Double Field Theory における最近の発展

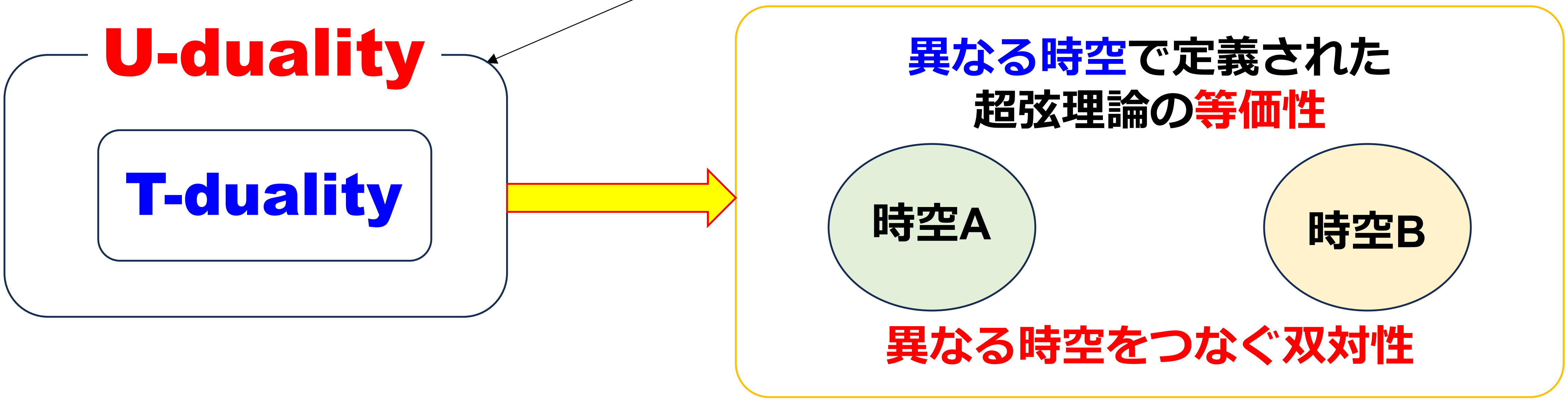
酒谷 雄峰

(京都府立医科大学)

学会シンポジウム「近年における弦双対性の広がり」 20pS1-2

シンポジウム
のタイトル
「近年における弦双対性の広がり」

超弦理論における双対性



「近年における弦双対性の広がり」

<u>シンポジウムのテーマ</u>

- Double field theory　　T-dual
- Exceptional field theory　　U-dual

⇨ 私がレビューを担当

- 超弦理論の可積分変形 ⇨ 吉田健太郎さん、坂本純一くん
- ブレーン統一理論 ⇨ 初田真知子さん
- 一般化されたT双対性 ⇨ 佐藤勇二さん

私の話の流れ

Double field theory (DFT) ってどんな理論？

Exceptional field theory (ExFT) への拡張

⇩

これらの定式化がどのように応用されているか

- **Non-geometric backgrounds**
- **一般化双対性, SUGRAのコンパクト化**

注意

40分+5分 ということで,

DFT について手っ取り早く伝えることを目指します.

⇨ 歴史的な流れ, 深い思想などは無視します.

正確ではない表現もつかいます...

超弦理論

M理論・type IIA/IIB超弦理論

⇩ 低エネルギー有効理論

11D SUGRA

10D Type IIA SUGRA

10D Type IIB SUGRA

type I/heterotic超弦理論

⇩ 低エネルギー有効理論

10D type I SUGRA

10D heterotic SUGRA

超弦理論

M理論・type IIA/IIB超弦理論

低エネルギー有効理論

11D SUGRA

10D Type IIA SUGRA

10D Type IIB SUGRA

ここでのU-duality

type I/heterotic超弦理論

低エネルギー有効理論

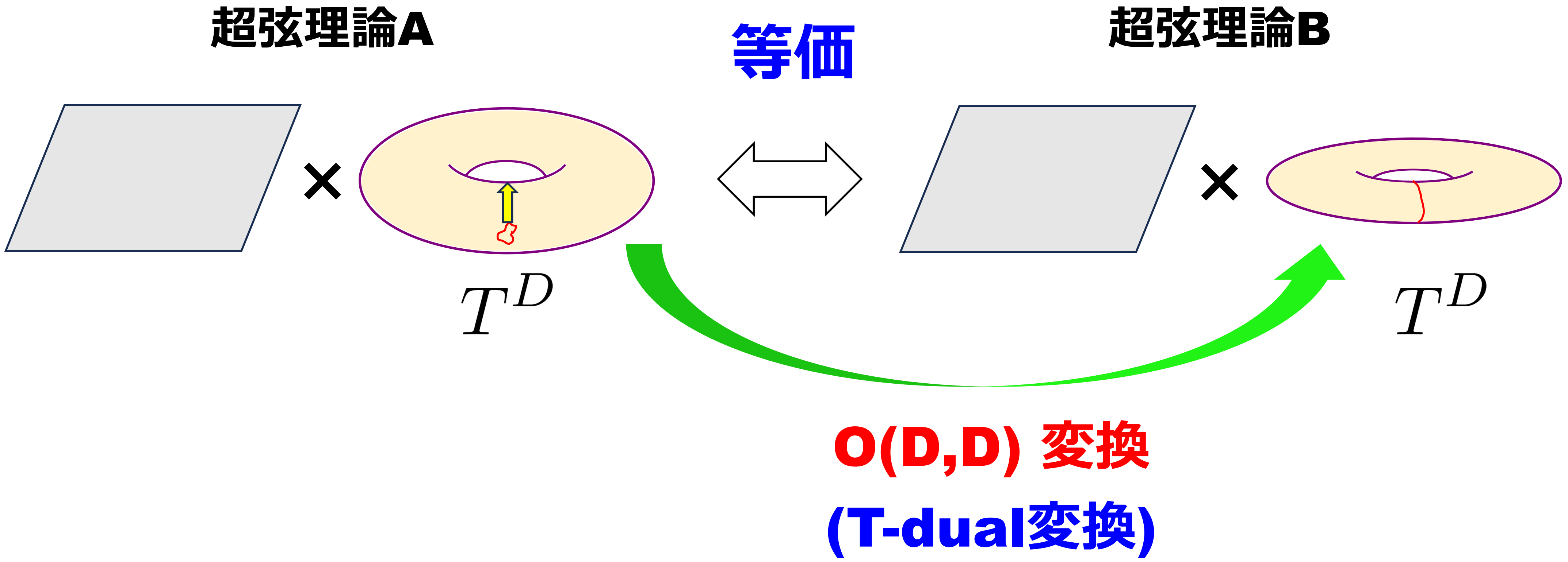
10D type I SUGRA

10D heterotic SUGRA

前半

DFT, ExFT のレビュー

T-duality について簡単に復習



SUGRAレベルで O(D,D) T-duality はどう現れるか?

10次元SUGRA作用 (NS-NS部分)

$$H_3 = \mathrm{d}B_2$$

$$\mathcal{L} = \sqrt{|g|}\, e^{-2\phi} \left(R + 4\,\nabla_m \phi\, \nabla^m \phi - \frac{1}{12}\, H_{mnp}\, H^{mnp} \right)$$

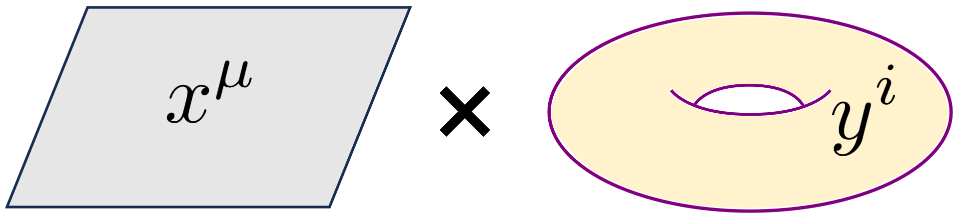
O(D,D) 対称性は存在しない

KK reduction を仮定 ⇒ **global O(D,D) 対称性**

$$\Phi(x^\mu, \cancel{y^i})$$

D

超弦理論のT-dualityに対応



どんな変換?

まずは O(D,D) 群について

$$C\,\eta\,C^{\mathrm{t}}=\eta$$

2D×2D

$$\eta=(\eta_{MN})=\begin{pmatrix}0 & \delta^n_m\\ \delta^m_n & 0\end{pmatrix}$$

D個

$$\eta=\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}+1 & & \\ & \ddots & \\ & & +1\end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix}-1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1\end{matrix}}\end{pmatrix}$$

D個

$$g_{mn} \quad B_{mn} \quad \phi$$

O(D,D)対称性を
見やすくするため
組み直し

一般化計量

$$\mathcal{H}_{MN} = \begin{pmatrix} g_{mn} - B_{mp} g^{pq} B_{qn} & B_{mp}\, g^{pn} \\ -g^{mp}\, B_{pn} & g^{mn} \end{pmatrix}$$

T-duality
不変なdilaton

$$\mathrm{e}^{-2d} = \mathrm{e}^{-2\phi} \sqrt{|\det g_{mn}|}$$

$$\mathcal{H}\,\eta\,\mathcal{H}^{\mathrm{t}} = \eta$$

O(D,D)の元

一般化計量

$$\mathcal{H}_{MN} = \begin{pmatrix} g_{mn} - B_{mp}g^{pq}B_{qn} & B_{mp}\,g^{pn} \\ -g^{mp}\,B_{pn} & g^{mn} \end{pmatrix}$$

T-duality
不変なdilaton

$$\mathrm{e}^{-2d} = \mathrm{e}^{-2\phi}\,\sqrt{|\det g_{mn}|}$$

O(D,D)変換

$$\mathcal{H}_{MN} \to C_M{}^P C_N{}^Q \mathcal{H}_{PQ}$$

$$d \to d$$

$\Rightarrow$ g_{mn} B_{mn} ϕ **の O(D,D)変換則**

$$C_M{}^N = \begin{pmatrix} \mathbf{1} - e_i & e_i \\ e_i & \mathbf{1} - e_i \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(D,D)$$

***i-i* 成分のみ 1**

Buscher rule

[Buscher '87]

$$g'_{ab} = g_{ab} - \frac{g_{az}\, g_{bz} - B_{az}\, B_{bz}}{g_{zz}}\,, \quad g'_{az} = \frac{B_{az}}{g_{zz}}\,, \quad g'_{zz} = \frac{1}{g_{zz}}\,,$$

$$B'_{ab} = B_{ab} - \frac{B_{ad}\, g_{bz} - g_{az}\, B_{bz}}{g_{zz}}\,, \quad B'_{az} = \frac{g_{az}}{g_{zz}}, \quad \mathrm{e}^{2\phi'} = \frac{\mathrm{e}^{2\phi}}{g_{zz}}\,.$$

↑

global O(D,D)変換は超弦理論のT-dualityに対応

O(D,D)群には他にどんな変換が含まれているか?

