Towards a Theory of Entropy Production in the Little and Big Bang

A. Ohnishi[1], T. Kunihiro[2], B. Mueller[3], A. Schaefer[4]

1. YITP, Kyoto U., 2. Dept. of Phys., Kyoto U.
3. Duke U., 4. U. of Regensburg

Based on discussions at the YIPQS molecule-type workshop,
"Entropy production before QGP", YITP, August, 2009.

"Towards a Theory of Entropy Production in the Little and Big Bang"
T. Kunihiro, B. Mueller, A. Ohnishi, A. Schaefer
Prog. Theor. Phys. 121 (2009), 555-575 [arXiv:0809.4831]

RHIC における速い熱平衡化の起源

- Early Thermalization ($\tau \sim 0.6$ fm/c)
  - Glauber type の初期条件 + 完全流体 + 速い熱平衡化
    → v_2 等の RHIC データを広く説明
- 速い熱平衡化の起源は？ → **グルーオン場の不安定性が鍵**
  - Weibel 不安定性 ***Mrowcynzki; Dumitru, Schenke, Strickland, Nara***
    = 非等方な運動量分布を持つ粒子がカラー場に不安定性をもたらす
  - Nielsen-Olesen 不安定性 ***Iwazaki, Itakura, Fujii***
    = 強い磁場に揺らぎがある場合のカラー場自体の不安定性
- 古典論でのエントロピー増加率
  = Kolmogorov-Sinai (KS) エントロピー (正 Lyapunov 指数の和)

$$S_{KS}=\sum_n \lambda_n \theta(\lambda_n) \qquad \delta X_i=\delta X_i(t=0)\exp(\lambda_i t)$$

  - 古典軌道の不安定性 (カオス的振る舞い) がエントロピー生成の起源
    E.g. Biro, Gong, Muller, Trayanov, 1994 → $\tau = 0.4$ fm/c

エントロピー生成

- N 体分布関数におけるエントロピー
  - 古典ハミルトン系 (Boltzmann; Wehrl) → Liouville 定理により保存

$$S_{Wehrl} = -\int \frac{dx\,dp}{(2\pi)^D} f \log f$$

  - 量子系 (von Neumann) → 純粋状態であれば常に 0 。

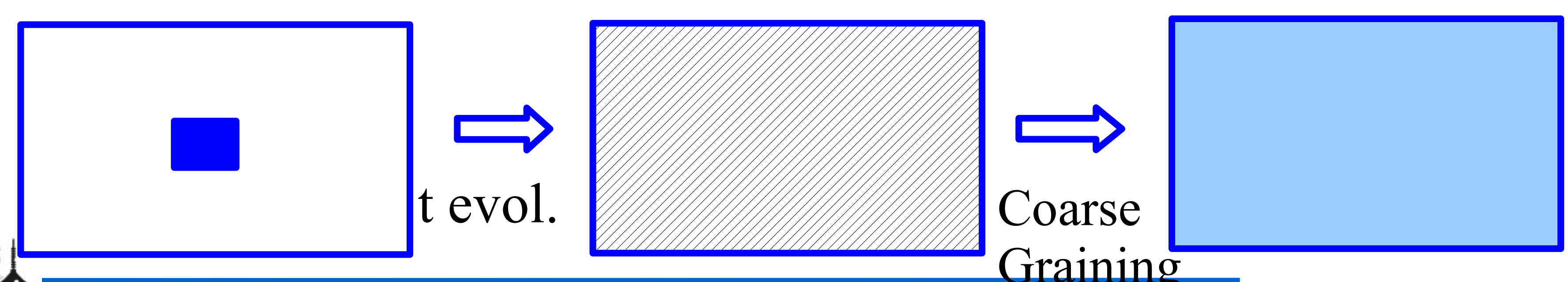
$$S_{vN} = -\mathrm{Tr}\left[\hat{\rho} \log \hat{\rho}\right] = -\sum_n w_n \log w_n$$

(f, ρ → 多体分布関数、密度行列)

→ 何らかの「情報の損失」が必要

- 熱浴が無い場合の「情報の損失」

位相空間分布の複雑性 → 観測者は区別不可能 → 粗視化



場の理論におけるエントロピーと粗視化

- N 体分布関数 → 1 体分布関数

$$S=\int d\Gamma\left(-f\log f+\sigma(1+\sigma f)\log(1+\sigma f)\right)\quad (\sigma=\pm 1\ \text{ for F/B})$$

