力と場

Super Science High-School 、札幌北高、2004.10.16

北海道大学
大学院理学研究科・物理学専攻
大西　明

Division of Physics
Graduate School of Science
Hokkaido University
http://phys.sci.hokudai.ac.jp/

要旨

　ニュートン力学では物体間に距離に応じた力が働き、この力の和が質量と加速度の積となる。例えば重力も地球を構成している物質から働く万有引力の合計である。
　さて、離れていても力が働くならば、その力は光の速度を越えて瞬間的に伝わるのであろうか？
　この講議では離れていても働く力（遠隔相互作用）が、どのようにして局所的に伝わる「場」により記述されるのかについて説明する。また力を伝える「場」が粒子として現れる例など、現代物理学の成果の一端を紹介する。

目次

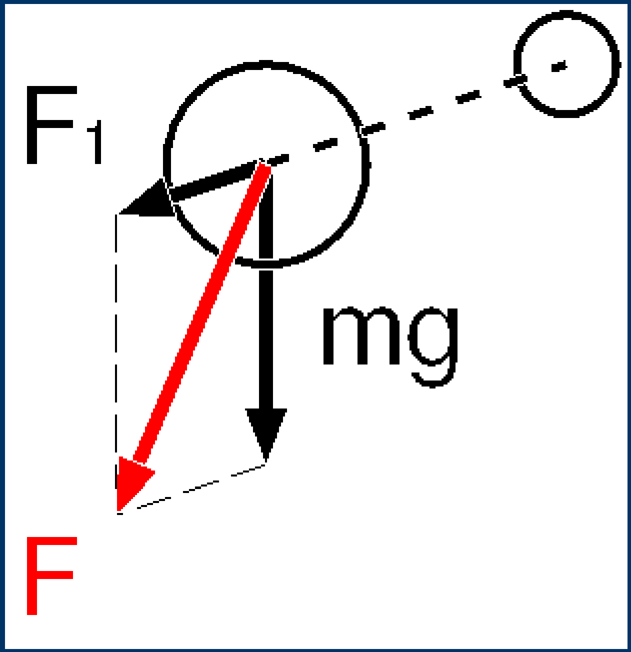
Introduction: 場とは何だろう？

- 様々な「場」
  - 電場、磁場、重力場、中間子場、...
- 「場」のイメージは？
  - 空間の各点で何らかの値をもつもの
- 電場や磁場
  - 電荷や電流により作られる
  - 荷電粒子に力を与える
- 重力ポテンシャルも「場」の一種
  - 天体などの重い物質により作られる
  - 粒子に力を与える
- 湯川博士の発見：中間子場
  - 質量をもつ粒子は短距離しか届かない
- これらの「場」の共通の性質は何だろう？

高校での力学 (I)

- Newton の運動方程式　$\vec{F} = m\vec{a}$
  - $\vec{F}$　: 物体に働く力のベクトル
  - m　: 質量
  - $\vec{a}$　: 加速度ベクトル
- 外力、および他の物体からの力のベクトル和が $\vec{F}$

$$\vec{F} = \vec{F}_{外力} + \sum_j \vec{F}_j$$



高校での力学 （II）

- 力のする仕事＝運動エネルギーの増加

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = T_B - T_A$$

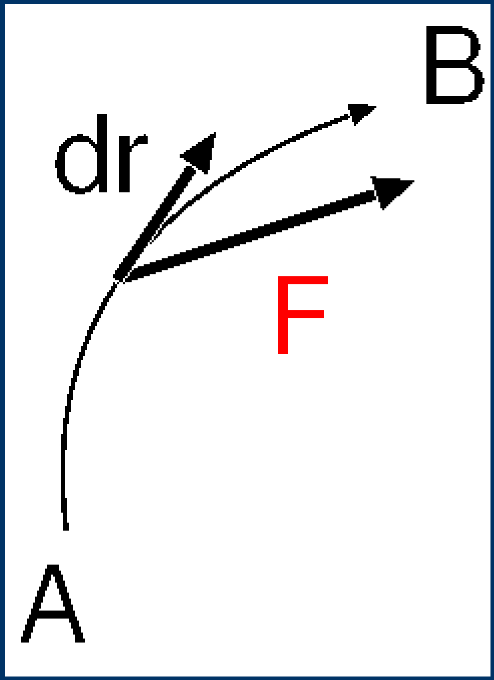
- 保存力の場合には、この仕事は
「場所の関数の差」
として表せる。
この関数を位置エネルギーと呼ぶ。