線形な座標変換 $x^m \to (\Lambda^{-1})^m{}_n\, x^n$

1. GL(D)変換 $C_M{}^N = \begin{pmatrix} \Lambda_m{}^n & 0 \\ 0 & (\Lambda^{-1})^m{}_n \end{pmatrix}$ $\begin{cases} g_{mn} \to \Lambda_m{}^p\, \Lambda_n{}^q\, g_{pq} \\ B_{mn} \to \Lambda_m{}^p\, \Lambda_n{}^q\, B_{pq} \end{cases}$

2. B-shift $C_M{}^N = \begin{pmatrix} \delta_m^n & \omega_{mn} \\ 0 & \delta_n^m \end{pmatrix}$ $\begin{cases} g_{mn} \to g_{mn} \\ B_{mn} \to B_{mn} + \omega_{mn} \end{cases}$

3. T-duality $C_M{}^N = \begin{pmatrix} 1 - e_i & e_i \\ e_i & 1 - e_i \end{pmatrix}$ $\begin{cases} g'_{ab} = g_{ab} - \dfrac{g_{az}\, g_{bz} - B_{az}\, B_{bz}}{g_{zz}}\,, \quad g'_{az} = \dfrac{B_{az}}{g_{zz}}\,, \quad g'_{zz} = \dfrac{1}{g_{zz}}\,, \\ B'_{ab} = B_{ab} - \dfrac{B_{ad}\, g_{bz} - g_{az}\, B_{bz}}{g_{zz}}\,, \quad B'_{az} = \dfrac{g_{az}}{g_{zz}}\,. \end{cases}$

従来のSUGRA

$$\mathcal{L} = \sqrt{|g|}\, e^{-2\phi} \left(R + 4\, \nabla_m \phi\, \nabla^m \phi - \frac{1}{12}\, H_{mnp}\, H^{mnp} \right)$$

1. GL(D)変換

2. B-shift

常に対称性

O(D,D)に拡大

3. T-duality

Kaluza-Klein reduction
をして初めて対称性に

従来のSUGRA

$$\mathcal{L} = \sqrt{|g|}\, e^{-2\phi} \left(R + 4\, \nabla_m \phi\, \nabla^m \phi - \tfrac{1}{12}\, H_{mnp}\, H^{mnp} \right)$$

Kaluza-Klein reduction

をして初めてO(D,D)不変

Kaluza-Klein reduction

をする前からO(D,D)不変なSUGRA

⇒ **Double Field Theory**

[Siegel '93;
Hohm, Hull, Zwiebach '10]

以下, 話を簡単にするため
D=10 だと思って下さい

O(10,10)

Kaluza-Klein reduction
をする前からO(D,D)不変なSUGRA

Double Field Theory

[Siegel ’93;
Hohm, Hull, Zwiebach ’10]

Double Field Theory

基本的な場

一般化計量 $\mathcal{H}_{MN}$

dilaton e^{-2d}

- O(D,D)の元
- 2D×2Dの対称行列

Scalar density

従来のSUGRAとの関係をつける場合には

$$\boxed{\mathcal{H}_{MN} \qquad\qquad \mathrm{e}^{-2d}}$$

$$\mathcal{H}_{MN} = \begin{pmatrix} g_{mn} - B_{mp} g^{pq} B_{qn} & B_{mp}\, g^{pn} \\ -g^{mp}\, B_{pn} & g^{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{e}^{-2d} = \mathrm{e}^{-2\phi} \sqrt{|\det g_{mn}|}$$

DFTでは一般にはこの対応はつけない

Double Field Theory

$$\mathcal{H}_{MN} \qquad\qquad \mathrm{e}^{-2d}$$

2階微分のLagrangian

**[Siegel ’93;
Hohm, Hull, Zwiebach ’10]**

$$\mathcal{L} = \mathrm{e}^{-2d}\Big(\mathcal{H}^{MN}\,\partial_M\partial_N d - \partial_M\partial_N\mathcal{H}^{MN} - 4\mathcal{H}^{MN}\,\partial_M d\,\partial_N d + 4\partial_M\mathcal{H}^{MN}\,\partial_N d$$
$$+ \tfrac{1}{8}\,\mathcal{H}^{MN}\,\partial_M\mathcal{H}^{PQ}\,\partial_N\mathcal{H}_{PQ} - \tfrac{1}{2}\,\mathcal{H}^{MN}\,\partial_M\mathcal{H}^{PQ}\,\partial_P\mathcal{H}_{NQ}\Big)\,.$$

DFT作用

O(D,D) 不変

$$\mathcal{L} = \mathrm{e}^{-2d}\Big(\mathcal{H}^{MN}\,\partial_M\partial_N d - \partial_M\partial_N\mathcal{H}^{MN} - 4\mathcal{H}^{MN}\,\partial_M d\,\partial_N d + 4\partial_M\mathcal{H}^{MN}\,\partial_N d$$
$$+ \tfrac{1}{8}\,\mathcal{H}^{MN}\,\partial_M\mathcal{H}^{PQ}\,\partial_N\mathcal{H}_{PQ} - \tfrac{1}{2}\,\mathcal{H}^{MN}\,\partial_M\mathcal{H}^{PQ}\,\partial_P\mathcal{H}_{NQ}\Big)\,.$$

O(D,D)対称性

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{MN} \to C_M{}^P\,C_N{}^Q\,\mathcal{H}_{PQ} \\ \partial_M \to C_M{}^N\,\partial_N \end{cases}$$

O(D,D) T-duality manifest

微分 $\quad \partial_M = \dfrac{\partial}{\partial x^M}$

2D

一般化座標
(ダブル座標)

一般化座標

SUGRAでおなじみのD次元座標

$$\underset{2D}{x^M} = \begin{array}{c} D \\ D \end{array}\begin{pmatrix} x^m \\ \tilde{x}_m \end{pmatrix}$$

T-dual

dual座標

2D次元

ダブル空間

SUGRAの導出

$$\mathcal{L} = \mathrm{e}^{-2d}\Big(\mathcal{H}^{MN}\,\partial_M\partial_N d - \partial_M\partial_N\mathcal{H}^{MN} - 4\mathcal{H}^{MN}\,\partial_M d\,\partial_N d + 4\partial_M\mathcal{H}^{MN}\,\partial_N d$$

$$+ \tfrac{1}{8}\,\mathcal{H}^{MN}\,\partial_M\mathcal{H}^{PQ}\,\partial_N\mathcal{H}_{PQ} - \tfrac{1}{2}\,\mathcal{H}^{MN}\,\partial_M\mathcal{H}^{PQ}\,\partial_P\mathcal{H}_{NQ}\Big)\,.$$

$$\partial_M = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^m} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}_{MN} = \begin{pmatrix} g_{mn} - B_{mp}g^{pq}B_{qn} & B_{mp}\,g^{pn} \\ -g^{mp}\,B_{pn} & g^{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{e}^{-2d} = \mathrm{e}^{-2\phi}\,\sqrt{|\det g_{mn}|}$$

$\downarrow$

従来のSUGRA

$$\mathcal{L} = \sqrt{|g|}\,e^{-2\phi}\left(R + 4\,\nabla_m\phi\,\nabla^m\phi - \frac{1}{12}\,H_{mnp}\,H^{mnp}\right)$$

SUGRAの導出

$$\mathcal{L} = \mathrm{e}^{-2d}\Big(\mathcal{H}^{MN}\,\partial_M\partial_N d - \partial_M\partial_N\mathcal{H}^{MN} - 4\mathcal{H}^{MN}\,\partial_M d\,\partial_N d + 4\partial_M\mathcal{H}^{MN}\,\partial_N d$$
$$+ \tfrac{1}{8}\,\mathcal{H}^{MN}\,\partial_M\mathcal{H}^{PQ}\,\partial_N\mathcal{H}_{PQ} - \tfrac{1}{2}\,\mathcal{H}^{MN}\,\partial_M\mathcal{H}^{PQ}\,\partial_P\mathcal{H}_{NQ}\Big)\,.$$

O(D,D) 不変

$$\partial_M = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^m} \\ \dfrac{\partial}{\partial \tilde{x}_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

~~O(D,D) 不変~~

従来のSUGRA

$$\mathcal{L} = \sqrt{|g|}\,e^{-2\phi}\left(R + 4\,\nabla_m\phi\,\nabla^m\phi - \frac{1}{12}\,H_{mnp}\,H^{mnp}\right)$$

SUGRAの導出

$$\mathcal{L} = \mathrm{e}^{-2d}\Big(\mathcal{H}^{MN}\,\partial_M\partial_N d - \partial_M\partial_N\mathcal{H}^{MN} - 4\mathcal{H}^{MN}\,\partial_M d\,\partial_N d + 4\partial_M\mathcal{H}^{MN}\,\partial_N d$$
$$+ \tfrac{1}{8}\,\mathcal{H}^{MN}\,\partial_M\mathcal{H}^{PQ}\,\partial_N\mathcal{H}_{PQ} - \tfrac{1}{2}\,\mathcal{H}^{MN}\,\partial_M\mathcal{H}^{PQ}\,\partial_P\mathcal{H}_{NQ}\Big)\,.$$

$$\partial_M = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^m} \\ \dfrac{\partial}{\partial \tilde{x}_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

これが破っている

従来のSUGRA

$$\mathcal{L} = \sqrt{|g|}\,e^{-2\phi}\,\left(R + 4\,\nabla_m\phi\,\nabla^m\phi - \tfrac{1}{12}\,H_{mnp}\,H^{mnp}\right)$$

1. GL(D)変換 $C_M{}^N = \begin{pmatrix} \Lambda_m{}^n & 0 \\ 0 & (\Lambda^{-1})^m{}_n \end{pmatrix}$

2. B-shift $C_M{}^N = \begin{pmatrix} \delta^n_m & \omega_{mn} \\ 0 & \delta^m_n \end{pmatrix}$

3. T-duality $\cancel{C_M{}^N = \begin{pmatrix} 1-e_i & e_i \\ e_i & 1-e_i \end{pmatrix}}$

$$\partial_M = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^m} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

O(D,D)が部分群に破れている

従来のSUGRA

$$\mathcal{L} = \sqrt{|g|}\, e^{-2\phi} \left(R + 4\, \nabla_m \phi\, \nabla^m \phi - \tfrac{1}{12}\, H_{mnp}\, H^{mnp} \right)$$

O(D,D)を回復するには?

$$\overset{\mathbf{10}}{x^m} = (\overset{\mathbf{d}}{x^\mu}, \overset{\mathbf{D}}{y^i})$$

KK reduction

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = 0$$

D個の座標依存性を消す!

$$\partial_M = \left(\begin{array}{c} \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} \\ \dfrac{\partial}{\partial y^i} \\ \hline \dfrac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu} \\ \dfrac{\partial}{\partial \tilde{y}^i} \end{array}\right) = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c} \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} \\ \boxed{0} \\ \hline 0 \\ \boxed{0} \end{array}\right) & \begin{array}{c} \mathbf{d} \\ \mathbf{D} \\ \mathbf{d} \\ \mathbf{D} \end{array} \end{array}$$

SUGRA に

O(D,D) 対称性が出現!

