

物理学特論I (中性子星と原子核物理)

1. 序論: 中性子星とは
 2. 中性子星の質量と半径
 3. 中性子星に関連する原子核・ハドロン物理学1
– 原子核の大きさと散乱の量子力学
 4. 中性子星に関連する原子核・ハドロン物理学2
– 原子核の質量と核物質状態方程式
 5. 中性子星に関連する原子核・ハドロン物理学3
– クォークとハドロン
 6. 中性子星核物質の状態方程式
 7. 中性子星の最近の話題と課題 – 中性子星の最大質量とハイペロンパズル
- ・ セミナー: 最適化問題としての符号問題

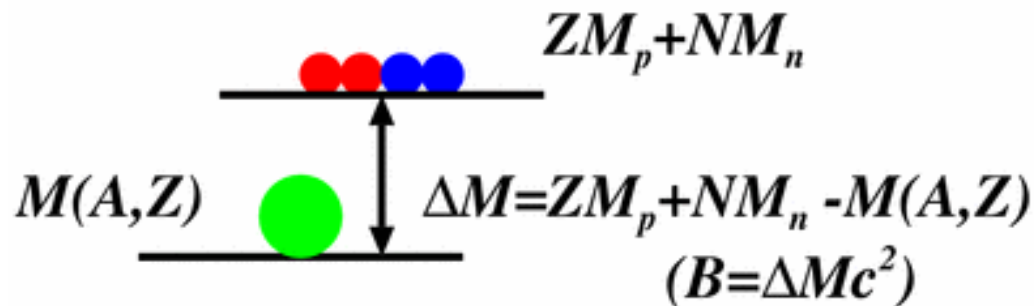
原子核の束縛エネルギー

■ 束縛エネルギー

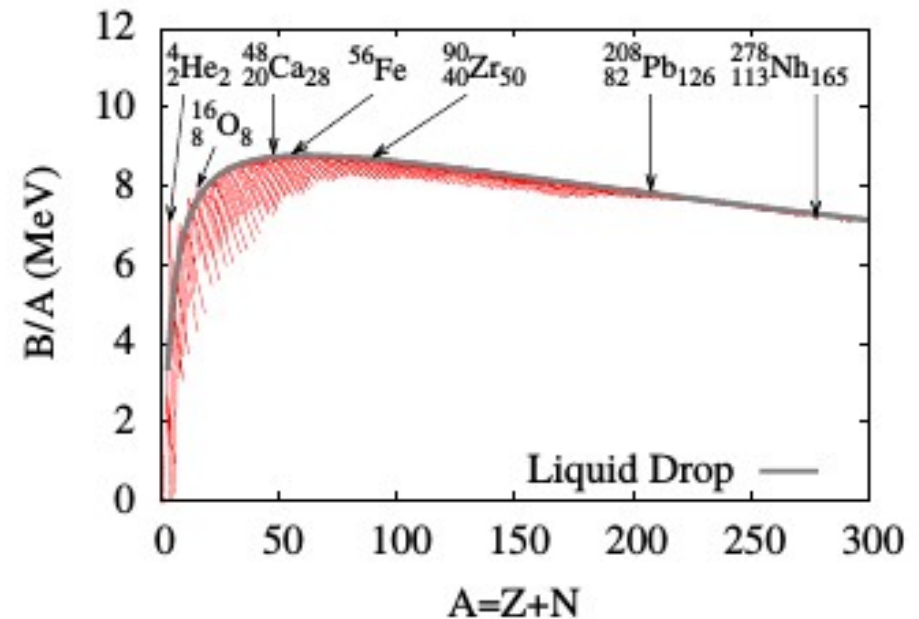
$$B(A, Z) = ZM_p + NM_n - M(A, Z)$$

- 陽子数 Z , 中性子数 N , 陽子質量 M_p , 中性子質量 M_n , 原子核質量 $M(A, Z)$
- 原子核の質量は、核子の質量の和より小さい (質量欠損)