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = U_A - U_B$$

→ 力学的エネルギーが保存する。
（他の粒子は動かないとする。）

$$W = U_A - U_B = T_B - T_A$$

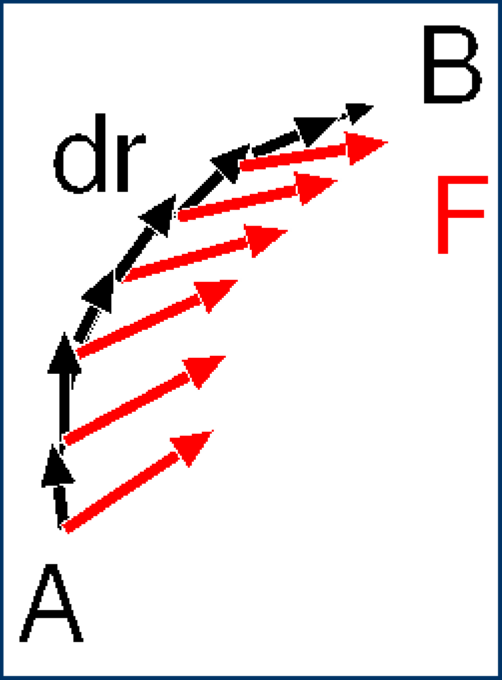
$$E_A = E_B \quad (E = T + U)$$



数学的な準備　(I)

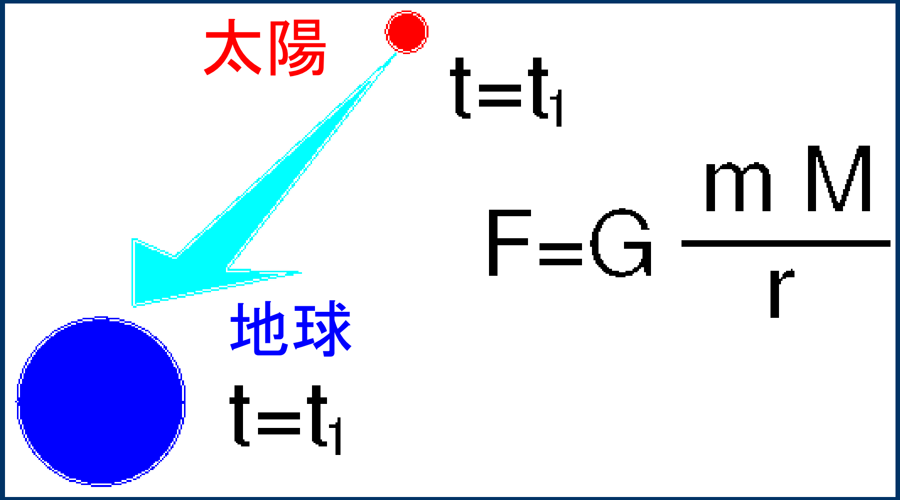
- 線積分
  - 曲線状で小さな区間に分けて関数を足し合わせる

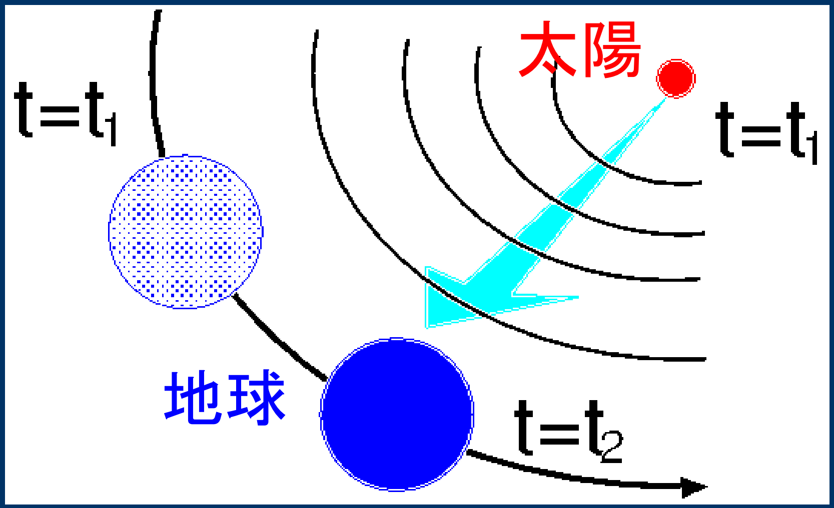
$$\int \vec{F}\cdot\vec{dr} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{dr}_i$$



力は「瞬間的に」伝わるのだろうか？

- Newton 力学での力
  - 離れていても力が伝わる＝「遠隔相互作用」
  - 物体間の力は「同時刻」における距離により決まる
    - ➔ 相対性理論によれば情報は光速を超えて伝わらない



