

物理学特論I (中性子星と原子核物理)

1. 序論: 中性子星とは
 2. 中性子星の質量と半径
 3. 中性子星に関連する原子核・ハドロン物理学1
– 原子核の大きさと散乱の量子力学
 4. 中性子星に関連する原子核・ハドロン物理学2
– 原子核の質量と核物質状態方程式
 5. 中性子星に関連する原子核・ハドロン物理学3
– クォークとハドロン
 6. 中性子星核物質の状態方程式
 7. 中性子星の最近の話題と課題 – 中性子星の最大質量とハイペロンパズル
- セミナー: 最適化問題としての符号問題

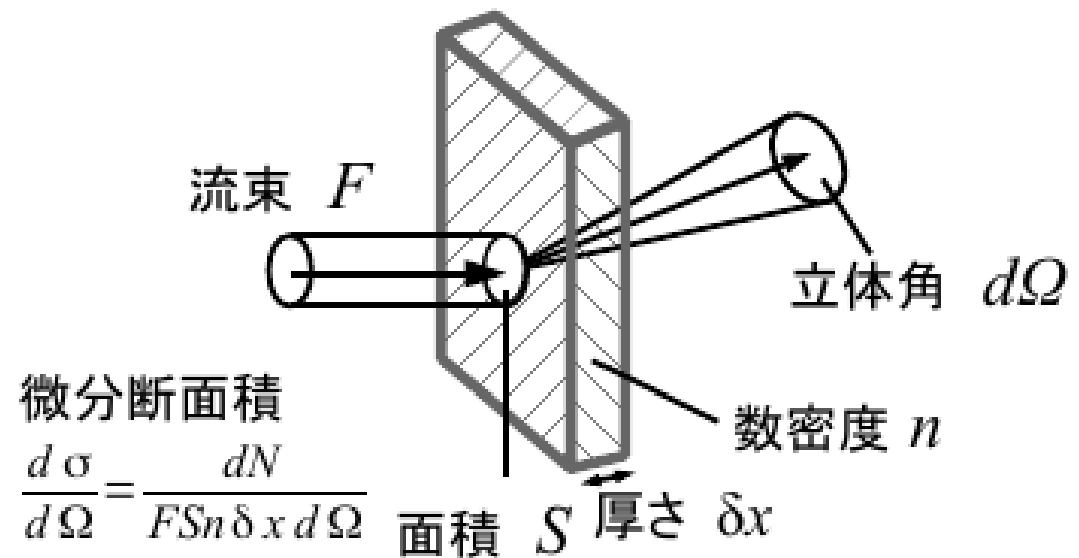
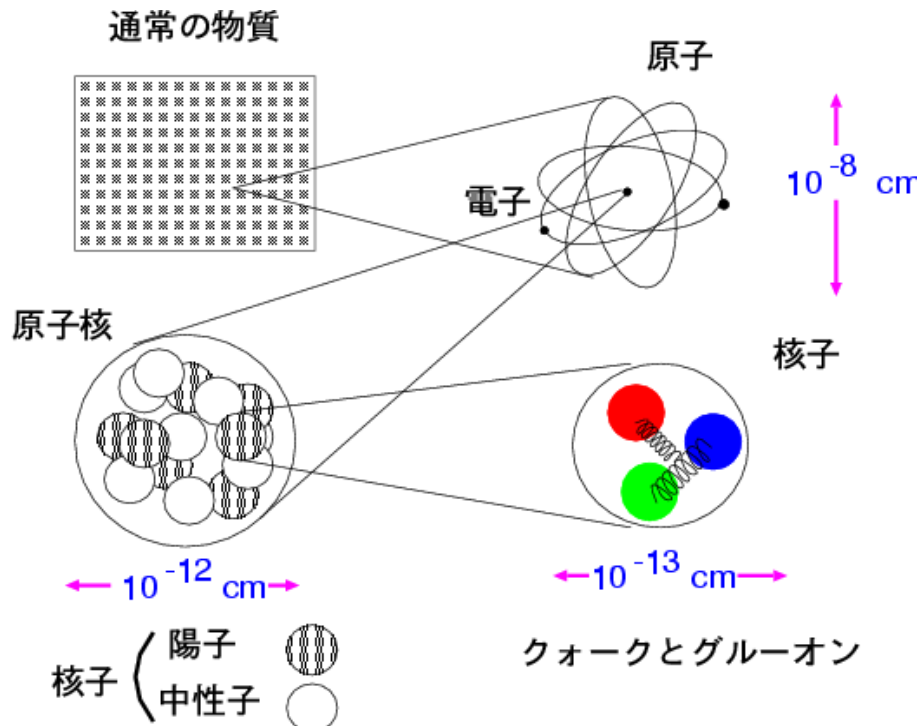
断面積