従来のSUGRA

$$\mathcal{L} = \sqrt{|g|}\, e^{-2\phi} \left(R + 4\, \nabla_m \phi\, \nabla^m \phi - \frac{1}{12}\, H_{mnp}\, H^{mnp} \right)$$

$$\partial_M = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \\ \frac{\partial}{\partial y^i} \\ \hline \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^i} \end{pmatrix} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \\ \boxed{0} \\ \hline 0 \\ \boxed{0} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \mathbf{d} \\ \mathbf{D} \\ \mathbf{d} \\ \mathbf{D} \end{array} \end{array}$$

O(D,D) 不変

Double Field Theory

$$\mathcal{L} = \mathrm{e}^{-2d} \Big(\mathcal{H}^{MN}\, \partial_M \partial_N d - \partial_M \partial_N \mathcal{H}^{MN} - 4\mathcal{H}^{MN}\, \partial_M d\, \partial_N d + 4 \partial_M \mathcal{H}^{MN}\, \partial_N d$$

$$+ \frac{1}{8}\, \mathcal{H}^{MN}\, \partial_M \mathcal{H}^{PQ}\, \partial_N \mathcal{H}_{PQ} - \frac{1}{2}\, \mathcal{H}^{MN}\, \partial_M \mathcal{H}^{PQ}\, \partial_P \mathcal{H}_{NQ} \Big) .$$

$$\partial_M = \begin{pmatrix} \boxed{\frac{\partial}{\partial x^m}} \\ \boxed{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_m}} \end{pmatrix}$$

O(10,10) 不変

DFT作用

$$\mathcal{L} = \mathrm{e}^{-2d}\Big(\mathcal{H}^{MN}\,\partial_M\partial_N d - \partial_M\partial_N\mathcal{H}^{MN} - 4\mathcal{H}^{MN}\,\partial_M d\,\partial_N d + 4\partial_M\mathcal{H}^{MN}\,\partial_N d$$
$$+ \tfrac{1}{8}\,\mathcal{H}^{MN}\,\partial_M\mathcal{H}^{PQ}\,\partial_N\mathcal{H}_{PQ} - \tfrac{1}{2}\,\mathcal{H}^{MN}\,\partial_M\mathcal{H}^{PQ}\,\partial_P\mathcal{H}_{NQ}\Big)\,.$$

係数はどうやって決まったのか?

⇒ 一般座標変換不変性!

無限小座標変換

GR

$$x^m \to x^m + v^m$$

$$\delta_v g_{mn} = \pounds_v g_{mn}$$

$$\delta_v \sqrt{|g|} = \pounds_v \sqrt{|g|} = \partial_m v^m \sqrt{|g|}$$

Lie微分 $$\pounds_v w^m = v^n \partial_n w^m - \partial_n v^m \, w^n$$

無限小 GL(D) 変換を生成

DFT

ダブル座標

$$x^M \to x^M + V^M$$

$$\delta_V \mathcal{H}_{MN} = \hat{\pounds}_V \mathcal{H}_{MN}$$

$$\delta_V \, \mathrm{e}^{-2d} = \hat{\pounds}_V \, \mathrm{e}^{-2d} = \partial_M V^M \, \mathrm{e}^{-2d}$$

一般化Lie微分 **[Siegel '93]**

$$\hat{\pounds}_V W^M = V^N \partial_N W^M - \left(\partial_N V^M - \partial^M V_N\right) W^N$$

無限小 O(D,D) 変換を生成

ゲージ不変な作用

$$\mathcal{L} = \mathrm{e}^{-2d}\Big(\mathcal{H}^{MN}\,\partial_M\partial_N d - \partial_M\partial_N\mathcal{H}^{MN} - 4\mathcal{H}^{MN}\,\partial_M d\,\partial_N d + 4\partial_M\mathcal{H}^{MN}\,\partial_N d + \frac{1}{8}\,\mathcal{H}^{MN}\,\partial_M\mathcal{H}^{PQ}\,\partial_N\mathcal{H}_{PQ} - \frac{1}{2}\,\mathcal{H}^{MN}\,\partial_M\mathcal{H}^{PQ}\,\partial_P\mathcal{H}_{NQ}\Big)\,.$$

ゲージ変換
(一般座標変換)

$$\begin{cases} \delta_V\mathcal{H}_{MN} = \hat{\mathcal{L}}_V\mathcal{H}_{MN} \\ \delta_V\,\mathrm{e}^{-2d} = \hat{\mathcal{L}}_V\,\mathrm{e}^{-2d} = \partial_M V^M\,\mathrm{e}^{-2d} \end{cases}$$

作用の不変性 ⇨ **係数が一意に決まる**

注意

ゲージ変換(一般座標変換)の代数が閉じる ＋ **作用の不変性**

$$[\delta_{V_1}, \delta_{V_2}] = \delta_{V_{12}}$$

$$\eta^{MN} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^m_n \\ \delta^n_m & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \eta^{MN}\,\partial_M\,\partial_N\,A = 0\,. \\ \eta^{MN}\,\partial_M A\,\partial_N B = 0\,. \end{cases}$$

Section Condition $\eta^{MN}\,\partial_M \otimes \partial_N = 0$

Section Condition

$$\eta^{MN}\,\partial_M \otimes \partial_N = 0$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \eta^{MN} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_n^m \\ \delta_m^n & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^m}A\,\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_m}B = 0$$

通常選ぶ解

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_m} = 0 \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x^m} = 0 \ \text{も可} \right)$$

実質: 2倍にした座標を半分消しなさい!

Section Condition

$$\partial_M = \xcancel{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^m} \\ 0 \end{pmatrix}}$$

DFT作用の変分など

あらゆる場面で常に微分の縮約を消す!

$$\eta^{MN}\,\partial_M \otimes \partial_N = 0$$

⇩

O(D,D)を破らず

DFTを整合的に定式化できる

従来のSUGRAとの関係

$$\boxed{\partial_M = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^m} \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{DFT}} \to \mathcal{L}_{\mathrm{SUGRA}}$$

ゲージ変換
(一般座標変換)

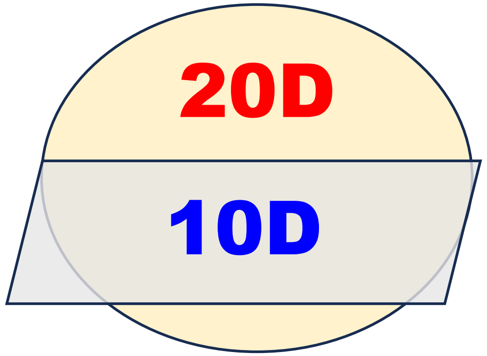
$$\begin{cases} \delta_V \mathcal{H}_{MN} = \hat{\pounds}_V \mathcal{H}_{MN} \\ \delta_V \, \mathrm{e}^{-2d} = \hat{\pounds}_V \, \mathrm{e}^{-2d} = \partial_M V^M \, \mathrm{e}^{-2d} \end{cases}$$

$$V^M = \begin{pmatrix} v^m \\ \tilde{v}_m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \delta_V g_{mn} = \pounds_v g_{mn} \\ \delta_V B_{mn} = \pounds_v B_{mn} + (\partial_m \tilde{v}_n - \partial_n \tilde{v}_m)\,, \\ \delta_V \phi = \pounds_v \phi\,. \end{cases}$$

Diffeo+B-gauge

DFTのまとめ

O(10,10) DFT



断面(section)

SUGRA

$$\partial_M = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Section Condition

$$\eta^{MN}\,\partial_M \otimes \partial_N = 0$$

T-duality $\Rightarrow$ U-duality

KK reduction

SL(2) S-duality対称性

O(D,D) T-duality対称性

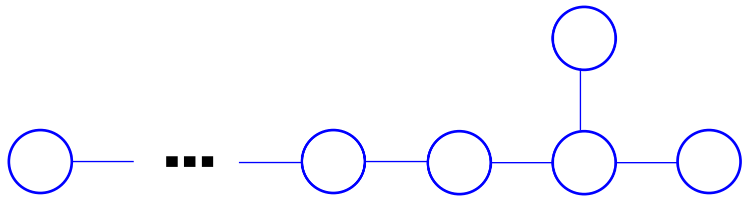
Type IIB SUGRA

統一

$E_{D+1(D+1)}$ U-duality対称性

T-duality群

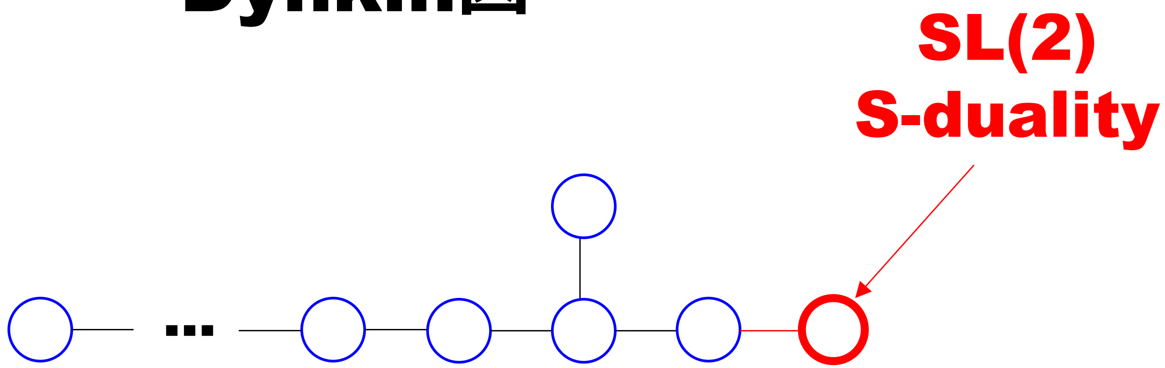
O(D,D)



Dynkin図

U-duality群

$E_{D+1(D+1)}$



Double Field Theory

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{MN} = \mathcal{E}_M{}^{\mathcal{A}}\,\mathcal{E}_N{}^{\mathcal{B}}\,\delta_{\mathcal{A}\mathcal{B}} \\ \mathrm{e}^{-2d} \end{cases} \qquad \mathcal{E}_M{}^{\mathcal{A}} \in \mathrm{O}(D,D)$$

2D

Exceptional Field Theory

[West; ...,
Hohm, Samtleben ’13;...]