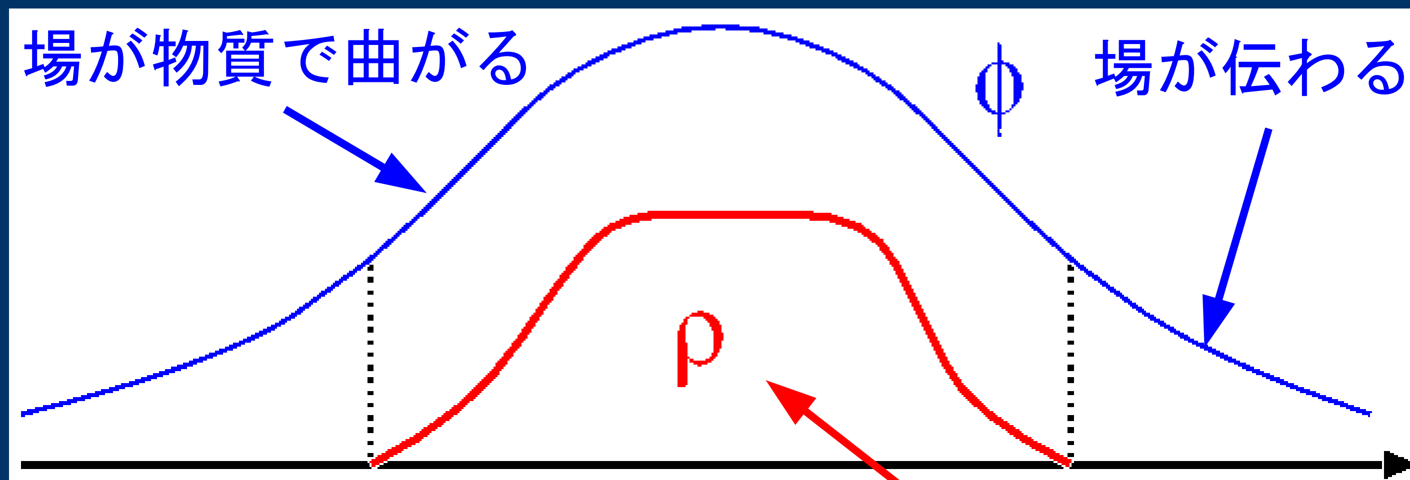


- 別の考え方（近接相互作用）

  物体間に「何か」が空間を伝わっていき、
  その「何か」が空間の各点で力を生み出す。
  この「何か」の正体が「場」である。

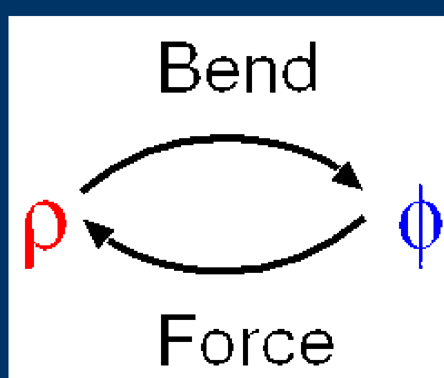
「場」と物質の相互作用

- 物質があると場 Φ を曲げ、物質のない空間では場が自分自身で伝わっていく



- 場 Φ の勾配が物質に力を与える

物質密度
（電荷、質量、. . . ）

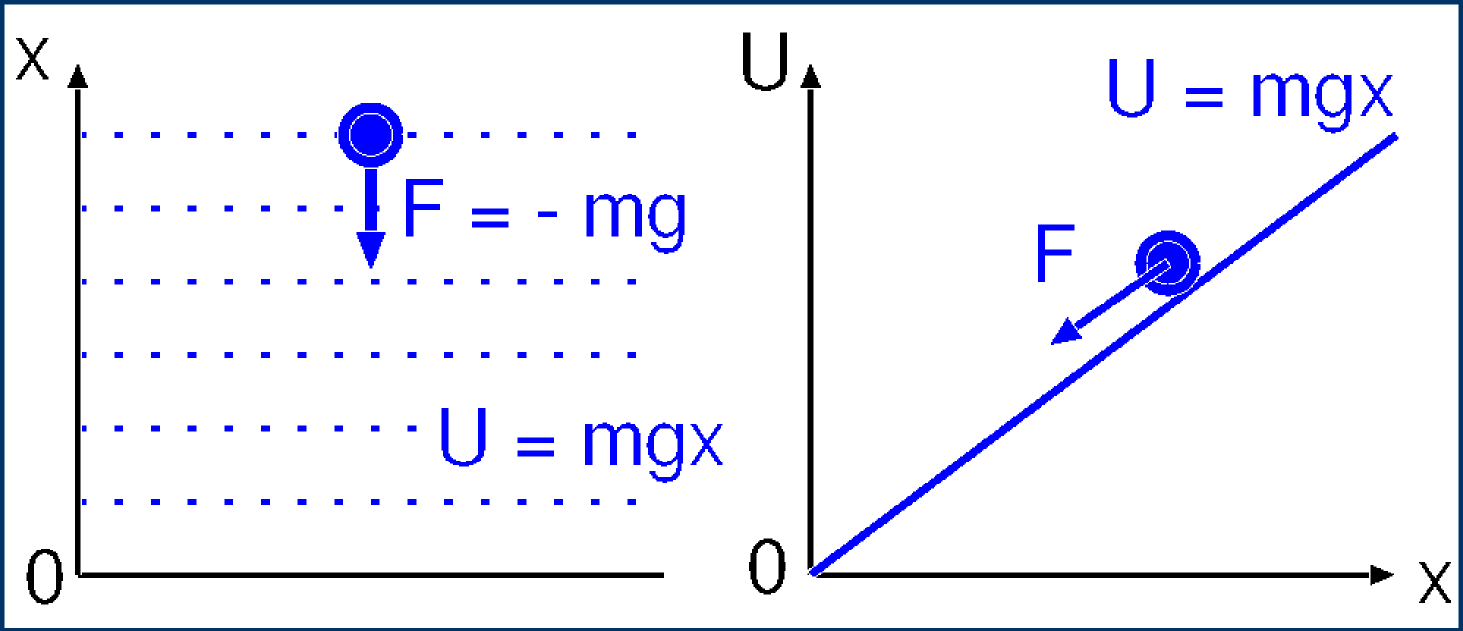


物質の密度分布と場は
お互いがお互いを規定しあう

場は力を生み出す

- 地球の質量が作り出す重力ポテンシャル ϕ は「場」の一種
- 物体の位置エネルギーは（質量）×（重力ポテンシャル）
- 重力の位置エネルギー U の勾配が力 F となる。