- 原子核の大きさ : $R \sim 10^{-14}$ m (原子 $\sim 10^{-10}$ m の 1 万分の1)
- 「目で見えない」小さなものをどうやってみるか？
→ 粒子をぶつけて散乱させて測る

- 散乱断面積

$$\sigma = \frac{N}{FSn\delta x}$$

- 単位入射流束当たり一つの標的で散乱される確率 (面積の次元)



■ シュレディンガー方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}) = E \Psi(\mathbf{r})$$

$$p = -i\hbar \nabla$$

短く書くと

$$(H_0 + V)\Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}) \quad \left(H_0 = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \right)$$

- 束縛状態: 遠方で波動関数 ψ がゼロに近づく。
- 散乱状態: 遠方から定常的に流れ込み、
標的で散乱されて流れ出る波動関数

$$\Psi(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\begin{aligned} f &= \text{散乱振幅} \\ \mathbf{k} &= \text{入射波束} \\ k &= |\mathbf{k}| \end{aligned}$$

波動関数は規格化されていないが、
流れの密度を用いて (相対的な) 確率解釈が可能。

散乱振幅と微分断面積

■ 流れの密度

$$\mathbf{j} = -i\hbar[\Psi^* \nabla \Psi - (\nabla \Psi^*) \Psi] / 2m$$

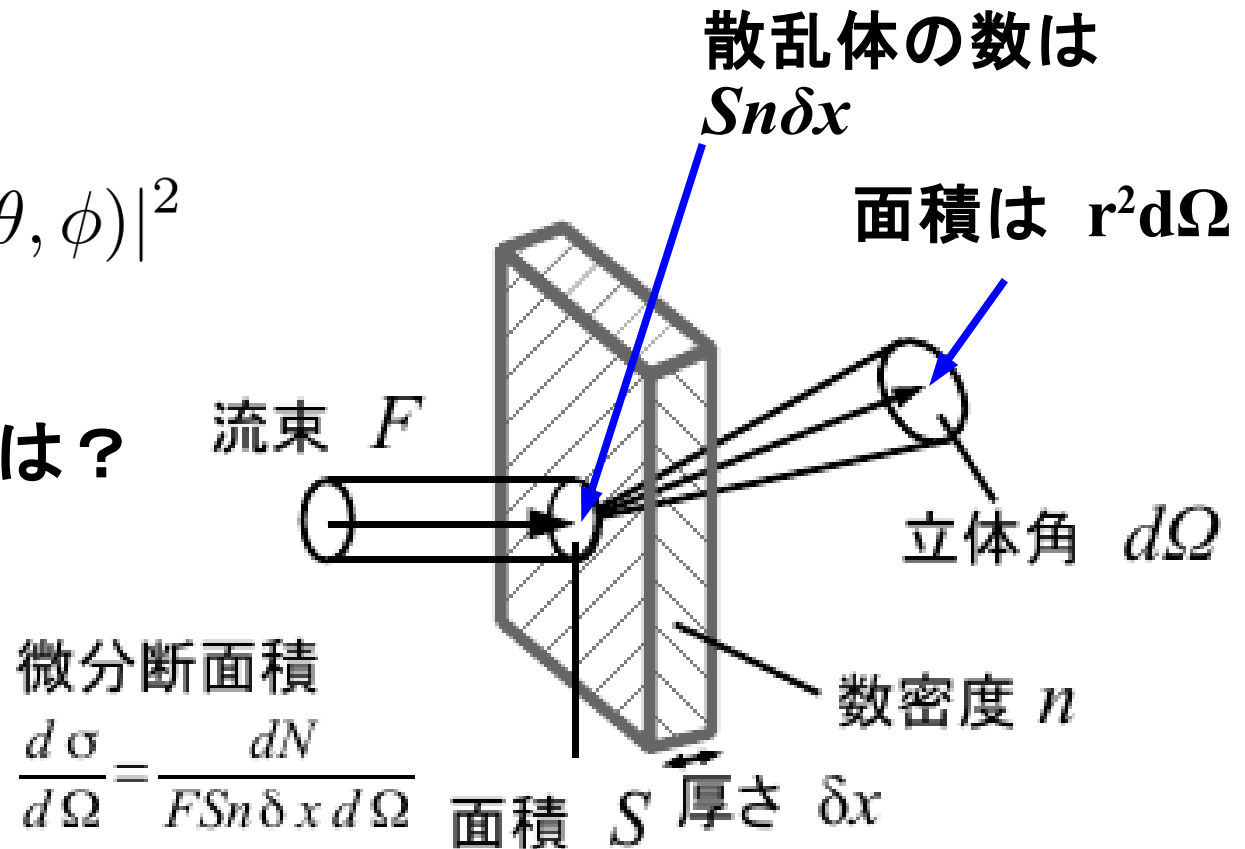
■ 入射流束・外向き球面波の流れの密度

$$F = \hbar k / m, \quad j_r = \hbar k |f(\theta, \phi)|^2 / mr^2$$

■ 微分断面積

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{j_r r^2 d\Omega}{F d\Omega} = |f(\theta, \phi)|^2$$

■ 散乱振幅 f と ポテンシャル V の関係は？



散乱波動関数の形式解

■ シュレディンガー方程式

$$(E - H_0)\Psi = \Phi, \quad \Phi \equiv \hat{V}\Psi$$

■ Φ が与えられているとすると、一般解は特解 + 斉次方程式の解 斉次項を入射平面波にとると、

$$\Psi = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + (E - H_0)^{-1}\Phi$$

■ グリーン関数 G を用いてあらわに座標表示

