AdS_5 x S^5上の超弦理論のYang-Baxter変形と一般化された超重力理論

埼玉大学 理工学研究科

吉田 健太郎

埼玉大学マスコットキャラクター　メリンちゃん

0.　イントロダクション

AdS/CFT 対応 [Maldacena,1997]

type IIB string on $AdS_5 \times S^5$ ⟷ 4D $\mathcal{N}=4$ SU(N) SYM $(N \to \infty)$

大きな進展: 背後にある可積分構造の発見

[For a big review, Beisert et al., 1012.3982]

可積分性はとても強力!

可積分性に基づく計算手法によって、物理量を有限の結合定数で、超対称性に頼ることなく厳密に計算可能。

EX 複合演算子の異常次元, 散乱振幅 など

実際、この可積分性に立脚して、多彩な研究が非常に多くなされた。

一つの研究の方向性: 可積分構造を保った変形 (可積分変形)

EX XXX 模型 → XXZ 模型

この講演の主題

$AdS_5 \times S^5$ 上のIIB型超弦理論の可積分変形 (弦理論側)

可積分変形 → $AdS_5 \times S^5$ 空間の計量の変形

(2次元NLSMの標的空間の変形)

+ その他の場やフラックス

問い

この変形された背景は、再び IIB型 超重力理論の解になるのか?

あるいは、解にならないのか?

この問いに関して、可積分変形の手法の一つである

Yang-Baxter 変形

について答える。このYang-Baxter変形と双対性には密接な関係がある。

結論：　通常の超重力理論を拡張した枠組みの中では解になる

↓

一般化された超重力理論 (generalized SUGRA)

当初、この理論は、Yang-Baxter変形の研究において、極めて人為的に導入された。

しかし、後に、Green-Schwarz(GS)形式の超弦理論におけるκ-対称性から導出された。

(その起源は非常に基礎的)

このような試みは、GS形式が定式化された1980年代中頃からなされていたが、

特に成果はあがっていなかった。　(数十年越しの基礎的な進展)

講演のアウトライン

Yang-Baxter変形に関する研究の進展の歴史を概観し、一般化された超重力理論の発見と双対性の関係について概説する。

講演のプラン

1. Yang-Baxter 変形とはなにか?

2. $AdS_5 \times S^5$ 上のIIB型超弦理論のYang-Baxter 変形

3. 一般化された超重力理論と双対性の関係

4. まとめと今後の展望

1.　Yang-Baxter 変形とはなにか?

Yang-Baxter 変形

[Klimcik, 2002, 2008]

可積分変形を記述!

主カイラル模型のYang-Baxter変形

主*G*-カイラル模型の作用

$$S = \int d^2x\, \eta^{\mu\nu} \mathrm{tr}\,(J_\mu J_\nu)$$

$$J_\mu \equiv g^{-1}\partial_\mu g, \quad g \in G$$

Yang-Baxter シグマ模型

$$S^{(\eta)} = \int d^2x\, \eta^{\mu\nu} \mathrm{tr}\left(J_\mu \frac{1}{1-\eta R} J_\nu\right)$$

η： 実定数パラメーター

R は？

$$R \ : \ \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

ある線形演算子

古典 r-行列 (修正された古典Yang-Baxter 方程式 (mCYBE) の解)

一つの可積分変形が、一つの古典 r-行列 (mCYBEの解)でラベルされる。

この変形の利点

ある古典 r-行列を与えると、作用と同時に Lax 対も求まる。

Lax 対を求めるために、地道な挑戦も超人的な直観も必要ない

R-演算子と古典 r-行列の間の関係

R-演算子 ⟷ 歪対称な 古典 r-行列

$R \;:\; \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ $\qquad\qquad$ $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$

$$r_{12} = \sum_i (a_i \otimes b_i - b_i \otimes a_i) \quad \text{with} \quad a_i,\ b_i \in \mathfrak{g}$$

$$R(X) \equiv \langle r_{12}, 1 \otimes X \rangle_2 = \sum_i \Big(a_i \langle b_i, X \rangle - b_i \langle a_i, X \rangle \Big) \quad \text{for} \quad X \in \mathfrak{g}$$

古典 r-行列の2つソース

1) 修正された古典Yang-Baxter方程式 (mCYBE) ⟵ Klimcik の原論文

$$[R(X), R(Y)] - R\left([R(X), Y] + [X, R(Y)]\right) = \underline{-c^2 [X, Y]} \qquad (c \in \mathbb{C})$$

2) (通常の)古典Yang-Baxter方程式 (CYBE) $(c = 0)$ ⟵ 当時、考慮されず

Yang-Baxter 変形の一般化のリスト (2つのクラス)

