

有限密度 QCD と重イオン衝突

京大基研 大西 明

京都大学原子核理論グループ (物2・基研) コロキウム
2020年10月21日

■ Introduction

- 重イオン衝突物理の話題

■ 有限密度 QCD: 核物質状態方程式から QCD 相図へ

- 中性子星物質の状態方程式、径路最適化法

■ 重イオン衝突: 輸送模型・古典場から量子場の時間発展へ

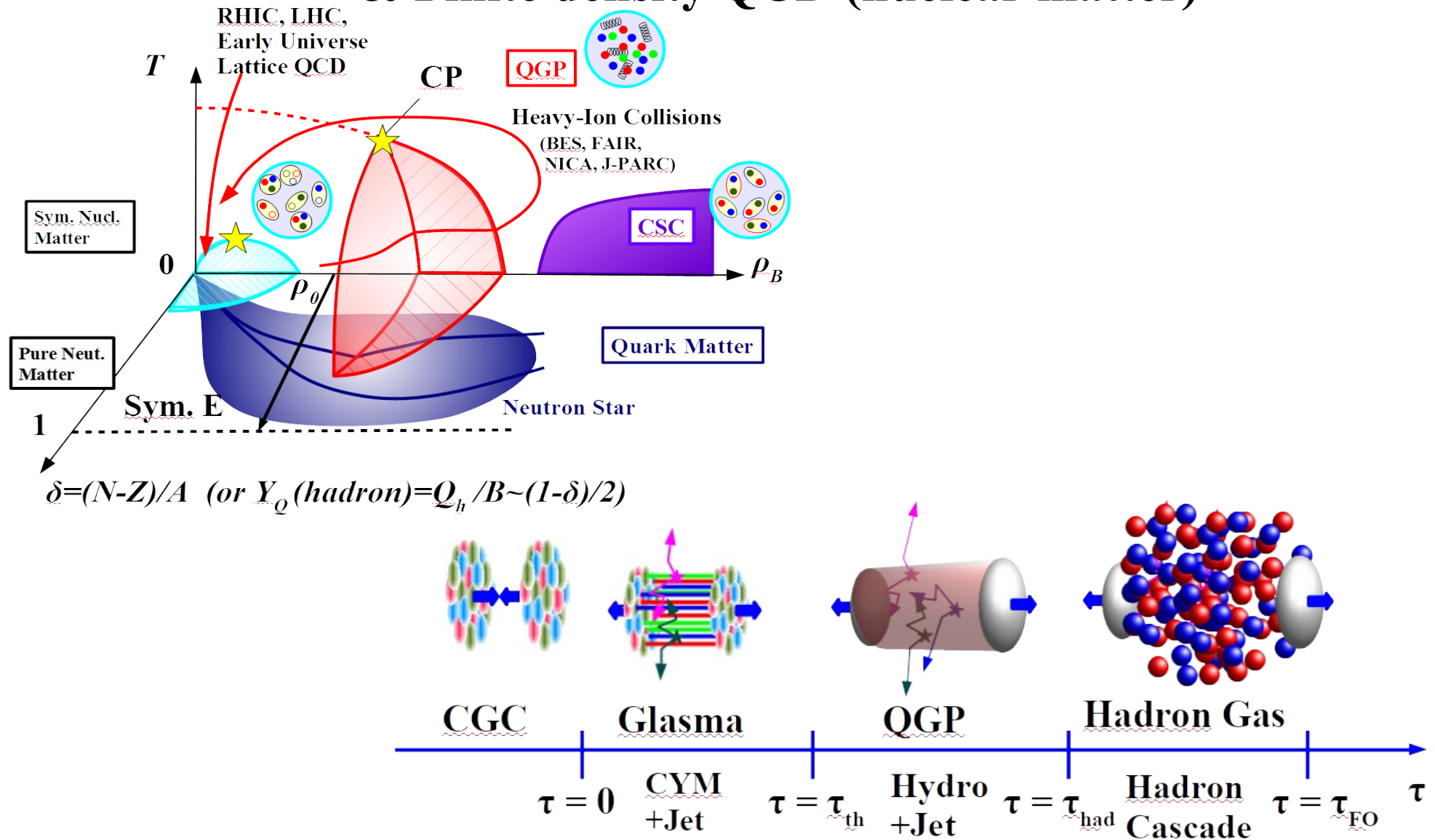
- 流体・粒子統合模型、CYM、Replica evolution

■ まとめ



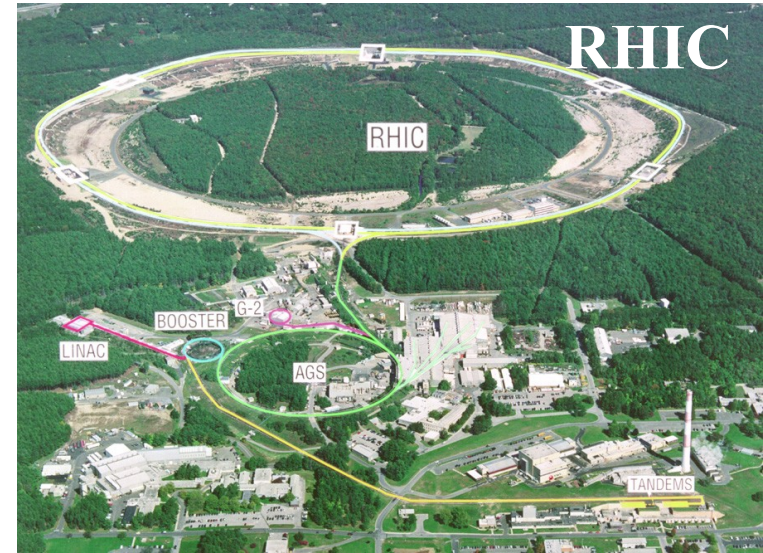
有限密度 QCD と重イオン衝突

■ My Lifeworks: Heavy-Ion Collisions & Finite density QCD (nuclear matter)



High Energy Heavy-Ion Collision Experiments

- Heavy-ion physicists wanted to create QGP for a long time ...
 - LBL-Bevalac: 800 A MeV
 - GSI-SIS: 1-2 A GeV
 - BNL-AGS (1987-): 10 A GeV
 - CERN-SPS (1987-): 160 A GeV
 - BNL-RHIC (2000-): 100+100 A GeV
 - CERN-LHC (2008-): 3 + 3 A TeV



重イオン衝突物理の話題（中間～高エネルギー）

- 1980's: 高エネルギー重イオン衝突の始まり (Bevalac, SIS)
 - π 生成、不安定核生成、流体力学的フロー (状態方程式は硬い?)...
 - 輸送模型の開発: カスケード模型 (2体衝突のみ) \rightarrow 平均場 + 2体衝突
- 1990's: 欧米対決 (BNL-AGS & CERN-SPS),
 - QGP のシグナル: J/ψ 抑制, Dilepton 増大, Multi-strange hadron, v_2 , ...
 - 多重破碎反応、カロリー曲線 \rightarrow QMD, AMD などの開発
- 2000's: RHIC 稼働
 - Jet quenching, quark number scaling of v_2 , η/s , CGC, Hydrodynamics の成功, early thermalization puzzle, ...
 \rightarrow QGP 生成の確認
 - (Viscous) Hydrodynamics, Classical Yang-Mills, Recombination, ...

重イオン衝突物理の話題（中間～高エネルギー）

■ 2010's: LHC 稼働、重力波観測

- 励起 quarkonium の溶解、 Pentaquark、 small system での QGP、 QCD critical point, chiral magnetic effect, global polarization, Femtoscopic study of hh interaction, ...
- 重力波、中性子星物質 EOS、対称エネルギー、 ...
(高バリオン密度物質への興味が再燃)
- Fluctuating hydro, Bayesian analysis, Chiral kinetic theory, Hydro-particle integration, ...

● 現在の課題

- QGP が作られた後のダイナミクスは大まかに分かった (?)
→ QGP 生成前, 極端な環境下での新しい物理, 精密化, ハドロン工場としての利用, ...
- 高バリオン密度側は未解明
→ 多くの計画 (RHIC-BES, FAIR, NICA, J-PARC-HI), 符号問題, ρ_0 近辺の EOS からの外挿, ...

有限密度 QCD 核物質状態方程式から QCD 相図へ

Nuclear Matter EOS

■ Energy per nucleon in nuclear matter

$$E_{\text{NM}}(\rho, \alpha) = E_{\text{SNM}}(\rho) + S(\rho)\alpha^2 \quad (\alpha = (N - Z)/A)$$

■ Saturation point (ρ_0, E_0)

$$\rho_0 \simeq 0.16 \text{ fm}^{-3}$$

$$E_0 = -a_v \simeq -16 \text{ MeV}$$

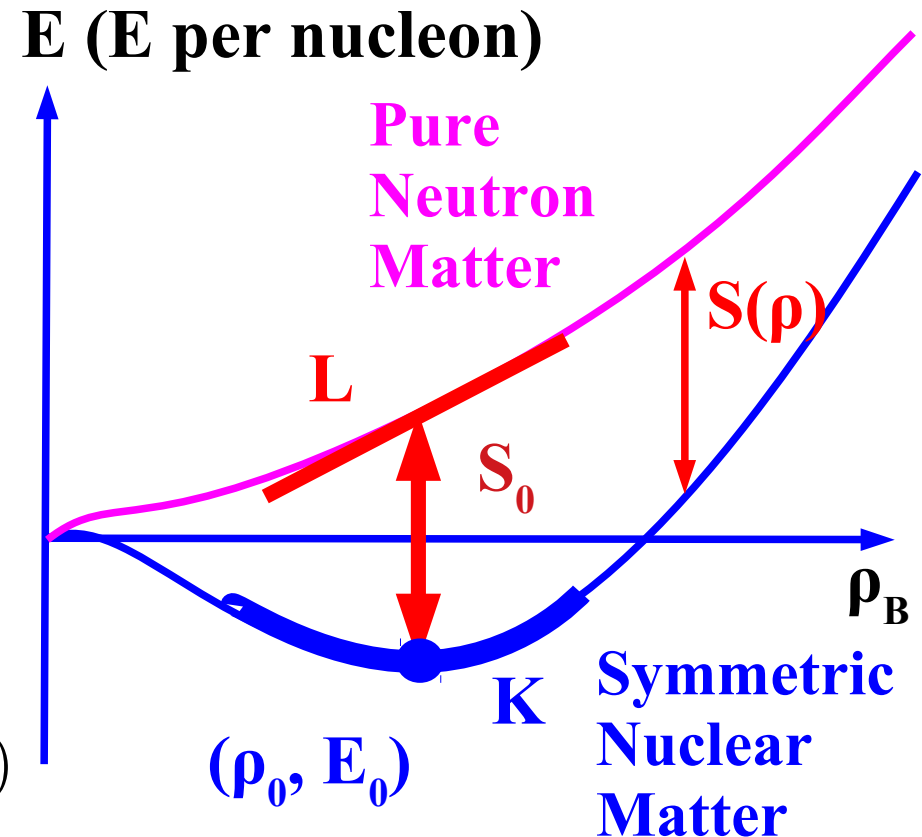
(nuclear radius and mass)

■ Symmetry energy

$$S(\rho) = E_{\text{PNM}}(\rho) - E_{\text{SNM}}(\rho)$$

$$S_0 = S(\rho_0) \simeq 30 \text{ MeV}$$

(Mass formula, volume term)

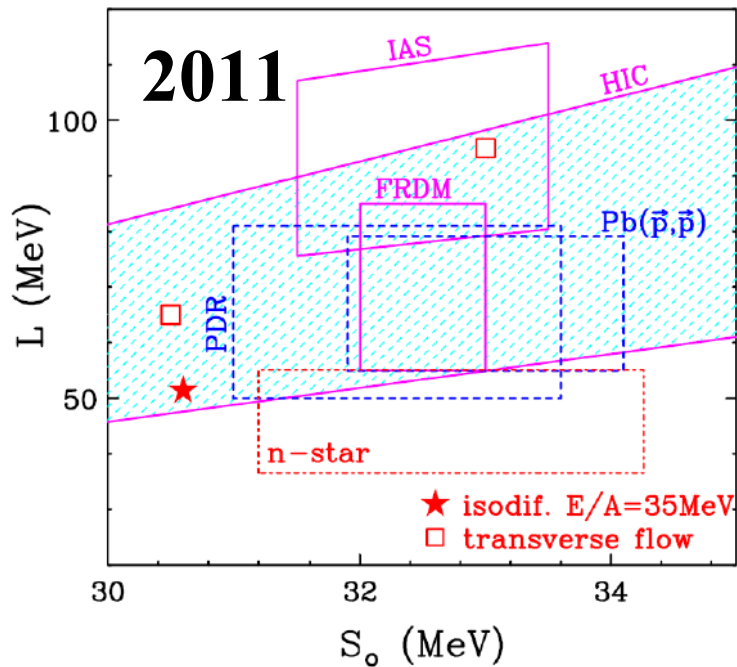


Nuclear Matter EOS can be, in principle, determined by terrestrial (laboratory) nuclear physics experiments !

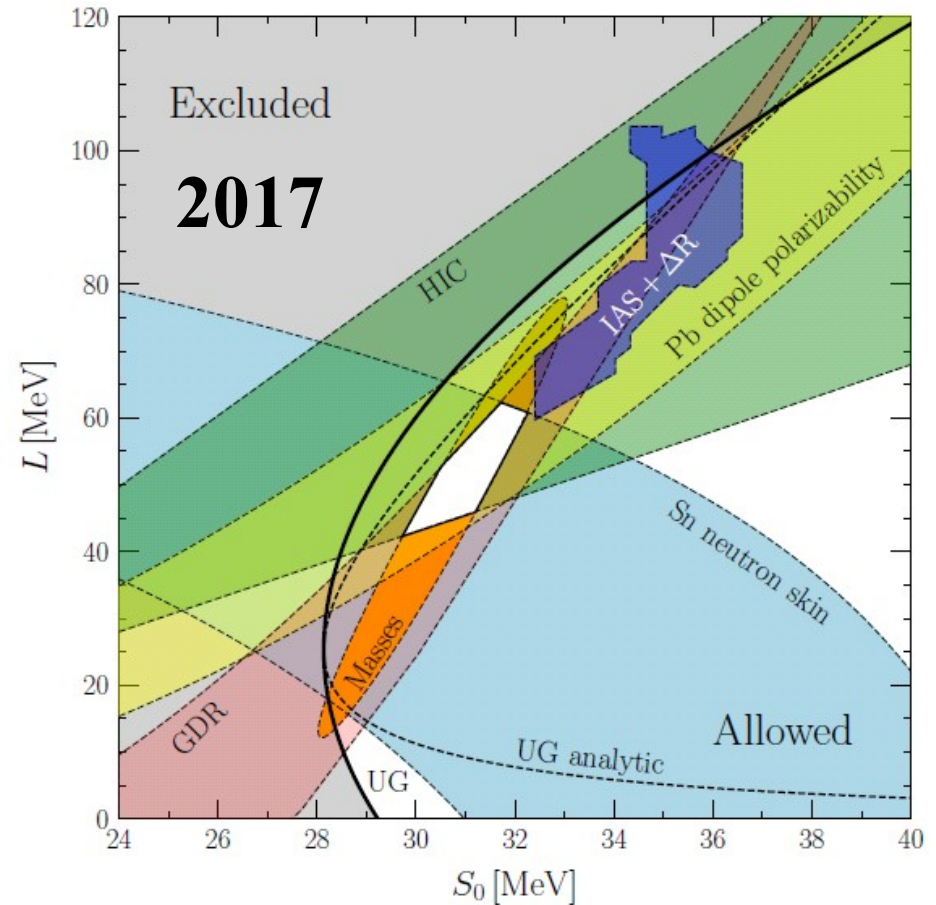
対称エネルギーパラメータ

■ Symmetry Energy Parameters

$$S(u) = S_0 + \frac{L}{3} (u-1) + \frac{K_{\text{sym}}}{18} (u-1)^2 + \mathcal{O}[(u-1)^3] \quad (\mathbf{u=n/n_0})$$