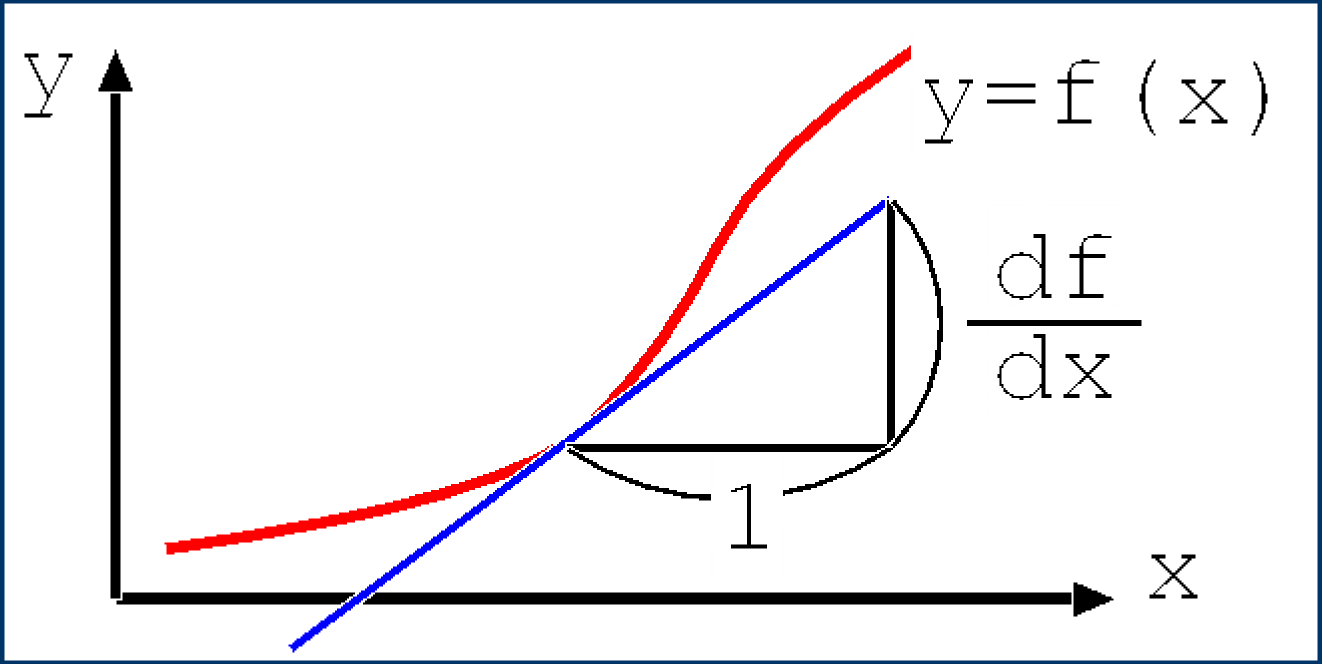
$$\phi(x)=gx \quad , \quad U(x)=mgx \quad , \quad F=-\frac{dU}{dx}=-mg$$



数学的な準備　(II)

- 微分：関数の勾配

$$\frac{df}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Division of Physics
Graduate School of Science
Hokkaido University
http://phys.sci.hokudai.ac.jp/

数学的な準備 （III）

- 簡単な関数の微分

$$\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=2x+\Delta x\rightarrow\frac{d(x^2)}{dx}=2x$$

$$\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2\rightarrow\frac{d(x^3)}{dx}=3x^2$$

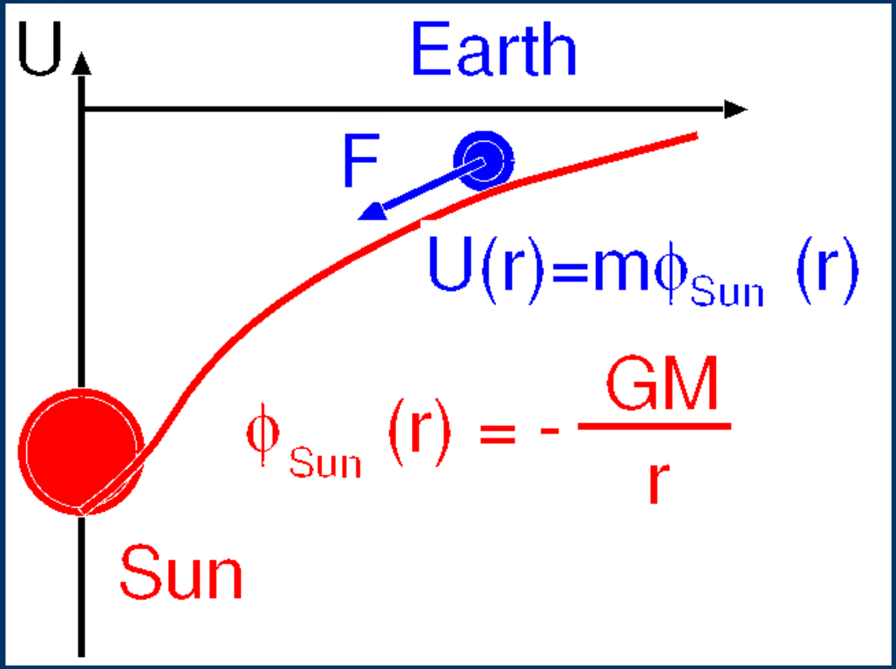
$$\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}\Delta x/2+\ldots\rightarrow\frac{d(x^n)}{dx}=nx^{n-1}$$