■ 束縛エネルギーの観測値 : $16 \leq A \leq 240$ において、 $B/E \sim 8 \text{ MeV}$



質量欠損 = 核子質量の和 - 原子核の質量
束縛エネルギー = 質量欠損 $\times c^2$



質量公式

■ Weizsäcker の半経験的質量公式

$$B(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N - Z)^2}{A} + a_p \frac{\delta_p}{A^\gamma}$$

体積 表面 クーロン 対称エネルギー 対エネルギー

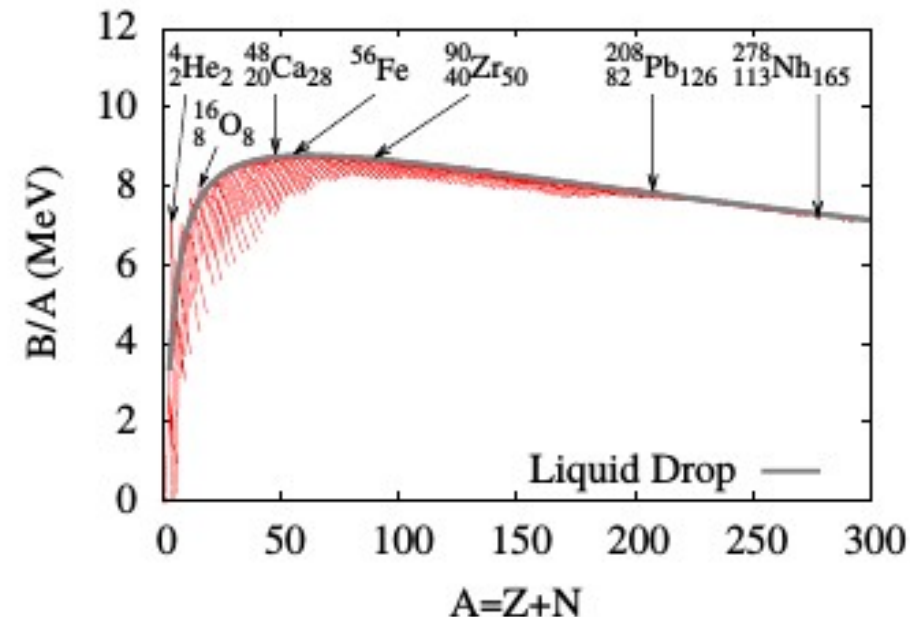
- 体積項、表面項 → 表面張力のある液滴
- 一様帯電球 (半径 $R = r_0 A^{1/3}$, 電荷 $Q=Ze$) のクーロンエネルギー

$$E_C = \frac{3}{5} \frac{\alpha \hbar c}{r_0} \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

- 対称エネルギー、対エネルギーは液滴描像からは出てこない。

a_v	a_s	a_c	a_a	a_p
15.85	18.34	0.71	23.21	12.0

単位 MeV ($\gamma=1/2$ の場合)



フェルミガス模型 (1)

■ フェルミガス模型

- 核子はフェルミオン → 一つの量子状態に1粒子までしか入れない
- フェルミ分布関数

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp [(E - \mu)/T]} \xrightarrow{T \rightarrow 0} \Theta(\mu - E)$$

温度ゼロではエネルギーが化学ポテンシャル μ までの状態に
びっしりと粒子が詰まる。

$$A = 2 \times 2 \times \sum_n f(E_n) = 4V \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \Theta\left(\mu - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right) = \frac{4V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi k_F^3}{3}$$

- 体積 $V=4\pi r_0^3 A/3$ よりフェルミ波数 k_F 、運動エネルギーが求まる

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \simeq 33 \text{ MeV}, \quad E_K = \frac{1}{A} \frac{4V}{(2\pi)^3} \int_{|k| < k_F} d\mathbf{k} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{3}{5} E_F \simeq 20 \text{ MeV}$$

**質量公式の体積項の説明には、核子あたり -36 MeV の
相互作用エネルギー(引力) が必要！**

メモ：位相空間と量子力学的状態数

■ 状態数 = 位相空間

● 1次元の箱 (長さ L , 周期境界条件)