一般化計量

$$\mathcal{M}_{IJ} = \mathcal{E}_I{}^{\mathcal{A}}\,\mathcal{E}_J{}^{\mathcal{B}}\,\delta_{\mathcal{A}\mathcal{B}} \qquad \mathcal{E}_I{}^{\mathcal{A}} \in \mathrm{E}_{D+1(D+1)}$$

$\mathrm{E}_{4(4)}$	$\mathrm{E}_{5(5)}$	$\mathrm{E}_{6(6)}$	$\mathrm{E}_{7(7)}$	$\mathrm{E}_{8(8)}$
$\overline{\mathbf{10}}$	$\mathbf{16}$	$\mathbf{27}$	$\mathbf{56}$	$\mathbf{248}$

一般化座標 x^I

$E_{4(4)}$	$E_{5(5)}$	$E_{6(6)}$	$E_{7(7)}$	$E_{8(8)}$
$\overline{\mathbf{10}}$	$\mathbf{16}$	$\mathbf{27}$	$\mathbf{56}$	$\mathbf{248}$

拡大された空間 (Exceptional Space)

一般化Lie微分

$E_{D+1(D+1)}$-不変テンソル

$$\hat{\mathcal{L}}_V W^I = V^J \partial_J W^I - W^J \partial_J V^I + Y^{IK}_{JL}\, \partial_K V^L W^J$$

---

global $E_{D+1(D+1)}$不変かつ一般座標変換不変な2階微分の作用

[Hohm, Samtleben '13;...]

$$\mathcal{L}_{\mathrm{ExFT}}$$

Section Condition

整合性の条件

$E_{D+1(D+1)}$-不変
テンソル

$$Y^{IJ}_{KL}\,\partial_I \otimes \partial_J = 0$$

2 種類の解

[Blair, Malek, Park '13;
Hohm, Samtleben '13]

M-theory section

$$x^I = (\boxed{x^i}, \cancel{\tilde{x}_{ij}, \tilde{x}_{i_1\cdots i_5}, \cdots})$$

(D+1)=11次元

Type IIB section

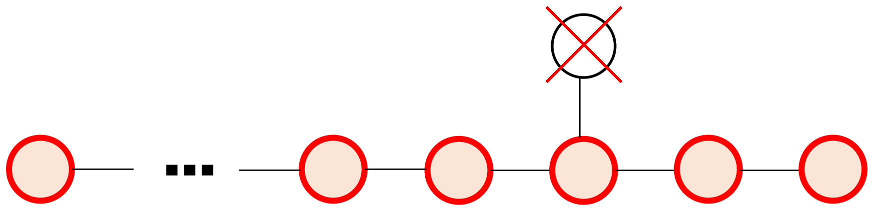
$$x^I = (\boxed{x^m}, \cancel{\tilde{x}^\alpha_m, \tilde{x}_{m_1m_2m_3}, \tilde{x}^\alpha_{m_1\cdots m_5}, \cdots})$$

D=10次元

$E_{D+1(D+1)}$ が破れる

M-theory section

$$\partial_I = \begin{pmatrix} \partial_i \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}^{D+1}$$

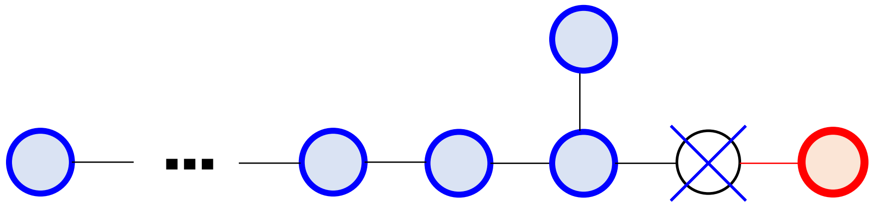


GL(D+1)

11次元の共変性

Type IIB section

$$\partial_I = \begin{pmatrix} \partial_m \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}^{D}$$



GL(D)

10次元の共変性

SL(2)

S-duality

Exceptional Field Theory

[Hohm, Samtleben '13]

$$\mathcal{L}_{\mathrm{ExFT}}$$

M-theory section

Type IIB section

D+1=11次元

D=10次元

$$\mathcal{L}_{\mathrm{11D\ SUGRA}}$$

$$\sqrt{g}\left(R - \tfrac{1}{2}\left|F_4\right|^2 - \tfrac{1}{2}\left|F_7\right|^2 + \cdots\right)$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{IIB\ SUGRA}}$$

$$\sqrt{g}\left(R + \tfrac{1}{4}\left|\partial m_{\alpha\beta}\right|^2 - \tfrac{1}{2}\left|H_3^\alpha\right|^2 + \cdots\right)$$

10次元

$$\mathcal{L}_{\mathrm{IIA\ SUGRA}}$$

まとめ

従来の定式化

11D SUGRA

10D Type IIA SUGRA

10D Type IIB SUGRA

統一

section

Exceptional Field Theory

$E_{D+1(D+1)}$ U-duality manifest

<u>後半</u>

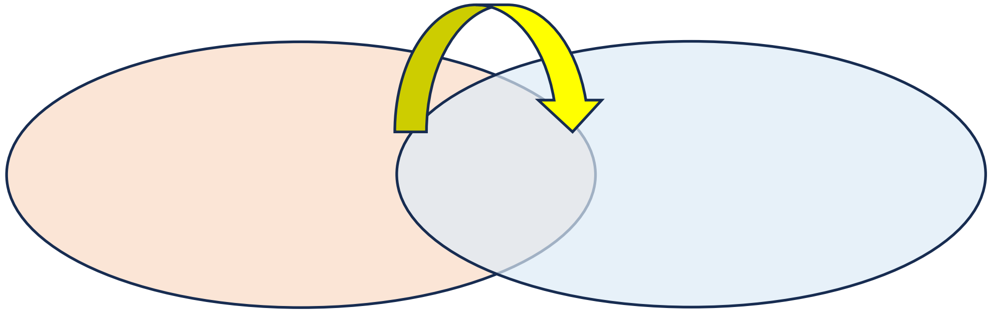
DFT, ExFT の応用

DFT / ExFT 特有の新たな時空

Non-geometric backgrounds

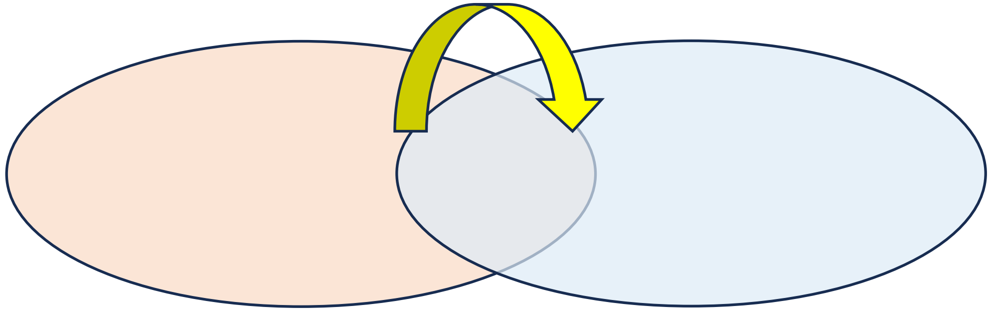
- T-fold / U-fold
- Section Condition を破る時空
- Non-Riemannian geometry

O(D,D) T-duality変換



T-fold

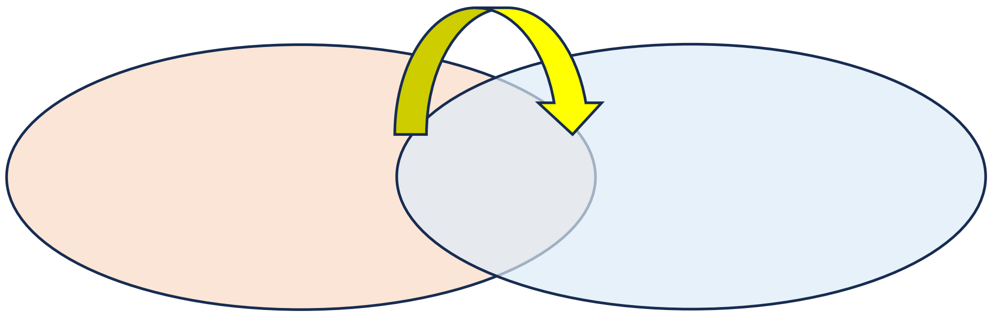
Diffeo. + B場のゲージ変換



通常の時空

$R = R$ **物理量は一致**

O(D,D) T-duality変換



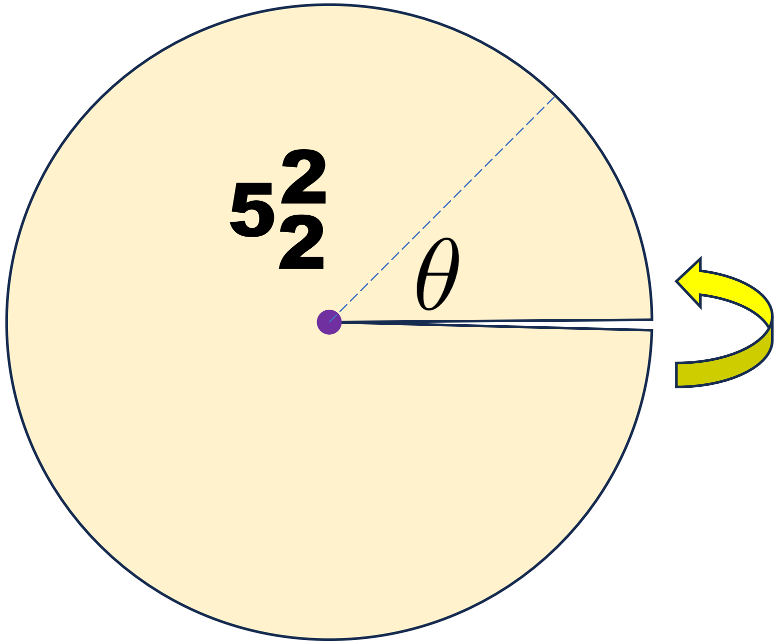
$R \neq R$

T-fold

Riemann曲率はT-duality変換の下で変化.
⇨ Riemann曲率が異なる空間を貼り合わせていることになる.

