅 [Sec. 2, 前述]**

$$S = 1 - i(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_1' - p_2') \times \mathcal{M}$$

- **これらより V ∝ M であり、比例係数は正。**
比例係数の絶対値は観測量である断面積から決めるのが安全。
[Sec. 2, 前述]

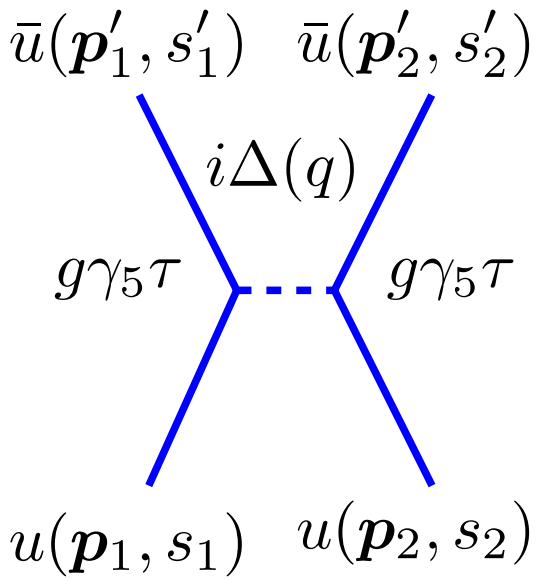
ファインマン則

- **Nπ 系の Lagrangian 密度**

$$\mathcal{L} = \bar{N}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)N + \frac{1}{2}\partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\pi} - \frac{1}{2}m_\pi^2 \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi} - g\bar{N} i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi} N$$

- **ファインマン則**
  1. **相互作用の次数を決めて diagram を描く**
  2. **全体に *i* (← S ~ (1 - i M) から M を引き出す)**
  3. **バーテックス毎に結合定数 × *i* (← exp (i L)) 、エネルギー・運動量は保存**
  4. **内線には propagator を割り当てる**

$$i\Delta(p) = \text{F.T.}[\langle T(\phi(x)\phi(y))\rangle] = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$



  5. **外線には波動関数を割り当てる**

$$u(\mathbf{p}, s) = \sqrt{E + m}\begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}/(E + m) \end{pmatrix}\chi(s)$$

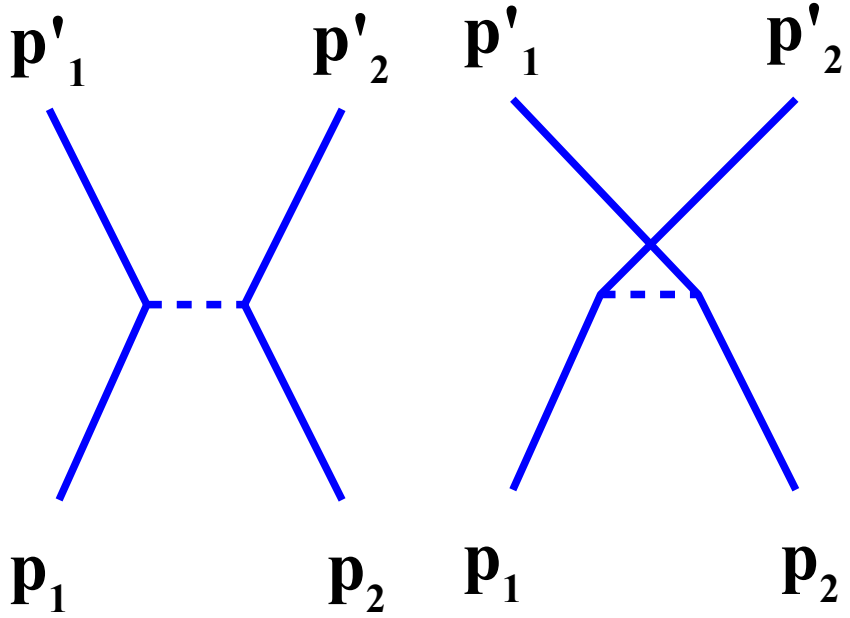
- **加えて fermion propagators, external bosons, internal momentum integral, symmetry factors, … などを考慮。**

ファインマン振幅 (one pion exchange)

- **Feynman amplitude**

$$\mathcal{M} = i\, g^2\, \frac{i}{(p_1 - p_1')^2 - m_\pi^2 + i\epsilon}$$
$$\times\, [\bar{u}(\boldsymbol{p}_1', s_1')\gamma_5 \tau_i u(\boldsymbol{p}_1, s_1)]\, [\bar{u}(\boldsymbol{p}_2', s_2')\gamma_5 \tau_i u(\boldsymbol{p}_2, s_2)]$$
$$-\,(\text{exchange term})$$
$$= -\, g^2\, (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)\, \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{q})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{q})}{m_\pi^2 + \boldsymbol{q}^2} - (\text{exchange term})$$

$$[\bar{u}_{1'} \gamma_5 \tau_i u_1] = \boldsymbol{\sigma}_1 \tau_{1i} \cdot \mathbf{q}\ (\boldsymbol{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1')$$