$$(E - H_0)G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rightarrow G(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}')$$

$$\xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int d\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}') f(\theta, \phi)$$
$$= e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \boxed{\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \mathbf{k}_f | V | \Psi \rangle} \frac{e^{ikr}}{r}$$

$\mathbf{k}_f = \mathbf{r}$ 方向の
波数ベクトル

メモ：グリーン関数の導出

■ フーリエ変換

$$G(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \tilde{G}(\mathbf{q}) \rightarrow \frac{\hbar^2}{2m} (k^2 - q^2) \tilde{G}(\mathbf{q}) = 1$$

$$\rightarrow \tilde{G}(\mathbf{q}) = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{k^2 - q^2} = \frac{1}{E - E_q} \quad (E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m})$$

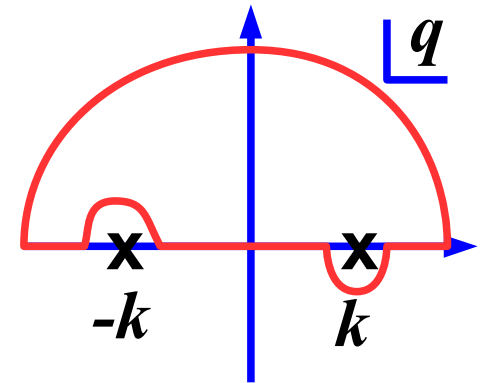
■ 逆フーリエ変換

$$G(\mathbf{r}) = \frac{2m}{\hbar^2} \int \frac{q^2 dq d(\cos \theta) d\phi}{(2\pi)^3} e^{iqr \cos \theta} \frac{1}{k^2 - q^2}$$

$$= \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \int_0^\infty q dq \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{k^2 - q^2}$$

$$= \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \int_{-\infty}^\infty q dq \frac{e^{iqr}}{k^2 - q^2 + i\epsilon}$$

$$= \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} 2\pi i \times k e^{ikr} \times \frac{-1}{2k} = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{4\pi r}$$