⇨ 従来のリーマン幾何学では許されない空間.

具体例



SUGRAのゲージ変換ではない

β変換 ∈ O(D,D) 変換

DFTのゲージ変換

$$x^m \to x'^m = x^m + \beta^{mn}\,\tilde{x}_n$$

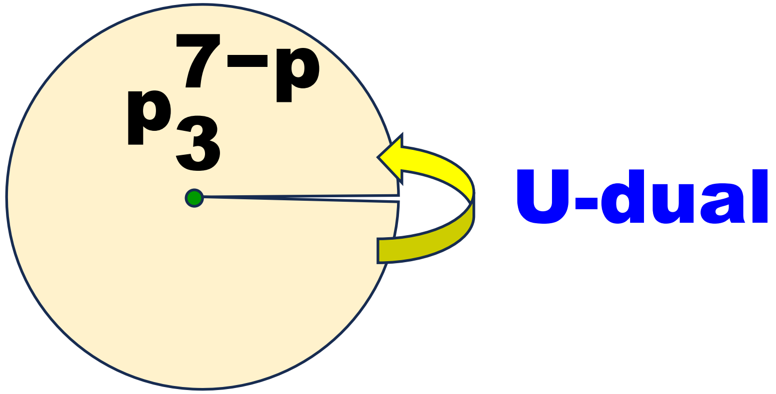
DFTの定式化では, T-fold も記述できる.

これ以外にも T-fold 解はたくさん作れる

⇒ 坂本くんの講演

これらを記述するには従来のSUGRAではだめで DFT が必要

U-fold



これらを記述するには
Exceptional Field Theory が必要

DFT / ExFT 特有の新たな時空
Non-geometric backgrounds

- T-fold / U-fold
- Section Condition を破る時空
- Non-Riemannian geometry

Section Conditionを要請

$\mathcal{H}_{MN}(x^m, \cancel{\tilde{x}_m})$ ⇨ DFT / ExFT は従来の SUGRA に帰着

⇨ 実は Section Condition が破れていても
DFT / ExFT を矛盾なく定義できる場合がある

[Graña, Marques '12;
Ciceri, Guarino, Inverso '16]

⇨ 従来のSUGRAを超える領域

$$\mathcal{M}_{IJ} = \mathcal{E}_I{}^{\mathcal{A}}\, \mathcal{E}_J{}^{\mathcal{B}}\, \delta_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$$

non-dynamical

$$\mathcal{E}_{\mathcal{A}}{}^{I} = \underbrace{\mathring{E}_{\mathcal{A}}{}^{B}(x, y^I)}_{\text{SCに従う}}\, E_B{}^I(y^I)$$

SCを破ってよい!

条件 [Graña, Marques '12; Ciceri, Guarino, Inverso '16]

$$\hat{\mathcal{L}}_{E_A} E_B{}^I = -X_{AB}{}^C\, E_C{}^I \qquad X_{AB}{}^C\, E_C{}^I\, \partial_I = 0$$

定数

$$E_C{}^I\, \partial_I = \delta_C^I\, \partial_I$$

Massive type IIA SUGRA

9D 2D → 3D拡大空間

$$\mathcal{E}_{\mathcal{A}}{}^{I} = \mathring{E}_{\mathcal{A}}{}^{B}(x, y^i)\, E_B{}^{I}(\tilde{y}_{12})$$

$y^1, y^2, \tilde{y}_{12}$

12次元目

$$\Rightarrow \quad \mathcal{M}_{IJ} = \mathcal{E}_I{}^{\mathcal{A}}\, \mathcal{E}_J{}^{\mathcal{B}}\, \delta_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$$

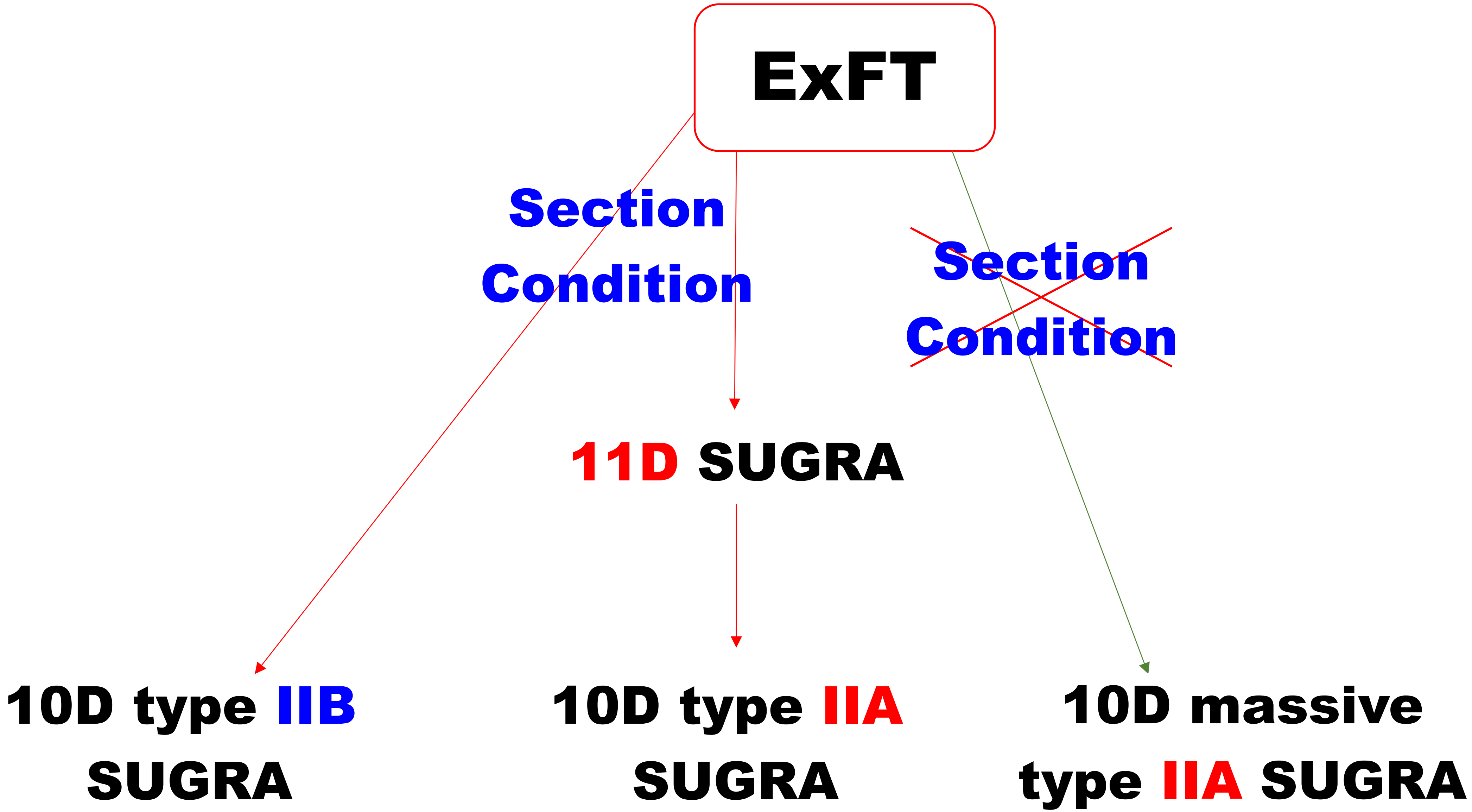
SC を破る

9D+1D

$$X_{AB}{}^{C}\, E_C{}^{I}\, \partial_I = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y^2} \mathring{E}_{\mathcal{A}}{}^{B}(x, y^1, \cancel{y^2}) = 0$$

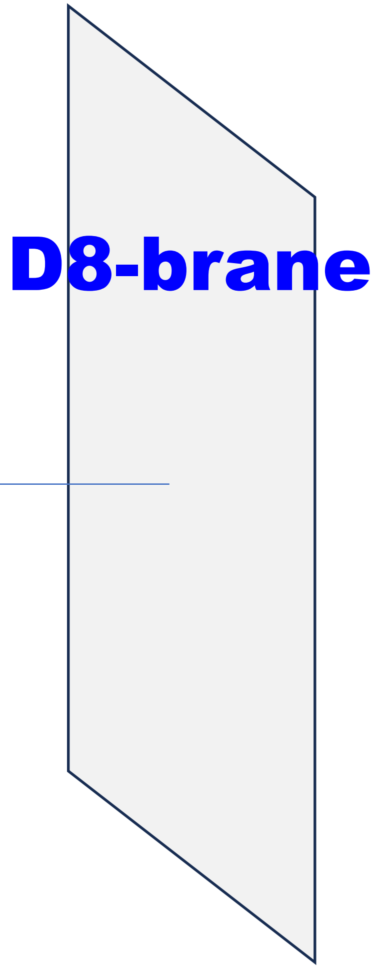
10次元の massive type IIA SUGRA に帰着.