One Pion Exchange Potential

- **One Pion Exchange Potential (OPEP) (direct term)**

$$
\begin{aligned}
V_D(\boldsymbol{r}) =& \int \frac{d\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\, \exp(i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}) \left[-\frac{g^2}{4m_N^2}\, \boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2\, \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{q})(\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\boldsymbol{q})}{m_\pi^2+\boldsymbol{q}^2} \right] \\
=& \frac{g^2}{4m_N^2}\, (\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2)\, (\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\boldsymbol{\nabla}) \int \frac{d\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\, \frac{\exp(i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r})}{m_\pi^2+\boldsymbol{q}^2} \\
=& \frac{g^2}{4\pi(2m_N)^2}\, (\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2)\, (\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\boldsymbol{\nabla}) \left(\frac{e^{-m_\pi r}}{r} \right) \\
=& \frac{1}{3}\, \frac{g^2}{4\pi}\, \left(\frac{m_\pi}{2m_N} \right)^2\, (\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2)\, \frac{e^{-m_\pi r}}{r}\, [\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2 + S_{12} Y_T(m_\pi r)]
\end{aligned}
$$

$$
S_{12} = \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\boldsymbol{r})}{r^2} - \boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2\ , \quad Y_T(x) = 1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}
$$

One Pion Exchange Potential

- 特徴
  - 中心力 $(\tau\tau)(\sigma\sigma)$
    → (S,T)=(0,1), (1,0) ($^1S_0$, $^3S_1$) で引力
    → s 波での引力を説明
    ただし $^1S_0$, $^3S_1$ で中心力の強さは同じ

$$(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) = (4T(T+1) - 6)/2 = -3, 1 \quad (T = 0, 1)$$

$(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)$

$S \backslash T$	0	1
0	9	-3
1	-3	1

  - テンソル力 → S=1 チャンネルでのさらなる引力 (重陽子が束縛)

パイオン交換ポテンシャルは
低エネルギー(s 波) での核力の特徴を見事に説明する！

S-matrix element in one pion exchange

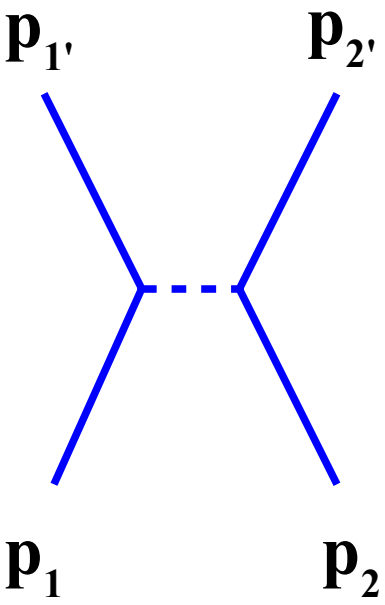
- **Leading order = g^2**

$$\langle p_{1'}p_{2'} \mid S^{(2)} \mid p_1p_2\rangle = \frac{(-i)^2}{2}\int dt_1dt_2\langle p_{1'}p_{2'} \mid T\left[V(t_1)V(t_2)\right] \mid p_1p_2\rangle$$

$$= \frac{(-ig)^2}{2}\int dx_1dx_2\langle p_{1'}p_{2'} \mid T\left[(\bar{N}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}N)_{x_1}(\bar{N}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}N)_{x_2}\right] \mid p_1p_2\rangle$$

$\Delta(q)$

$\bar{u}(p_{1'})$ $\bar{u}(p_{2'})$ $u(p_1)$ $u(p_2)$



核力と位相差

核力と位相差(準備)

- **Schrödinger Equation (spherical potential)**

$$\left[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}+V(r)\right]\Psi(\mathbf{r})=E\Psi(\mathbf{r})\ ,\quad \Psi(\mathbf{r})\overset{r\to\infty}{\longrightarrow} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}+f(\theta,\varphi)\,\frac{e^{ikr}}{r}$$

- **Partial wave expansion of the plane wave**

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}=\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\,i^{\ell}\,j_\ell(kr)\,P_\ell(\cos\theta)$$

$$\to\frac{1}{2ikr}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\,i^{\ell}\,\left(e^{i(kr-\ell\pi/2)}-e^{-i(kr-\ell\pi/2)}\right)\,P_\ell$$

$$j_\ell(kr)\overset{r\to\infty}{\longrightarrow}\frac{\sin(kr-\ell\pi/2)}{kr}=\frac{1}{2ikr}\left(e^{i(kr-\ell\pi/2)}-e^{-i(kr-\ell\pi/2)}\right)$$

核力と位相差 (cont.)

- **Radial wave function** $(\psi_\ell(r) = u_\ell(r)/kr)$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2\,\ell(\ell+1)}{2mr^2} + V_\ell(r)\right] u_\ell(r) = E\,u_\ell(r)$$

$$u_\ell(r) \to \sin(kr - \ell\pi/2 + \delta_\ell) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(kr-\ell\pi/2+\delta_\ell)} - e^{-i(kr-\ell\pi/2+\delta_\ell)}\right)$$

δ_ℓ = phase shift (位相差)

- **Boundary condition**

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_\ell (2\ell+1)\,i^\ell\,\frac{A_\ell\,u_\ell(r)}{kr}\,P_\ell$$

$$\to \frac{1}{2ikr}\sum_\ell (2\ell+1)\,i^\ell\left(S_\ell(k)\,e^{i(kr-\ell\pi/2)} - e^{-i(kr-\ell\pi/2)}\right)P_\ell$$

内向き = 平面波のまま → $A_l = \exp(i\delta_l)$

$$= e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \frac{e^{ikr}}{kr}\sum_\ell (2\ell+1)\boxed{\frac{S_\ell(k)-1}{2i}}P_\ell$$

$$= e^{i\delta_\ell}\sin\delta_\ell$$

$$A_\ell = e^{i\delta_\ell}\ ,\ S_\ell(k) = e^{2i\delta_\ell(k)},\ f(\theta) = \frac{1}{k}\sum_\ell (2\ell+1)\,e^{i\delta_\ell}\,\sin\delta_\ell\,P_\ell(\cos\theta)$$