(i) 修正された古典Yang-Baxter方程式 (三角型 or 双曲型)

a) 主カイラル模型 [Klimcik, hep-th/0210095, 0802.3518]

b) 対称コセットシグマ模型 [Delduc-Magro-Vicedo, 1308.3581]

1) c) Type IIB string on $AdS_5 \times S^5$ [Delduc-Magro-Vicedo, 1309.5850]

(ii) （通常の）古典Yang-Baxter方程式 (有理型)

a) 主カイラル模型 [Matsumoto-KY, 1501.03665]

b) 対称コセットシグマ模型 [Matsumoto-KY, 1501.03665]

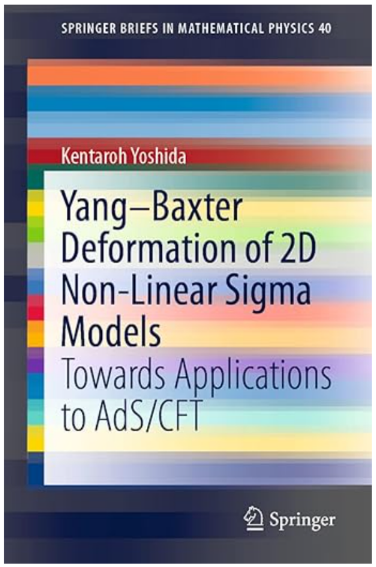
2) c) Type IIB string on $AdS_5 \times S^5$ [Kawaguchi-Matsumoto-KY, 1401.4855]

NOTE 双 Yang-Baxter 変形 [Klimcik, 0802.3518, 1402.2105]

(主カイラル模型にのみ適用可能)

Yang-Baxter変形については、拙著 ↓ を参照

洋書 > Professional & Technical > Professional Science > Mathematics > Applied



サンプルを読む

Yang–Baxter Deformation of 2D Non-Linear Sigma Models: Towards Applications to AdS/CFT (SpringerBriefs in Mathematical Physics, 40) ペーパーバック – 2021/6/4

英語版 | Kentaroh Yoshida (著)

すべての形式と版を表示

In mathematical physics, one of the fascinating issues is the study of integrable systems. In particular, non-perturbative techniques that have been developed have triggered significant insight for real physics. There are basically two notions of integrability: classical integrability and quantum integrability. In this book, the focus is on the former, classical integrability. When the system has a finite number of degrees of freedom, it has been well captured by the Arnold–Liouville theorem. However, when the number of degrees of freedom is infinite, as in classical field theories, the integrable structure is enriched profoundly. In fact, the study of classically integrable field theories has a long history and various kinds of techniques, including the classical inverse scattering method, which have been developed so far. In previously published books, these techniques have been collected and well described and are easy to find in traditional, standard textbooks.
One of the intriguing subjects in classically integrable systems is the investigation of deformations preserving integrability. Usually, it is not considered systematic to perform such

続きを読む

Kindle版 (電子書籍)
¥10,344 (103pt)
すぐに購読可能

ペーパーバック
¥9,200 (92pt)

の¥9,200その他の中古品、新品、コレクター商品

-14% ¥9,200 税込

参考価格: ~~¥10,671~~

ポイント: 92pt (1%) 詳細はこちら

配送料 ¥600 **3月31日-4月8日**にお届け (3 時間以内にご注文の場合)
詳細を見る

お届け先 153-0064-お届け先の更新

通常3～4日以内に発送します。 在庫状況について

数量: 1

カートに追加する

2025年3月19日の価格

アマゾンの商品ページより

https://www.amazon.co.jp/Yang%E2%80%93Baxter-Deformation-Non-Linear-Sigma-Models/dp/9811617023/ref=tmm_pap_swatch_0

2. $AdS_5 \times S^5$ 上のIIB型超弦理論のYang-Baxter 変形

$AdS_5 \times S^5$ 上のIIB型超弦理論の古典可積分性

$AdS_5 \times S^5$ 時空の商空間としての構造が古典可積分性と密接に関係

$$\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5 = \frac{SO(2,4)}{SO(1,4)} \times \frac{SO(6)}{SO(5)}$$

: symmetric coset

Z_2-grading ⇒ 古典可積分性

フェルミオンを含めると

$$\frac{PSU(2,2|4)}{SO(1,4) \times SO(5)}$$

: super coset

Z_4-grading ⇒ 古典可積分性

[Bena-Polchinski-Roiban, 2003]

この super cosetに基づいて, 超弦の古典作用を構成できる

[Metsaev-Tseytlin, 1998]