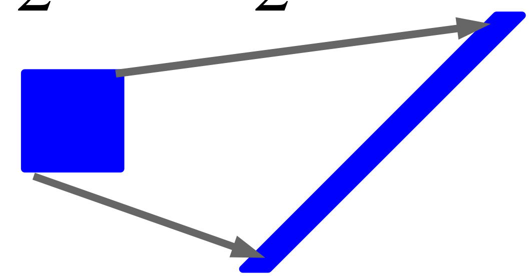
  - Kadanoff-Baym 方程式を用いた発展した取り扱い
    Kita,2006, Ivanov, Knoll, Voskresensky, 2000; Nishiyama,2008.
  - 場の coherence が強い場合に適用可能か？
- 場の変数を直接用いる方法 = Wigner 汎関数
  Mrowczynski, Muller, 1994
  - 量子力学 : 密度行列 → Wigner 関数 (位相空間分布)
  - 場の理論 : 正準変数＝ (Φ, Π) → Wigner 汎関数
  - 問題点 : Wigner 関数は負になりうる
    Liouville 定理より Wehrl エントロピーは一定

Husimi 関数 (= 最小波束で粗視化した **Wigner** 関数) により評価した
Wehrl エントロピーの増加率は **KS** エントロピーと一致するか？
→ 量子力学 ＆ 場の理論

Wigner 関数 & Husimi 関数

- Wigner 関数 $W(x,p) = \int ds \exp(-ips) \langle x + \frac{s}{2} | \hat{\rho} | x - \frac{s}{2} \rangle$
  - 運動方程式 H= $p^2/2m$ + V(x) の場合、

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{p}{m}\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial p} + O(\hbar^2)$$



  - 古典軌道に沿って Wigner 関数は一定 (Liouville の定理)
    → Wehrl エントロピーは一定
- **Husimi 関数＝ Wigner 関数を最小波束で平均化**

$$H_\Delta(p,x;t) \equiv \int \frac{dp'\,dx'}{\pi\hbar} \exp\left(-\frac{1}{\hbar\Delta}(p-p')^2 - \frac{\Delta}{\hbar}(x-x')^2\right) W(p',x';t)$$

密度行列の最小波束での期待値 → 必ず正 or 0
Husimi-Wehrl エントロピー

$$S(t) = -\int \frac{dx\,dp}{(2\pi\hbar)^D} H(x,p) \log H(x,p)$$

Wigner 汎関数 & Husimi 汎関数

- 場の理論における Wigner 関数 =Wigner 汎関数

$$W[\Pi(x),\Phi(x);t] = \int \mathcal{D}\varphi(x)\, e^{-i\int dx\,\Pi(x)\varphi(x)} \times \langle \Phi(x)+\frac{1}{2}\varphi(x)|\,\hat{\rho}(t)\,|\Phi(x)-\frac{1}{2}\varphi(x)\rangle$$

Mrowcynsky, Muller, 1994

- 運動量表示での運動方程式

$$\hat{H}_0 = \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi}\left(\hat{\Pi}^\dagger(p)\hat{\Pi}(p) + (p^2+m^2)\hat{\Phi}^\dagger(p)\hat{\Phi}(p)\right)$$

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + V[\Phi] \quad \rightarrow \quad \frac{\partial W[\Phi,\Pi;t]}{\partial t} = \{H, W\}_{PB} + O(\hbar^2)$$

(Φ, Π) を正準変数とした古典軌道に沿って W は一定

- Husimi 汎関数

$$H_\Delta(\Phi,\Pi,t) = \int \frac{D\phi(p)D\pi(p)}{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{\Delta}(\Pi-\Pi')^2 - \Delta(\Phi-\Phi')^2\right]W(\Phi,\Pi,t)$$

- Husimi-Wehrl エントロピー

$$S_{\mathrm{H},\Delta}(t) = -\int \frac{D\Pi\, D\Phi}{2\pi} H_\Delta \ln H_\Delta$$

Wigner(汎)関数の時間発展

- Example: 逆調和振動子ポテンシャル(Roll-Over transition)

$$H=\frac{p^2}{2}-\frac{\lambda^2}{2}x^2 \quad \text{or} \quad \mathcal{L}=\int dx\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\mu^2\Phi^2\right]$$