  - ｎ＜０　でも成り立つ

- １階微分と２階微分
  - 普通の微分（１階微分）：　傾き
  - ２階微分：傾きの傾き、曲がり具合、曲率
    ➔ 正なら下に凸、負なら上に凸
  - 速度は位置の１階微分、加速度は位置の２階微分である。

万有引力のポテンシャル

- 万有引力も物質が作る重力ポテンシャルの勾配で表せる



太陽が作る重力ポテンシャル

$$\phi_{Sun}(r) = -\frac{GM_{Sun}}{r}$$

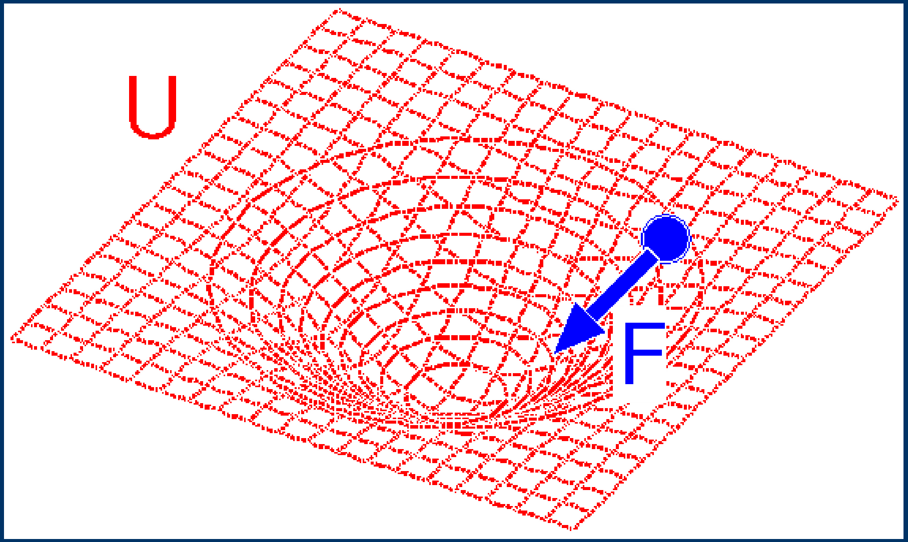
地球の位置エネルギー
＝（地球の質量）×（重力ポテンシ

$$U(r) = m_{Earth}\phi_{Sun}(r)$$
$$= -\frac{GM_{Sun}m_{Earth}}{r}$$

万有引力 $F(r) = -\frac{dU(r)}{dr} = -\frac{GM_{Sun}m_{Earth}}{r^2}$

ポテンシャルの勾配でベクトルの力はだせるのか？

- ２次元の場合
  - 力は位置エネルギーの等高線に垂直な方向（位置エネルギーが小さくなる方向）に働く



力＝−（位置エネルギーの勾配ベクトル）

$$\vec{F} = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

∂ は偏微分をあらわす。

- 重力ポテンシャルの場合

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}, \quad \vec{F} = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z}\right) = -\frac{GMm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Division of Physics
Graduate School of Science
Hokkaido University
http://phys.sci.hokudai.ac.jp/

数学的な準備 (IV)

- 偏微分：多変数の中の１変数で微分

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

- 距離 r の (x, y) による偏微分

$$(r+\Delta r)^2 = (x+\Delta x)^2 + y^2$$

$$r^2 + 2r\Delta r + (\Delta r)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + y^2$$

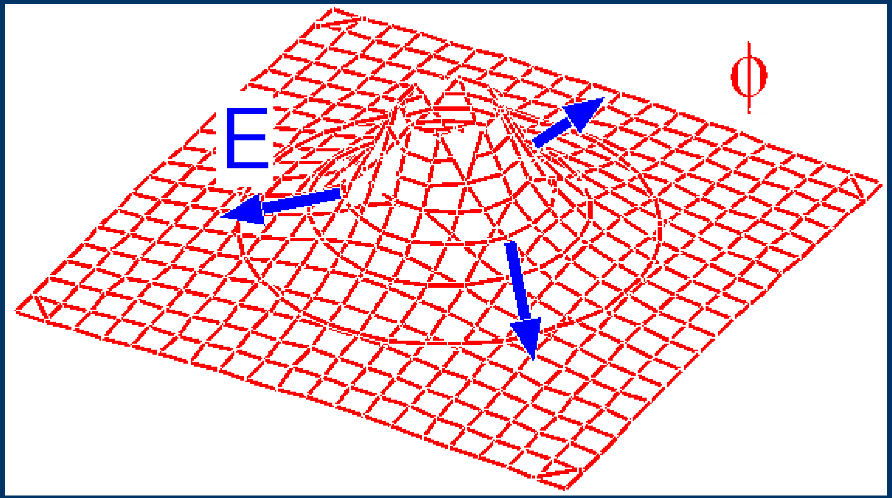
$$\frac{\Delta r}{\Delta x} \to \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