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik_n x}, \quad k_n = \frac{2\pi}{L} n$$

L が十分大きいとき、 $n=Lk/2\pi$

$$\sum_n = \frac{L}{2\pi} \Delta k \sum_{k_n} \rightarrow \frac{L}{2\pi} \int dk$$

● 3次元の箱 (体積 $V=L^3$, 周期境界条件)

$$\sum_{\mathbf{n}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} = \int \frac{d\mathbf{r}d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}$$

フェルミガス模型 (2)

- 陽子数と中性子数が異なる場合 → フェルミ波数がずれる

$$k_{Fp} = (3\pi^2 \rho_p)^{1/3} = \left(\frac{3\pi^2 \rho}{2} \cdot (1 - \delta) \right)^{1/3}, \quad k_{Fn} = \left(\frac{3\pi^2 \rho}{2} \cdot (1 + \delta) \right)^{1/3}$$

非対称度

$$\delta = (N - Z)/A$$

- 核子あたりの運動エネルギー

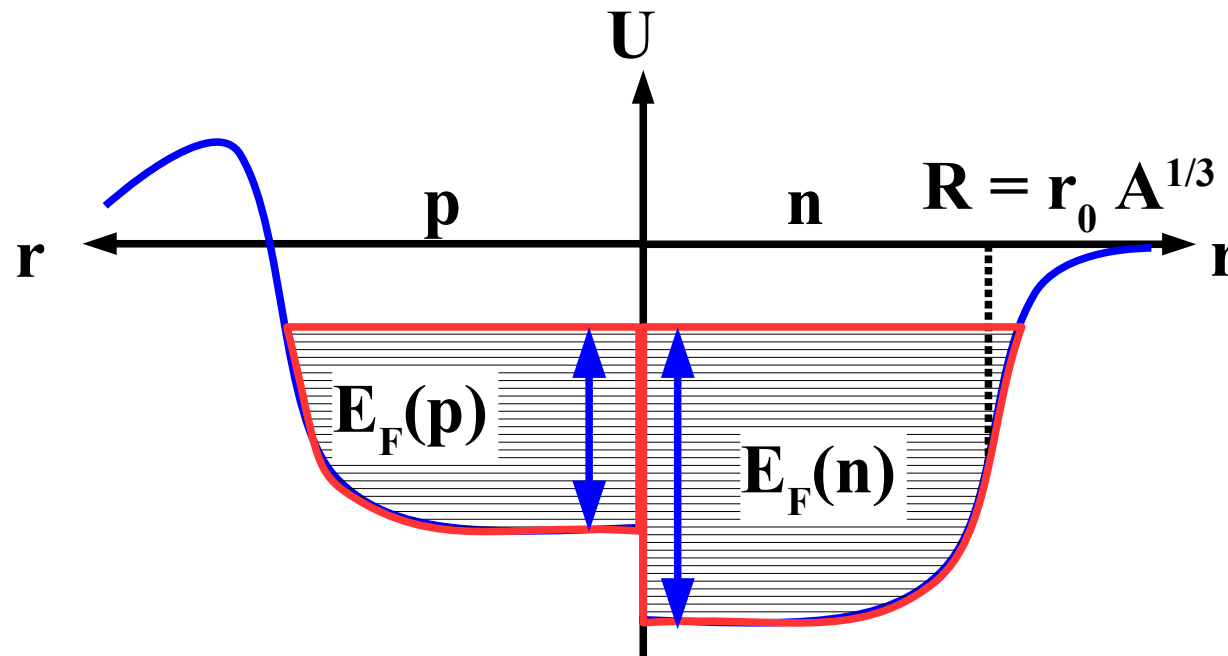
$$\begin{aligned} E_K &= \frac{Z}{A} \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_{Fp}^2}{2m} + \frac{N}{A} \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_{Fn}^2}{2m} = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2 \rho}{2} \right)^{2/3} \times \frac{1}{2} \left[(1 - \delta)^{5/3} + (1 + \delta)^{5/3} \right] \\ &\simeq \frac{3}{5} E_F(\delta = 0) + \frac{1}{3} E_F(\delta = 0) \delta^2 + \mathcal{O}(\delta^4) \end{aligned}$$