[Ciceri, Guarino, Inverso ’16]

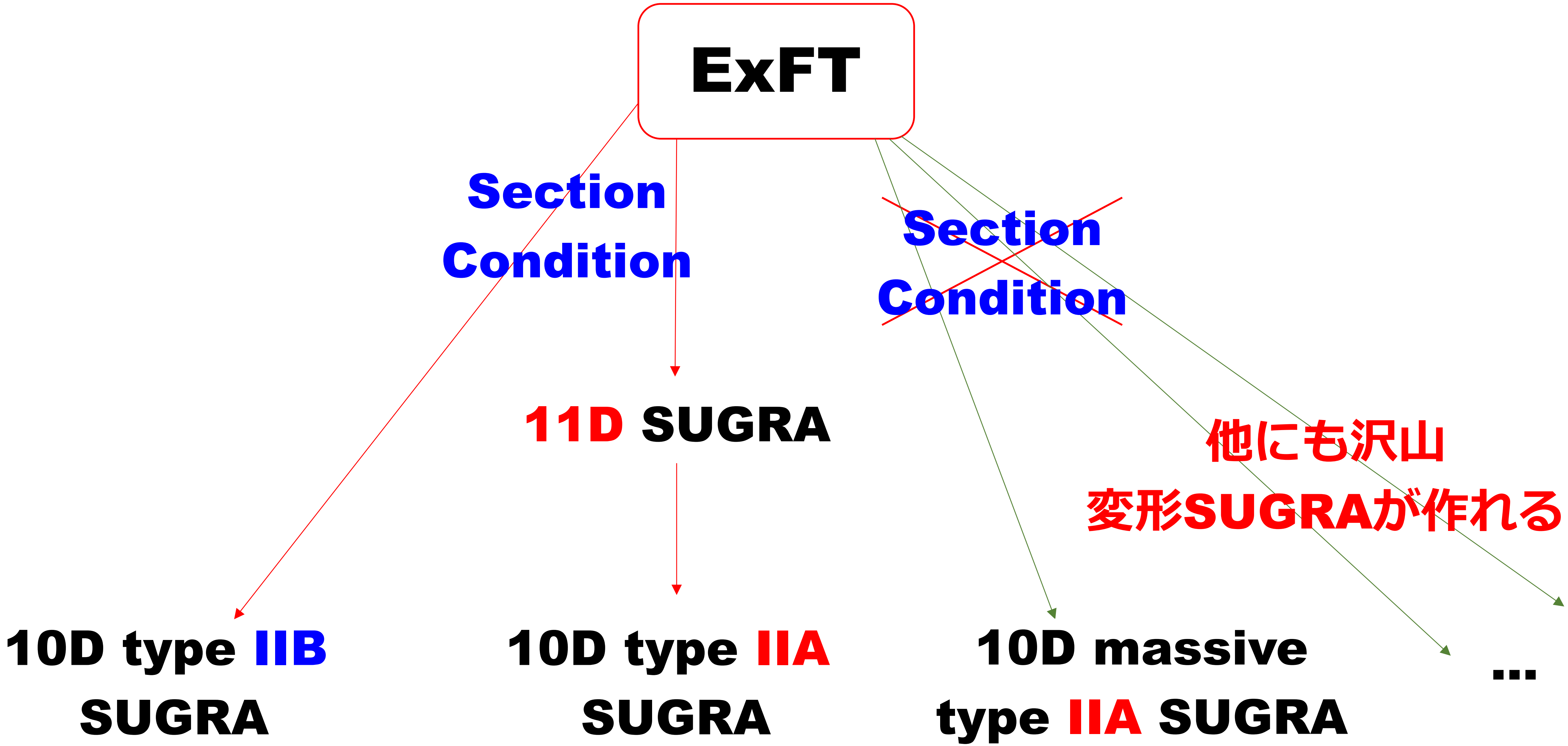

ExFT
Section Condition
~~Section Condition~~
11D SUGRA
10D type IIB SUGRA
10D type IIA SUGRA
10D massive type IIA SUGRA

Massive type IIA SUGRA

mass parameter
= RR 0-form field strength
= D8-brane の磁束



massive type IIA SUGRA



ExFT
Section
Condition
~~Section~~
~~Condition~~
11D SUGRA
他にも沢山
変形SUGRAが作れる
10D type IIB
SUGRA
10D type IIA
SUGRA
10D massive
type IIA SUGRA
...

ExFT

Section Condition

Section Condition

11D SUGRA

一般化SUGRA
(実質 9D SUGRA)

10D type IIB SUGRA

10D type IIA SUGRA

⇨ 吉田さんの講演

DFT / ExFT 特有の新たな時空
Non-geometric backgrounds

- T-fold / U-fold
- Section Condition を破る時空
- **Non-Riemannian geometry**

Non-Riemannian geometry

DFTで使う場 SUGRAで使う場

$$\mathcal{H}_{MN} = \begin{pmatrix} g_{mn} - B_{mp} g^{pq} B_{qn} & B_{mp}\, g^{pn} \\ -g^{mp}\, B_{pn} & g^{mn} \end{pmatrix}$$

- O(D,D)の要素
- 対称行列

極端な例

$$\mathcal{H}_{MN} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_m^n \\ \delta_n^m & 0 \end{pmatrix}$$

DFTのe.o.m.の解

Non-Riemannian geometry

[Lee, Park '13]

$$\mathcal{H}_{MN} = \begin{pmatrix} g_{mn} - B_{mp} g^{pq} B_{qn} & B_{mp}\, g^{pn} \\ -g^{mp}\, B_{pn} & \boxed{g^{mn}} \end{pmatrix}$$

従来の定式化では
記述できない

$\cancel{g_{mn}, B_{mn}}$

$\Rightarrow$

$$\mathcal{H}_{MN} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_m^n \\ \delta_n^m & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

DFTのe.o.m.の解

具体例2

[Gomis-Ooguri '00]

$$\mathrm{d}s^2 = \lambda(-\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}z^2) + \mathrm{d}\ell_8^2$$

$$B_2 = (\lambda + \mu)\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}z$$

$\lambda \to \infty$ **の極限をとったときの string 理論の量子化**

$$\boxed{E = \frac{k^2}{2m} + \cdots \qquad \text{非相対論的な分散関係}}$$

$\lambda \to \infty$ **は string 理論の非相対論極限に対応**

具体例2

[Gomis-Ooguri '00]

$$\mathrm{d}s^2 = \lambda(-\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}z^2) + \mathrm{d}\ell_8^2$$

$$B_2 = (\lambda + \mu)\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}z$$

特異性なし

$$\mathcal{H}_{MN} = \begin{pmatrix} \frac{\mu^2}{\lambda} + 2\mu & 0 & 0 & \frac{\mu}{\lambda} + 1 \\ 0 & -\frac{\mu^2}{\lambda} - 2\mu & \frac{\mu}{\lambda} + 1 & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{\lambda} + 1 & -\frac{1}{\lambda} & 0 \\ \frac{\mu}{\lambda} + 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda \to \infty} \begin{pmatrix} 2\mu & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\mu & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

g^{mn}

String シグマ模型

[Hull ’04; ’06;
Lee, Park ‘13]

$$S=-\frac{1}{4\pi\alpha'}\int_{\Sigma_2}\Big[\frac{1}{2}\mathcal{H}_{MN}\,DX^M\wedge *DX^N+\mathrm{d}X^m\wedge\mathcal{A}_m\Big]$$

$$DX^M(\sigma)=\begin{pmatrix}\mathrm{d}X^i\\ \mathrm{d}\tilde{X}_m-\mathcal{A}_m\end{pmatrix}$$

補助場

$\mathcal{A}_m$ の運動方程式

$$S=-\frac{1}{4\pi\alpha'}\int_{\Sigma_2}\big(g_{mn}\,\mathrm{d}X^m\wedge *\mathrm{d}X^n-B_{mn}\,\mathrm{d}X^m\wedge\mathrm{d}X^n\big)$$

従来のシグマ模型

String シグマ模型

[Hull '04; '06; Lee, Park '13]

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int_{\Sigma_2}\left[\frac{1}{2}\mathcal{H}_{MN}\,DX^M\wedge *DX^N + \mathrm{d}X^m\wedge\mathcal{A}_m\right]$$

Non-Riemannian geometry

運動方程式を導ける ⇒ String は特異性を感じずに時間発展

特徴的な点:

$$g^{ij}=0 \qquad *\mathrm{d}X^i = \pm\mathrm{d}X^i \qquad X^i = X^i(z) \;\; \text{or} \;\; X^i = X^i(\bar{z})$$