Phase shifts determine the scattering amplitude

低エネルギー散乱 (s-wave)

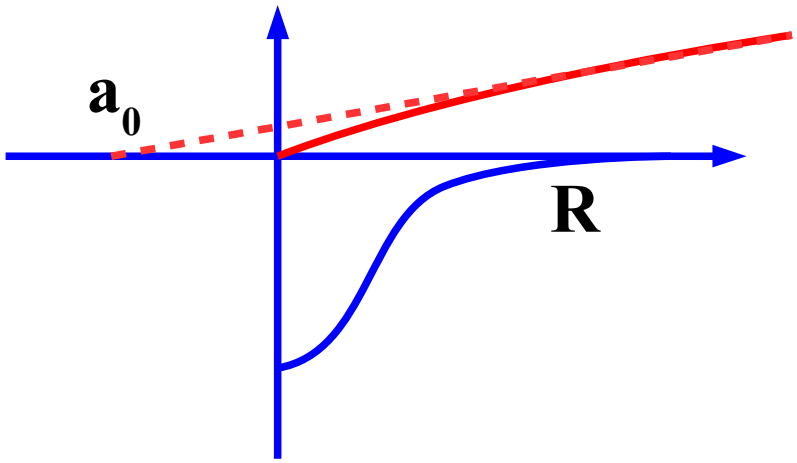
- 低エネルギー散乱 → L=0 が主要

$$f \to \frac{1}{k} e^{i\delta_0} \sin\delta_0 = (k\cot\delta_0 - ik)^{-1}$$

k → 0 で散乱振幅が発散しない条件 $= \lim_{k\to 0} \sin\delta_0 = 0$

($\delta_0(k\to 0) = n\pi$)

- 短距離力 V(r)=0 (r>R) 、
低エネルギー $E < |V(r)|_{max}$ (r<R) では、



r=R での対数微分で内側の wf が決まる

a_0: scattering length (散乱長)

r_{eff}: effective range (有効レンジ)

u(r)=sin(kr+δ) の対数微分から

$$k\cot(kR+\delta_0) = W,\ k\cot\delta_0 = \frac{W + k\tan kR}{1 - W\ \tan kR/k} \simeq -\frac{1}{a_0} + \frac{1}{2} r_{\rm eff} k^2$$

r>R, k → 0 において動径波動関数は u(r=a0)=0 となる1次関数

$$\delta_0 \simeq -a_0 k \to u_0(r) \simeq \sin(k(r-a_0))$$

低エネルギー散乱 (s-wave)(cont.)

- 十分に zero energy に近い束縛状態がある場合 $a_0>0$

$$u_{\rm BS}(r) = A\exp(-\kappa r)(r > R) \to W = -\kappa$$

$$-\frac{1}{a_0} = \frac{-\kappa}{1+\kappa R} \to a_0 \simeq \frac{1}{\kappa} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\varepsilon}} \ (\varepsilon = \text{binding energy})$$

（低エネルギーでは対数微分はほぼ一定、前ページの関係を利用）

散乱状態 wf は $r \sim a_0$ で節 → 構造的斥力芯

- 斥力コアポテンシャル ($V(r) = +\infty$ ($r<r_c$), $V(r)=0$ ($r>r_c$)) → $a_0 = r_c$

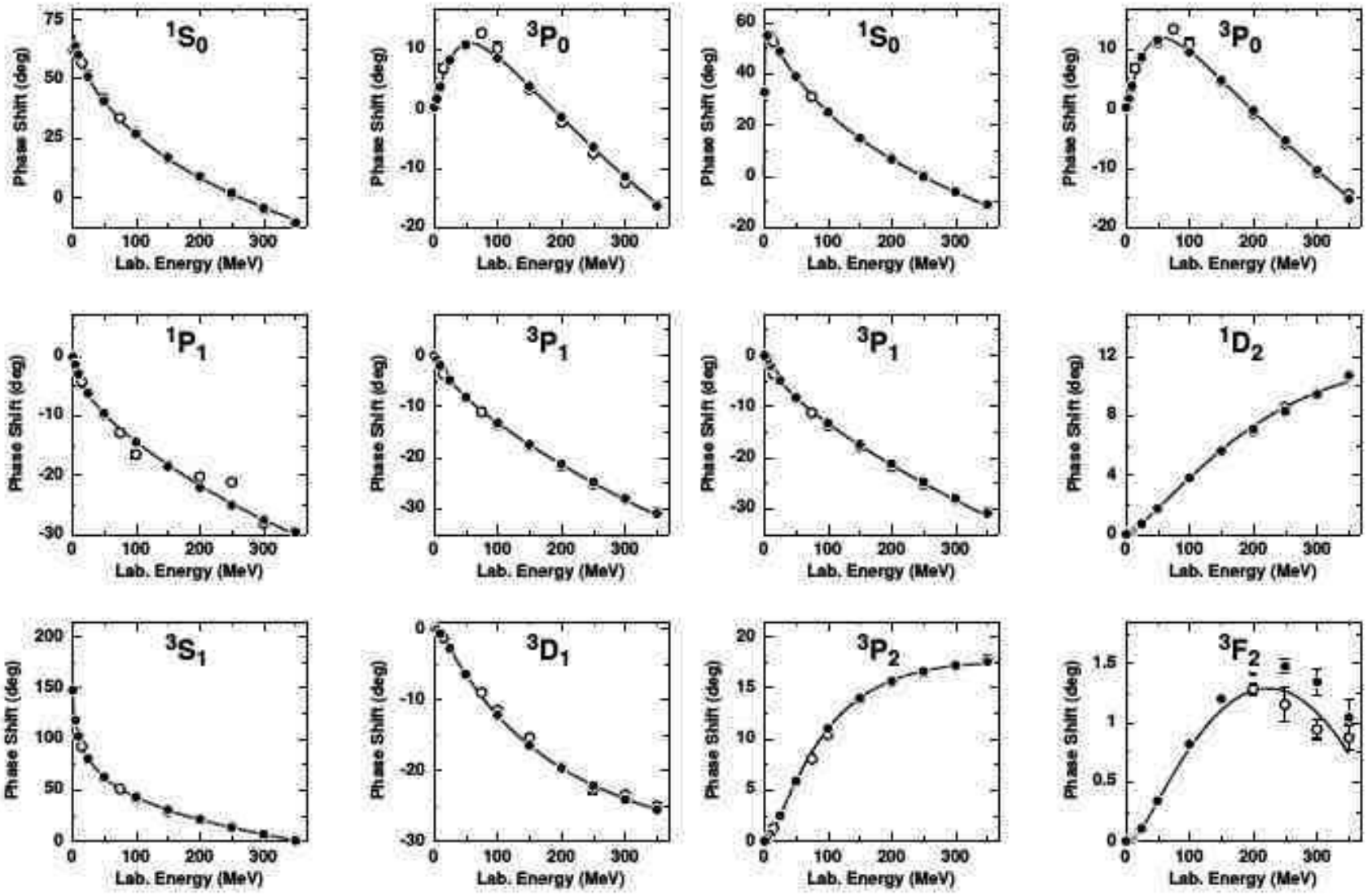
$$u_0(r) = \sin(k(r-r_c)),\ \delta_0(k) = -kr_c$$