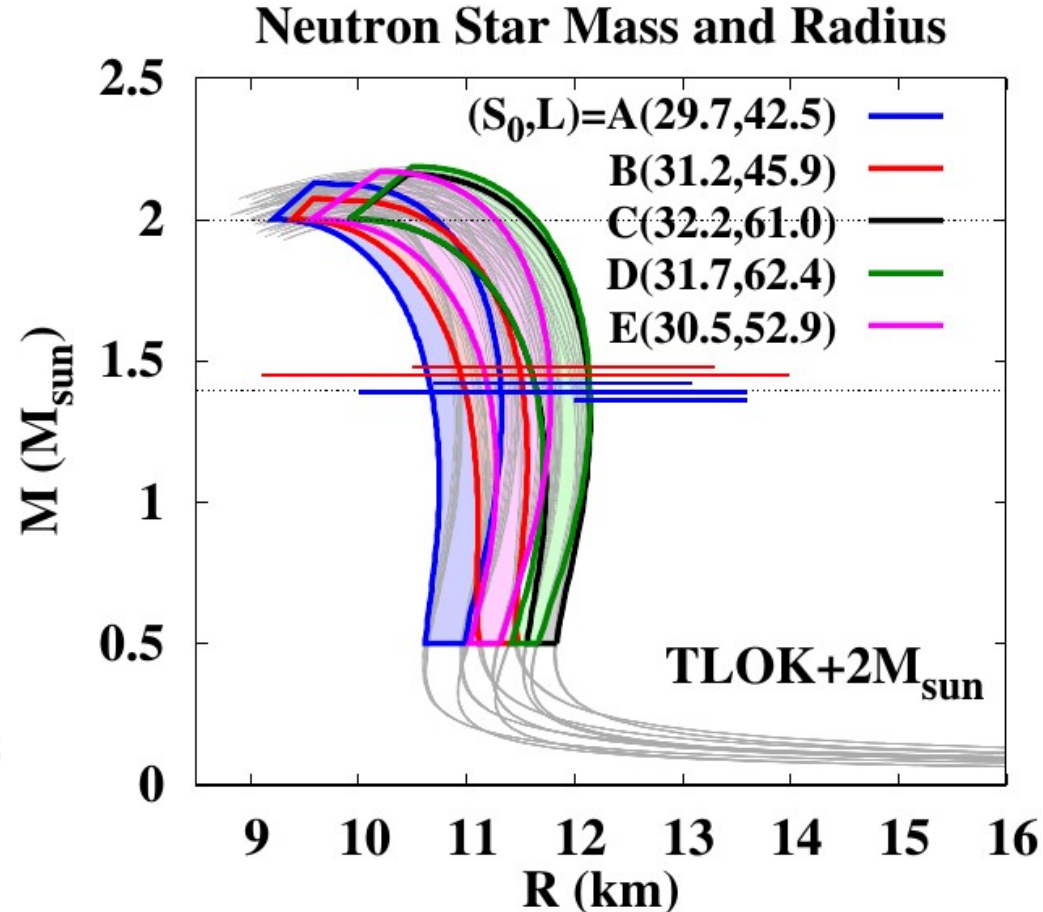
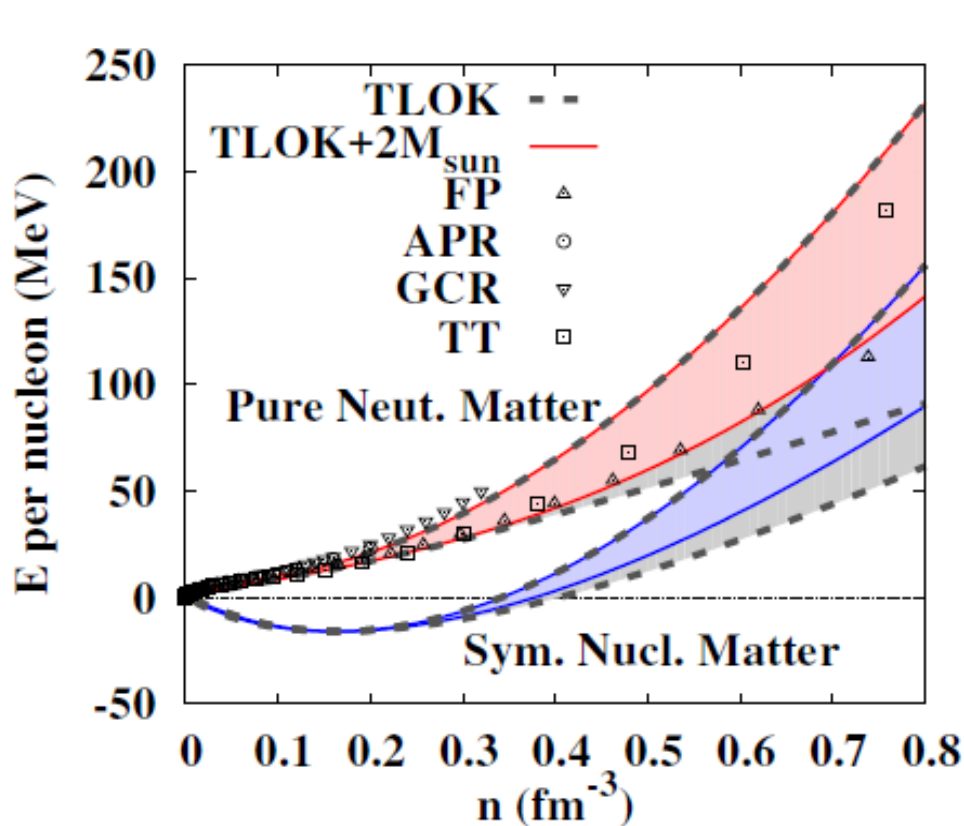
Tsang et al. ('12): NuSYM 2011



*Lattimer, Lim ('13), Lattimer, Steiner ('14)
Tews, Lattimer, AO, Kolomeitsev ('16)*

Neutron Star MR curve

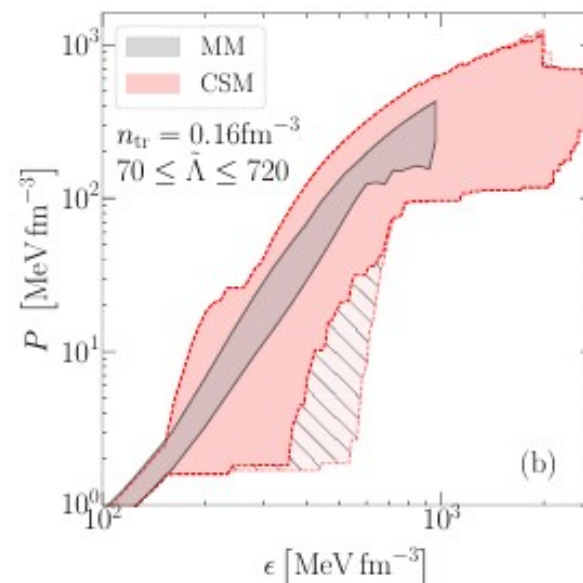
- EOS from saturation parameters is consistent with many ab initio calculations
- Constraint from TLOK+ $2M_{\odot}$, $R_{1.4}=(10.6-12.2)$ km, is consistent with many of previous ones.



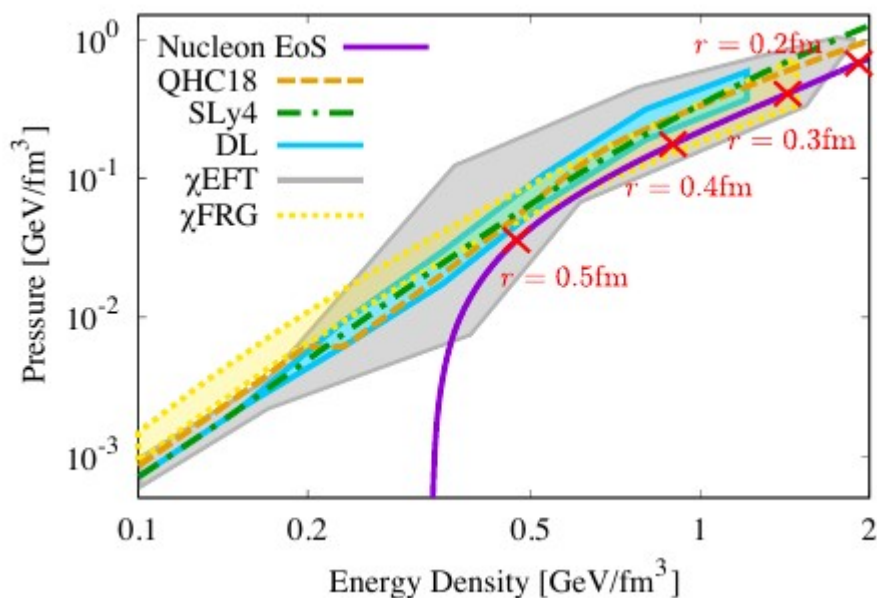
Extrapolation to high densities

■ 高密度領域への外挿には大きな不定性が伴う

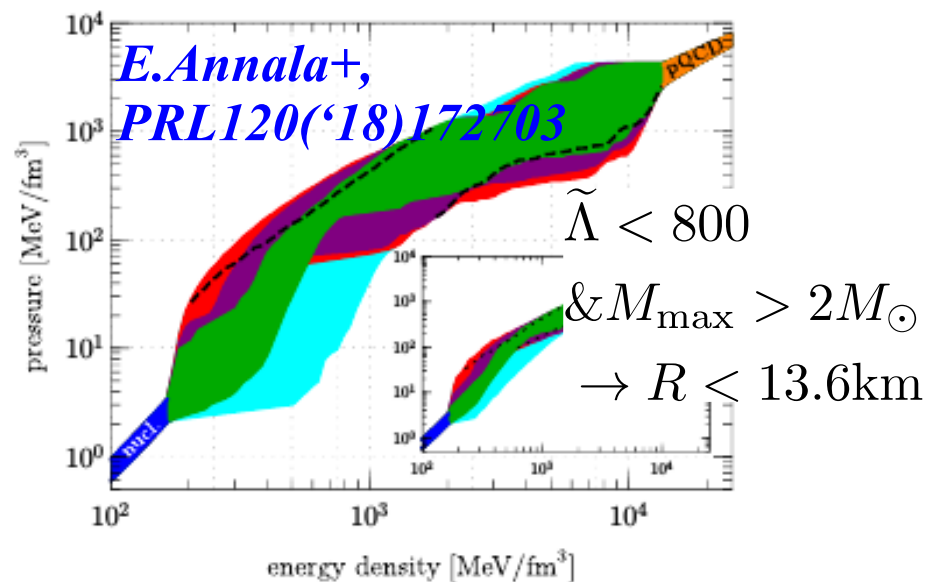
- 低密度領域 ($\rho < (1-2) \rho_0$) では
実験からの制限
- 高密度側では
音速の関数形を仮定
or クォーク物質に滑らかにつなぐ
or 摂動計算に滑らかにつなぐ



*I. Tews, J. Margueron, S. Reddy,
EPJA 55 ('19), 97 [1901.09874]*



*K. Fukushima, T. Kojo, W. Weise,
2008.08436*



中性子星コア領域のような高密度物質の EOS を
低密度からの外挿で決めるのは困難

→ QCD から非摂動論的に求めたい

または実験で直接 $2\rho_0$ を越える物質生成する現象を調べたい

別の機会に

Sign Problem

- Fermion det. is complex at finite density
 → Strong cancellation of the Boltzmann weight at large volume.

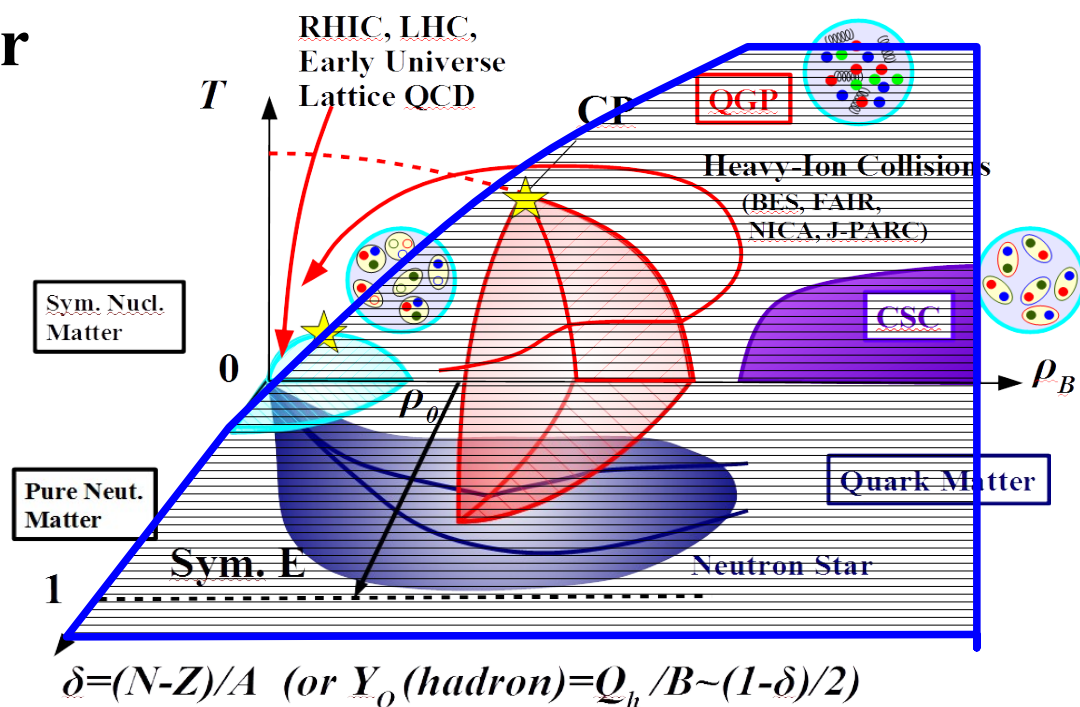
$$\det D(\mu) = (\det D(-\mu^*))^* \rightarrow S_{\text{eff}} = S - \log \det D \in \mathbb{C}$$

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}x \exp(-S(x)), \quad \mathcal{Z}_{\text{pq}} = \int \mathcal{D}x |\exp(-S(x))|$$

$$\text{APF} = \langle e^{i\theta} \rangle = \mathcal{Z} / \mathcal{Z}_{\text{pq}} \rightarrow 0 \quad (V \rightarrow \infty)$$

- Difficult to study dense matter using LQCD

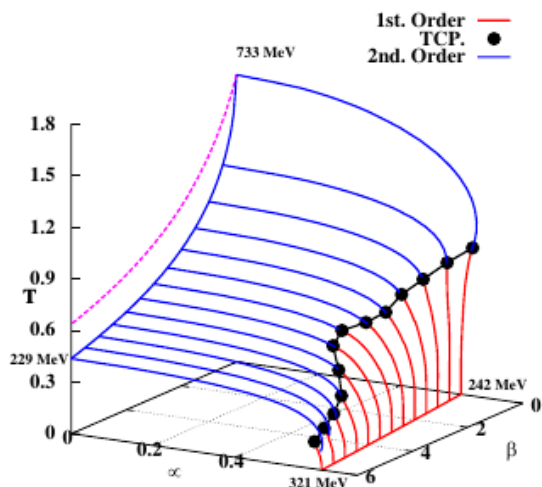
- Standard approaches (Taylor exp., Imag. μ , ..)
 → Useful, but not enough to discuss dense matter