Cauchy の積分定理で
遠方で外向き球面波となるよう
 $q=k$ の pole をとる。(iε 処方)

■ 散乱振幅

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \mathbf{k}_f | V | \Psi \rangle$$

右辺の ψ を平面波で近似 (ボルン近似)

$$f_{\text{Born}}(\theta, \varphi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \mathbf{k}_f | V | \mathbf{k} \rangle$$

$$\langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{k} \rangle = \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \tilde{V}(\mathbf{k}' - \mathbf{k})$$

ボルン近似での散乱振幅はポテンシャルのフーリエ変換に比例

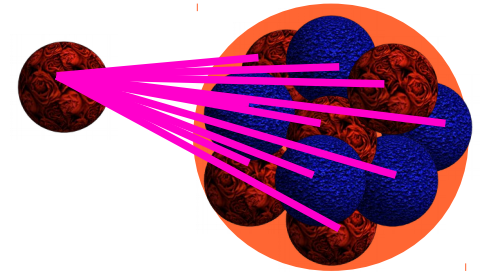
畳み込みポテンシャルと構造因子

■ 畳み込みポテンシャル(原子核と粒子のポテンシャル)

$$V(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') \quad \begin{array}{l} v = \text{入射粒子 - 核子ポテンシャル} \\ \rho = \text{密度} \end{array}$$

フーリエ変換

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = \tilde{v}(\mathbf{q}) \tilde{\rho}(\mathbf{q}) = \tilde{v}(\mathbf{q}) \underbrace{F(\mathbf{q})}_{\text{構造因子}}$$



■ 散乱断面積

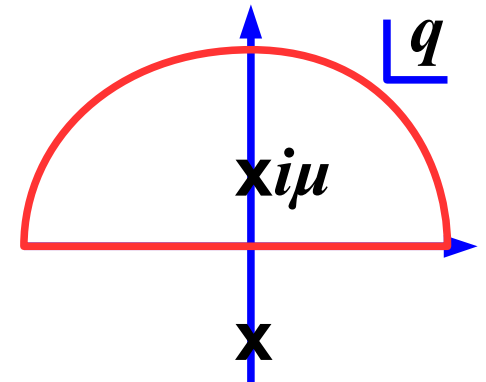
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^2 |\tilde{v}(\mathbf{q})|^2 |F(\mathbf{q})|^2, \quad F(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}$$

原子核との散乱断面積 = 核子との散乱断面積 × |構造因子|²
(ボルン近似 & 畳み込みの場合)

メモ: フーリエ変換の小ネタ

- 畳み込みのフーリエ変換 = フーリエ変換の積

$$\begin{aligned} A(\mathbf{r}) &= \int d\mathbf{r}' B(\mathbf{r} - \mathbf{r}') C(\mathbf{r}') \\ &= \int d\mathbf{r}' \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} \tilde{B}(\mathbf{k}) \tilde{C}(\mathbf{k}') \\ &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \tilde{B}(\mathbf{k}) \tilde{C}(\mathbf{k}) \end{aligned}$$



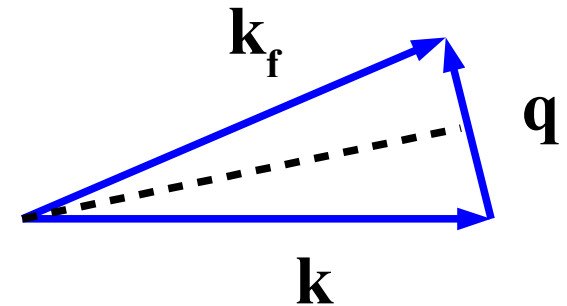
- 湯川関数のフーリエ変換 = Lorentzian

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}}{\mu^2 + q^2} = \frac{1}{ir} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q dq}{(2\pi)^2} \frac{e^{iqr}}{\mu^2 + q^2} \\ &= \frac{1}{ir} \times 2\pi i \times \frac{i\mu}{(2\pi)^2} \frac{e^{-\mu r}}{2i\mu} = \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r} \end{aligned}$$