- 束縛状態を持たない引力 → $a_0 < 0$

NN scattering phase shifts (1)

np scattering

pp scattering



R. Machleidt, Phys. Rev. C 63 (2001) 024001 [nucl-th/0006014].

NN scattering phase shifts (2)

- 分光学表示
  - (合成) スピン S 、軌道角運動量 L 、全角運動量 J
    (L=0, 1, 2, … には S, P, D, … の文字)
- パウリ原理
  - 核子はフェルミオン → S + T + L = odd
- アイソスピン対称性
  - (S,T,L,J) が同じなら、np, pp 散乱での phase shift は同じ

$$^{2S+1}L_J$$

$S\backslash T$	0	1
0	^{1}O	^{1}E
1	^{3}E	^{3}O

NN scattering phase shifts (3)

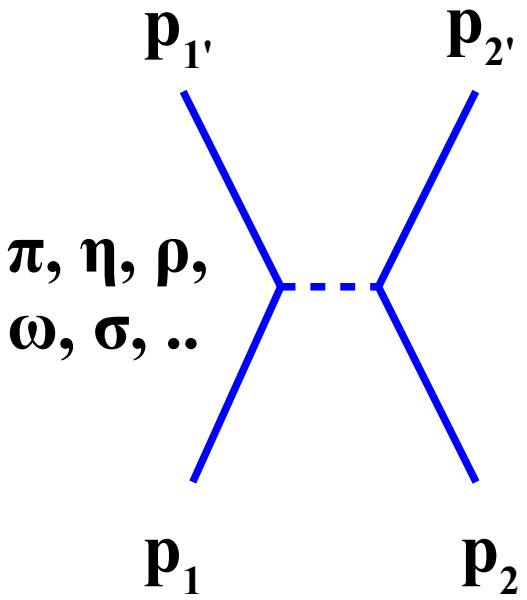
- s-wave: 外側の引力と斥力芯
  - 低エネルギーで正 → 引力
  - $^3S_1$ (T=0): 重陽子を束縛させる核力
    $\delta_0(k\to 0)=\pi$ から始まり、エネルギーとともに下がる
  - $^1S_0$ (T=1): 対エネルギーを生み出す
    $\delta_0(k\to 0)=0$ から始まり、E ~ 1 MeV で 60^o 程度に達し、
    エネルギーとともに下がる
- p-wave: スピン依存性
  - $^1P_1$ (T=0): 強い斥力
  - ^3P (T=1): J に依存 (テンソル力、LS 力)