- Lyapunov 指数 = λ , - λ

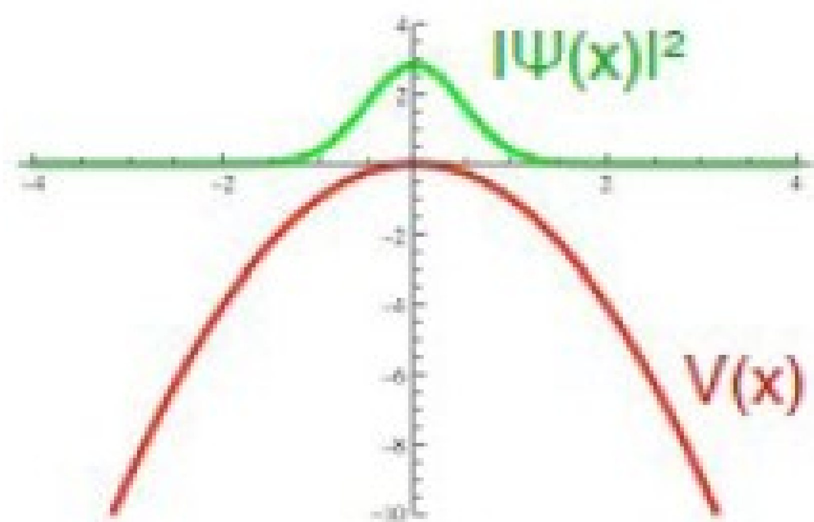
$$x+\frac{p}{\lambda}=\left(x+\frac{p}{\lambda}\right)_{t=0}\exp(\lambda t)\ ,\quad x-\frac{p}{\lambda}=\left(x-\frac{p}{\lambda}\right)_{t=0}\exp(-\lambda t)$$

$$(\lambda_p=\pm\sqrt{\mu^2-p^2}\ \text{ for QFT with }\ |p|<\mu)$$

- Kolmogorov-Sinai (KS) エントロピー

= 古典論から期待される
エントロピー増加率

$$S_{KS}=\lambda$$



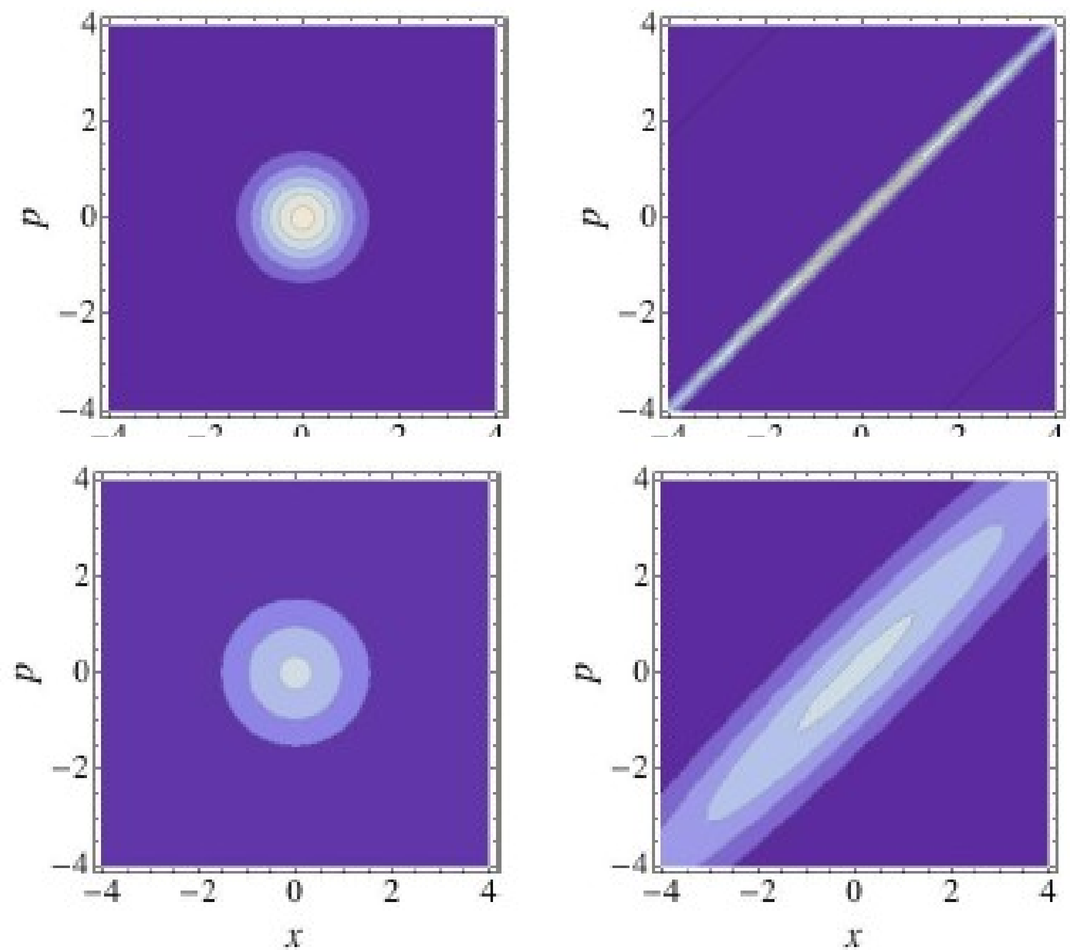
Wigner(汎)関数の時間発展

- Example: 逆調和振動子ポテンシャル(Roll-Over transition)

$$H = \frac{p^2}{2} - \frac{\lambda^2}{2} x^2 \quad \text{or} \quad \mathcal{L} = \int dx \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \mu^2\Phi^2\right]$$