ラザフォード散乱

■ 湯川ポテンシャル

$$v(\mathbf{r}) = \frac{C \exp(-\mu r)}{r} \rightarrow \tilde{v}(\mathbf{q}) = \frac{4\pi C}{\mu^2 + q^2}$$



■ クーロンポテンシャル

$$v(\mathbf{r}) = \frac{C}{r} \rightarrow \tilde{v}(\mathbf{q}) = \frac{4\pi C}{q^2}$$

$$q = 2k \sin(\theta/2)$$

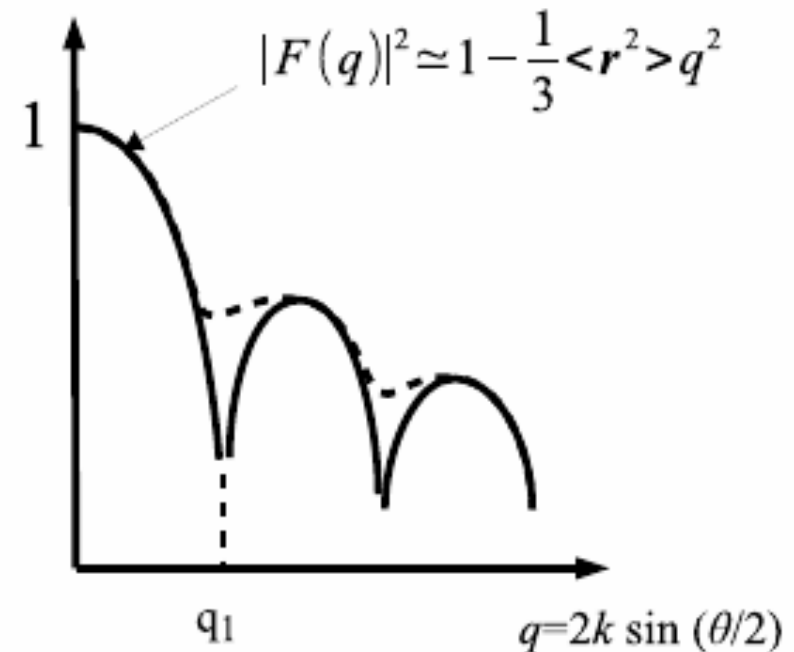
■ ラザフォード散乱 (クーロン散乱)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Ruth}} |F(\mathbf{q})|^2$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Ruth}} = \left(\frac{2m\alpha\hbar c Z_1 Z_2}{\hbar^2 q^2} \right)^2$$

$$= \frac{(\alpha\hbar c Z_1 Z_2)^2}{E^2 (2 \sin(\theta/2))^4}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Ruth}}$$



(ρ は規格化されているとする。)

■ 密度が球対称である場合

$$F(\mathbf{q}) = \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}) = \int 4\pi r^2 dr \rho(r) \frac{\sin qr}{qr}$$

$$= \int 4\pi r^2 dr \rho(r) \left(1 - \frac{1}{6} q^2 r^2 + \mathcal{O}(q^4) \right)$$