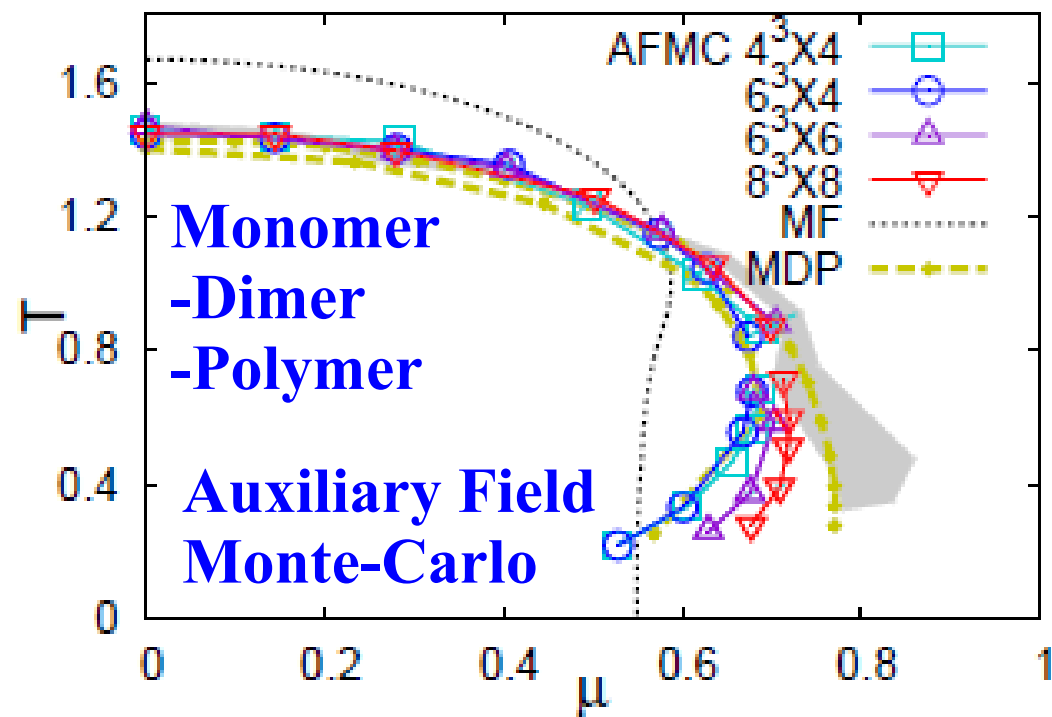
強結合格子 QCD

■ 強結合極限 ($1/g^2 \rightarrow 0$)

- プラケット作用が消えてリンク変数での積分が (近似的に) 可能
- 2つの独立な方法で QCD 相図が一致
→ 符号問題があっても有限密度格子 QCD を議論可能
- ただし連続極限 ($g \rightarrow 0$) と
逆の極限
- 有限の g ではやはり符号問題



K. Miura, N. Kawamoto, T. Z. Nakano, AO, PRD95('17)114505.



de Forcrand, Fromm ('10), de Forcrand, Langelage, Philipsen, Unger ('14)

T. Ichihara, AO, T.Z. Nakano, PTEP2014,123D02.

Complexified Variable Methods

■ Lefschetz thimble method

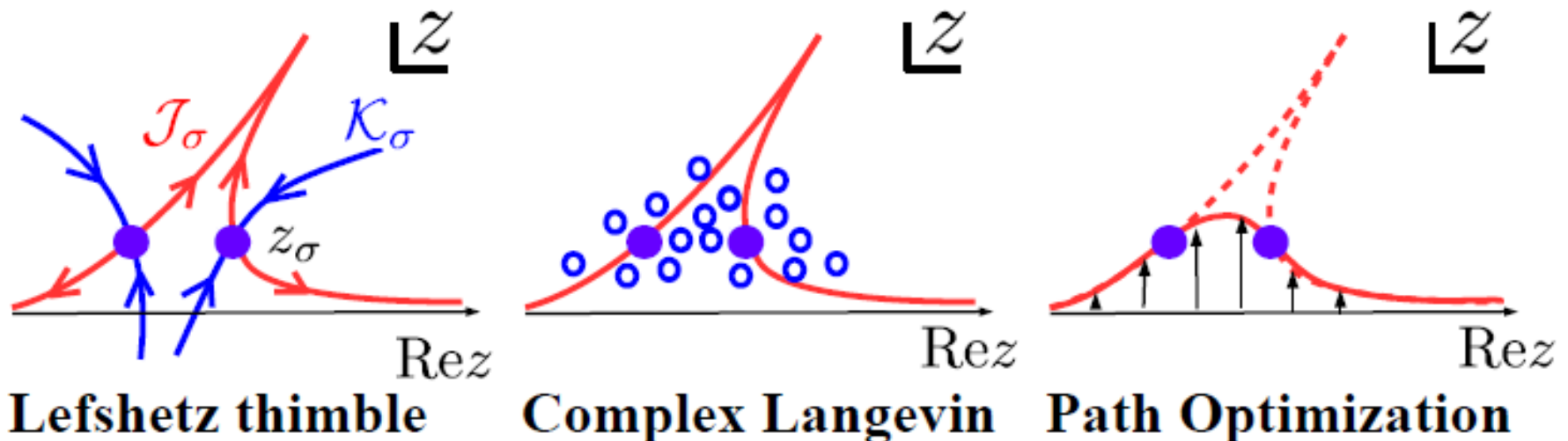
E. Witten ('10), Cristoforetti+('12), Fujii+('13), Alexandru+('16).

- Flow eq. ($dz/dt = -\overline{(\partial S / \partial z)}$) \rightarrow $\text{Im}(S)$ is constant on thimbles
- Phase from the Jacobian, Diff. phase from diff. thimbles (residual / global sign pr.),

■ Complex Langevin method

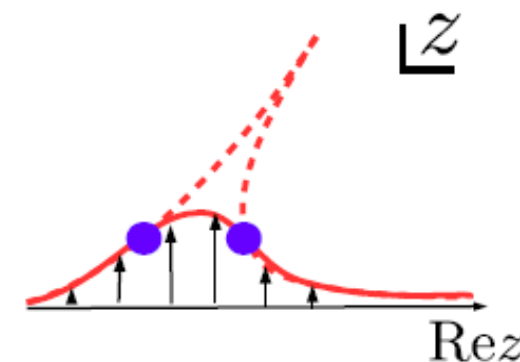
Parisi-Wu('81), Klauder('83), Aarts+('11), Nagata+('16), Seiler+('13), Ito+('16).

- Complex Langevin eq. \rightarrow Expectation value = Ensemble ave.
- Occasional conversion to wrong answers



Path optimization method

*Mori et al. ('17), AO, Mori, Kashiwa (Lattice 2017),
Mori et al. ('18), Kashiwa et al. ('18);
Alexandru et al. ('18 (SOMMe), '18), Bursa, Kroyter ('18)*



■ Cauchy(-Poincare) theorem

The partition fn. is invariant if

- the Boltzmann weight $W=\exp(-S)$ is holomorphic (analytic),
- and the path does not go across the poles and cuts of W .
($\det D=0 \rightarrow$ Singular point of Seff, Zero point of $\exp(-\text{Seff})$)

■ Integration path is optimized to evade the sign problem.

Cost function:

$$\mathcal{F}[z(x)] = \mathcal{Z}_{\text{pq}} - |\mathcal{Z}| = |\mathcal{Z}| (\text{APF}^{-1} - 1)$$

■ Optimization can be performed in various ways.

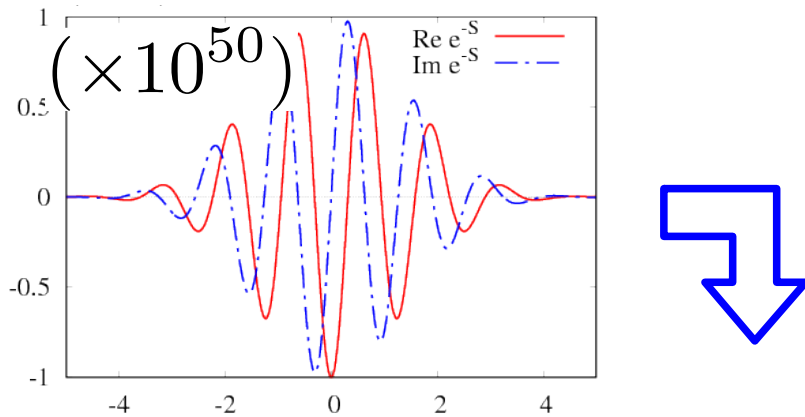
Gradient descent, Stochastic Gradient Descent (SDG),
Neural network,

Sign Problem \rightarrow Optimization Problem

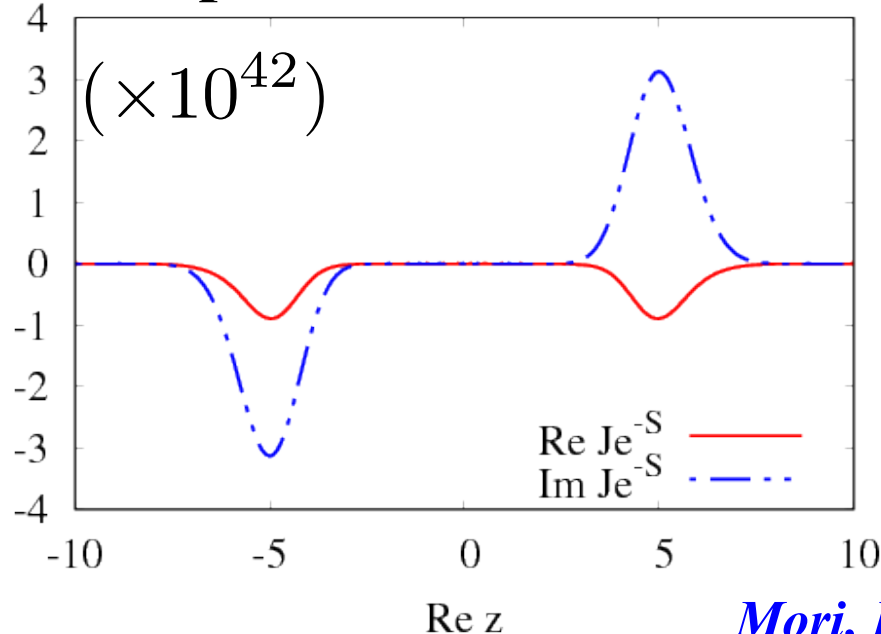
Benchmark test: 1 dim. integral (gradient descent)

Stat. Weight $J e^{-S}$

On Real Axis

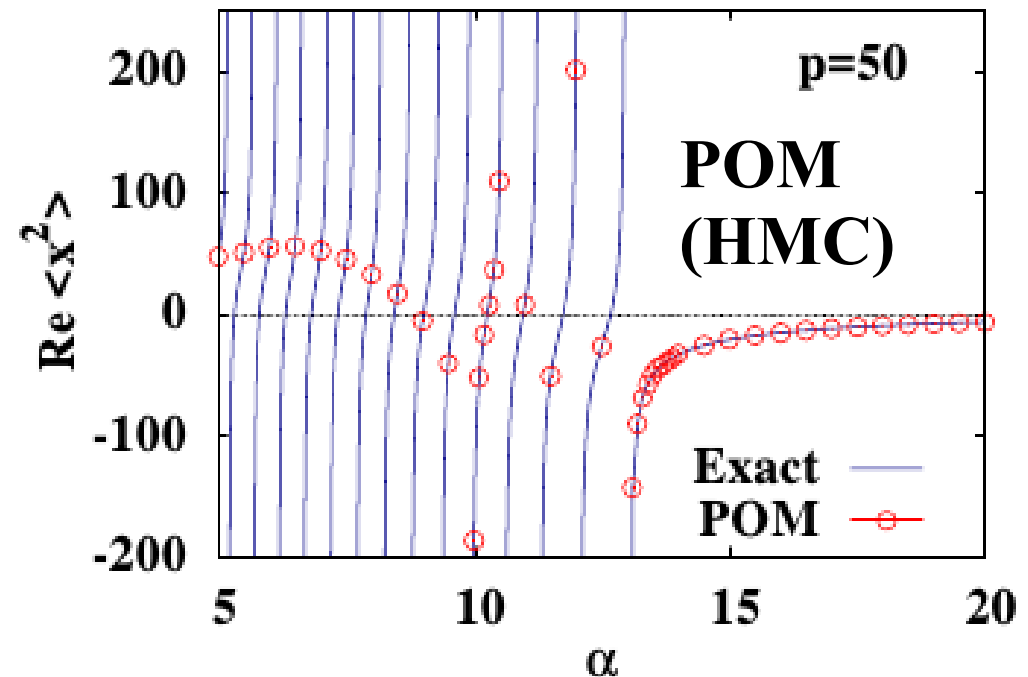
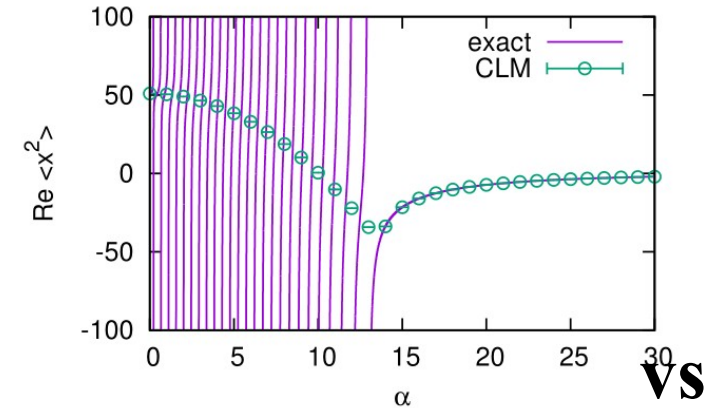


On Optimized Path



Observable

CLM *Nishimura, Shimasaki ('15)*



Mori, Kashiwa, AO ('17); AO, Mori, Kashiwa (Lat 2017)

Application of POM to Field Theories

- Preparation & variation of trial fn. with 1000 variables by hand
→ Practically impossible
- Neural network
 - Combination of linear and non-linear transformation.

$$a_i = g(\underline{W_{ij}^{(1)}} x_j + \underline{b_i^{(1)}}) \quad \text{parameters}$$

$$f_i = g(\underline{W_{ij}^{(2)}} a_j + \underline{b_i^{(2)}})$$

$$z_i = x_i + i(\underline{\alpha_i} f_i(x) + \underline{\beta_i})$$

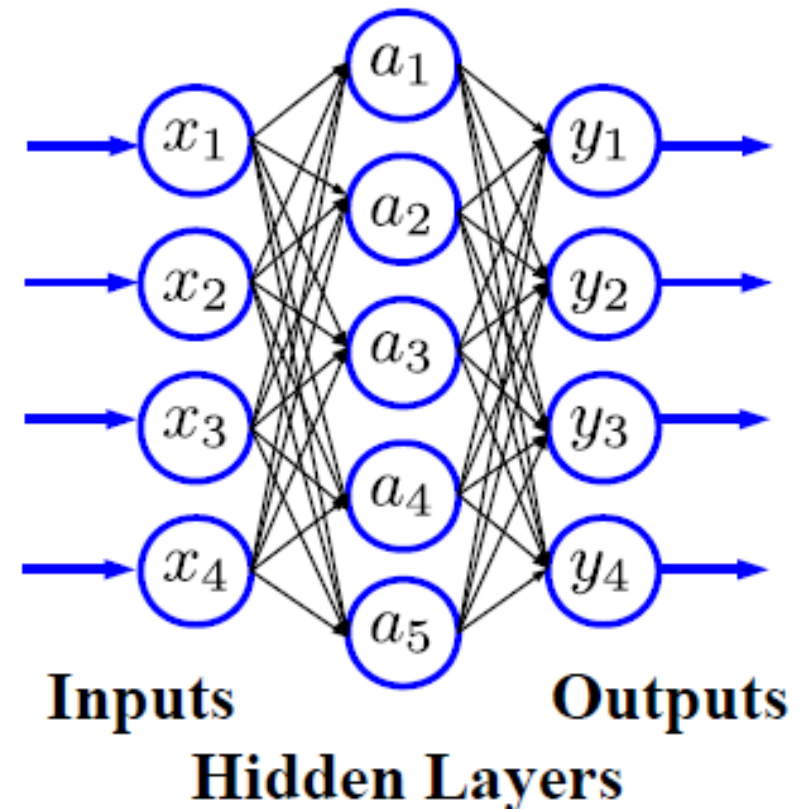
$$g(x) = \tanh x \quad (\text{activation fn.})$$

- Universal approximation theorem

Any fn. can be reproduced
at (hidden layer unit #) $\rightarrow \infty$

G. Cybenko, MCSS 2 ('89) 303

K. Hornik, Neural Networks 4('91) 251



Optimization of many parameters

- Stochastic Gradient Descent method, E.g. ADADELTA algorithm
M. D. Zeiler, arXiv:1212.5701

Grad. Desc. :
 $dc_i/dt = -\partial\mathcal{F}/\partial c_i$

par. in (j+1)th step

Learning rate

$$c_i^{(j+1)} = c_i^{(j)} - \eta v_i^{(j+1)}$$

mean sq. ave. of v

$$v_i^{(j+1)} = \frac{\sqrt{s_i^{(j)} + \epsilon}}{\sqrt{r_i^{(j+1)} + \epsilon}} F_i^{(j)}$$

decay rate

mean sq. ave. of F

$$r_i^{(j+1)} = \gamma r_i^{(j)} + (1 - \gamma)(F_i^{(j)})^2$$

$$s_i^{(j+1)} = \gamma s_i^{(j)} + (1 - \gamma)(v_i^{(j+1)})^2$$

gradient
evaluated
in MC
(batch training)

$$F_i = \partial\mathcal{F}/\partial c_i$$

Cost fn.