AdS$_5$ x S^5 上のIIB型超弦理論のYang-Baxter変形

$$S=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\sigma\;P_-^{ab}\mathrm{Str}\left[A_a d\circ\boxed{\frac{1}{1-\eta\,[R]_g\circ d}}(A_b)\right]$$

古典 r-行列が、ここに挿入される

古典 r-行列に2つのソース:

1) 修正された古典 Yang-Baxter 方程式 (mCYBE) [Delduc-Magro-Vicedo, 1309.5850]
2) (通常の) 古典 Yang-Baxter 方程式 (CYBE) [Kawaguchi-Matsumoto-KY, 1401.4855]

- κ-不変性 : 古典レベルでの弦理論の整合性
- Lax対の構成 : 古典可積分性

変形をなくす極限: $\eta\to 0$ ➡ Metsaev-Tseytlin 作用

[Metsaev-Tseytlin, hep-th/9805028]

Supercoset 構成の流れ

[Arutyunov-Borsato-Frolov, 1507.04239]
[Kyono-KY, 1605.02519]

Supercosetの群要素を適当に決めて、フェルミオンについて展開する。
2次までの作用は、次の形にまとめられる。 (変形の効果はSUGRAの場の中身に)

$$
\begin{aligned}
S \;=\; & -\frac{\sqrt{\lambda_c}}{4}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_0^{2\pi} d\sigma \left[\gamma^{ab}\boxed{G_{MN}}\partial_a X^M \partial_b X^N - \epsilon^{ab}\boxed{B_{MN}}\partial_a X^M \partial_b X^N\right] \\
& -\frac{\sqrt{\lambda_c}}{2}\, i\bar{\Theta}_I(\gamma^{ab}\delta^{IJ} - \epsilon^{ab}\sigma_3^{IJ})\, e_a^m \Gamma_m \boxed{D_b^{JK}} \Theta_K + \mathcal{O}(\theta^4)
\end{aligned}
$$

一般に共変微分 D は次のように与えられる:

[Cvetic-Lu-Pope-Stelle, hep-th/9907202]

$$
\begin{aligned}
D_a^{IJ} \;\equiv\; & \delta^{IJ}\left(\partial_a - \frac{1}{4}\omega_a^{mn}\Gamma_{mn}\right) + \frac{1}{8}\sigma_3^{IJ} e_a^m H_{mnp}\Gamma^{np} \\
& -\frac{1}{8}\boxed{e^{\Phi}}\left[\epsilon^{IJ}\Gamma^p \boxed{F_p} + \frac{1}{3!}\sigma_1^{IJ}\Gamma^{pqr}\boxed{F_{pqr}} + \frac{1}{2\cdot 5!}\epsilon^{IJ}\Gamma^{pqrst}\boxed{F_{pqrst}}\right] e_a^m \Gamma_m
\end{aligned}
$$

この形にまとめることによって、IIB SUGRAのすべての場を読み取れる！

得られる背景についてのまとめ

1) mCYBE の場合 [Delduc-Magro-Vicedo, 1309.5850]

古典 r-行列として、ただ一つの具体例 (Drinfeld-Jimbo型)

η-deformation or standard q-deformation [Arutyunov-Borsato-Frolov, 1312.3542]

フルの背景時空の構築がなされた。 [Arutyunov-Borsato-Frolov, 1507.04239]

しかし、これはIIB型超重力理論の解ではなかった。

驚くべきことに、この一つの背景を解にもつように超重力理論自体を修正！

[Arutyunov-Frolov-Hoare-Roiban-Tseytlin, 1511.05795]

$\Rightarrow$ 一般化された超重力理論の創成!

一般化された超重力理論 = 超重力理論 + 運動項のないベクトル場

得られる背景についてのまとめ

2) CYBE の場合

[Kawaguchi-Matsumoto-KY, 1401.4855]

たくさんの具体例が知られている。背景時空の部分変形が可能 (mCYBEでは不可能)

CYBEの古典 r-行列から得られる時空の具体例:

Lunin-Maldacena, Maldacena-Russo, Schrodinger 時空など

[Matsumoto-KY, 1404.1838, 1404.3657, 1502.00740] [Kyono-KY, 1605.02519]

一般化された超重力理論の解: [Orlando-Reffert-Sakamoto-KY, 1607.00795] JPA Highlights 2016

古典 r-行列に関する重要な条件:

Unimodularity 条件 [Borsato-Wulff, 1608.03570]

$$r^{ij}[b_i, b_j] = 0 \quad \text{for a classical r-matrix} \quad r = r^{ij} b_i \wedge b_j$$