- Wigner(汎)関数
  → Liouville 定理により
  位相空間体積は一定
  → エントロピーは一定
  $(x+p/\lambda)$ 座標は膨張
  $(x-p/\lambda)$ 座標は収縮

- Husimi(汎)関数
  → Wigner 関数を smearing
  → $(x-p/\lambda)$ 座標が
  ガウス波束の幅



$\lambda=1,\ \lambda t=0,\ 2$

エントロピー増加率

- 場の理論の場合
- 初期条件 = ガウス分布

$$W[\Pi,\Phi;t] = W\left[\{\Pi_p^0\},\{\Phi_p^0\},t=0\right] = C\ \exp\left[-\int\frac{dp}{2\pi}\left(\frac{|\Pi_p^0|^2}{E_p}+E_p|\Phi_p^0|^2\right)\right]$$

- (Φ, Π) の"古典軌道"にそって W は一定
→ t=0 に戻って W を評価できる

不安定モード(|p| < μ) $\lambda_p = \sqrt{\mu^2 - p^2}$

$$\Phi_p^0 = \Phi_p(t)\cosh\lambda_p t - \frac{\Pi_p(t)}{\lambda_p}\sinh\lambda_p t \qquad \Pi_p^0 = \Pi_p(t)\cosh\lambda_p t - \lambda_p\,\Phi_p(t)\sinh\lambda_p t$$

安定モード (|p| > μ)

$$\Phi_p^0 = \Phi_p(t)\cos\omega_p t - \frac{\Pi_p(t)}{\omega_p}\sin\omega_p t \qquad \Pi_p^0 = \Pi_p(t)\cos\omega_p t + \omega_p\,\Phi_p(t)\sin\omega_p t$$

エントロピー増加率

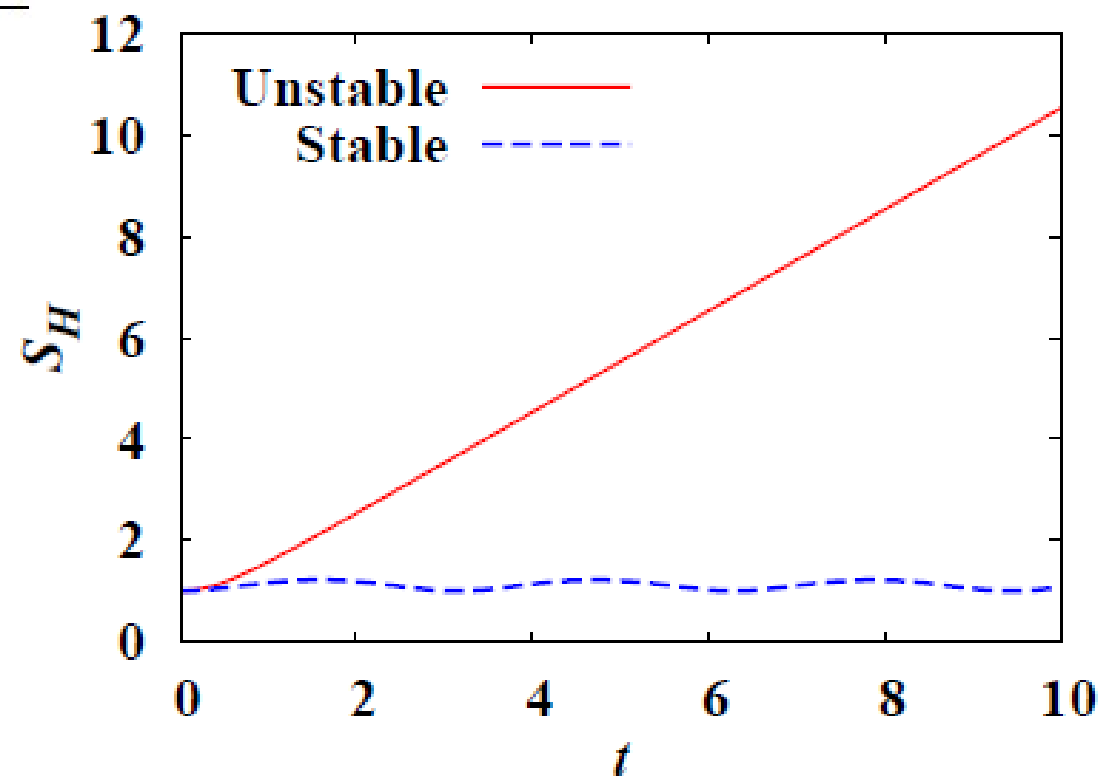
- Husimi-Wehrl エントロピー

$$S_{\mathrm{H},\Delta}(t) = -\int \frac{D\Pi\, D\Phi}{2\pi} H_\Delta \ln H_\Delta$$