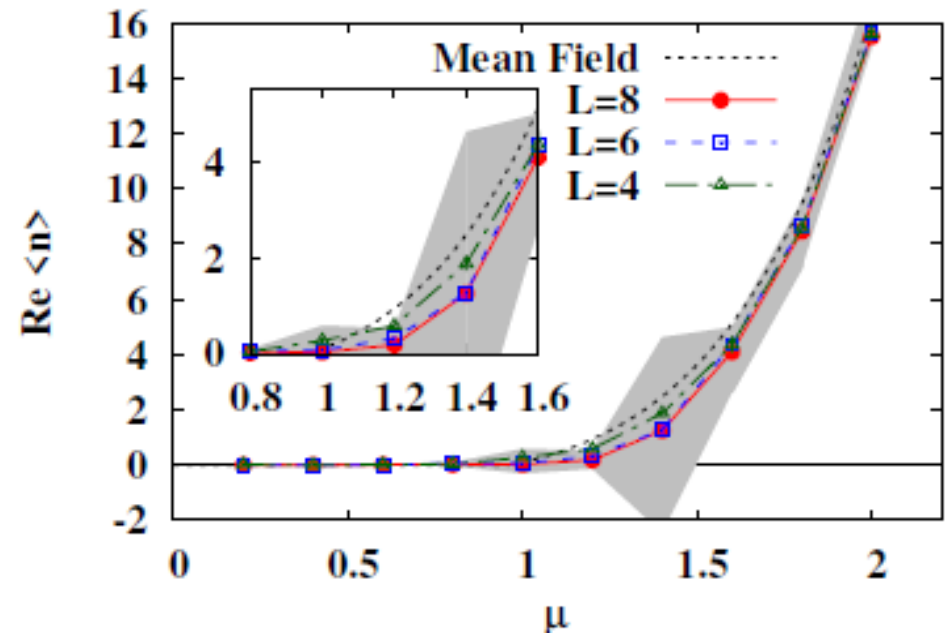
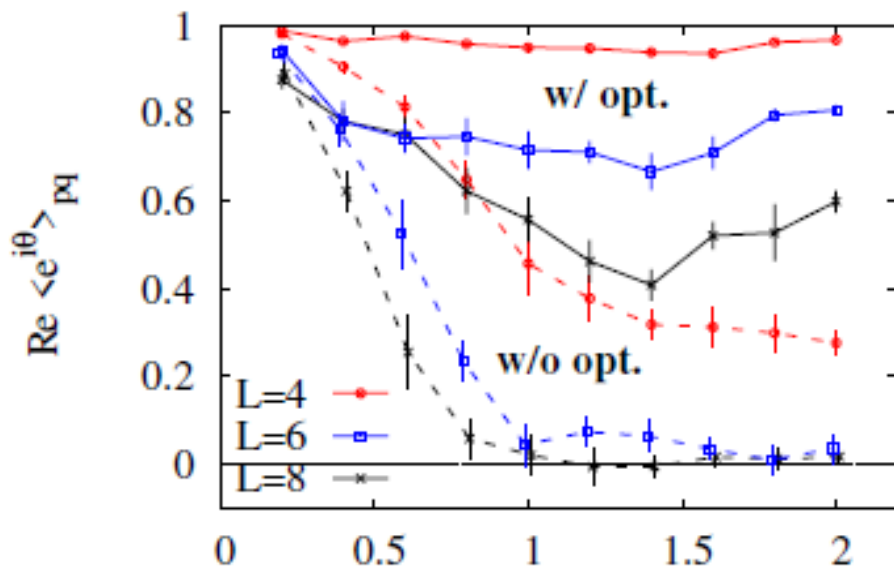
*Machine learning
~ Educated algorithm
to generic problems*

1+1 dim. Complex ϕ^4 theory at finite μ

- **Complex ϕ^4 theory** $\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \lambda(\phi^* \phi)^2$
- **Action on Euclidean lattice at finite μ .**
G. Aarts, PRL102('09)131601; H. Fujii, et al., JHEP 1310 (2013) 147.

$$S = \sum_x \left[\frac{(4 + m^2)}{2} \phi_{a,x} \phi_{a,x} + \frac{\lambda}{4} (\phi_{a,x} \phi_{a,x})^2 - \phi_{a,x} \phi_{a,x+\hat{1}} - \cosh \mu \phi_{a,x} \phi_{a,x+\hat{0}} + i \epsilon_{ab} \sinh \mu \phi_{a,x} \phi_{b,x+\hat{0}} \right] \left(\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i \phi_2) \right) \text{Complexify}$$

complex



Y. Mori, K. Kashiwa, AO, PTEP 2018 ('18), 023B04 [arXiv:1709.03208]

0+1 dimensional QCD

- **0+1 dimensional QCD (1 dim. QCD)**
with one species of staggered fermion on a 1xN lattice

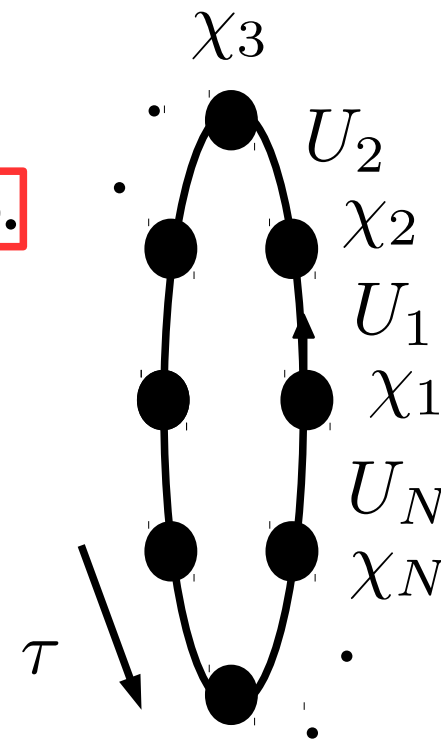
$$S = \frac{1}{2} \sum_{\tau} (\bar{\chi}_{\tau} e^{\mu} U_{\tau} \chi_{\tau+\hat{0}} - \bar{\chi}_{\tau+\hat{0}} e^{-\mu} U_{\tau}^{-1} \chi_{\tau}) + m \sum_{\tau} \bar{\chi}_{\tau} \chi_{\tau} = \frac{1}{2} \bar{\chi} D \chi$$

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}U \det D[U] = \int dU \det \left[X_N + (-1)^N e^{\mu/T} U + e^{-\mu/T} U^{-1} \right]$$

$$X_N = 2 \cosh(E/T), \quad E = \operatorname{arcsinh} m, \quad U = U_1 U_2 \cdots U_N, \quad T = 1/N$$

*Bilic+('88), Ravagli+('07), Aarts+('10, CLM), Bloch+('13, subset),
Schmidt+('16, LTM), Di Renzo+('17, LTM)*

- A toy model, but **the actual source of QCD sign prob.**
- Reduced to be a one-link problem.
→ Analytic results are known.
- Studied well in the context of strong coupling LQCD
*Miura, Nakano, AO, Kawamoto('09,'09,'17),
de Forcrand, Langelage, Philipsen, Unger ('14)*



1 dim. QCD in diagonal gauge

■ Diagonal gauge

$$U = (e^{iz_1}, e^{iz_2}, e^{iz_3}) \quad (z_1 + z_2 + z_3 = 0)$$

$$\mathcal{Z} = \int dU e^{-S} = \int dx_1 dx_2 J H e^{-S}$$

$$= \int dx_1 dx_2 \det \left(\frac{\partial z_a}{\partial x_b} \right) \left[\frac{8}{3\pi^2} \prod_{a < b} \sin^2 \left(\frac{z_a - z_b}{2} \right) \right] \left[\prod_a (X_N + 2 \cos(z_a - i\mu)) \right]$$

Jacobian

Haar measure

exp(-S)

■ Path optimization (t: fictitious time)

→ $y(x_1, x_2)$ itself is the parameter on the (x_1, x_2) mesh point

$$z_i = x_i + iy_i, \quad y_i = y_i(x_1, x_2)$$

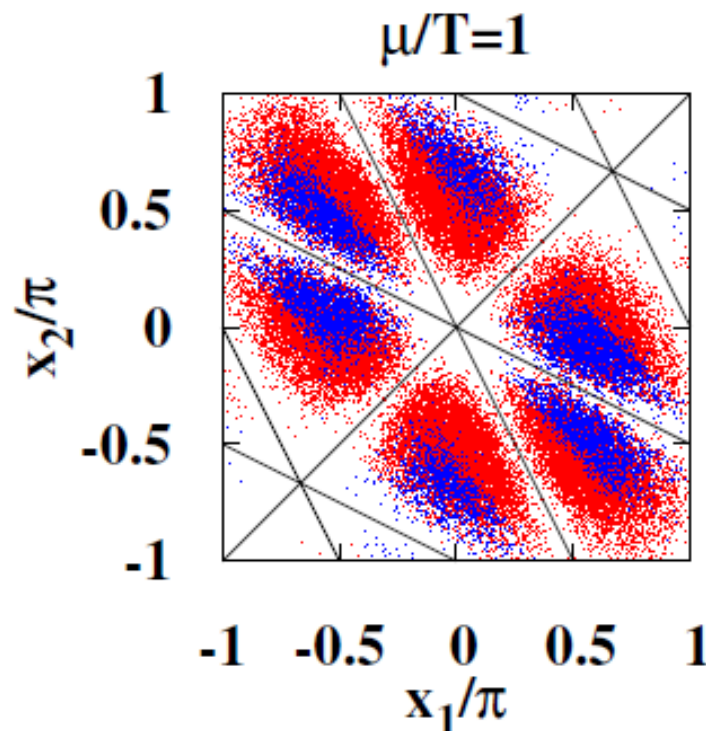
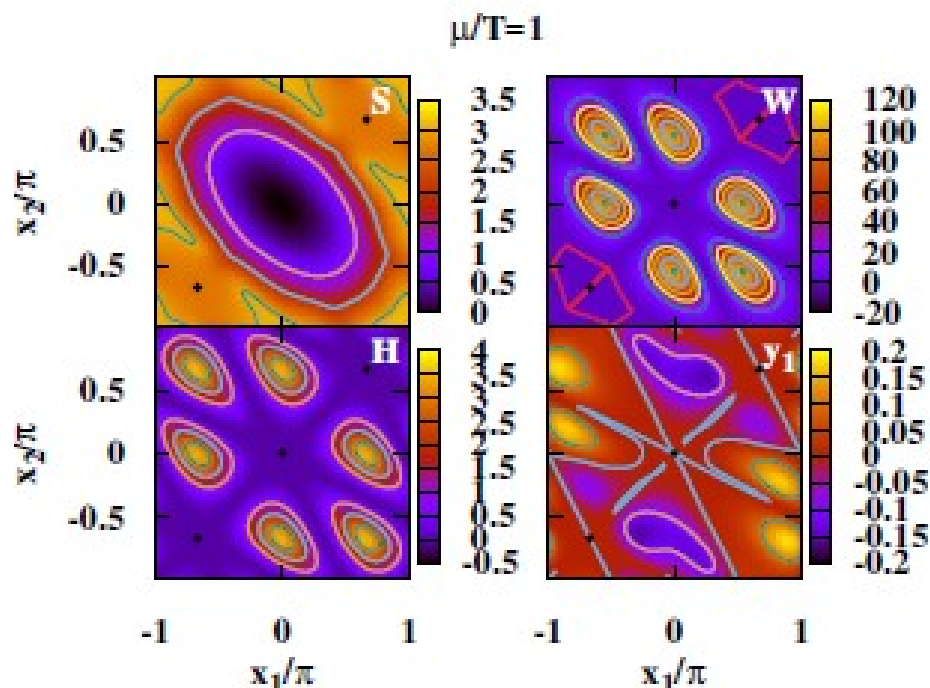
$$\frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{Z}_{pq}}{\partial y_i}, \quad \mathcal{Z}_{pq} = \int dx_1 dx_2 |J H e^{-S}|$$

Path Opt. of 0+1 dim. QCD

- $\exp(-S)$ and Haar Measure \rightarrow Six separated regions *Schmidt+('16, LTM)*
 - Problematic in MC simulations to overcome Statistical pot. barrier
- Hybrid Monte-Carlo in 1 dim. QCD w/o gauge fixing using NN

$$U \rightarrow \mathcal{U}(U) = U \prod_{a=1}^{N_c^2-1} e^{-y_i \lambda_i / 2}, \quad H = \frac{P^2}{2} + \text{Re}(S(\mathcal{U}(U)))$$

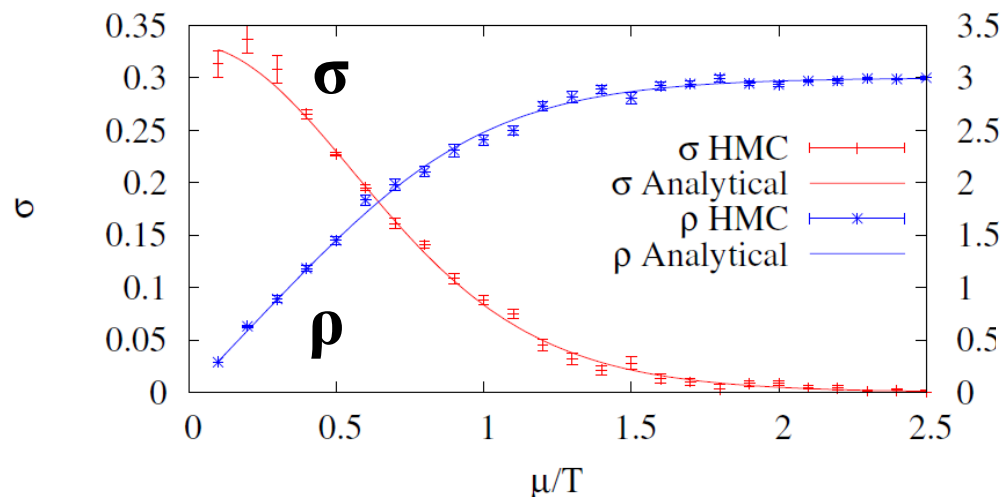
SL(3)