フェルミガス模型の運動エネルギーから現れる
対称エネルギーは $E_F/3 \sim 11 \text{ MeV}$

→ 陽子・陽子、中性子・中性子間の引力よりも強い
陽子・中性子間の引力が必要

原子核の描像

- 中心部分はほぼ密度一定の「核物質」
(電子散乱、 α 散乱、p 散乱などの成果)
- 核子間に引力が働き、一粒子ポテンシャル中を核子が運動
(質量公式から)
- 表面では密度・ポテンシャルともに小さくなる
(質量公式の表面項)



質量公式と状態方程式

- $A \rightarrow \infty$ における核子あたりのエネルギー
(クーロンエネルギーは無視)

$$E = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{-B(A, Z)}{A} = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[-a_v + a_s A^{-1/3} + a_a \frac{(N - Z)^2}{A^2} - a_p \frac{\delta_p}{A^{\gamma+1}} \right]$$
$$= -a_v + a_a \delta^2$$

- 密度と非対称度の関数と考えると、
核子あたりのエネルギーが最小となる密度が実現する

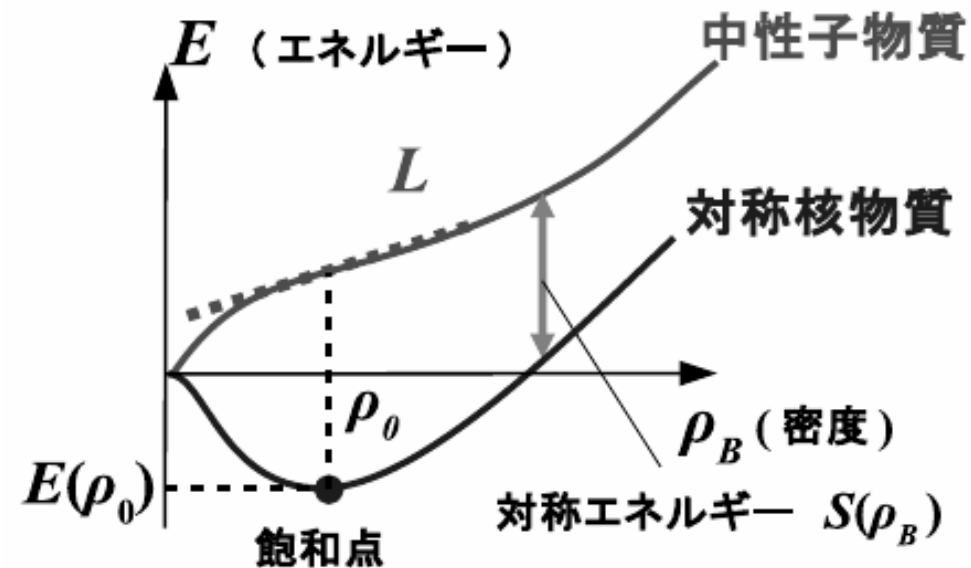
$$E = E(\rho_B, \delta)$$

状態方程式 (EOS)

→ 核物質の飽和性

- 飽和点

$$(\rho_0, E_0) \simeq (0.16 \text{ fm}^{-3}, -16 \text{ MeV})$$



対称エネルギー

■ 非対称核物質 ($N \neq Z$) のエネルギー

$$E(\rho_B, \delta) = E(\rho_B, \delta = 0) + S(\rho_B)\delta^2 \quad P = \rho^2 \partial E / \partial \rho$$