- 合成関数の微分

$$\frac{\partial f(r(x,y))}{\partial x} = \frac{df}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{df}{dr}$$

静電ポテンシャル（電位）と電場

- 電場は電荷が作る静電ポテンシャル（電位）の勾配



点電荷Ａが作る静電ポテンシャル

$$\phi_A(r)=\frac{kQ_1}{r}$$

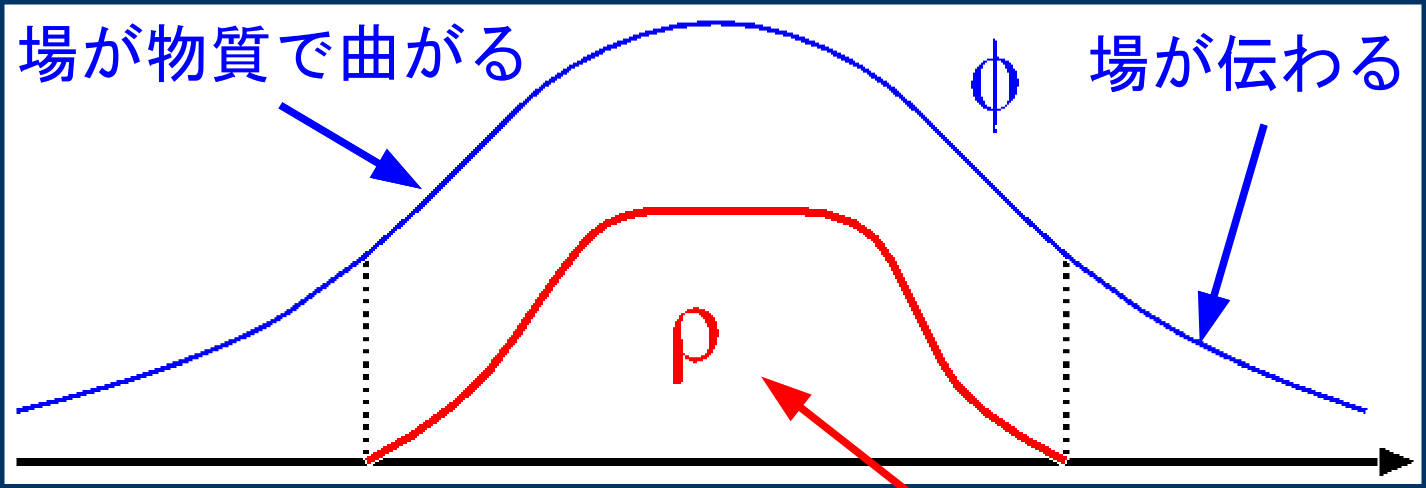
点電荷Ｂの位置エネルギー
＝（Ｂの電荷）×（静電ポテンシャル）

$$U(r)=Q_B\phi_A(r)=\frac{kQ_AQ_B}{r}$$

電場 $$E(r)=-\frac{d\phi(r)}{dr}=\frac{kQ_AQ_B}{r^2}$$

クーロン力 $$F(r)=-\frac{dU(r)}{dr}=Q_BE(r)=\frac{kQ_AQ_B}{r^2}$$

なぜポテンシャルは 1/r なのか？



物質密度
（電荷、質量、...）

- 数学的な表現
  - 静電ポテンシャルの従う方程式（静的な場の方程式）

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}=-4\pi k\rho$$

  - 場の曲がり具合が電荷密度に比例する
    ➔ 言い換えると電荷があると場を曲げる。

つづき

- 球対称で電荷のないときには変数変換で r のみに依存

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}=\frac{1}{r}\frac{d^2(r\phi)}{dr^2}=0$$