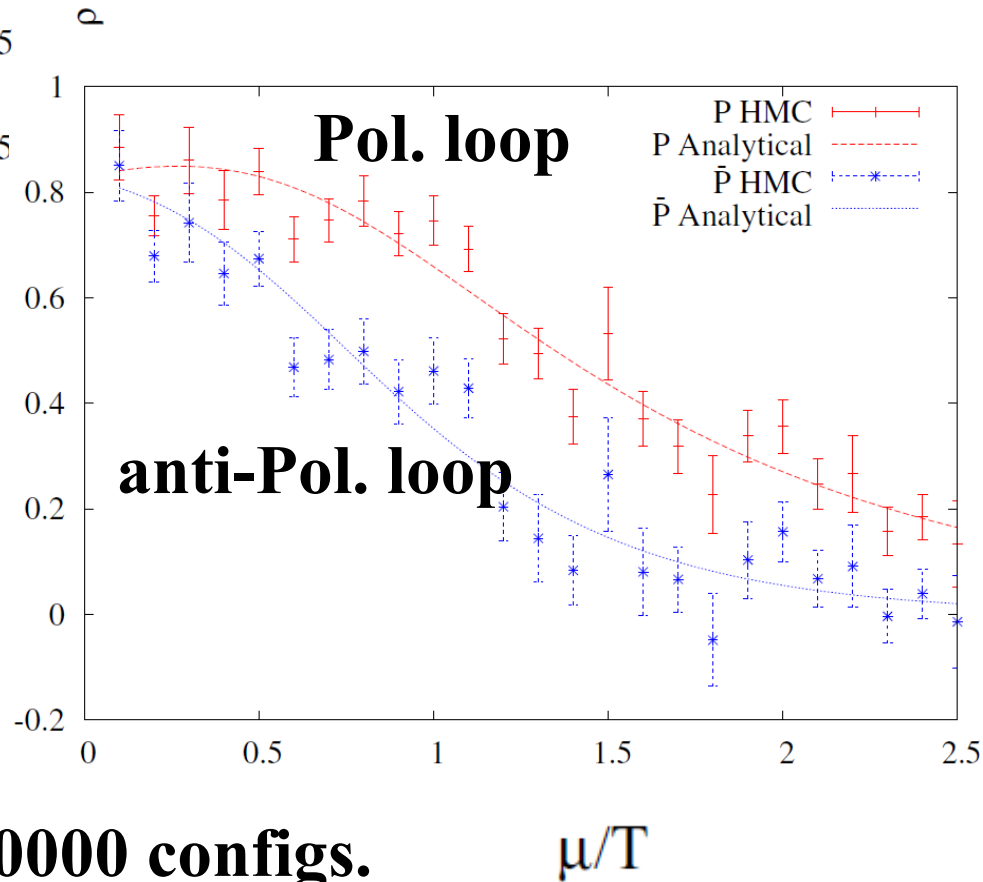
AO, Mori, Kashiwa, Lat2018 proc.; Y. Mori, K. Kashiwa, AO, PTEP2019, 113B01

Path Opt. of 0+1 dim. QCD

- Hybrid Monte-Carlo in 1 dim. QCD w/o gauge fixing using NN
→ reproduces exact results, as expected.



1000 configs.



Y. Mori, K. Kashiwa, AO,
PTEP2019, 113B01

10000 configs.

μ/T

Short Summary (1)

- 高密度核物質の (相図と) 状態方程式解明は素粒子・原子核・宇宙物理の大きな目標
 - QCD 相転移、対称エネルギー、中性子星
- 低密度からの外挿には大きな不定性を伴い、高密度物質生成を目指す複数の計画が立てられている。
- 有限密度 QCD を第一原理的に解くには符号問題を乗り越える / 避けることが必要。径路最適化法 (森 et al.) はその方法の一つ。
 - 1次元積分、1+1次元スカラー場、0+1次元 QCD、...
 - 1+1次元 QCD では苦勞あり。希望の光もあり。
(→ 来週のコロキウム by 森)
 - 現在 3+1次元有限密度 QCD に挑戦できているのは複素ランジュバン法 (西村、滑川、筒井、... ; Sexty, Stematescu, Aarts, ...)

重イオン衝突 輸送模型・古典場から量子場の時間発展へ

重イオン衝突における時間発展

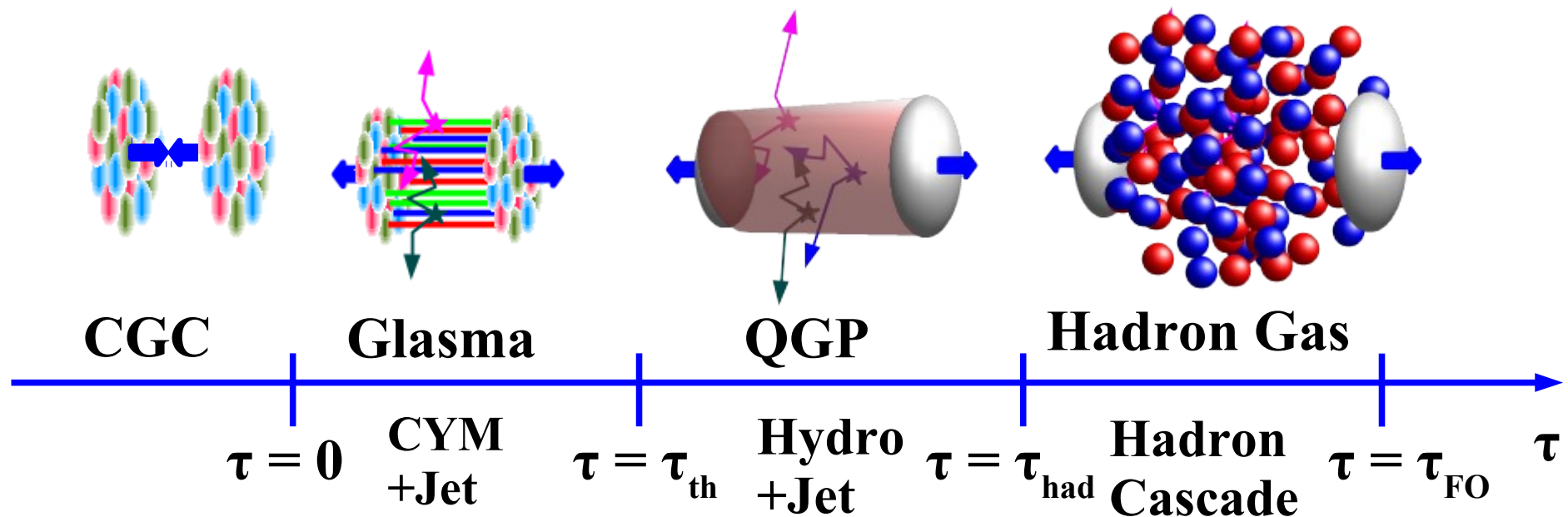
■ 高エネルギー重イオン衝突の後半

QGP 流体からハドロンが作られ、終状態相互作用の後、freeze-out

● 流体力学からハドロン輸送モデルにスイッチ

or 流体力学と輸送模型を同時に解く (integrated model)

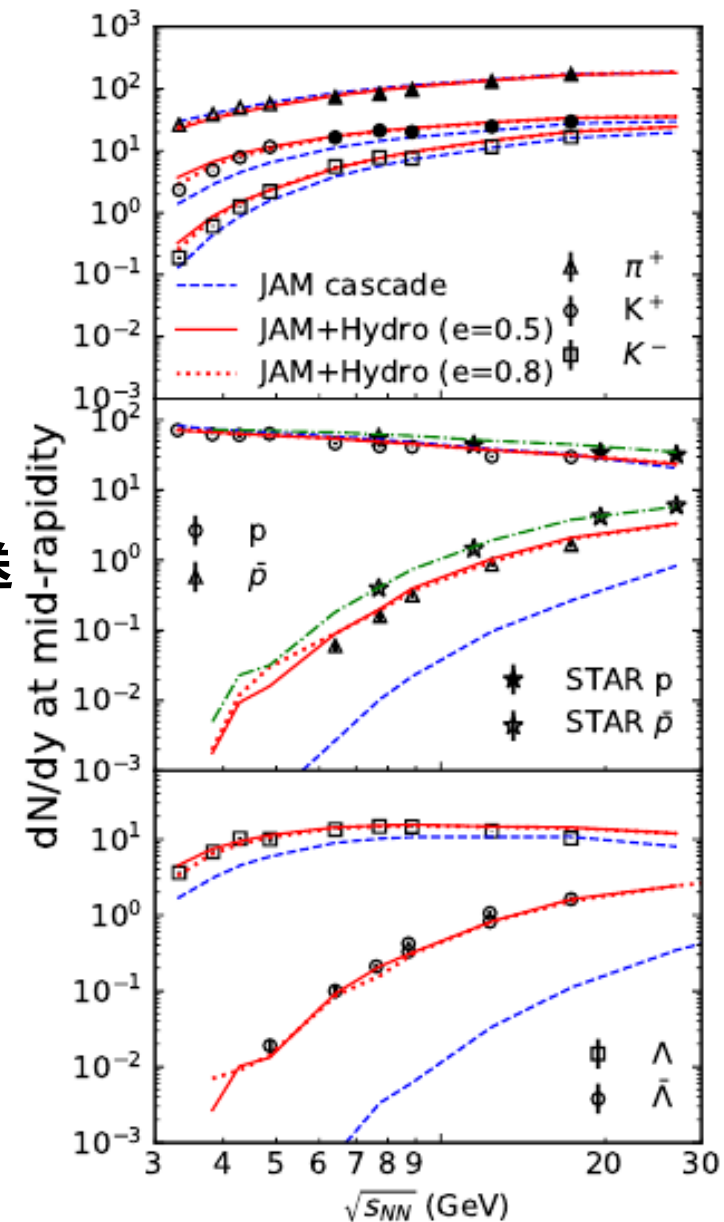
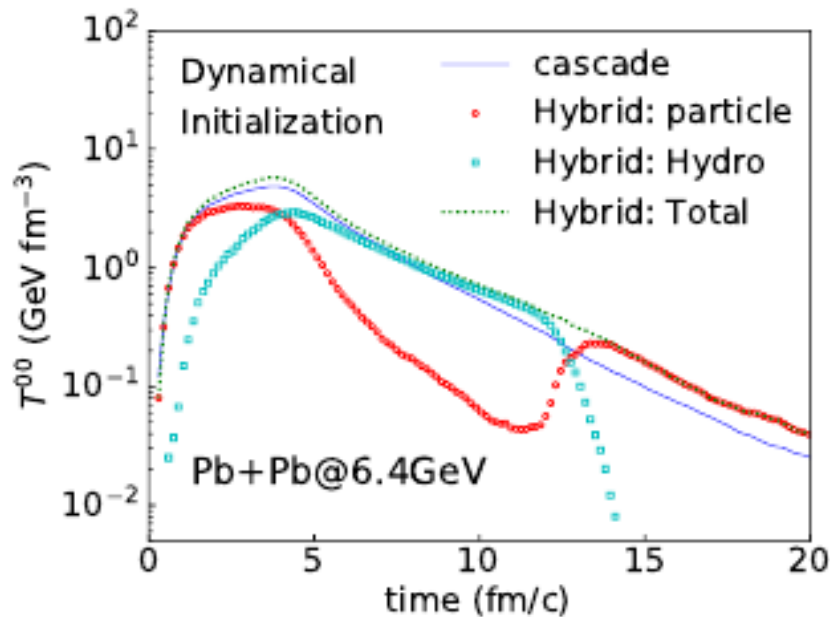
Y. Akamatsu, M. Asakawa, T. Hirano, M. Kitazawa, K. Morita, K. Murase, Y. Nara, C. Nonaka, AO, PRC98('18),024909 [1805.09024]



Hydro. and Hadron Transport are “Integrated” !

■ 流体・粒子統合模型

- エネルギー密度が高い空間領域で生成された粒子を流体の源とし、エネルギー密度が下がると粒子化すると仮定。
- ハドロン比をうまく説明
- 通常の切り替え方
流体の解 Cooper-Frye 公式で現れた粒子を輸送
or 時間で流体・粒子描像を切り替え



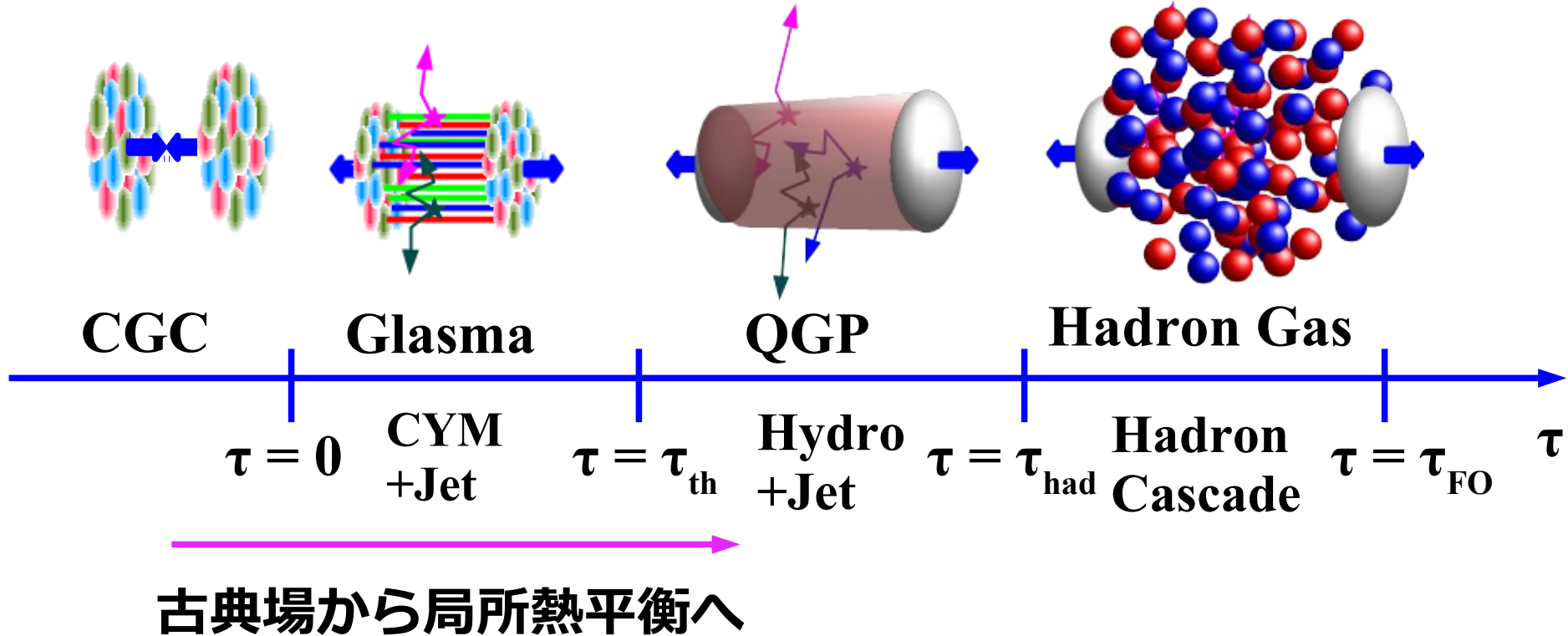
Y. Akamatsu et al., PRC98('18),024909 [1805.09024]

格子場の理論で重イオン衝突？

■ 高エネルギー重イオン衝突の初期段階

古典場が支配的な段階 (CGC, Glasma) から熱平衡 (Hydro., QGP) へ

→ 古典的な背景場の中での量子場の緩和過程の記述が必要



■ しかし量子場の時間発展には強烈な符号問題が ...

叶わぬ夢か？
$$S_{fi} = \mathcal{N} \int D\phi \langle \Psi(t_f) | \exp(iS[\phi]) | \Psi(t_i) \rangle$$

量子場の時間発展への取り組み

■ 古典場によるダイナミクスの記述

- 最小作用の原理 $\delta S=0 \rightarrow$ 符号問題なし

- 多くの非平衡現象で有用

condensate (Time dep. Gross-Pitaevski), nuclei (TD Hartree-Fock), Inflation, high-energy heavy-ion collisions (classical Yang-Mills), ...