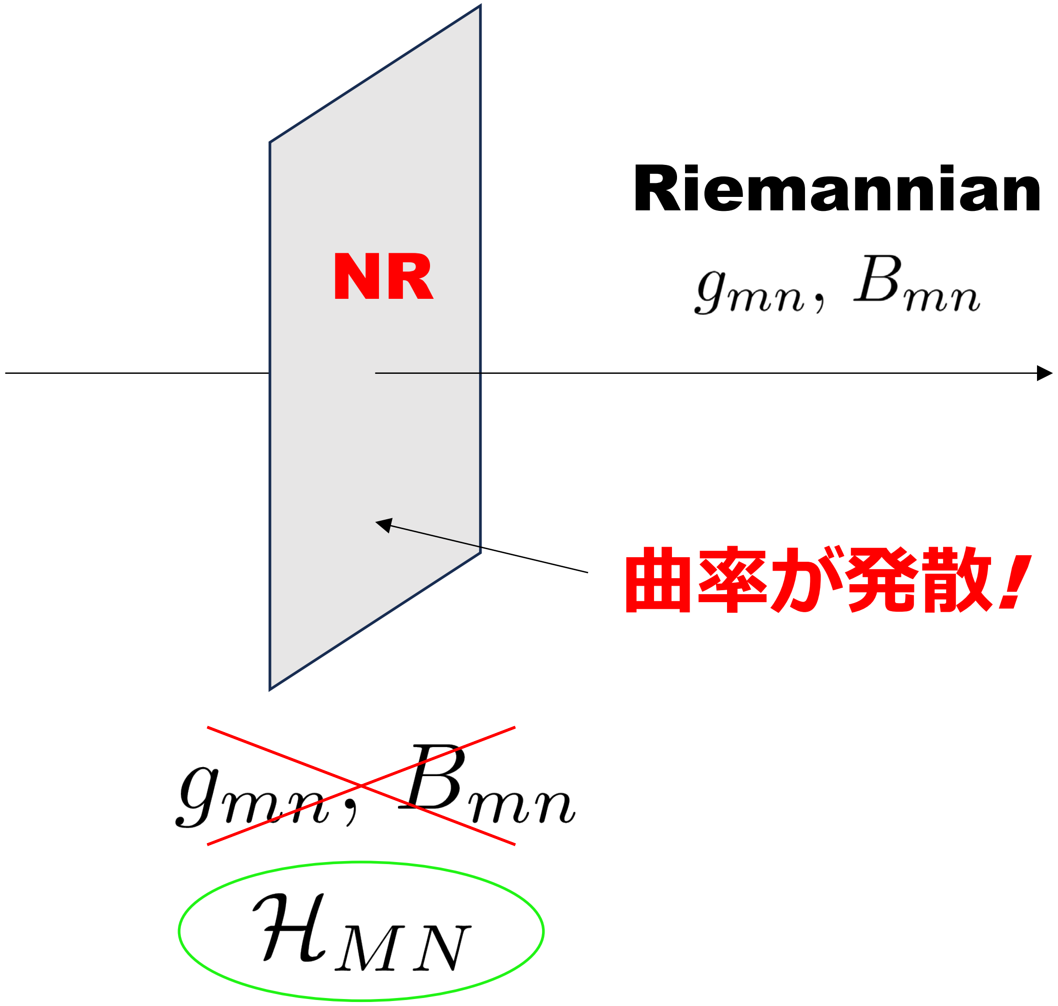
(anti) holomorphic

[Gomis-Ooguri '00] とも整合

String理論は定義できる!

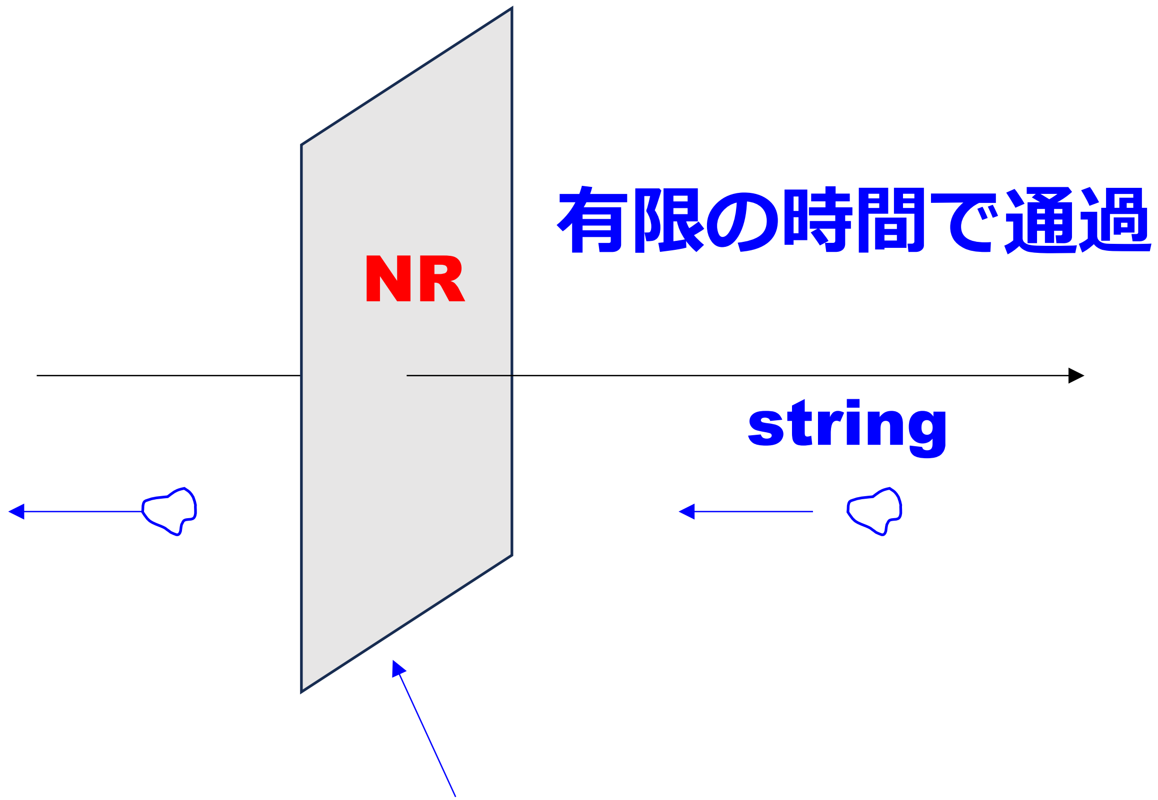
面白い例

[Jang, Kim, Lee, Park ’24]



面白い例

[Jang, Kim, Lee, Park ’24]



従来の曲率は発散しているが
String は通り抜ける

String理論では
このタイプの特異性は
許されるのでは？

DFT / ExFT を使うと

このような新たな時空が記述できる

- T-fold / U-fold
- Section Condition を破る時空
- Non-Riemannian geometry

DFT / ExFT の応用例2

一般化双対性

従来のT-duality

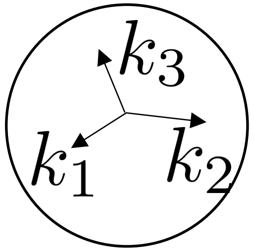
D個

KK reduction $$\frac{\partial}{\partial y^i} = 0$$

D個の Abelian Killing vector: $$k_i = \partial_i$$

$$[k_i,\, k_j] = 0$$

⇨ **Abelian T-duality**



S^3

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2 + (d\psi + \cos\theta\, d\phi)^2$$

Killing vector

$$k_1 = \cos\psi\,\partial_\theta + \frac{\sin\psi}{\sin\theta}\,\partial_\phi - \frac{\sin\psi}{\tan\theta}\,\partial_\psi\,,$$
$$k_2 = -\sin\psi\,\partial_\theta + \frac{\cos\psi}{\sin\theta}\,\partial_\phi - \frac{\cos\psi}{\tan\theta}\,\partial_\psi\,,$$
$$k_3 = \partial_\psi\,.$$

SO(3) $\quad [k_1, k_2] = k_3\,, \quad [k_2, k_3] = k_1\,, \quad [k_3, k_1] = k_2\,.$

Non-Abelian Killing vector を利用した T-duality

Non-Abelian T-duality

[de la Ossa, Quevedo ’92]

AdS$_3$ × S^3 × T^4

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{-\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}z^2}{z^2} + \boxed{\frac{1}{4}\left[\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2 + (\mathrm{d}\psi + \cos\theta\,\mathrm{d}\phi)^2\right]} + \mathrm{d}s^2_{\mathrm{T}^4}\,,$$

$$G_3 = \frac{2\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z}{z^3} - \frac{\sin\theta}{4}\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\phi\wedge\mathrm{d}\psi\,.$$

R-R 3-form field strength

IIB SUGRA の解

NATD **[Sfetsos, Thompson '10]**

AdS$_3$ × 新たな空間 × T^4

$$\mathrm{d}s'^2 = \frac{-\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}z^2}{z^2} + \boxed{\frac{4\left(\delta_{ij} + 16\,u_i\,u_j\right)\mathrm{d}u^i\,\mathrm{d}u^j}{1 + 16\,u_k\,u^k}} + \mathrm{d}s^2_{\mathrm{T}^4}\,,$$

$$B'_2 = -\frac{8\,\epsilon_{ijk}\,u^i\,\mathrm{d}u^j\wedge\mathrm{d}u^k}{1 + 16\,u_k\,u^k}\,, \qquad \mathrm{e}^{-2\Phi'} = \frac{1 + 16\,u_k\,u^k}{64}\,,$$

$$G'_0 = \frac{1}{4}\,, \qquad G'_2 = \frac{2\,\epsilon_{ijk}\,u^i\,\mathrm{d}u^j\wedge\mathrm{d}u^k}{1 + 16\,u_l\,u^l}\,,$$

$$G'_4 = -\frac{2\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z\wedge u_i\,\mathrm{d}u^i}{z^3} - \frac{\mathrm{vol}(T^4)}{4}\,.$$

massive IIA SUGRA の解

Abelian T-duality [Sakai, Senda ’84; Buscher ’87]

一般化 ↓

Non-Abelian T-duality [de la Ossa, Quevedo ’92]

Ramond-Ramond セクター [Sfetsos, Thompson ’10]

一般化 ↓

Poisson-Lie T-duality [Klimcik, Severa ’95]

従来の Killing vector はなくても良い!

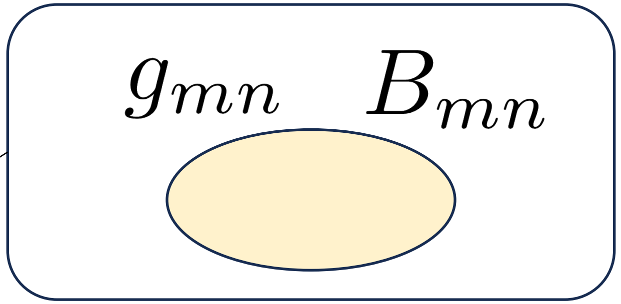
Drinfel’d double という代数に基づく

一般化 ↓

一般化 T-duality [Borsato, Driezen, Hassler ’21]

Drinfel’d double の拡張版の代数に基づく

T-duality の手続き



String のシグマ模型

↓

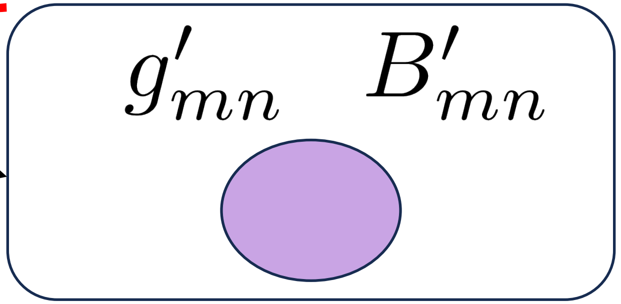
ゲージ化

↓

場を消去

↓ **ゲージ固定など**

Dual シグマ模型



Dual 時空

g_{mn} B_{mn} ← **SUGRA解**

↓ **一般化 T-duality**

g'_{mn} B'_{mn} → **具体的に確認すると**
SUGRA解になっている

→ **一般化 T-duality は**
新たな SUGRA 解を生成する手法として便利!