Unimodularな古典 r-行列は、通常のSUGRAの解を与える。

Unimodularでなければ、一般化された超重力理論の解を与える。

EX: 非可換時空上のゲージ理論の重力双対

c.f. Seiberg-Witten, 1999

古典 r-行列: $r = \frac{1}{2} p_2 \wedge p_3$ [Matsumoto-KY, 1404.3657]

ここで $p_\mu \equiv \frac{1}{2}\gamma_\mu - m_{\mu 5}\,,\quad m_{\mu 5} = \frac{1}{4}[\gamma_\mu, \gamma_5]\,,\quad \gamma_\mu$: a basis of $\mathfrak{su}(2,2)$

計量: $ds^2 = \frac{1}{z^2}(-dx_0^2 + dx_1^2) + \frac{z^2}{z^4+\eta^2}(dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{dz^2}{z^2} + d\Omega_5^2$

B-場: $B_2 = \frac{\eta}{z^4+\eta^2}\, dx^2 \wedge dx^3\,,$ ディラトン: $\Phi = \frac{1}{2}\log\left(\frac{z^4}{z^4+\eta^2}\right)$

R-R 場: $F_3 = \frac{4\eta}{z^5}\, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dz\,,\qquad F_5 = 4\left[\mathrm{e}^{2\Phi}\omega_{AdS_5} + \omega_{\mathrm{S}^5}\right]\,.$

[Hashimoto-Itzhaki, Maldacena-Russo, 1999]

この時空上の弦理論の可積分性が、Lax対を構成することで示せた。

Note この解は η-deformed $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$のある極限としても再現できる

[Arutyunov-Borsaro-Frolov, 1507.04239] [Kameyama-Kyono-Sakamoto-KY, 1509.00173]

3.　一般化された超重力理論と双対性の関係

一般化された IIB型超重力理論

[Arutyunov-Frolov-Hoare-Roiban-Tseytlin, 1511.05795]

$$R_{MN} - \frac{1}{4}H_{MKL}H_N{}^{KL} - T_{MN} + \boxed{D_M X_N} + \boxed{D_N X_M} = 0\,,$$

$$\frac{1}{2}D^K H_{KMN} + \frac{1}{2}F^K F_{KMN} + \frac{1}{12}F_{MNKLP}F^{KLP} = \boxed{X^K} H_{KMN} + \boxed{D_M X_N} - \boxed{D_N X_M}$$

$$R - \frac{1}{12}H^2 + 4\boxed{D_M X^M} - \boxed{4X_M X^M} = 0\,,$$

$$D^M \mathcal{F}_M - \boxed{Z^M}\mathcal{F}_M - \frac{1}{6}H^{MNK}\mathcal{F}_{MNK} = 0\,, \qquad \boxed{I^M}\mathcal{F}_M = 0\,, \qquad \mathcal{F}_{n_1 n_2 \dots} = e^{\Phi} F_{n_1 n_2 \dots}$$

$$D^K \mathcal{F}_{KMN} - \boxed{Z^K}\mathcal{F}_{KMN} - \frac{1}{6}H^{KPQ}\mathcal{F}_{KPQMN} - \boxed{(I \wedge}\mathcal{F}_1)_{MN} = 0\,,$$

$$D^K \mathcal{F}_{KMNPQ} - \boxed{Z^K}\mathcal{F}_{KMNPQ} + \frac{1}{36}\epsilon_{MNPQRSTUVW}H^{RST}\mathcal{F}^{UVW} - \boxed{(I \wedge}\mathcal{F}_3)_{MNPQ} = 0$$

$$T_{MN} \equiv \frac{1}{2}\mathcal{F}_M\mathcal{F}_N + \frac{1}{4}\mathcal{F}_{MKL}\mathcal{F}_N{}^{KL} + \frac{1}{4\times 4!}\mathcal{F}_{MPQRS}\mathcal{F}_N{}^{PQRS} - \frac{1}{4}G_{MN}\left(\mathcal{F}_K\mathcal{F}^K + \frac{1}{6}\mathcal{F}_{PQR}\mathcal{F}^{PQR}\right)$$

修正された Bianchi 恒等式

$$(d\mathcal{F}_1 - \boxed{Z \wedge}\, \mathcal{F}_1)_{MN} - \boxed{I^K}\mathcal{F}_{MNK} = 0\,,$$

$$(d\mathcal{F}_3 - \boxed{Z \wedge}\, \mathcal{F}_3 + H_3 \wedge \mathcal{F}_1)_{MNPQ} - \boxed{I^K}\mathcal{F}_{MNPQK} = 0\,,$$

$$(d\mathcal{F}_5 - \boxed{Z \wedge}\, \mathcal{F}_5 + H_3 \wedge \mathcal{F}_3)_{MNPQRS} + \frac{1}{6}\epsilon_{MNPQRSTUVW}\boxed{I^T}\mathcal{F}^{UVW} = 0$$