- ただし古典平衡に近づき、連続極限でエネルギー密度は発散

$$n_k = T/\omega_k (\text{Classical}), \quad n_k = [\exp(\omega_k/T) \mp 1]^{-1} (\text{Quantum})$$

■ (有限の古典場を含む) 量子場の実時間発展への取り組み

- Closed Time Path+ 2PI 作用による記述 (Kadanoff-Baym 方程式)

Aarts, Berges ('02), Hatta, Nishiyama ('12)

\rightarrow 背景場が一様でない場合には計算量が膨大

- 高運動量自由度を先に積分 and/or 別扱い

Bodeker, McLerran, Smilga ('95), Greiner, B.Muller ('97),

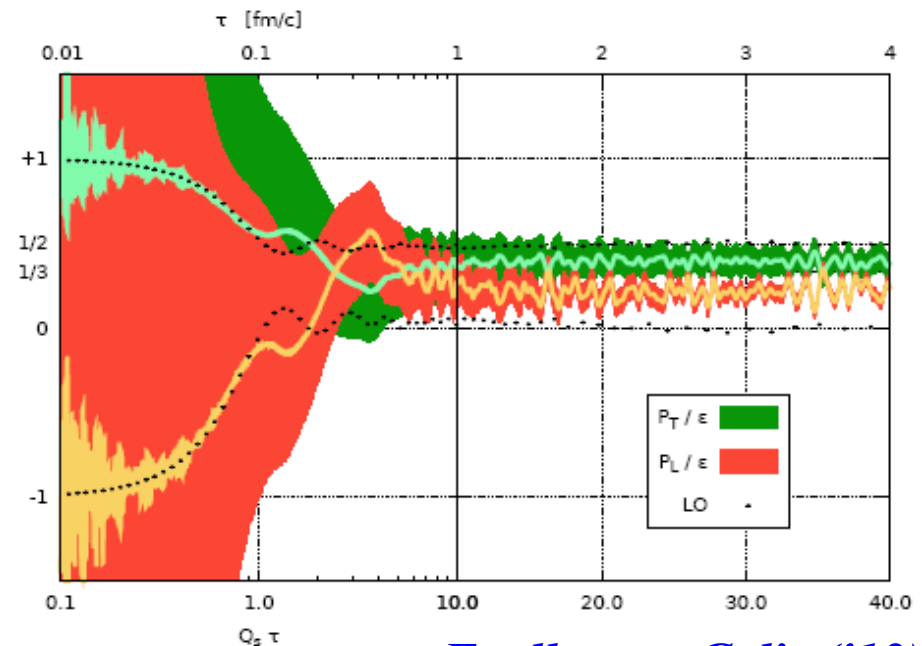
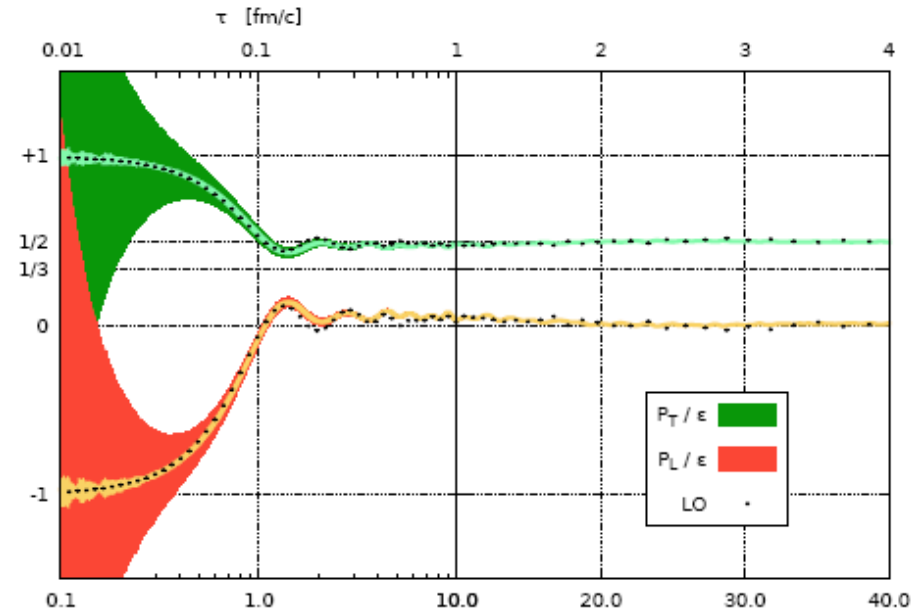
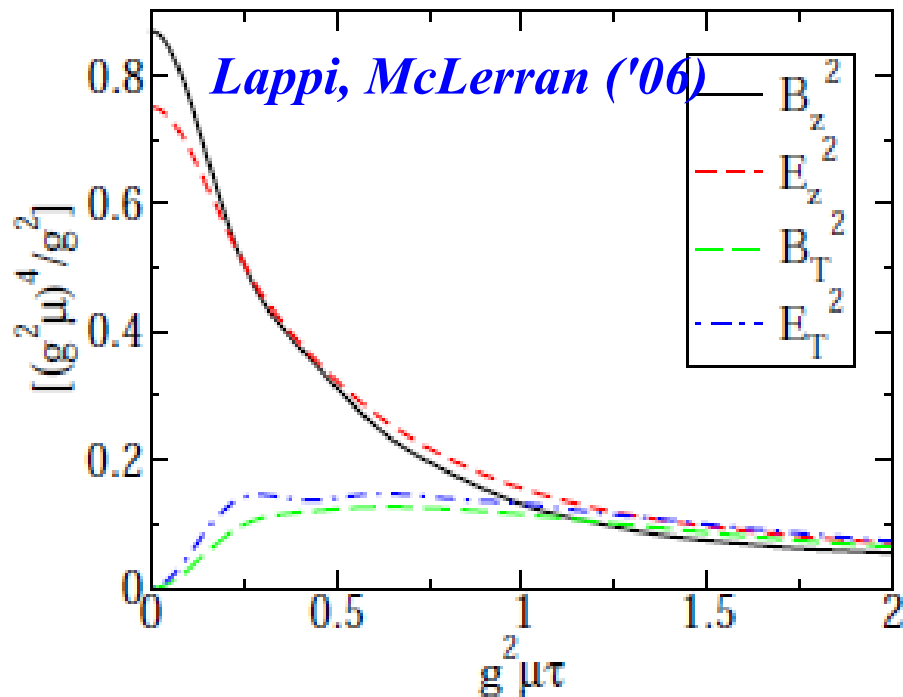
Dumitru, Nara, (Strickland) ('05,'07) ...

\rightarrow 古典場部分は古典統計、古典場と粒子の変換は non-trivial

古典ヤンミルズ場の時間発展

■ 古典統計シミュレーション

McLerran, Venugopalan ('94), Romatschke, Venugopalan ('06), Lappi, McLerran ('06), Berges, Scheffler, Sexty ('08), Fukushima ('11), Fukushima, Gelis ('12), Epelbaum, Gelis ('13)



Epelbaum, Gelis ('13)

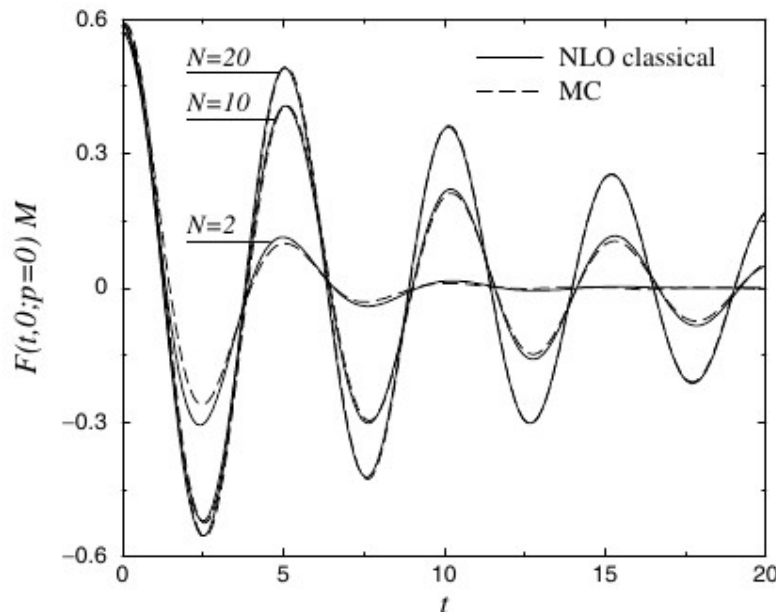
Classical Aspects of Quantum Fields Far from Equilibrium

Gert Aarts and Jürgen Berges

Institut für Theoretische Physik, Philosophenweg 16, 69120 Heidelberg, Germany

(Received 16 July 2001; published 15 January 2002)

We consider the time evolution of nonequilibrium quantum scalar fields in the $O(N)$ model, using the next-to-leading order $1/N$ expansion of the two-particle irreducible effective action. A comparison with exact numerical simulations in $1 + 1$ dimensions in the classical limit shows that the $1/N$ expansion gives quantitatively precise results already for moderate values of N . For sufficiently high initial occupation numbers the time evolution of quantum fields is shown to be accurately described by classical physics. Eventually the correspondence breaks down due to the difference between classical and quantum thermal equilibrium.



時間相関関数は古典場でうまく記述できる。古典・量子統計の違いが最大の問題である。

摂動論と格子 QCD で十分では？

- 摂動論 and/or 格子 QCD から求めた EOS+ 輸送係数で Hydro
R. Baier, A.H. Mueller, D. Schiff, D.T. Son ('01, pQCD, τ_{III}), P. Arnold, D.G. Moore, L.G. Yaffe ('03, pQCD, η); A. Nakamura, S. Sakai ('05, LQCD, η); A. Bazavov et al. [HotQCD] ('14, LQCD, EOS); S. Borsanyi et al. ('14, LQCD, EOS)
 - 熱平衡化する前では、おそらく不十分 : early thermalization puzzle, large η (pQCD), large uncertainty in η (LQCD)
- なぜか？ 背景場 (古典場) の効果
 - Anomalous viscosity under strong disordered field
M. Asakawa, S. A. Bass, B. Müller ('06)
乱雑な背景場中の運動により運動量移行が促進される (小さな η)
 - 古典場発展でも見られる
H. Matsuda, T. Kunihiro, AO, T.T. Takahashi ('20)
$$\eta \propto (g^4 \log(1/g))^{-1} \text{ (pQCD)} \rightarrow \eta \propto g^{-3/2} \text{ (ABM, CYM)}$$
 - 低エネルギーの原子核反応では自然 (Wall-Window formula)
One-body dissipation (古典場) > Two-body dissipation (衝突)

非一様・非平衡な背景場の下での量子場の発展の記述が必要

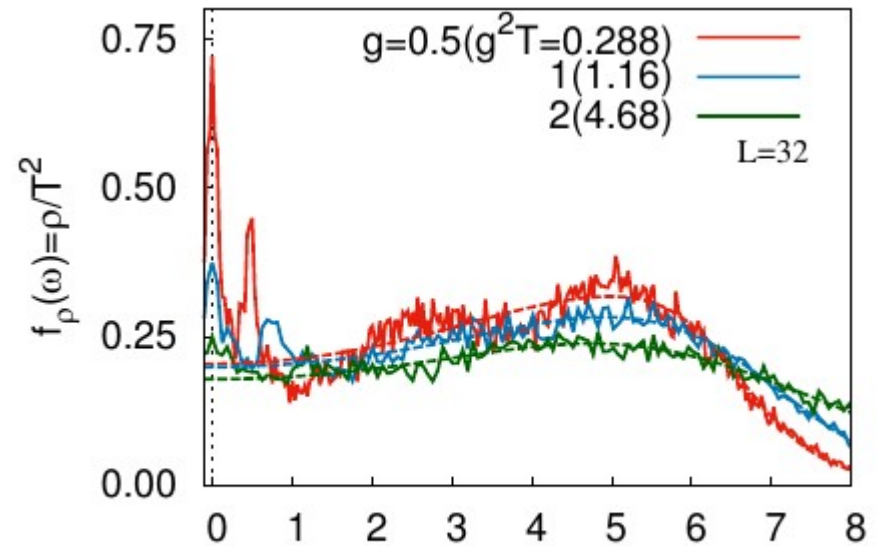
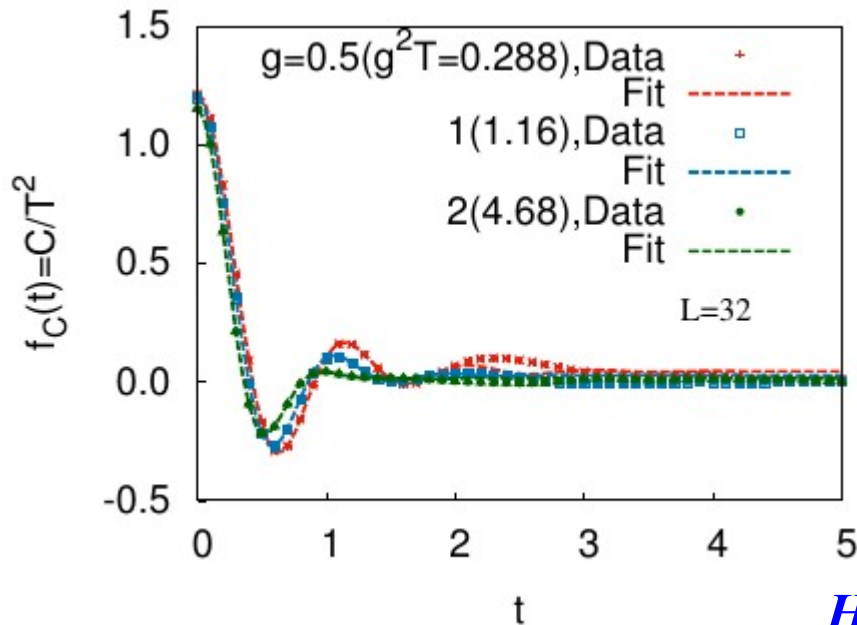
古典ヤンミルズ場のずり粘性

■ グリーン・久保公式

$$\eta = \frac{1}{T} \int_0^\infty dt C(t), \quad C(t) = \frac{V}{3} \sum_{i < j} \tau_{ij}(t) \tau_{ij}(0)$$