■ 対称エネルギー

$$S(\rho_B) = E(\text{中性子物質}) - E(\text{対称核物質})$$

■ 飽和密度でのパラメータ

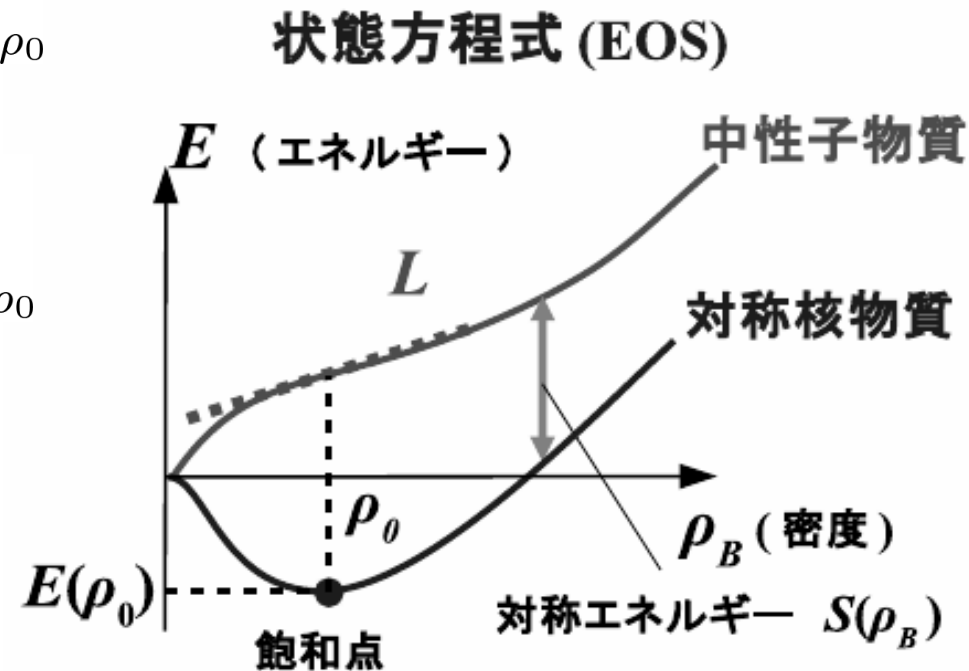
- 非圧縮率 $K \equiv 9 \rho_0^2 \left. \frac{\partial^2 E(\rho_B)}{\partial \rho_B^2} \right|_{\rho_B = \rho_0}$