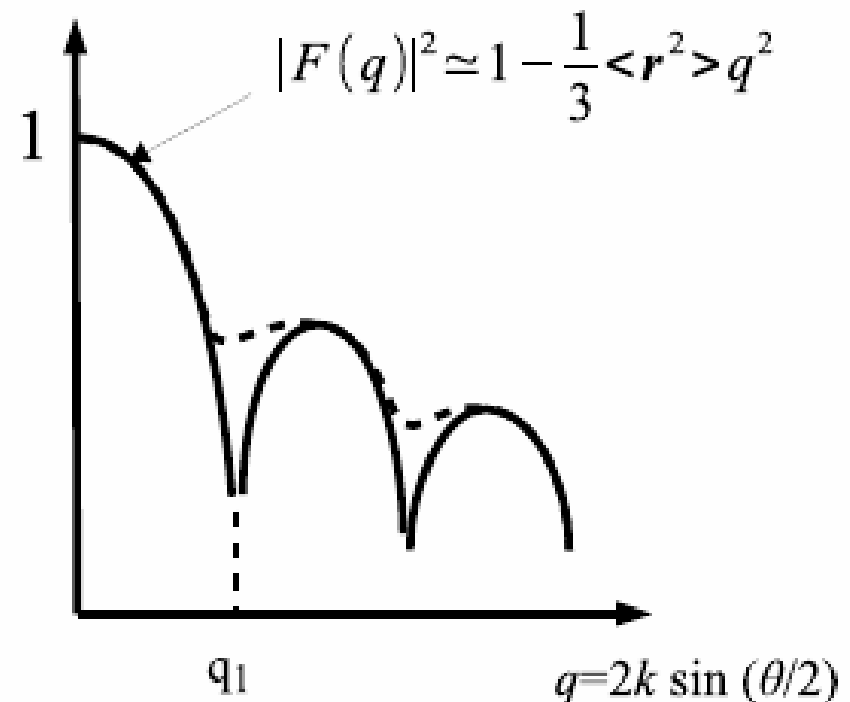
$$= 1 - \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle q^2 + \mathcal{O}(q^4) \quad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Ruth}}$$

小さな q での形から
平均自乗半径が分かる

■ 半径 R の一様球の場合

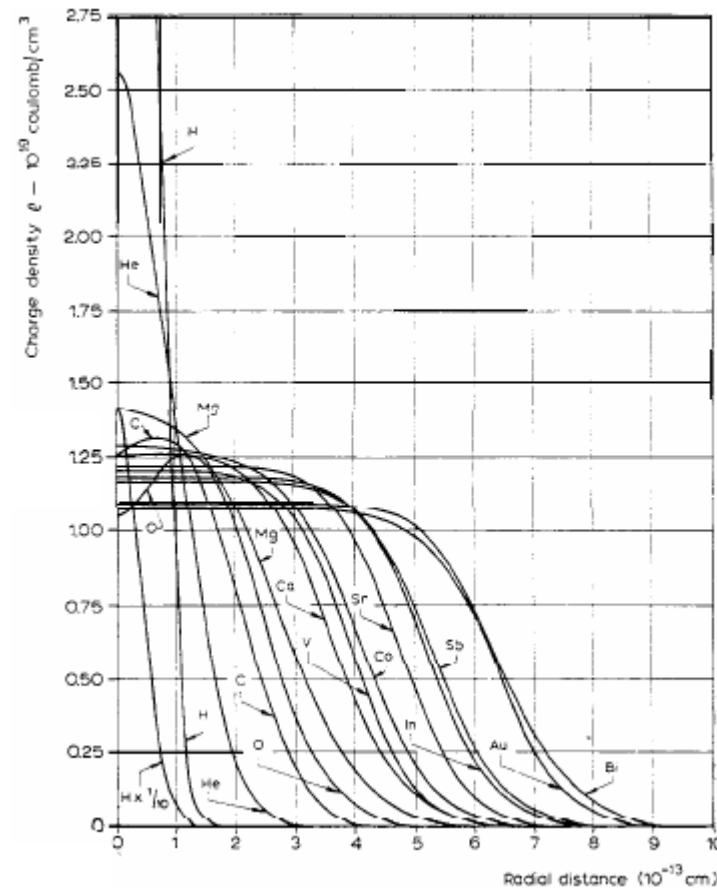
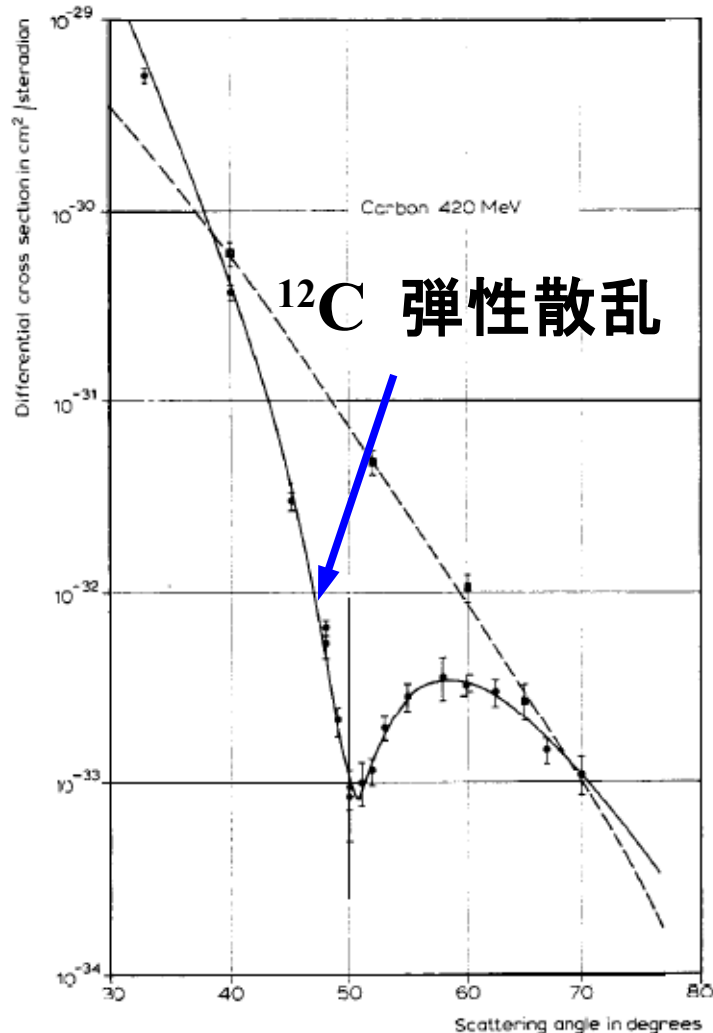
$$F(\mathbf{q}) = \frac{3}{q^3 R^3} (\sin qR - qR \cos qR)$$