■ 古典ヤンミルズ場のエネルギー運動量テンソルから 時間相関関数 $C(t)$ を計算し、数値積分

■ IP-glasma 模型でのずり粘性計算となっているはず。



H. Matsuda, T. Kunihiro, AO, T.T. Takahashi,
[arXiv:2007.06886 \[hep-ph\]](https://arxiv.org/abs/2007.06886)

異常なずり粘性

■ Anomalous viscosity under strong disordered field

M. Asakawa, S. A. Bass, B. Müller, PRL96 ('06)252301; PTP116 ('07) 725.

乱雑な背景場中の運動により運動量移行が促進される (小さな η)

$$\eta_A = \left(\frac{2(N_c^2 - 1)\nu_4\zeta(4)T\tau}{25b_0N_c\nu_2'\zeta(2)} \right)^{1/2} \frac{s}{g^{3/2}}$$

$$\eta \propto (g^4 \log(1/g))^{-1} \text{ (pQCD)}$$

■ 古典場発展でも見られる

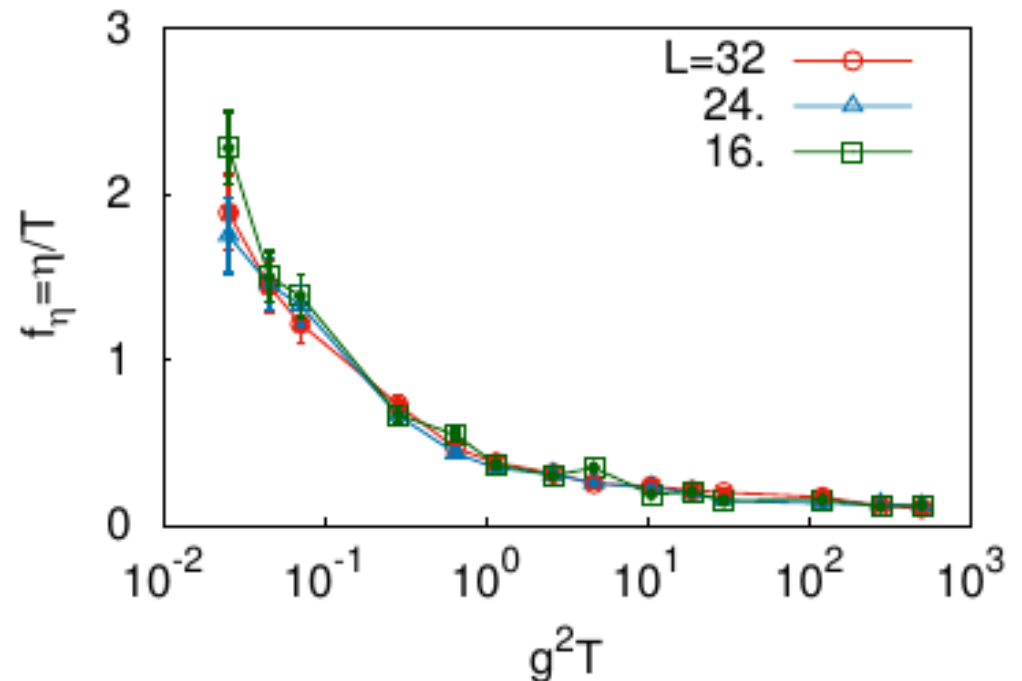
H. Matsuda, T. Kunihiro, AO, T.T.Takahashi (arXiv:2007.06886)

$$\alpha x^{-\beta/2} + \gamma x^{-\delta/2}$$

$$\alpha = 0.09 \pm 0.07, \quad \beta = 1.49 \pm 0.39,$$

$$\gamma = 0.33 \pm 0.06, \quad \delta = 0.35 \pm 0.07.$$

$$x = g^2 T$$



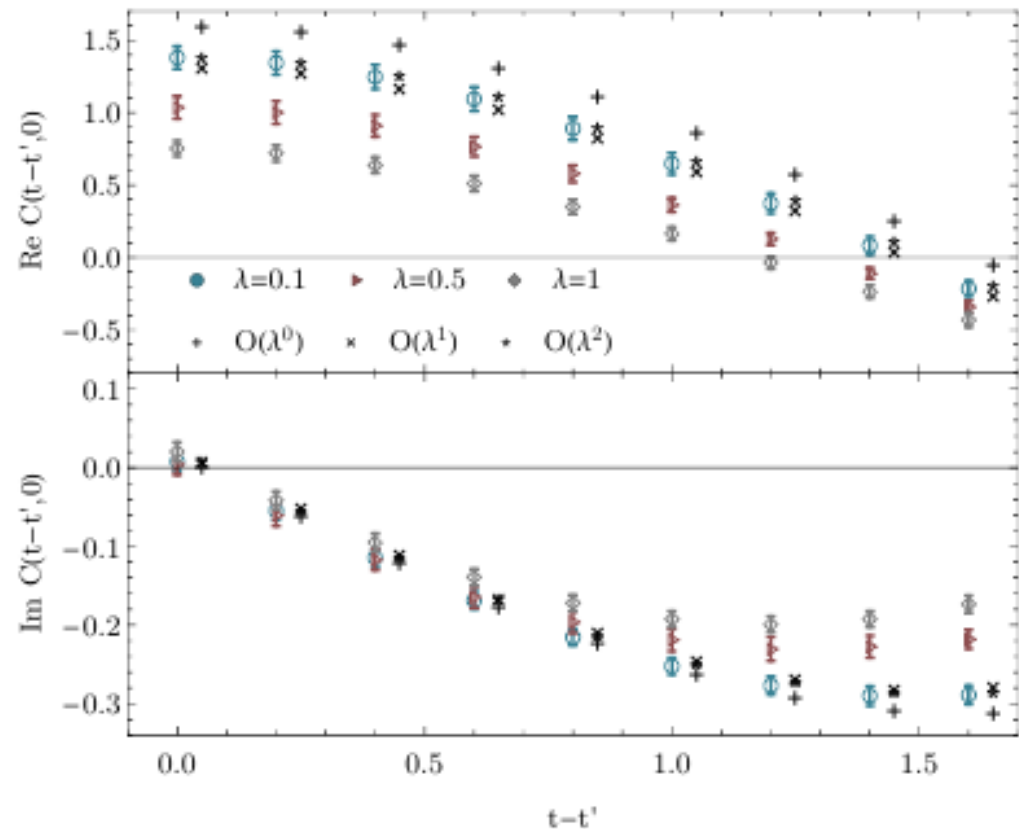
変数を複素化した経路積分で計算できないか？

■ Lefschetz thimble approach to real time evolution

● 2点関数 E.g. Alexandru+(‘17)

- ◆ Closed time path での経路積分を Lefschetz thimble 上で実行
- ◆ 1+1 次元、1/4 周期程度まで、 $\lambda=0.1 \rightarrow$ 現象論的には不十分
- ◆ 虚部が求まるのは魅力的

*A. Alexandru, G. Basar, P. F. Bedaque,
G. W. Ridgway, PRD95(‘17), 114501*



**高エネルギー重イオン衝突の初期段階で
量子効果を含むシミュレーションをしたい！
(非一様・非平衡な背景場の下での量子場の発展の記述)**

**→ 量子統計性をもつ古典場が使えれば ...
(Replica Evolution)**

レプリカ発展法での分配関数 (量子力学)

■ 古典力学での分配関数

$$H = \frac{p^2}{2} + U(x)$$

$$Z_C(T) = \int \frac{dx dp}{2\pi} \exp \left[-\frac{H(x, p)}{T} \right]$$

■ 量子力学での分配関数 (虚時間法)

$$S = \frac{1}{\xi} \left[\mathcal{V} + \sum_{\tau=1}^N U(x_\tau) \right]$$

$$Z_Q(T) = \int \mathcal{D}x \exp(-S[x])$$

$$\mathcal{V} = \sum_{\tau=1}^N \frac{\xi^2}{2} (x_{\tau+1} - x_\tau)^2 \simeq \xi \int_0^{1/T} d\bar{\tau} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial x}{\partial \bar{\tau}} \right]^2, \quad \xi = NT$$

■ レプリカ発展法 (虚時間微分項を相互作用とみなす) での分配関数

$$\mathcal{H} = \sum_{\tau=1}^N \left[\frac{p_\tau^2}{2} + U(x_\tau) \right] + \mathcal{V}$$

$H(x_\tau, p_\tau)$ $\xi S[\phi]$

$$Z_R(\xi) = \int \frac{\mathcal{D}x \mathcal{D}p}{2\pi} \exp \left(-\frac{\mathcal{H}[x, p]}{\xi} \right)$$
$$= (2\pi\xi)^{NL^3/2} Z_Q(T)$$

虚時間微分項で相互作用する N 個の古典場の分配関数 (温度 ξ)

∞ 量子力学での分配関数 (温度 $T=\xi/N$)

■ レプリカ座標 (x_τ, p_τ) の運動方程式

$$\frac{dx_\tau}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\tau} = p_\tau$$

$$\frac{dp_\tau}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_\tau} = -\frac{\partial U(x_\tau)}{\partial x_\tau} + \xi^2(x_{\tau+1} + x_{\tau-1} - 2x_\tau)$$

τ -derivative terms

■ レプリカ指標平均

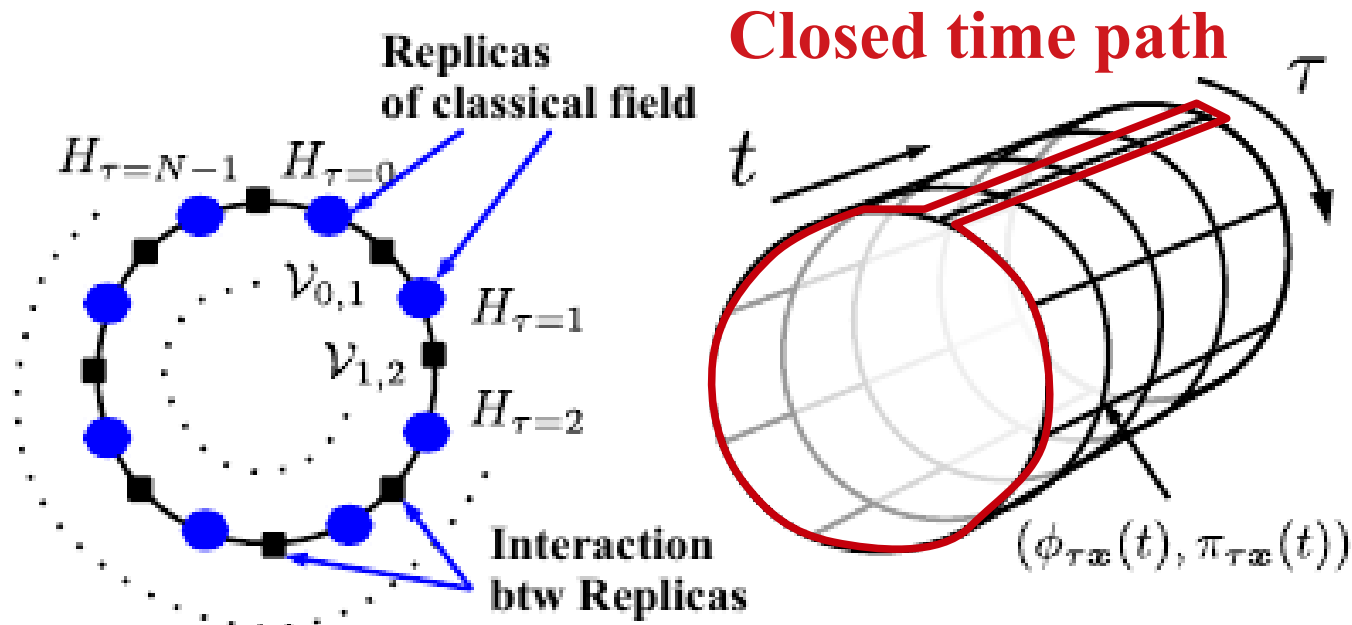
$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \frac{1}{N} \sum_\tau \frac{dx_\tau}{dt} = \tilde{p}$$

$$\frac{d\tilde{p}}{dt} = \frac{1}{N} \sum_\tau \frac{dp_\tau}{dt} = -\frac{1}{N} \sum_\tau \frac{\partial U(x_\tau)}{\partial x_\tau} + 0 \text{ (Ehrenfest's theorem)}$$

$$= -\frac{\partial U(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} + \mathcal{O}((\delta x)^2)$$

レプリカ間のゆらぎが小さい場合には、
レプリカ指標平均 (τ 平均) は古典運動方程式に従う

レプリカ発展法 (Replica Evolution method)



$$\mathcal{H} = \sum_{\tau} H_{\tau} + \sum_{\tau} \mathcal{V}_{\tau, \tau+1} = \frac{1}{2} \sum_{\tau, \mathbf{x}} \pi_{\tau, \mathbf{x}}^2 + \xi S[\phi]$$

$$Z_R = \int \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\phi \exp(-\mathcal{H}/\xi) \propto \int \mathcal{D}\phi \exp(-S[\phi])$$

レプリカ発展法 = 量子統計性をもつ古典力学

スカラー場のレプリカ発展

■ 場の理論でのレプリカ発展

- レプリカ変数 $(x_\tau, p_\tau) \rightarrow (\phi_{\tau x}, \pi_{\tau x})$
- 場の理論 \rightarrow 質量くりこみ、ゼロ点エネルギーの除去

■ 例 : Φ^4 theory

$$\mathcal{H} = \sum_{\tau, \mathbf{x}} \left[\frac{\pi_{\tau \mathbf{x}}^2}{2} + \frac{1}{2} (\nabla \phi_{\tau \mathbf{x}})^2 + \frac{m^2}{2} \phi_{\tau \mathbf{x}}^2 + \frac{\lambda}{24} \phi_{\tau \mathbf{x}}^4 + \frac{\xi^2}{2} (\phi_{\tau+1, \mathbf{x}} - \phi_{\tau \mathbf{x}})^2 \right]$$

$H(\phi_{\tau \mathbf{x}}, \pi_{\tau \mathbf{x}})$
 $\xi S[\phi]$

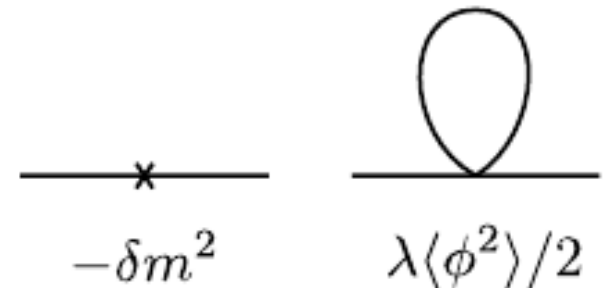
↑ $-\frac{\delta m^2}{2} \phi_{\tau \mathbf{x}}^2$

■ 質量くりこみ (1 loop)

Aarts, Smit ('97), Kapusta, Gale (textbook)

$$\delta m^2 = \frac{\lambda}{2} \langle \phi^2 \rangle_{\text{div}}$$

$$\langle \phi^2 \rangle_{\text{div}} = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}} \sqrt{1 + (\omega_{\mathbf{k}}/2\xi)^2}}$$



運動量分布

レプリカでの運動量分布 (自由場)

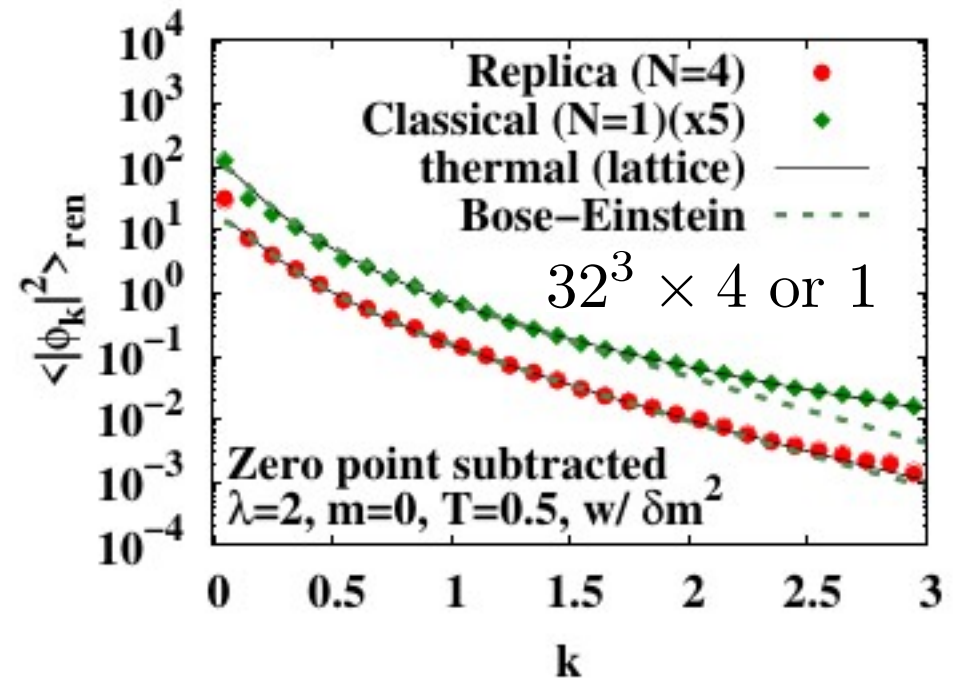
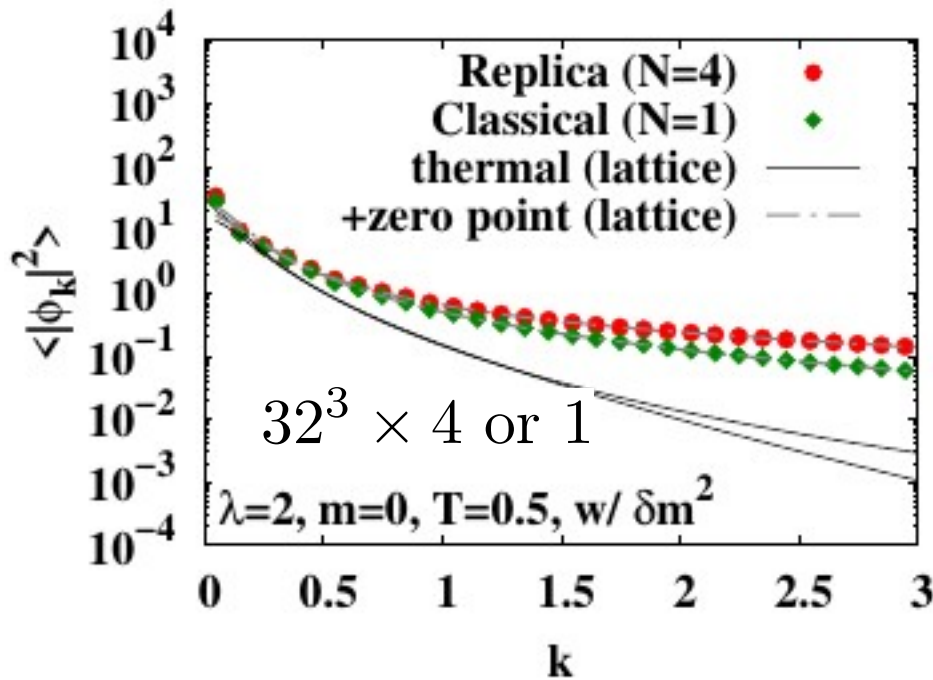
$$\langle |\phi_{\mathbf{k}}|^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_n \langle \phi_{n\mathbf{k}} \phi_{n\mathbf{k}}^* \rangle = \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}} \sqrt{1 + (\omega_{\mathbf{k}}/2\xi)^2}} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\Omega_{\mathbf{k}}/T} - 1} \right]$$