- 対称エネルギーの値と微分

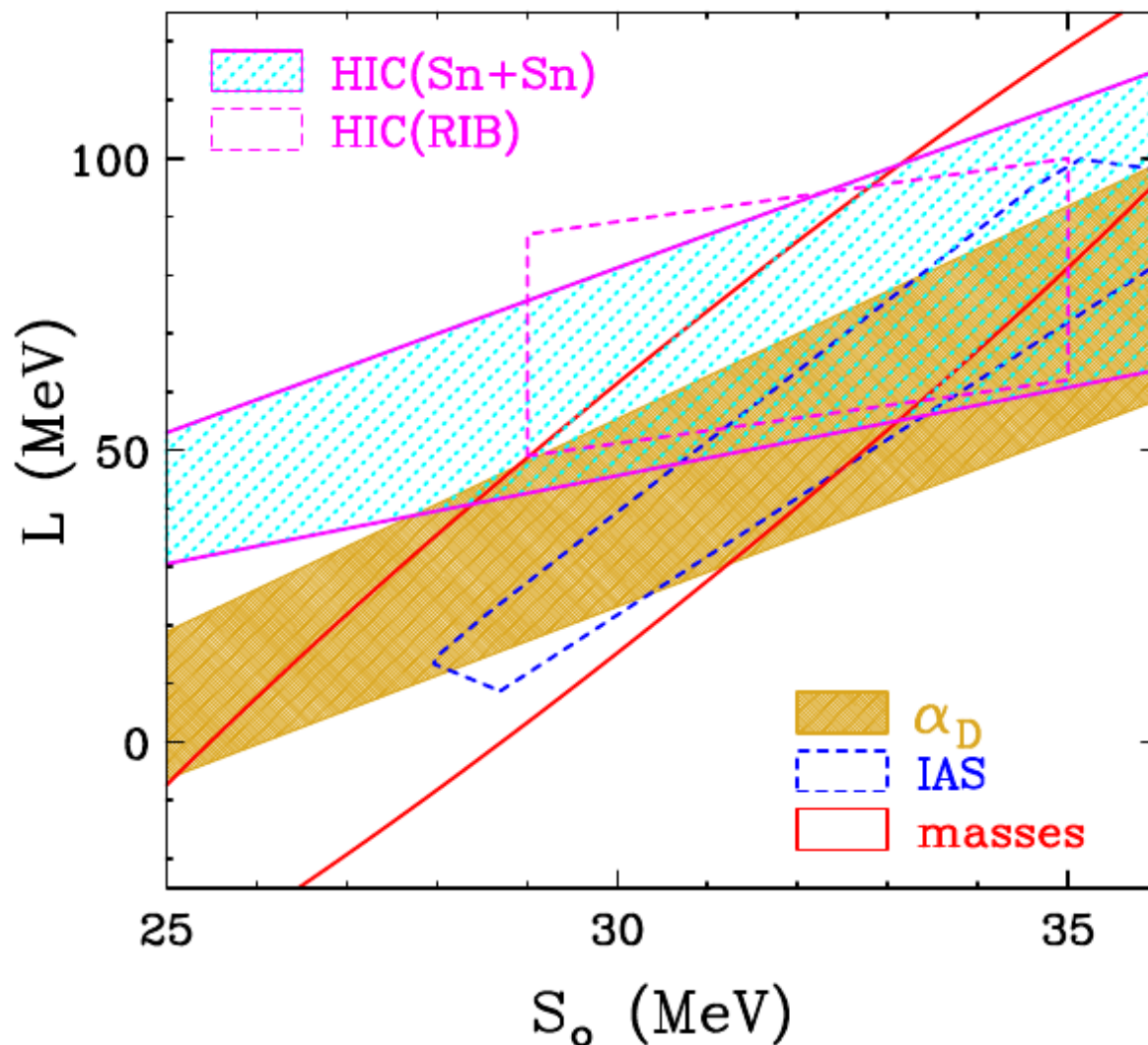
$$S_0 \equiv S(\rho_0), \quad L \equiv 3\rho_0 \left. \frac{dS(\rho_B)}{d\rho_B} \right|_{\rho_B = \rho_0}$$

$$E(\rho_B, \delta) \simeq E_0 + S_0 \delta^2 + \frac{L}{3} x \delta^2 + \frac{K}{18} x^2$$

$$(x = (\rho_B - \rho_0)/\rho_0)$$



対称エネルギーの実験的制限



$S_0 = (30-35) \text{ MeV}$
 $L = (50-90) \text{ MeV}$

様々な実験により対称エネルギーパラメータを制限！

C.J. Horowitz, E.F. Brown, Y. Kim, W.G. Lynch, R. Michaels, A. Ono, J. Piekarewicz, M.B. Tsang, H.H. Wolter, J. Phys. G 41 (2014) 093001.

現象論的な核物質状態方程式

■ 相互作用エネルギー

$$V_{2B} = \frac{1}{2} \int d^3r d^3r' \rho_B(\mathbf{r}) v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho_B(\mathbf{r}') \rightarrow A \times \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\rho_B}{\rho_0} \right)$$

$$V_{3B} = \frac{1}{3} \int d^3r d^3r' d^3r'' v(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') \rho_B(\mathbf{r}) \rho_B(\mathbf{r}') \rho_B(\mathbf{r}'') \rightarrow A \times \frac{\beta}{3} \left(\frac{\rho_B}{\rho_0} \right)^2$$

(一様密度、ゼロレンジの2体力・3体力)