  - 2回微分して 0 だから $r\phi=ar+b \rightarrow \phi=a+\frac{b}{r}$

場は伝わる

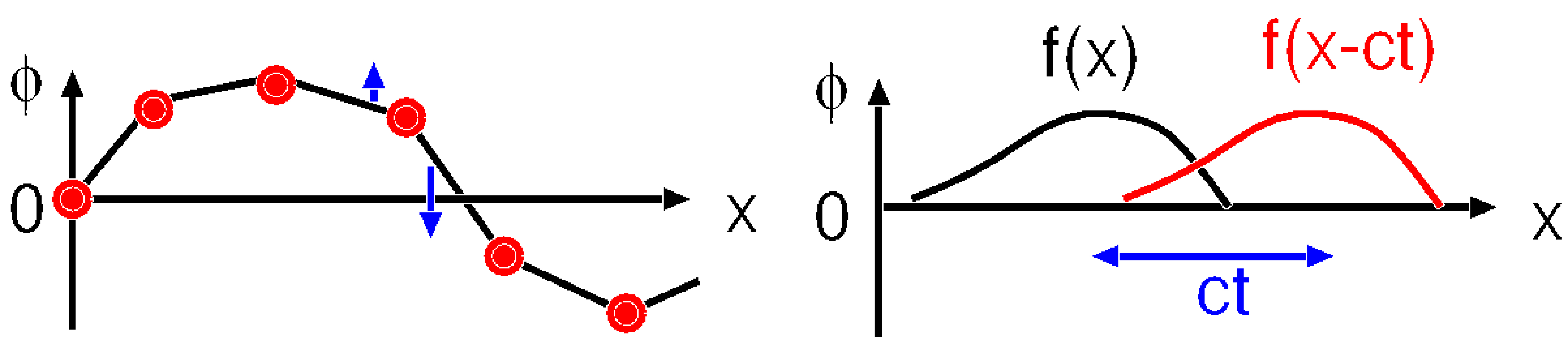
- 静電ポテンシャルの従う方程式（動的な場の方程式）

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}=-4\pi k\rho$$

- 1次元で電荷がない場合

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \rightarrow \quad \phi=f(x-ct)+g(x+ct)$$

  - Newton 方程式との類推すると
    - ➔ 左辺は加速度のようなもの、右辺は力のようなもの
    - ➔ 弦の方程式と似ている → 波として伝わっていく



Division of Physics
Graduate School of Science
Hokkaido University
http://phys.sci.hokudai.ac.jp/

場は粒子として現れる

- 量子論における置き換え

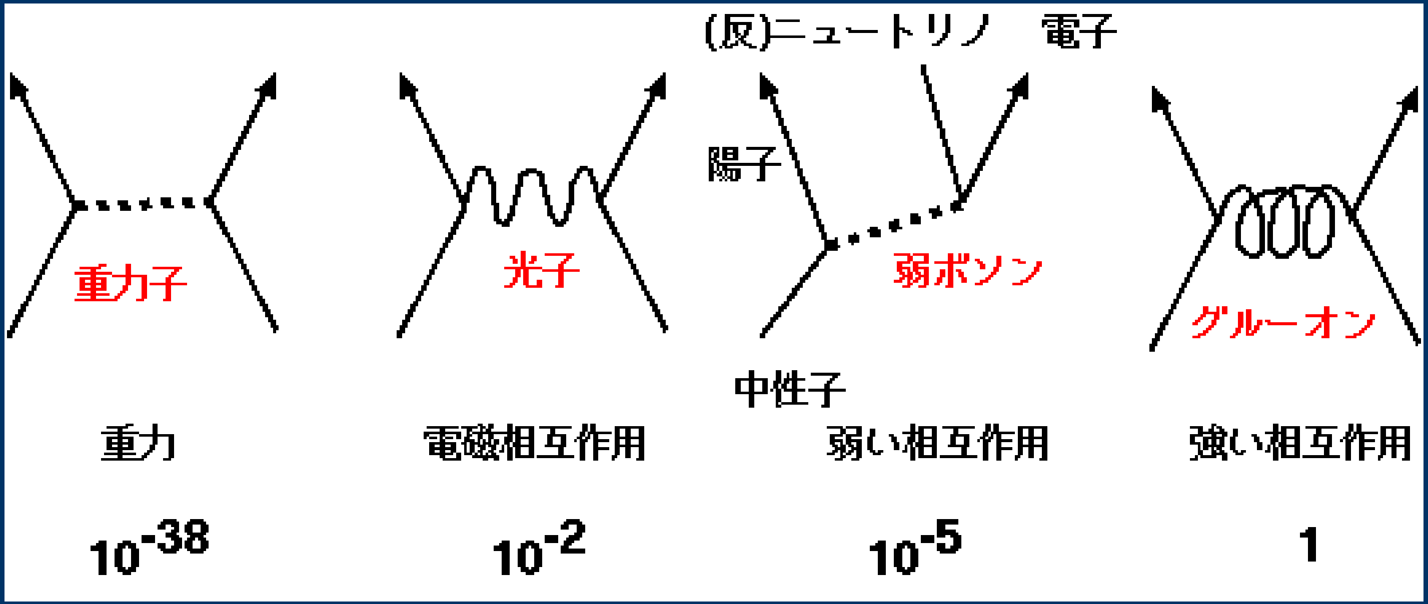
$$E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad P_x \rightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

- 場の運動方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}=-4\pi k \rho$$

  - 電荷がないとき、右辺 = 0 → $\frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{E^2}{c^2}-p^2\right)=0$
  - Einstein の関係式 $E^2=p^2c^2+m^2c^4$ と比較して、質量が 0 の粒子の波が電荷により作り出されていることをあらわしている