Free field, Matsubara sum

Zero point

Thermal
→ Bose-Einstein

- ゼロ点部分を取り除くと、レイリー・ジーンズ発散が取り除ける。
(N=1 (通常の古典場) では完全には取り除けない)



Rayleigh-Jeans Divergence

- With $N \geq 2$, free field energy converges in the replica method.

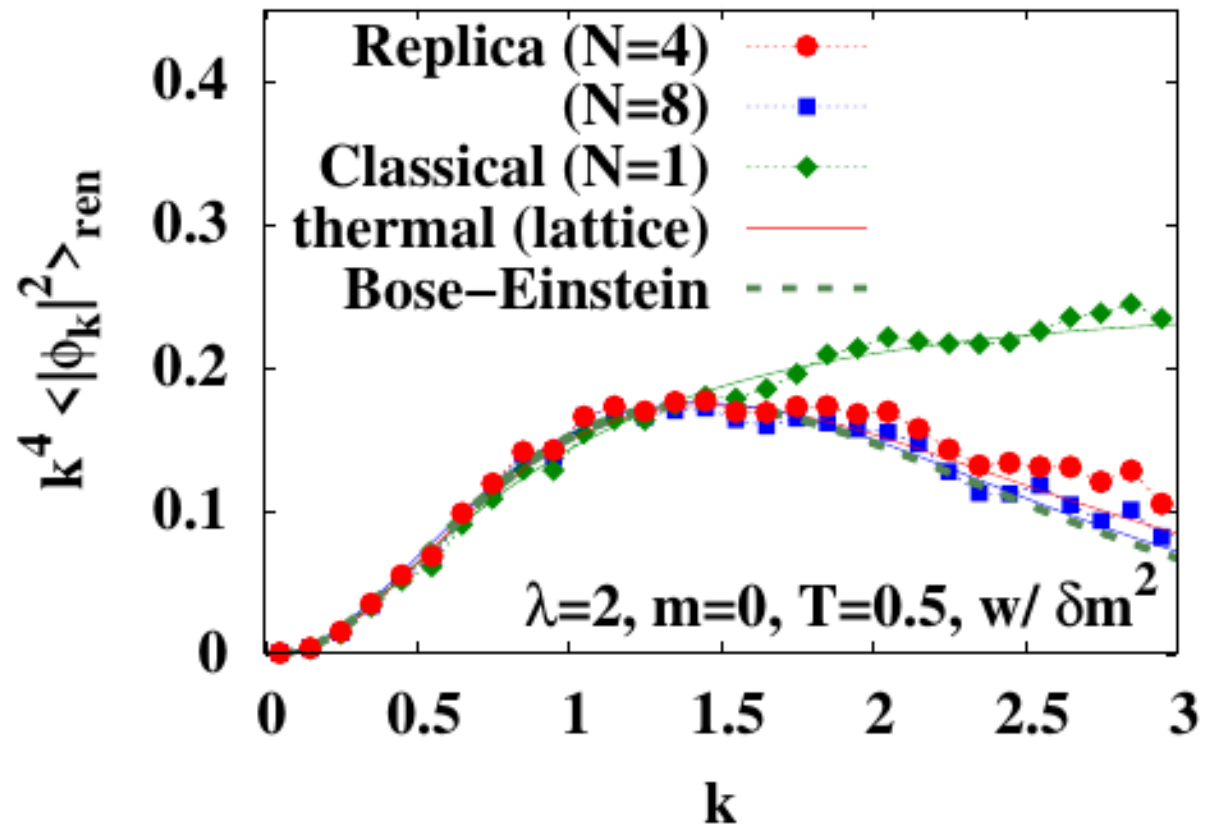
$$\Omega = 2NT \operatorname{arcsinh}(\omega/2NT) \xrightarrow{\omega \gg NT} 2NT \log(\omega/NT)$$

$$\langle |\phi_{\mathbf{k}}|^2 \rangle_{\text{ren}} \simeq \frac{2NT}{k^2} \exp(-\Omega_{\mathbf{k}}/T) \rightarrow 2(NT)^{2N+1} k^{-2(N+1)}$$

$$k^4 \langle |\phi_{\mathbf{k}}|^2 \rangle_{\text{ren}} \rightarrow 2(NT)^{2N+1} k^{-2(N-1)}$$

- Convergence cond.
 $2(N-1) > 1 \rightarrow N > 1.5$

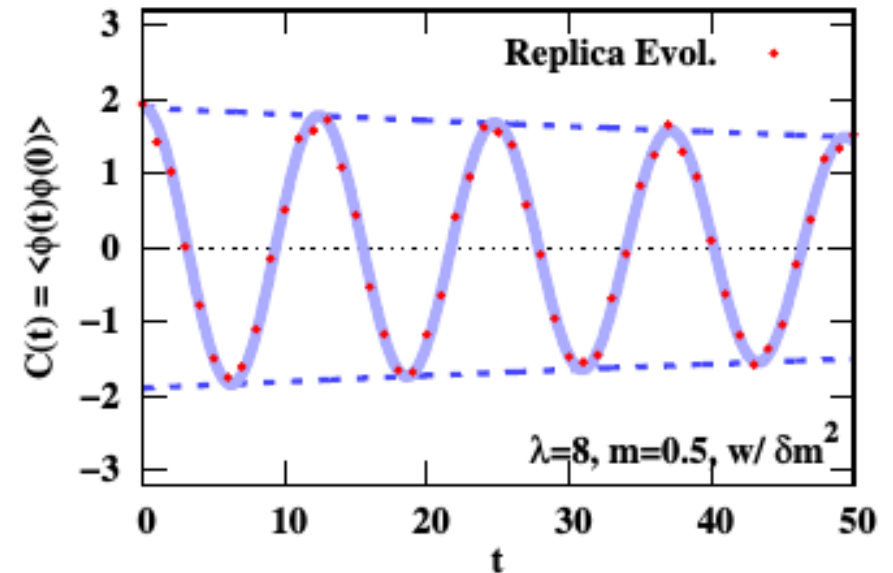
We can remove divergence of energy in the replica method ($N \geq 2$) with mass counterterm(s).



Time-correlation function

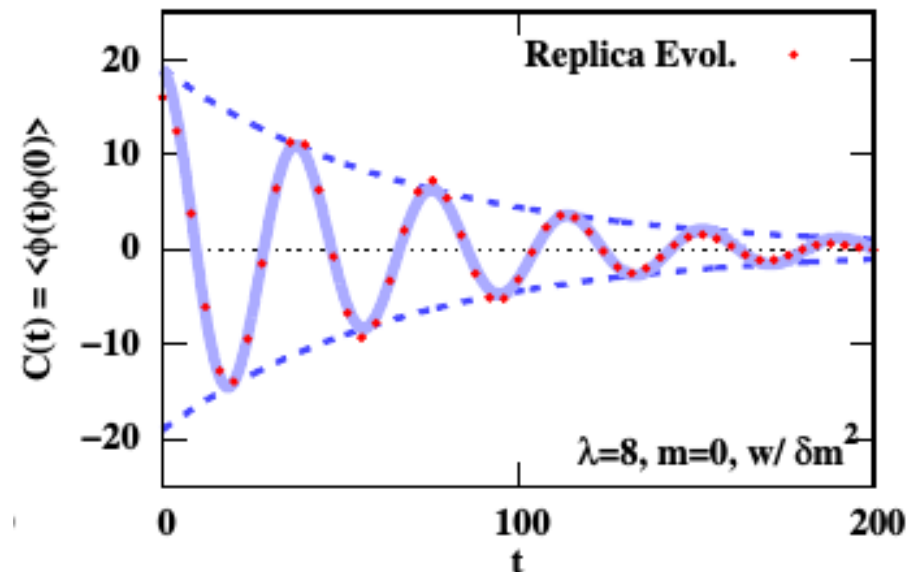
■ Time-correlation function of free field (zero momentum)

$$\begin{aligned}
 C(t) &= \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \langle \phi_{\mathbf{x}}(t) \phi_{\mathbf{y}}(0) \rangle \\
 &= \frac{1}{NL^3} \sum_{\tau, \mathbf{x}, \mathbf{y}} \langle \phi_{\tau \mathbf{x}}(t) \phi_{\tau \mathbf{y}}(0) \rangle \\
 &= \sum_n \frac{T}{M_n^2} \cos M_n t \\
 &\quad (M_n^2 = \omega^2 + 4\xi^2 \sin^2(n\pi/N))
 \end{aligned}$$



■ TCF of interacting field

- Interaction induces thermal mass
- Coupling of different momentum modes induces damping.



レプリカ発展法での熱質量

*Kapusta, Gale (textbook)
Parwani ('92, '93)*

くりこみ後の熱質量

● **Leading Order (one-loop)** $M_{LO}^2 = m^2 + \lambda T^2/24.$

● **Resummed One-Loop** $M_{\text{resum}}^2 = \frac{\lambda T^2}{24} \left[1 - \frac{3}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{24}} \right]$

● **Two-Loop**

$$M_{2\text{-loop}}^2 = \frac{\lambda T^2}{24} \left\{ 1 - \frac{3}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{24}} + \frac{\lambda}{(4\pi)^2} \left[\frac{3}{2} \log \left(\frac{T^2}{4\pi\mu^2} \right) + 2 \log \left(\frac{\lambda}{24} \right) + \alpha \right] \right\},$$

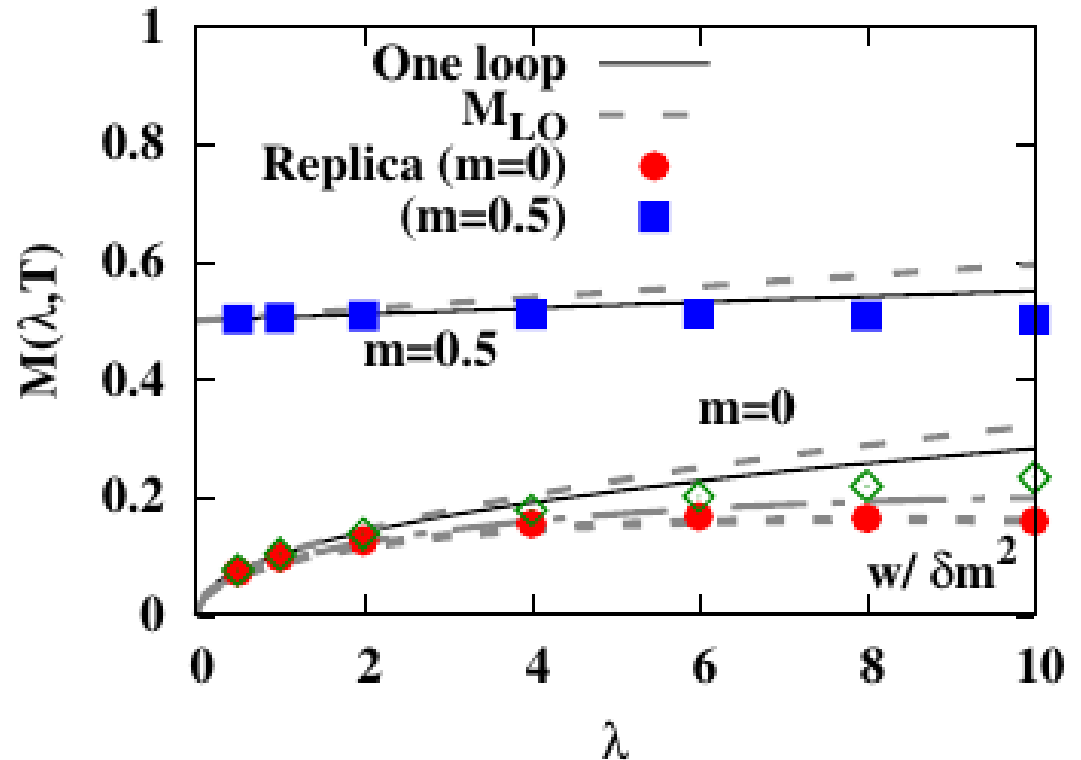
$$\frac{\times}{-\delta m^2} \quad \frac{\text{loop}}{\lambda \langle \phi^2 \rangle / 2}$$

レプリカ発展法

→ 時間相関関数をフィットして
得られた熱質量

レプリカ発展法での熱質量

→ 1ループを超える
相互作用効果を含む



Short Summary (2)

- 高エネルギー重イオン衝突における後半のダイナミクス (流体、ハドロン輸送) については定量的な理解が進みつつある。
 - Bayesian 解析、統合模型、...
- 量子統計性をもつ古典力学であるレプリカ発展法を提案した。
 - 虚時間座標をレプリカ指標 (replica index)、虚時間形式で現れる τ 微分項をポテンシャルとみなした 4 (= 3 + 1) 次元空間での場の変数の古典的時間発展
 - 古典場の性質と量子統計性を併せ持つ。
 - 技術的には HMC の分子動力学部分
 - レイリー・ジーンズ発散を持たず、1ループを越えた相互作用効果を示す
 - 今後の課題：たくさんある。

まとめ

- 高密度核物質の (相図と) 状態方程式解明は素粒子・原子核・宇宙物理の大きな目標であり、重イオン衝突は実験室で高密度物質を作る有用な (ほぼ唯一の) 実験手法。
 - 様々なアプローチがあり、定量的理解が進んでいる。
 - 一番むずかしそうで (?)、かつ解くことが重要な問題
有限密度での QCD 相転移、QGP の生成機構
 - (解けそうにない問題 : クォーク・グルーオン自由度がハドロン自由度に移り変わる過程の場の理論による記述)
- M1 に説明した課題
 - 符号問題
 - 量子場の時間発展
 - 相関関数とハドロン間相互作用 (← 別の機会に)

ご清聴ありがとうございました。



Y. Mori (PhD stu.)



K. Kashiwa



Y. Namekawa



AO (11 yrs ago)



AO



Hidefumi Matsuda



Teiji Kunihiro



Toru T. Takahashi