■ 現象論的な状態方程式

● 対称核物質

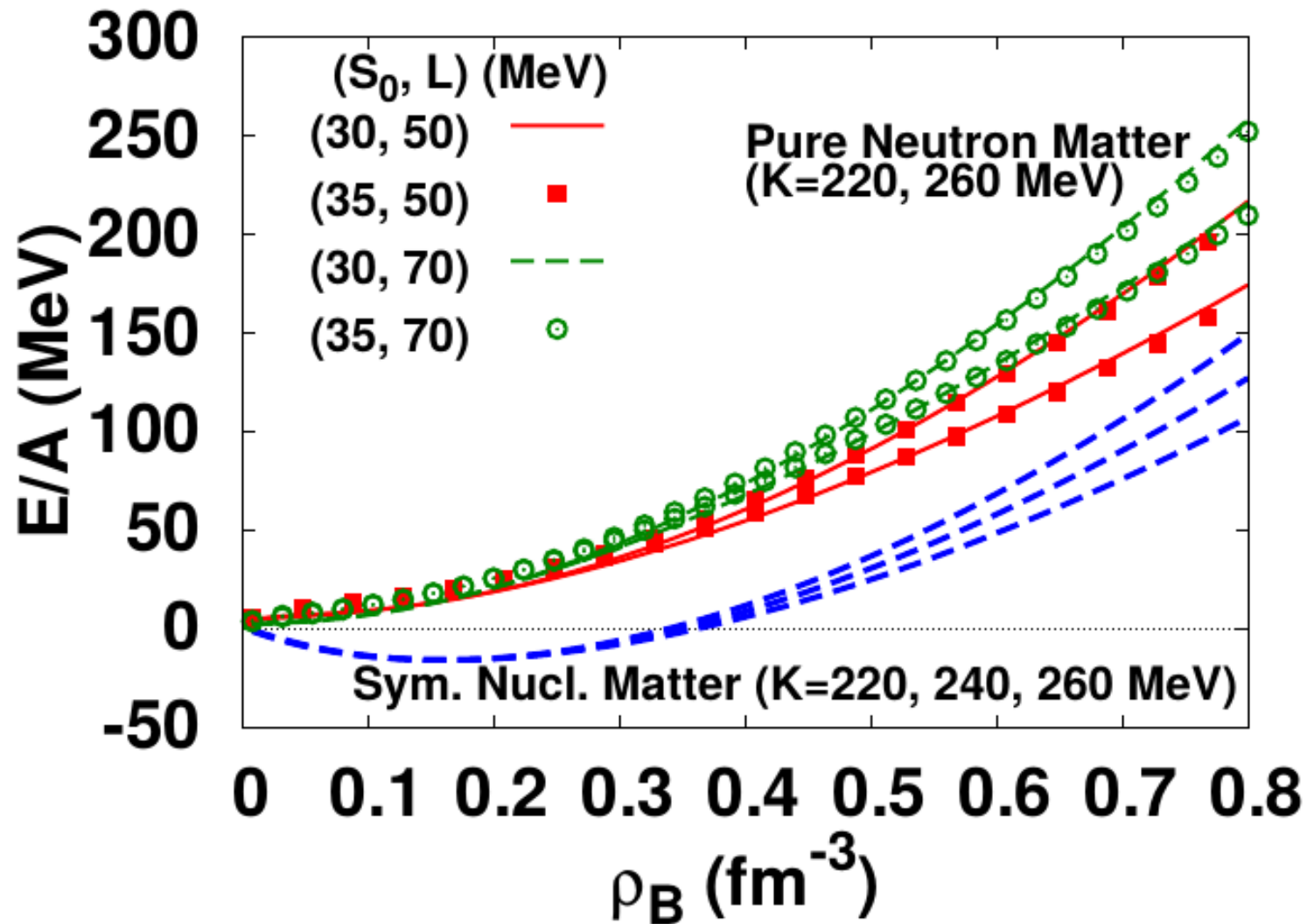
$$E(\rho_B) = \frac{3}{5} E_F(\rho_B) + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\rho_B}{\rho_0} \right) + \frac{\beta}{2 + \gamma} \left(\frac{\rho_B}{\rho_0} \right)^{1+\gamma}$$

● 対称エネルギー

$$S(\rho_B) = \frac{1}{3} E_F(\rho_B) + \alpha_{\text{sym}} \left(\frac{\rho_B}{\rho_0} \right) + \beta_{\text{sym}} \left(\frac{\rho_B}{\rho_0} \right)^{\gamma_{\text{sym}}}$$