$$\frac{dS_{\mathrm{H},\Delta}}{dt} = V\int_{|p|<\mu} \frac{dp}{2\pi} \frac{\sigma_p(\Delta^2+\lambda_p^2)\sinh 2\lambda_p t}{A_p(t)\Delta}$$

$$+V\int_{|p|>\mu} \frac{dp}{2\pi} \frac{\tilde{\delta}_p(\omega_p^2-\Delta^2)\sin 2\omega_p t}{\tilde{A}_p(t)\Delta}$$

$$\xrightarrow{t\to\infty} V\int_{-\mu}^{\mu} \frac{dp}{2\pi}\lambda_p = \frac{V\mu^2}{4}$$



場の理論において、それぞれのフーリエ成分に対して、Husimi-Wehrl エントロピーの増加率が KS エントロピーと一致

Summary

- 非平衡な状況下で場のエントロピーを評価する方法を提案
  - Wigner 汎関数＋ガウス (最小) 波束による粗視化＝ Husimi 汎関数
  - 位相空間 (Φ, Π) で積分した Wehrl エントロピーの増加率は逆調和振動子に対しては Kolmogorov-Sinai(KS) エントロピーと一致
  - Hamiltonian が (Φ, Π) の2次までの場合、および hbar $\to 0$ では、古典軌道＋ガウス波束による smearing により Husimi 汎関数、Husimi-Wehrl エントロピーを評価可能。
  - Inflation 過程にも適用可能 *(Kunihiro, Muller, AO, Schafer, 2009)*
- 問題点・今後の課題
  - 低温で熱平衡のエントロピーを過大評価 *(E.g. AO, Randrup)*
  - O(N) 模型など、平衡点がある場合には増加率が KS エントロピーからずれる *(Pattanayak, private comm.)*
  - Classical Yang-Mills 模型への適用 *(Gong, Muller, Biro, 1994; Biro et al., 1994 Yamamoto, Takahashi, Kunihiro, Muller, AO, Schafer, to be done)*

熱平衡時のエントロピー

- 調和振動子

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$$

$$S_{\rm vN} \equiv -\sum_{n=0}^{\infty} w_n \ln w_n = \frac{\beta\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1} - \ln(1-e^{-\beta\hbar\omega})$$
$$= -\bar{n}\ln\bar{n} + (\bar{n}+1)\ln(\bar{n}+1)\ .$$

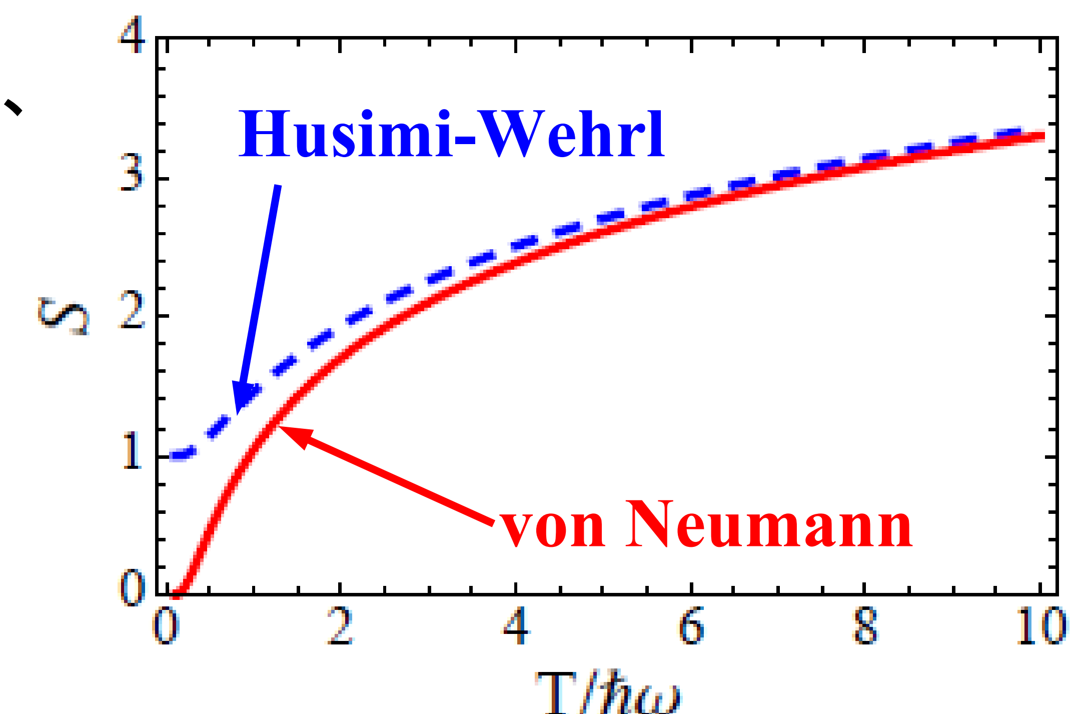
- 低温で
Husimi-Wehrl エントロピーは
von Neumann エントロピーより大

