弦双対変換としてのシグマ模型の可積分変形と重力解の生成手法への応用

坂本 純一
(豊田工業大学)

日本物理学会 2025年春季大会 2025/03/20@Online

Introduction

Yang-Baxter 変形 [Klimcik, 2002,2008]

2d NLSMの可積分変形を系統的に記述する方法

Ex. *G* - 主カイラル模型(PCM) $g \in G$

変形前

$$S_{\mathrm{PCM}} = \int \mathrm{Tr}\left(g^{-1}dg\, g^{-1}dg\right)$$

変形後

$$S_{\mathrm{YB}} = \int \mathrm{Tr}\left(g^{-1}dg \frac{1}{1-\eta\, R} g^{-1}dg\right)$$

η ：変形パラメータ

- 歪対称な線形 *R*-演算子 $R : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ← 変形を特徴づける

Yang-Baxter 方程式 $[R(x), R(y)] - R\left([R(x), y] + [x, R(y)]\right) = -c^2[x, y]$

$x, y \in \mathfrak{g}$

Introduction

非常に抽象的な操作
物理的にどのような変形なのかイメージしずらい

初期の結果

あるクラスのYB変形 = TsT 変換

TsT 変換 (= T-duality shift T-duality変換)

Ex. Maldacena-Russo b.g. , Lunin-Maldacena-Frolov,
Schrodinger 時空 etc. [Matsumoto-Yoshida, 1404.1838,1404.3657, 1502.00740]

Introduction

Yang-Baxter変形は、非可換 T-duality

通常のT-duality　半径 R で S^1コンパクト化された方向に沿って実行

U(1) Killing方向

$$R \to R' = \frac{\alpha'}{R}$$

[Brink-Green-Schwarz,1982]
[Kikkawa-Yamasaki,1984]
[Buscheri,1987]
etc.

非可換 T-duality　時空の非可換なisometry G 方向に沿って実行

Conjecture: [Hoare-Tseytlin, 1609.02550]
Proof: [Borsato-Wulff, 1609.09834, 1706.10169]

Introduction

- ✓ “YB変形”の適用範囲は、可積分なシグマ模型に限定されない
  時空が非可換なisometryを持っていれば十分

- ✓ 広範なクラスの重力解に適用でき、新たな重力解生成技術
  として活用可能

今回は、主にボソニックな生成子のみを含む 古典 r 行列に
対応したYB変形と双対変換との関係を紹介

YB変形の”Buscher’s rule”を提示

最後に、フェルミオニックな生成子を含む場合の発展についても少しコメント

Talk Plan

1. Introduction × 4 slides
2. YB変形の一般公式 × 3 slides
3. 双対変換としてのYB変形 × 6 slides
4. Summary＆discussion

2. YB変形の一般公式

YB変形された$AdS_5 \times S^5$超弦理論

YB変形された$AdS_5 \times S^5$超弦理論のGS作用

[Delduc-Magro-Vicedo, 1309.5850]
[Kawaguchi-Matsumoto-Yoshida,1401.4855]

$$S_{\rm YB} = \int d^2x\,(\gamma^{\alpha\beta} - \epsilon^{\alpha\beta}){\rm Str}\left[g^{-1}\partial_\alpha g\, d\circ \frac{1}{1-\eta R_g \circ d} g^{-1}\partial_\beta g\right] \qquad g \in SU(2,2|4)$$

- 古典 *r*-行列 (*R*-演算子の作用を決定)

$$r = \frac{1}{2} r^{ij} T_i \wedge T_j \qquad\qquad T_i \in \mathfrak{so}(2,4)\times\mathfrak{so}(6) \subset SU(2,2|4)$$

古典Yang-Baxter方程式 (*c*=0) を満たすものに限定

変形された時空を読み取るにはGS作用の標準形と比較する必要あり

吉田さんのtalk

YB変形されたAdS$_5$ × S^{5}時空の一般公式

変形された計量 g'_{mn} と 2階反対称テンソル場 B'_{mn}

$$g'_{mn} + B'_{mn} = \left[(g^{-1} - \beta)\right]^{-1}_{mn} \,,$$

c.f. $\mathrm{Tr}\left(J\frac{1}{1-\eta R}J\right)$

- g_{mn} : AdS$_5$ × S^5 計量
- β field : $\beta^{mn}(x) = 2\eta\, r^{ij}\hat{T}^m_i \hat{T}^n_j$ ← T_i のKillingベクトル