核力の特徴
強いスピン・アイソスピン・軌道角運動量依存性、
斥力芯、テンソル力

核力の模型と斥力芯の起源

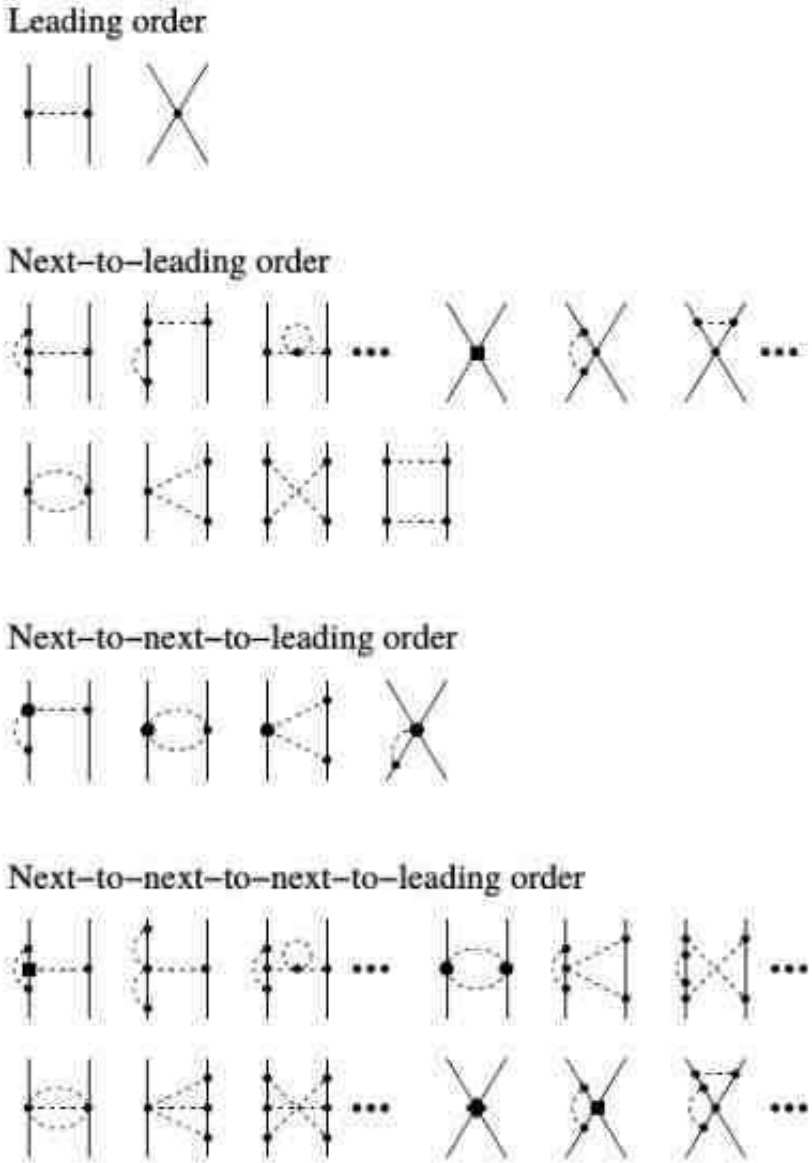
核力の模型 (1)

- 1π 交換ポテンシャル (OPEP) が主となる r>2 fm 以外の領域は近似理論・模型による記述が必要。
- ボソン交換に基づく模型
  → 中間レンジ引力と斥力の一部
  One Boson Exchange Potential (OBEP)
  - ω 交換による斥力
    E.g. Y. Nambu, Phys. Rev. 106 ('57) 1366.
    (ω の発見 ('76) 前 !)
  - Nijmegen potential
    E.g. T.A. Rijken, V.G.J. Stoks, Y. Yamamoto, PRC59('99),21.
    - Hard core (ND, NF), Soft core (NSC97, ESC04, ESC06)
    - Pomeron exchange, meson-pair exchange などを含む
  - Bonn potential → Julich potential
    E.g. R. Machleidt, PRC63('01)024001
    - OBEP を追求 (π, η, ρ, ω, σ)



核力の模型 (2)

- **カイラル有効場理論**
  Chiral Effective Field Theory (Chiral EFT)
  E.g. E. Epelbaum, H.-W. Hammer,
  U.-G. Meissner, Rev. Mod. Phys. 81 ('09) 1773.
  - Chiral sym. に基づく有効ラグランジアンから核力を導出
  - $m_q \to 0$ での低エネルギー自由度は π のみ。
  - m_π/Λ, p/Λ によって展開し、高エネルギー自由度は contact 項へ



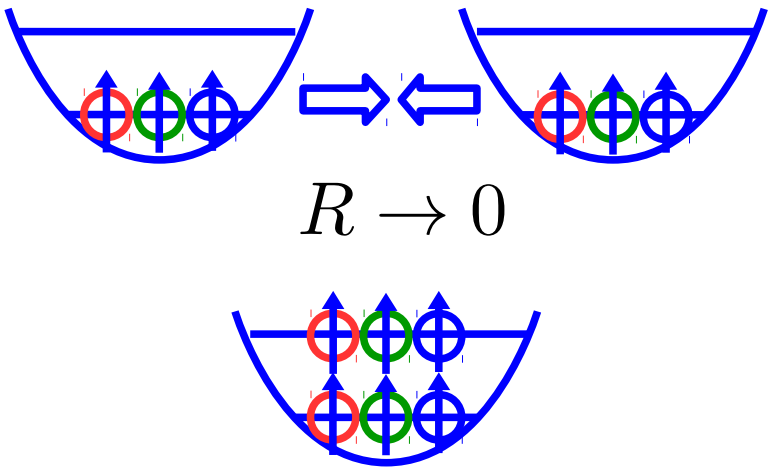
核力の模型 (3)

- **クォーク模型**

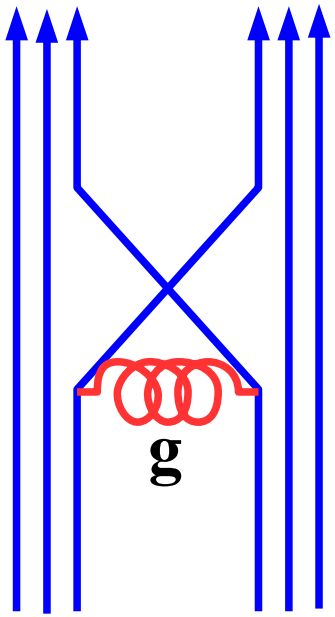
  Y. Fujiwara, Y. Suzuki, C. Nakamoto, Prog. Part. Nucl. Phys. 58 (‘07) 439.
  M. Oka, K. Yazaki, Prog.Theor.Phys. 66 (1981) 556.
  V.G. Neudachin, Yu.F. Smirnov, R. Tamagaki, Prog.Theor.Phys. 58 ('77) 1072.