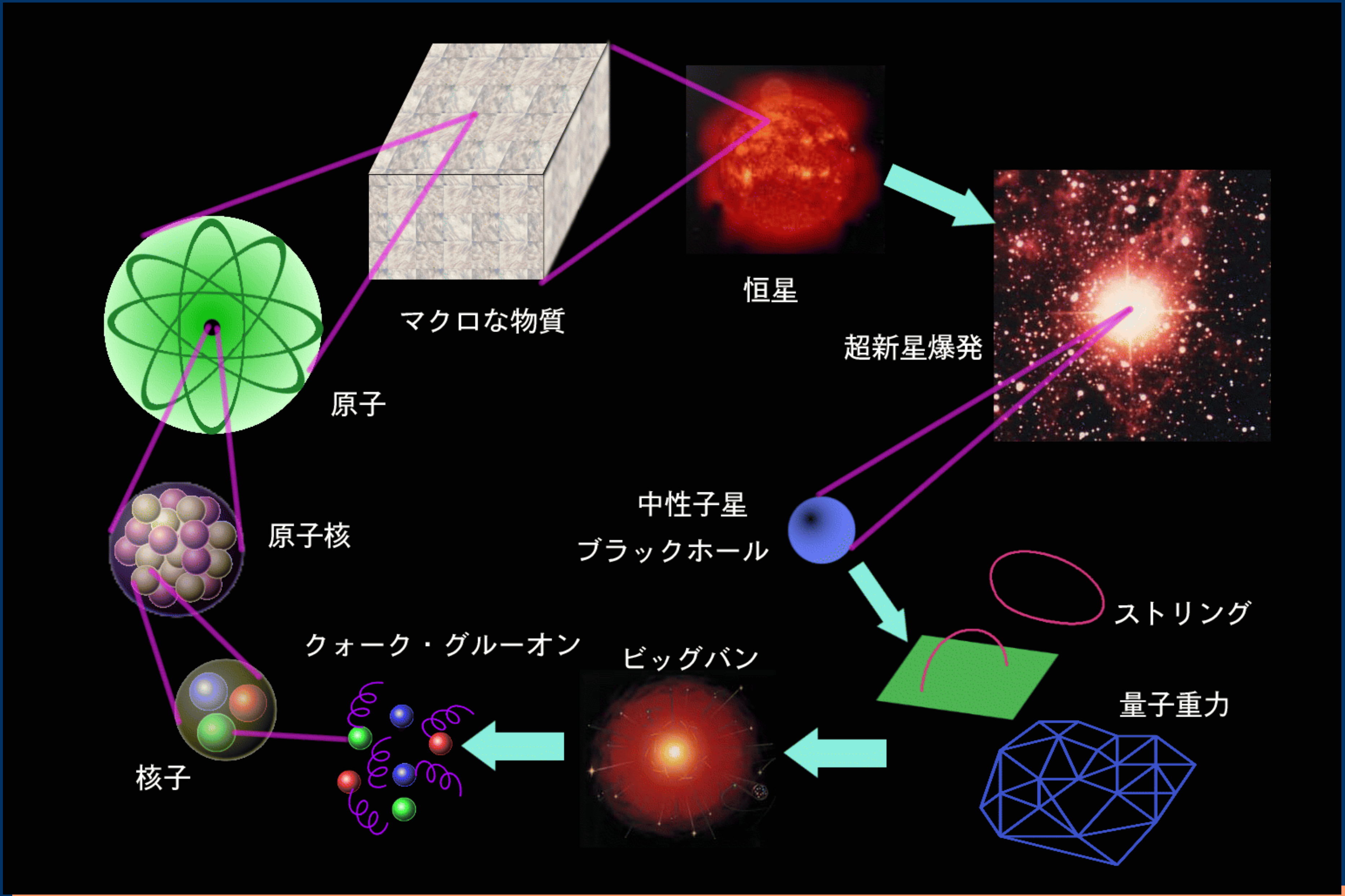
４つの力と自然の階層



- 重力：非常に弱いが、いつでも引力。星や銀河の運動、地上での重力。
- 電磁気力： 正負の電荷に働き、原子・分子・マクロな物質を作る。
- 弱い力： 粒子の種類を変える力。原子核の β 崩壊など。
- 強い力： 赤、緑、青の３種類の電荷。核子を作っており、核力のもと。

それぞれの相互作用では、
重力子の場（重力ポテンシャル）、光子の場（電磁ポテンシャル）、
弱ボソンの場、グルーオンの場
が力を伝える。

４つのちからと自然の階層



Division of Physics
Graduate School of Science
Hokkaido University
http://phys.sci.hokudai.ac.jp/

まとめ

- 物体が離れていても働く力（遠隔相互作用）は、
  場が伝わって、その勾配により働く（近接相互作用）。
  - 位置エネルギーは場　Φ　にその物質の結合定数（質量・電荷など）をかけたもの
  - 接触、衝突による力は場を介在しなくてもよい。

    ➔ 大学１年生ぐらいでの学習内容

- 場は波として空間を伝わっていく。
- 場が伝わる速さは光速を超えないので、遠く離れた物体が与える力は遅れて働く（遅延ポテンシャル）

    ➔ 大学２、３年生ぐらいでの学習内容

- 場を量子論的に考えると「力を伝える粒子」の波である
  - 静的なポテンシャル　＝　仮想粒子
  - 進行して伝わる場　＝　観測される実際の粒子
- 物質を構成する粒子も「場」で表せる。

    ➔ 大学院での学習内容　（場の量子論）

Division of Physics
Graduate School of Science
Hokkaido University
http://phys.sci.hokudai.ac.jp/