F が小さくなる q から半径が
推定できる！



原子核の密度分布

- 電子散乱による原子核の密度分布研究
Robert Hofstadter (Nobel prize in Physics, 1961)



<http://www.nobelprize.org/>

原子核の密度分布

- 原子核における核子の密度: Woods-Saxon (または Fermi) 型

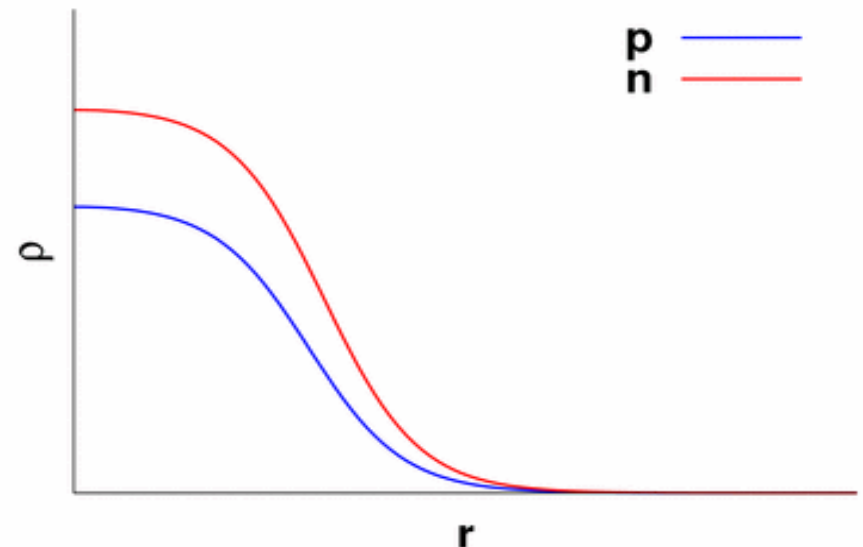
$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp \left[\frac{r - R_{\text{WS}}}{d} \right]}$$

$$R_{\text{WS}} \simeq 1.07 A^{1/3} \text{ fm}, \quad d \simeq 0.54 \text{ fm}, \quad \rho_0 \simeq 0.16 \text{ fm}^{-3}$$