  - **核子間の短距離斥力は、クォーク間のパウリ排他律とグルーオン交換により現れる。**

E.g. $\Delta^{++}\Delta^{++}(J=3)$



$R \to 0$



格子 QCD による核力 (1)

- 格子 QCD における Nambu-Bethe-Salpeter amplitude

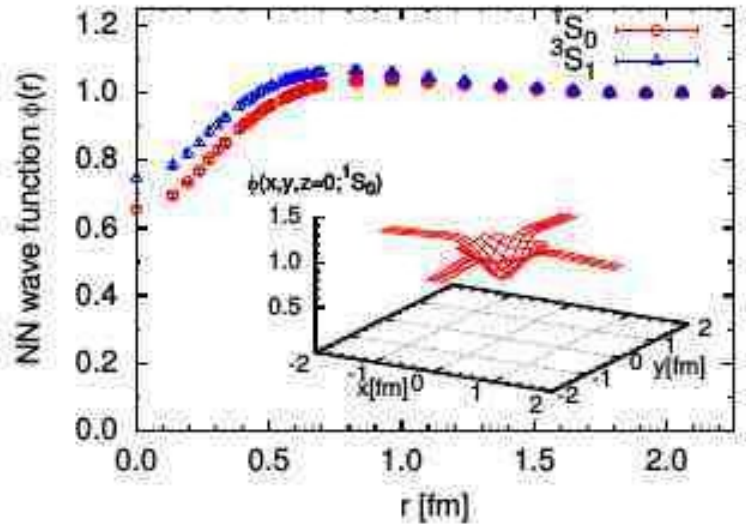
$$F_{\mathrm{NN}}(\mathbf{x},\mathbf{y},t;t_0) \equiv \langle 0|N^i_\alpha(\mathbf{x},t)N^j_\beta(\mathbf{y},t)\overline{\mathcal{J}}_{\mathrm{NN}}(t_0)|0\rangle$$

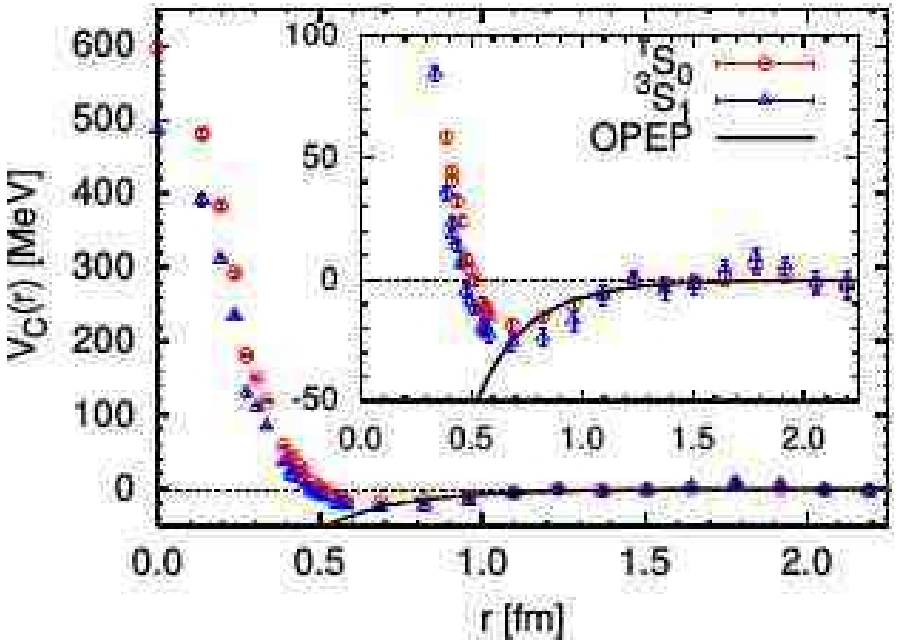
は低エネルギーにおいて Schrodinger equation に従う

$$-\frac{1}{2\mu}\nabla^2\phi(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' U(\mathbf{r},\mathbf{r}')\phi(\mathbf{r}') = E\phi(\mathbf{r})$$

局所ポテンシャルを仮定すると、核力が求まる。

$$U(\mathbf{r},\mathbf{r}') \simeq V(\mathbf{r},\nabla)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