$$S_{\rm W} = 1 - \ln B_\beta = 1 + \ln\left(\bar{n}+\frac{1}{2}\right)$$

$$S_{\rm H} = 1 - \ln A_\beta = 1 + \ln(\bar{n}+1)$$

- 原因
波束のもつエネルギー幅により、
重率とエントロピーの関係が
ずれる。 ***(AO, Randrup, 1997)***

$$\mathcal{Z}_\beta = \int d\Gamma \, \langle z| \, e^{-\beta\mathcal{H}} \, |z\rangle$$
$$= \int d\Gamma \exp\left[-\int_0^\beta d\beta' \mathcal{H}_{\beta'}(z)\right]$$



Backup

Entropy Production before QGP

- Initial ($\tau < 1/Q_s$)

  Decoherence → $dS/dy = 1500$ (A.Schafer)

  Initial Condition Fluctuation from CGC → Something (Nara)

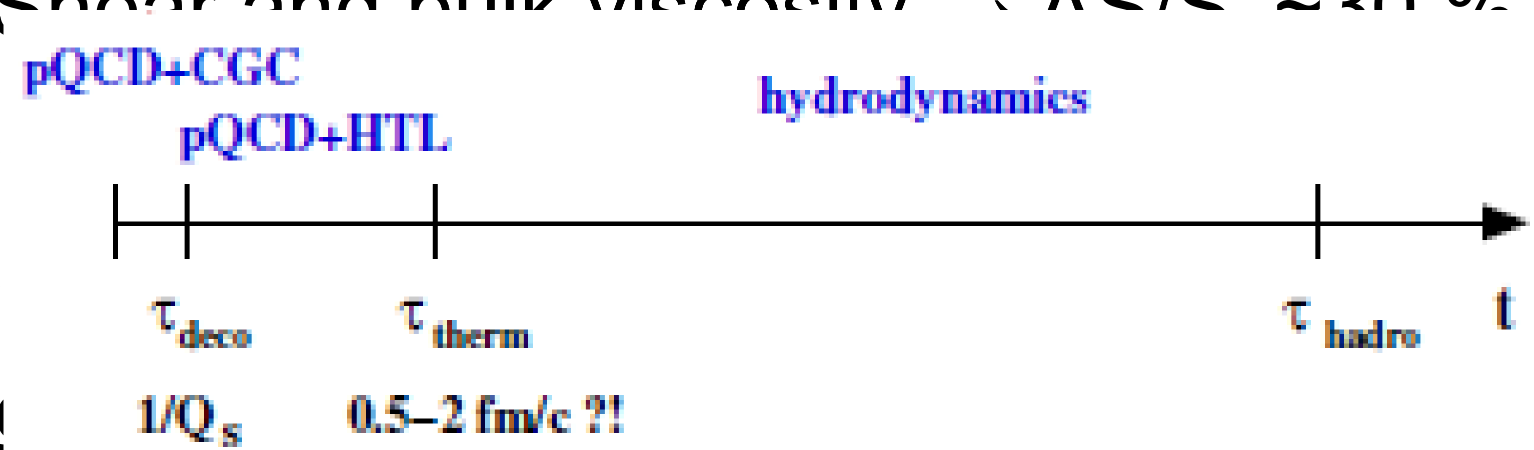
- Glasma ($1/Q_s < \tau < \tau_{therm}$)

  Instability, h_{KS} → $\Delta S/Sth \sim (30\text{-}40)$ % (A.Schafer, Strickland)

- Hydro ($\tau_{th} < \tau < \tau_{hadro}$)