[Araujo-Bakhmatov-O Colgain-J.S.-Sheikh Jabbari-Yoshida, 1702.02861, 1705.02063]
[J.S.-Sakatani-Yoshida, 1703.09213, 1705.07116] [J.S.-Sakatani, 1803.05903]

YB変形された$AdS_5 \times S^5$時空の一般公式

ディラトン Φ' と R-R 場 F'

[Borsato-Wulff,1608.03570]
[J.S.-Sakatani-Yoshida, 1703.09213, 1705.07116]
[J.S.-Sakatani, 1803.05903]

$$\Phi' = \Phi + \frac{1}{2}\log\left(\sqrt{|g'|}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\sqrt{|g|}\right)$$

$$F' = e^{-B'_2\wedge} e^{-\beta\vee} F_5$$ （微分形式による表式）

- $F' = \sum_{p=1,3,5,7,9} F'_p \qquad F_5 = 4(\omega_{\mathrm{AdS}_5} + \omega_{\mathrm{S}^5})$
- $\beta \vee F_5 \equiv \frac{1}{2}\beta^{mn}\iota_m\iota_n F_5 \qquad \iota_m : x^m$ 方向の内部積

3. 双対変換としてのYB変形

双対変換としての解釈

Yang-Baxter変形は、あるO(10,10) T-双対変換

[J.S.-Sakatani-Yoshida, 1703.09213, 1705.07116]
[J.S.-Sakatani, 1803.05903]

一般化された計量 (DFTの基本場の一つ)

酒谷さんのtalk

$$\mathcal{H}_{MN} = \begin{pmatrix} (g - B\, g^{-1}\, B)_{mn} & B_{mk}\, g^{kn} \\ -g^{mk}\, B_{kn} & g^{mn} \end{pmatrix} ,$$

O(10,10) T-双対変換のもとで共変に変換

$$\mathcal{H}' = X^{\mathrm{T}} \mathcal{H}\, X \qquad \underline{X \in O(10,10)}$$

→ B場のシフト, T-duality, etc.

双対変換としての解釈

Yang-Baxter変形のもとでの *H* の変換則

$$\mathcal{H}' = X^{\mathrm{T}} \mathcal{H}\, X \qquad \mathcal{H}_{MN} = \begin{pmatrix} g_{mn} & 0 \\ 0 & g^{mn} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \delta^m_n & \beta^{mn} \\ 0 & \delta^n_m \end{pmatrix} \in O(10,10) \qquad \beta^{mn}(x) = 2\eta\, r^{ij} \hat{T}^m_i \hat{T}^n_j$$

RR場とdilatonも含めて、
YB変形は O(10,10) 双対変換として理解可能

Comment 1: TsT変換との関係

- 可換な生成子のみ $r = \frac{1}{2} r^{ij} T_i \wedge T_j \qquad [T_i, T_j] = 0$

YB変形 = TsT変換

[Matsumoto-Yoshida, 1404.1838,1404.3657,1502.00740]

[Osten-Tongeren, 1608.08504]

β fieldは常に定数場にできる

- 非可換な生成子の組が存在 $r = \frac{1}{2} r^{ij} T_i \wedge T_j \qquad [T_i, T_j] \neq 0$

β fieldは定数場にできない

- $r = J_{12} \wedge P_3 - P_1 \wedge P_2$ TsTの組み合わせ
- $r = P_2 \wedge P_3 + (J_{03} + J_{13}) \wedge (P_0 + P_1)$ No TsT

etc.