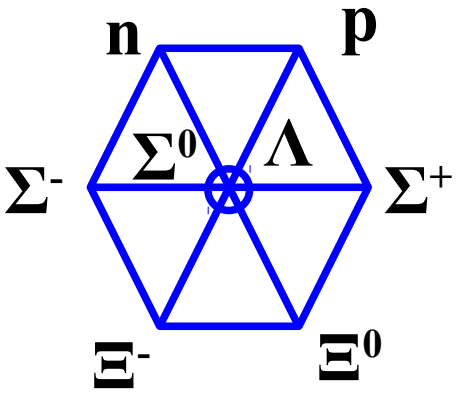


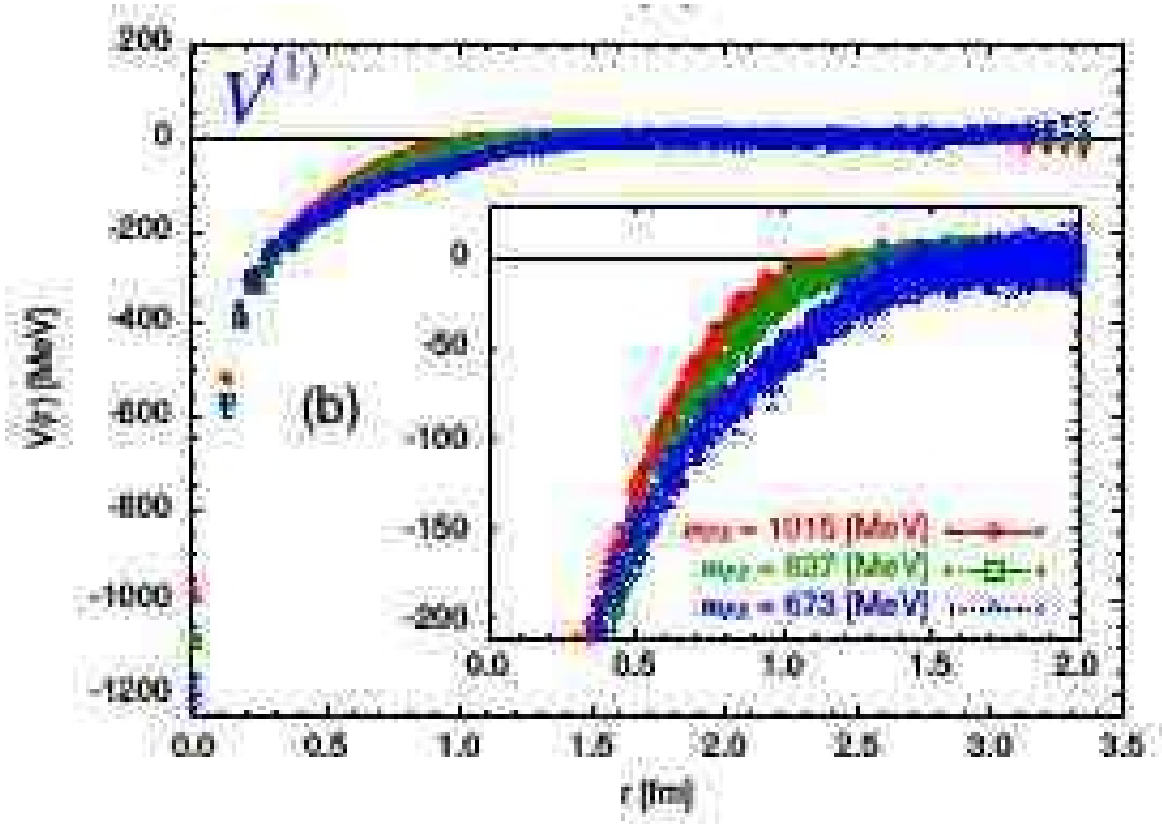


N. Ishii, S. Aoki, T. Hatsuda, PRL99('07)022001.

格子 QCD による核力 (2)

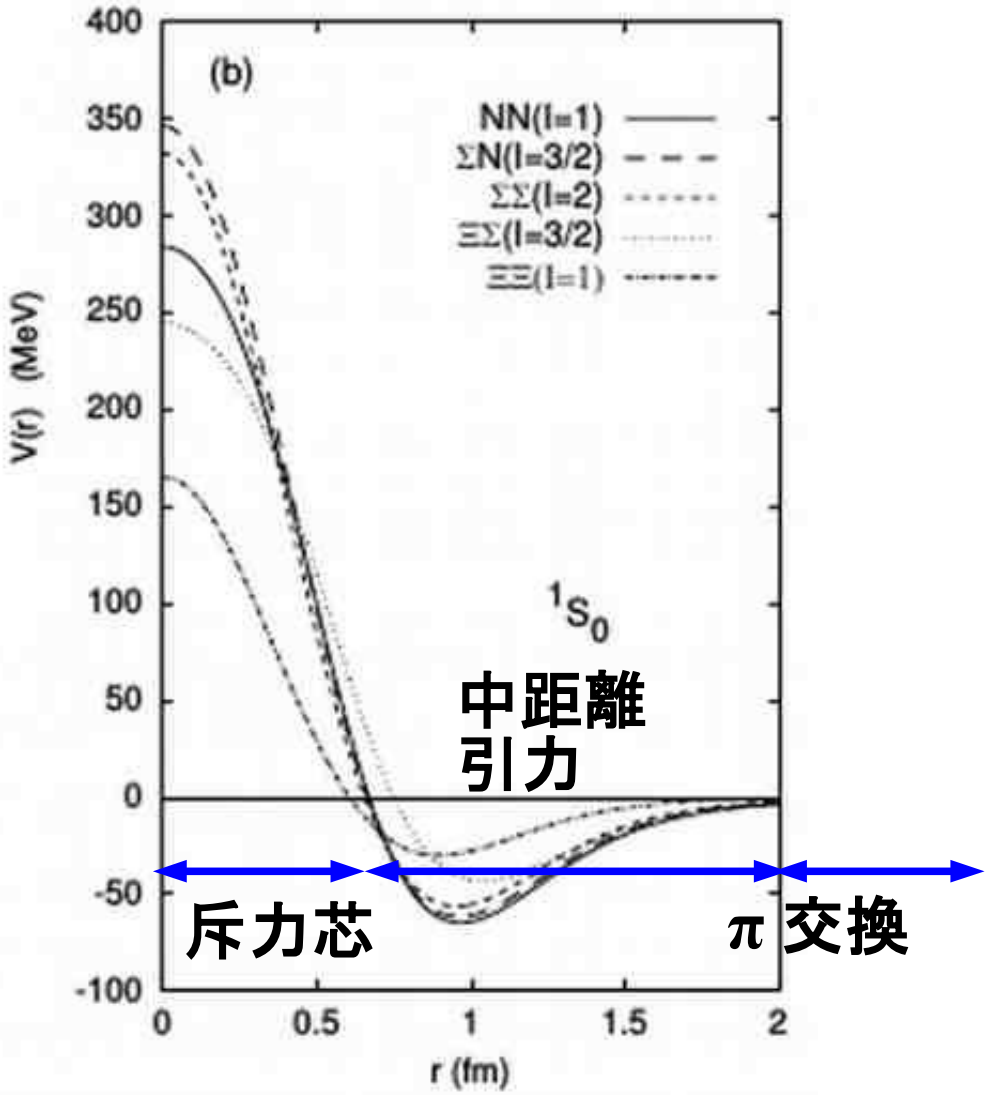
- 斥力芯はバリオンの組み合わせについて共通か？
  → No. フレーバー1重項チャネルでは斥力は現れない。
  (フレーバー 1 重項 :$n\Xi^0$-$p\Xi^-$-$\Sigma^+\Sigma^-$-$\Sigma^0\Sigma^0$-$\Sigma^-\Sigma^+$-$\Lambda\Lambda$ の重ねあわせ)
  - クォークのパウリ排他律からの予測と無矛盾
  - ω 中間子交換が斥力芯の主要な起源ではない。