一般化 T-duality は SUGRA の運動方程式の対称性？

⇨ 一般に示すのはとても難しい...

⇨ DFT (flux formulation) を使えば綺麗に示せた！

[Hassler ’17;
Demulder, Hassler, Thompson, ’18;
YS ’19]

一般化 T-duality は DFT の運動方程式の対称性

コメント1

Yang-Baxter 変形 (Stringシグマ模型の可積分変形)

[Klimcik ’02; Delduc-Magro-Vicedo ’13;
Kawaguchi-Matsumoto-Yoshida ’14; ...]

⇨ Poisson-Lie T-duality の特別なクラス

⇨ 吉田さん, 坂本くんの講演

コメント2

Abelian T-duality

SUGRA の対称性でもあり
String 理論の対称性でもある

一般化 T-duality

DFT (SUGRA) の対称性

String 理論の対称性??

↓

String 理論の対称性になっている具体例

⇨ 佐藤さんの講演

一般化 T-duality は DFT の運動方程式の対称性

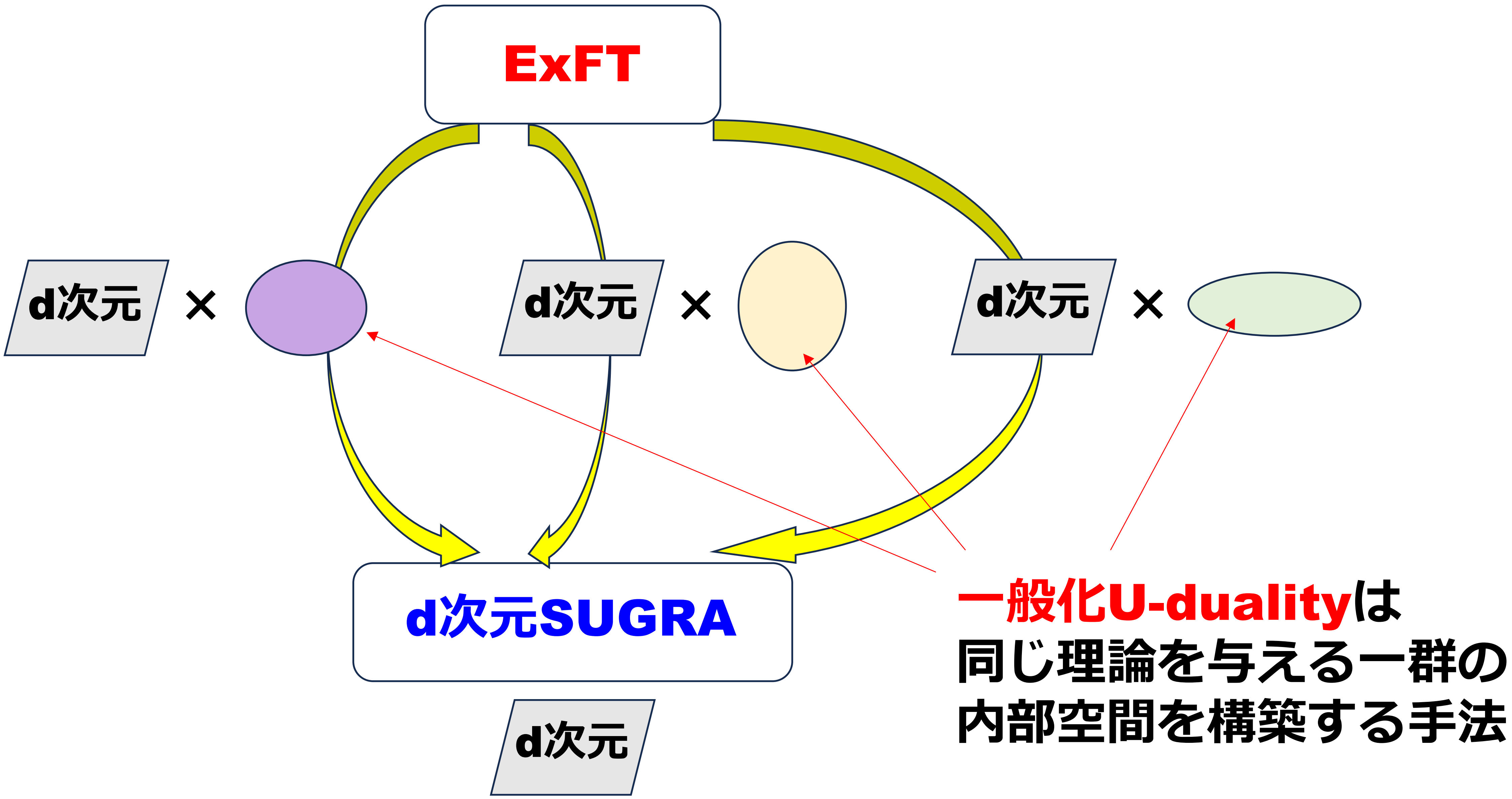
拡張

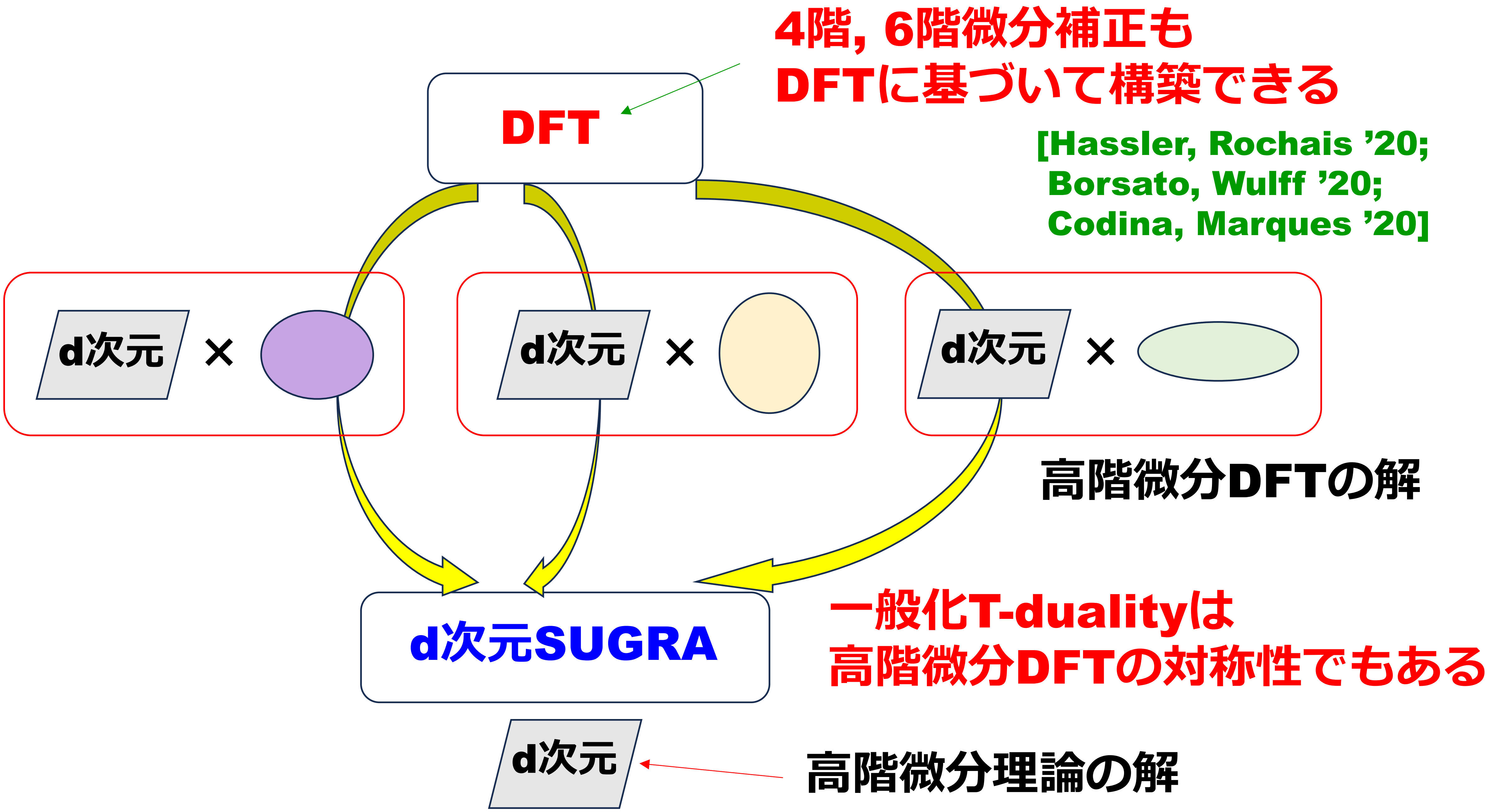
<u>一般化 U-duality</u> は ExFT の運動方程式の対称性

発見

知られていなかった

[YS ’19;
Malek, Thompson ’19;
...;
Hassler, YS ’23]


ExFT
d次元
×
d次元
×
d次元
×
d次元SUGRA
d次元
一般化U-dualityは
同じ理論を与える一群の
内部空間を構築する手法


4階, 6階微分補正も
DFTに基づいて構築できる
[Hassler, Rochais ’20;
Borsato, Wulff ’20;
Codina, Marques ’20]
DFT
d次元 ×
d次元 ×
d次元 ×
高階微分DFTの解
d次元SUGRA
一般化T-dualityは
高階微分DFTの対称性でもある
d次元
高階微分理論の解

まとめ

SUGRA → **DFT/ExFT**

$$\partial_I = \begin{pmatrix} \boxed{\partial_i} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Duality symmetry
は見えない

$$\partial_I = \begin{pmatrix} \partial_i \\ \partial^{ij} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Duality manifest

断面

拡大された空間

まとめ

Non-geometric backgrounds

と呼ばれる**新たな時空**も扱える様になった

Duality を明白にしたことで
色んな計算が**見通し良く**なる.

⇩

一般化T-duality, 一般化U-duality を発見

まとめ

SUGRA 作用の 4階, 6階, ... 微分補正を決定する上でも
DFT の定式化が非常に有用

DFTの宇宙論への応用なども議論されています.

まだまだ色々と発展の余地があります!