[Borsato-Wulff, 1812.07287]

Comment 2: 一般化された超重力理論との関係

ユニモジュラ条件 [Borsato-Wulff 1608.03570] **吉田さんのtalk**

$$r^{ij}[T_i, T_j] = 0$$

β fieldを用いたときのユニモジュラ条件とその破れ

通常の超重力理論 $$\nabla_m \beta^{mn} = 0$$

[Araujo-Bakhmatov-Ó Colgáin-J.S. -Sheikh-Jabbari-Yoshida, 1702.02861]

一般化された超重力理論 $$\nabla_m \beta^{mn} = I^n$$

e.g. $r = \frac{1}{2} P_0 \wedge D$

$\rightarrow \quad I = \partial_{x^0}$

一般化された超重力理論の重力解にあらわれるKillingベクトル

[Arutyunov-Frolov-Hoare-Roiban-Tseytlin, 1511.05795]
[Tseytlin-Wulff, 1605.04884]

Comment 2: 一般化された超重力理論との関係

T-fold との関係 $r = \frac{1}{2} P_0 \wedge D$ **酒谷さんのtalk**

例えば、x^1方向のシフトを考えると、*H* はモノドロミーをもつ

$$\mathcal{H}_{MN}(x^1 + \eta^{-1}) = \left[\Omega^{\mathrm{T}} \mathcal{H}(x^1)\, \Omega\right]_{MN},$$

$$\Omega \in O(10,10) \longleftarrow \quad Q_p{}^{mn} = \partial_p \beta^{mn} \quad \text{(Q flux)}$$

で特徴づけられる

Killing ベクトル *I* : *Q* fluxのトレースに関係した量 (?)

$$I^0 = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_n\left(\sqrt{|g|}\beta^{0n}\right) = Q_n{}^{0n} + \cdots$$

[Araujo-Bakhmatov-O Colgain-J.S.-Sheikh Jabbari-Yoshida, 1702.02861]

YB変形の適応例

ほとんどすべての時空に対して"YB変形"が適用可能
変形前にRR 5-form flux 以外のfluxが存在してもok

- Minkowski 時空 [Matsumoto-Orlando-Reffert-J.S.-Yoshida, 1505.04553]
- $\mathrm{AdS}_3 \times \mathrm{S}^3 \times \mathrm{T}^4$ 時空 with H-flux [J.S.-Sakatani, 1803.05903]
- $\mathrm{W}_{2,4} \times \mathrm{T}^{1,1}$時空 [J.S.-Yoshida, 1612.08615]
- pp-wave 時空 [Okumura-J.S.-Yoshida, unpublished]
- Black hole, Black string [Gimon-Akikazu-Hashimoto-Hubeny-Lunin-Rangamani, hep-th/0306131]

etc.

共通点： 漸近構造が変化 e.g. Minkowski --> pp-wave

Summary

- YB変形は、二次元可積分なシグマ模型の可積分変形を系統的に記述する手法の一つ

- YB変形は、一般化されたT双対変換として理解可能

- 可積分な2Dシグマ模型に限る必要はなく、非可積分な模型にも適用可能

重力解の新たな生成テクニックとして使用可能

Discussion

フェルミオニックな生成子を含んだ*r*-行列に対するYB変形

S-dualityが関係する可能性がある

Ex. $$r = (D - J_{+-}) \wedge P_- + iQ \wedge Q'$$ [Tongeren, 1904.08892]

ユニモジュラ条件を満足 [Tongeren, 1904.08892] [Borsato-Driezen, 2212.11269]

対応するYB変形された$AdS_5 \times S^5$ 時空は、
S (TsT)^2 S変換で得られる [Matsumoto-Yoshida, 1412.3658]

1. S-duality 2. TsT変換 × 2 3. S-duality

cf. 一般にS-dualityは可積分性を壊す

他のフェルミオニックな生成子を含む古典 *r*-行列はどうか？

Black hole解への応用の可能性

STsTS変換の使用例

BTZ BH解は、black string解からSTsTS変換によって得られる

[Cvetic-Guica-Saleem, 1302.7032]
[Sakamoto-Tomizawa]

漸近平坦な時空から漸近AdS時空が双対変換で生じる！

Q. 対応する古典 r-行列は存在するのか？
任意のSTsTS変換は可積分変形として理解できるかのか？

BTZ BHとblack stringを補間する解に双対な場の理論は、
双対なCFT_2のirrelevant変形であり、古典 r-行列が支配するはず

[Baggio-de Boer-Jottar-Mayerson, 1210.7695]