■ 密度依存性の起源 = 生の3体力 + Pauli 原理などの多体効果

現象論的な核物質状態方程式



飽和密度近辺での不定性は少ないが、
中性子物質・高密度では大きな不定性

状態方程式と原子核の構造

■ 密度汎関数理論

- 与えられた密度における多体系の基底状態エネルギーは密度の汎関数で与えられる。 *P. Hohenberg, W. Kohn ('64)*

$$E_{gs} = \min_{\Psi} \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle = \min_{\rho} \left[\min_{\Psi} \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle_{\rho} \right] \\ = \min_{\rho} F[\rho]$$

- 相互作用する系の密度は、一体ポテンシャル中を運動する自由粒子系の密度として計算できる。 *W.Kohn, L.J.Sham ('65)*

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi_i(\mathbf{r}) + U_{\text{eff}}(\mathbf{r}) \varphi_i(\mathbf{r}) = \varepsilon_i \varphi_i(\mathbf{r})$$

$$F[\rho] = E_H[\rho] + \underline{E_{\text{xc}}[\rho]}, \quad U_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = U_H(\mathbf{r}) + \frac{\delta E_{\text{xc}}}{\delta \rho(\mathbf{r})}$$

- 密度汎関数 → 状態方程式 Exchange-Correlation E.

$$E(\rho) = \min_{\rho'} F[\rho'] |_{\rho'_{\text{ave}} = \rho}$$

スキーム力による密度汎関数

■ Skyrme interaction (c.f. Ring-Schuck text)

● ゼロレンジ相互作用 + 微分 (有限レンジ効果) + 密度依存力

$$\begin{aligned}v(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = & t_0(1 + x_0 P_\sigma) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ & + \frac{1}{2} t_1 (\mathbf{k}^2 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \mathbf{k}^2) + t_2 \mathbf{k} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \mathbf{k} \\ & + \frac{1}{6} t_3 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \rho^\alpha ((\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2) \\ & + i W_0 (\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2) \mathbf{k} \times \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \mathbf{k} \\ \mathbf{k} = & (\nabla_1 - \nabla_2)/2i\end{aligned}$$

● エネルギー密度 (spin, isospin が飽和している場合)

$$\begin{aligned}H(\mathbf{r}) = & \frac{\hbar^2}{2m} \tau(\mathbf{r}) + \frac{3}{8} t_0 \rho^2 + \frac{1}{16} t_3 \rho^{2+\alpha} + \frac{1}{16} (3t_1 + 5t_2) \rho \tau \\ & + \frac{1}{64} (9t_1 - 5t_2) (\nabla \rho)^2 - \frac{3}{4} W_0 \rho \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{1}{32} (t_1 - t_2) \mathbf{J}^2 \\ \tau = & \sum |\nabla \varphi_i|^2, \quad \mathbf{J} = -i \sum \varphi_i^*(\mathbf{r}, s, t) \nabla \varphi_i(\mathbf{r}, s', t) \times \boldsymbol{\sigma}_{ss'}\end{aligned}$$

広い質量領域の原子核の性質からパラメータを決定
→ 密度汎関数 $F = \int dr H(r)$

メモ: スピン・アイソスピン・ファクター

■ 3/8 等のファクターはどこから現れる？

→ spin, isospin についての和

$$V_{\text{HF}}(t_0 \text{ term}) = \frac{1}{2} t_0 \sum_{i,j} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \langle ij | (1 + x_0 P_\sigma) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) | ij - ji \rangle$$

$$= \frac{1}{2} t_0 \sum_{n,m} \int d\mathbf{r} |\varphi_n(\mathbf{r})|^2 |\varphi_m(\mathbf{r})|^2 \times X = \frac{X}{32} t_0 \int d\mathbf{r} \rho^2$$

$$X = \sum_{s,t} \langle s_1 t_1 s_2 t_2 | (1 + x_0 P_\sigma) | s_1 t_1 s_2 t_2 - s_2 t_2 s_1 t_1 \rangle$$

$$= 4 \times (4 + 2x_0 - 1 - 2x_0) = 12$$