  Shear and bulk viscosity → $\Delta S/S$ ~30 % (Fries,

  Na



- Ha

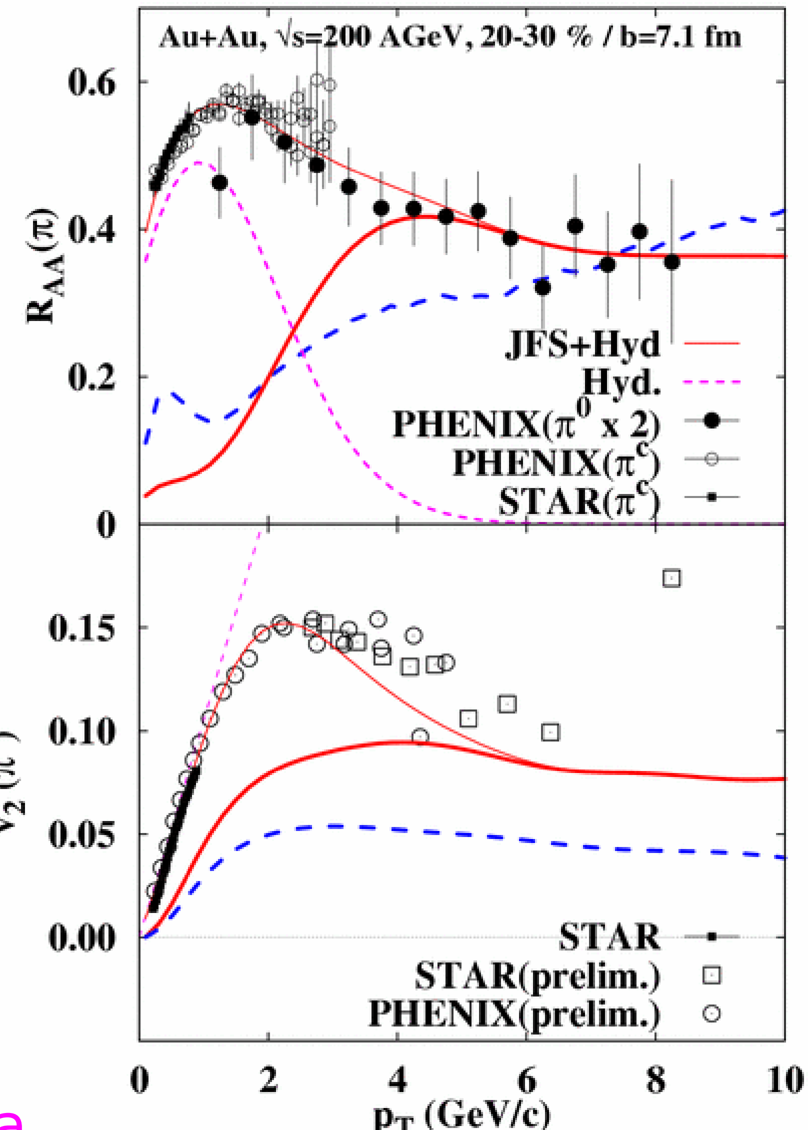
- Wi

n Cold

Entropy Production before QGP

- What is the GOAL ?
  dN/dy ~ 1000 (central)
  → dS/dy ~ 4000 (S/N~4)
  assuming ALL the hadrons a
  produced from thermalized
- Some of the particles are prod
  via (unthermalized) jet and Re

Do we already have enough source of Entropy during this workshop ?
Are these description consistent ?
Coarse graining: when, how ?
→ Let's keep in touch



Isse, Hirano, Mizukawa, AO, Yoshino, Nara,
Int. J. Mod. Phys. E16 (2007), 2338 [nucl-th/0702068]