T. Inoue et al. (HAL QCD Collab.), PRL106('11)162002.

YN potential



Y. Fujiwara, Y. Suzuki and C. Nakamoto,
Prog. Part. Nucl. Phys. 58 (2007) 439.

Sec. 2 のまとめ

- 核力の特徴
  - 3つの領域 : 遠方 (π 交換), 中距離 (ボソン交換), 短距離 (斥力芯)
  - 強いスピン・アイソスピン依存性 (s-wave)
    (S,T)=(0,1) (引力、対相互作用), (1,0) (引力、テンソル力、重陽子)
    (S,T)=(0,0), (1,1) (斥力)
- パイオン交換力
  - 場の量子論→散乱振幅→ポテンシャル
  - パイオン交換力は核力の特徴を説明
- 短距離の斥力芯
  - ベクトル中間子交換、ポメロン (gluon ladder) 交換、Contact 相互作用 (現象論) 、クォーク効果など様々な描像
  - 中間レンジの引力の理解も課題。2π 交換、スカラーボソン交換、...
- 核子間相互作用からハドロン間相互作用へ
  - 散乱実験が出来ないハドロン対の相互作用も間接的に観測可能に
    (時間に余裕があれば解説します。)

レポート問題 (Sec. 2)

1. 井戸型ポテンシャル $V_I(r)$, $V_{II}(r)$ における位相差を入射エネルギーの関数として求めよ。2核子の換算質量を $m(=M_N/2)$ 、軌道角運動量はゼロとする。また V_0 の大きさは束縛状態を作らない程度に小さいとする。

$$V_I(r) = \begin{cases} -V_0 & r < R \\ 0 & r \geq R \end{cases} \qquad V_{II} = \begin{cases} +\infty & r < r_c \\ -V_0 & r_c < r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

余裕があれば、次の問にも答えよ。
$V_I(r)$, R=1 fm の場合、重陽子の束縛エネルギー (2.2 MeV) を説明するには、どの程度のポテンシャルの深さが必要か？

2. σ 粒子交換によるポテンシャルを求めよ。Lagrangian は

$$\mathcal{L} = \bar{N}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)N + \frac{1}{2}\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{1}{2}m_\sigma^2 \sigma^2 - g\bar{N}\sigma N$$

と与えられるとする。運動量や運動量移行が核子の質量に比べて十分に小さいとする非相対論近似を用いて良い。

レポート問題 (Sec. 2)(cont.)

3. 場の理論でのハミルトニアン密度 (エネルギー密度) は

$$\mathcal{H}(x) = \pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(x), \quad \pi(x) = \partial\mathcal{L}(x)/\partial\dot{\phi}(x)$$

と与えられる。自由スカラー場理論のラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

から出発し、ハミルトニアンが次のように与えられることを示せ。

$$H = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{2}\left(\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}} + \hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\right)$$

体積を V とし、場の変数には周期境界条件が課されているとする。

レポート問題 (Sec. 2)(cont.)

- 以下の問題は「半分程度提出」の分母には数えませんが、「分子」には 0.5 問ずつとして数えるものとします。
- 1b. (report Sec.2-1 の続き)
  核子 - 核子散乱において $^1S_0$ channel の位相差は、低エネルギーで 60 度程度まで増えて、実験室系での入射エネルギー (CM 系での運動エネルギーの 2 倍) が 200MeV 程度で正から負に変化する。Report Sec.2-1 で与えた井戸型ポテンシャルでこうした振る舞いを再現するには、ポテンシャルのレンジと深さをどのように与えればよいか、調べよ。
- 2b. (report Sec.2-2 の続き)
  ベクトル中間子である ω 粒子交換によるポテンシャルを求めよ。
  Lagrangian は

$$\mathcal{L} = \bar{N}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)N - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu - g\bar{N}\omega_\mu\gamma^\mu N,\ F_{\mu\nu} = \partial_\mu\omega_\nu - \partial_\nu\omega_\mu$$

  と与えられるとする。運動量や運動量移行が核子の質量に比べて十分に小さいとする非相対論近似を用いて良い。ベクトル粒子の propagator は

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 - m_\omega^2 + i\varepsilon}$$

  と与えられる。