→ 一様球として平均自乗半径を説明するには

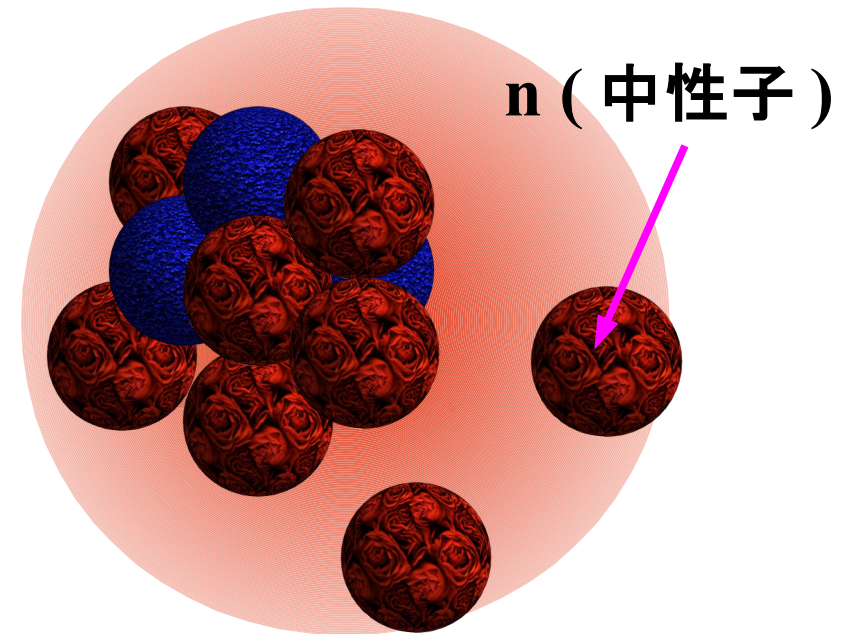
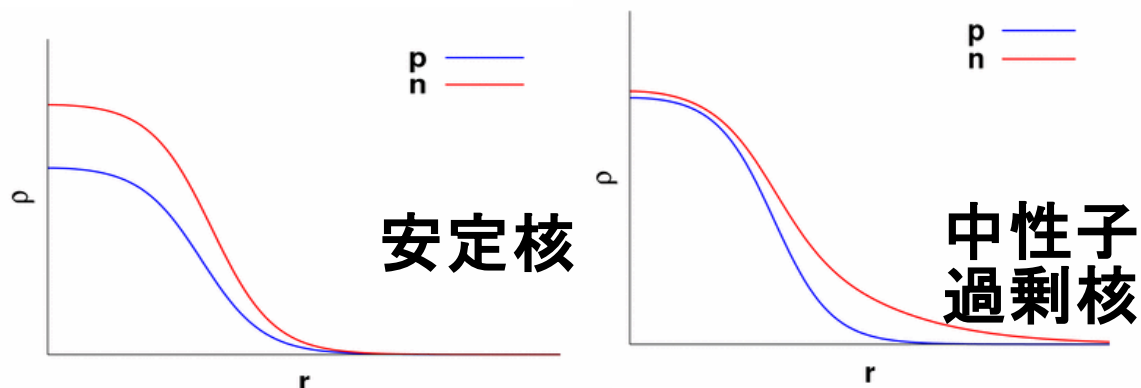
$$R = r_0 A^{1/3}, \quad r_0 = 1.21 \text{ fm}$$

半径 $\propto A^{1/3} \rightarrow$ 体積 $\propto A$
→ 大きな原子核の中心部は
密度が原子核によらず
一定の値 ρ_0 をとる
→ 「核物質」



不安定原子核

- 安定核の半径 $R \sim 1.1 A^{1/3}$ (fm) $\rightarrow$ 密度は原子核によらず一定
- 中性子過剰核の半径 $R \gg 1.1 A^{1/3}$ (fm) (公式はまだない)
 $\rightarrow$ 外側の中性子が大きく広がっている「ハロー構造」
(ハロー = 太陽の回りに見える暈)



中性子過剰核 $N \gg Z$
例: ^{11}Li ($Z=3, N=8$)