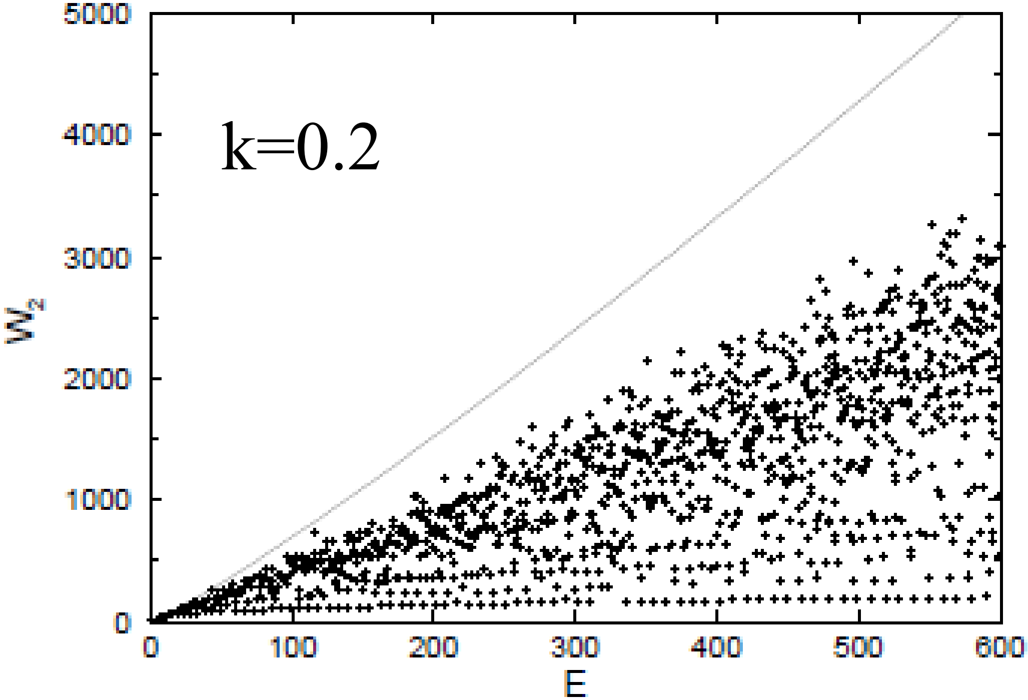
Complexity Degree: Second Moment

- Small average Husimi function would be a measure of chaoticity
  Sugita, Aiba, J. Phys. A 36 (2001), 9081.

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}(x^4 + y^4) - kx^2y^2.$$

$$W_2(\rho_H) = \frac{1}{M_2(\rho_H)},$$

$$M_2(\rho_H) = \int \frac{d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}}{(2\pi\hbar)^k}\, \rho_H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})^2.$$



TDHF and Vlasov Equation

- Time-Dependent Mean Field Theory (e.g., TDHF) $i\hbar \frac{\partial \phi_i}{\partial t} = h\phi_i$
- Density Matrix

$$\rho(r,r') = \sum_i^{Occ} \phi_i(r)\phi_i^*(r') \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\rho_W = f \text{ (phase space density)}}$$

- TDHF for Density Matrix

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [h,\rho] \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \{h_W, f\}_{P.B.} + O(\hbar^2)$$

- Wigner Transformation and Wigner-Kirkwood Expansion
(Ref.: Ring-Schuck)

$$O_W(r,p) \equiv \int d^3s \exp(-i\,p\cdot s/\hbar) < r+s/2|O|r-s/2 >$$

$$(AB)_W = A_W \exp(i\hbar\Lambda) B_W \quad \Lambda \equiv \nabla'_r \cdot \nabla_p - \nabla'_p \cdot \nabla_r \quad (\nabla' \text{acts on the left})$$

$$[A,B]_W = 2\mathrm{i}\, A_W \sin(\hbar\Lambda/2) B_W = i\hbar\{A_W, B_W\}_{P.B.} + O(\hbar^3)$$

Test Particle Method

- Vlasov Equation

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \{h_W, f\}_{P.B.} = \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_r f - \nabla U \cdot \nabla_p f = 0$$

- Classical Hamiltonian

$$h_W(r, p) = \frac{p^2}{2\mathrm{m}} + U(r, p)$$

- Test Particle Method (C. Y. Wong, 1982)

$$f(r, p) = \frac{1}{N_0} \sum_i^{A N_0} \delta(r - r_i) \delta(p - p_i) \quad \rightarrow \quad \frac{dr_i}{dt} = \nabla_p h_w, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\nabla_r h_w,$$

Mean Field Evolution can be simulated
by Classical Test Particles
→ Opened a possibility to Simulate High Energy HIC
including Two-Body Collisions in Cascade

Wigner Function

- Example: Inverted Harmonic Oscillator $\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\hat{p}^2 - \frac{1}{2}\lambda^2\hat{x}^2$
- Equation of Motion $$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{2}{\hbar} H \sin(\hbar\Lambda/2) W = \{H, W\}_{P.B.}$$

$$(AB)_W = A_W \exp(i\hbar\Lambda) B_W \quad \Lambda \equiv \nabla'_r \cdot \nabla_p - \nabla'_p \cdot \nabla_r \quad (\nabla' \text{ acts on the left})$$

H contains only p^2 and x^2 → No O($\hbar$ar^3) terms

→ Classical EOM gives exact results

$$\frac{dx}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = \lambda^2 x \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ p/\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\lambda t & \sinh\lambda t \\ \sinh\lambda t & \cosh\lambda t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0/\lambda \end{pmatrix}$$

- Solution : Wigner function is constant along the classical path

$$W(x, p; t) = W(x_0(x, p, t), p_0(x, p, t); t=0)$$