新しく登場した要素: $X, \quad I, \quad Z$ 3つのベクトル場

しかし、$X_M \equiv I_M + Z_M$ であり、独立なのは2つ。

そして、I & Z は次の関係式を満たす:

$$\boxed{D_M I_N + D_N I_M = 0\,, \quad D_M Z_N - D_N Z_M + I^K H_{KMN} = 0\,, \quad I^M Z_M = 0}$$

ここで、I を次のリー微分

$$(\mathcal{L}_I B)_{MN} = I^K \partial_K B_{MN} + B_{KN} \partial_M I^K - B_{KM} \partial_N I^K$$

が消えるようにとると、上の2番目の式は解けて、次の表式が得られる:

$$Z_M = \partial_M \Phi - B_{MN} I^N \quad .$$

結局、独立なベクトル場は I のみとなる。

Note $I = 0$ のとき、通常の IIB型超重力理論が再現される。

Green-Schwarz (GS) 形式の超弦理論における大きな進展

κ-対称性と超重力理論の運動方程式の間の関係

昔に得られた結果:　背景時空が超重力理論の運動方程式を満たす解

→ κ-不変な GS形式の超弦理論　[Grisaru-Howe-Mezincescu -Nilsson-Townsend, 1985]

しかし、この逆は、得られる超重力理論が一意かどうか証明しきれてなかった。

新しい結果:　任意の背景上における κ-不変な GS string theory

→ 一般化された IIB型超重力理論　[Tseytlin-Wulff, 1605.04884]

30年越しの成果

Yang-Baxter変形の研究が引き金となった、
弦理論における基礎的な理解の進展

一般化された超重力理論の性質

1. 解の生成手法としてのYang-Baxter変形 [坂本さんの講演]

古典 r-行列 から、一般化された超重力理論の解を系統的に構成

[Delduc-Magro-Vicedo, 1309.5850] [Kawaguchi-Matsumoto-KY, 1401.4855]

2. 新しいベクトル場 *I* は non-geometric Q-flux と解釈される [坂本さんの講演]

非リーマン幾何学の例である T-folds が一般化された超重力理論の解

[Fernandez Melgarejo-Sakamoto-Sakatani-KY, 1710.06849]

3. 一般化された超重力理論 は、DFT or EFTから導出できる。 [酒谷さんの講演]

切断条件を少し変えて、一般化されたIIB型とIIA型の超重力理論 を導出できる

[Sakatani-Uehara-KY, 1611.05856] [Baguet-Magro-Samtleben, 1612.07210] [Sakamoto-Sakatani-KY, 1703.09213]

4. Generalized Buscher T-duality (for *I* direction)

下のように、ディラトンに `` *I* に比例する項 ” を足す:

$$\Phi \longrightarrow \widetilde{\Phi} = \Phi + I \cdot \tilde{x}$$

[Arutyunov-Frolov-Hoare-Roiban-Tseytlin, 1511.05795]

一般化された超重力理論の解が、通常の超重力理論の解に移る。

一般化された超重力理論の登場によってなにがわかったか?

これまでに、超重力理論の解にならないからと、捨てられてきた解がたくさんある。

いわゆる病的(pathological)とよばれる背景時空

例　non-abelian T-dualityはその有名な例　[佐藤さんの講演]

しかし、これらの病的な時空は、一般化された超重力理論の解である可能性がある。

実際、non-abelian T-dualityと Yang-Baxter変形の間には密接な関係がある:

(A class of) non-abelian T-duality ⟷ Yang-Baxter変形 (with CYBE)

予想 : [Hoare-Tseytlin, 1609.02550]　証明 : [Borsato-Wulff, 1609.09834]

⟶ 一般化された超重力理論の解になる！

Yang-Baxter変形として書けないnon-abelian T-dualityはあるのか？

Yang-Baxter変形として書けないnon-abelian T-dualityの例

Gasperini-Ricci-Veneziano 時空 [hep-th/9308112]

$$ds^2 = -\mathrm{d}t^2 + \frac{(t^4+y^2)\,\mathrm{d}x^2 - 2\,x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + (t^4+x^2)\,\mathrm{d}y^2 + t^4\,\mathrm{d}z^2}{t^2\,(t^4+x^2+y^2)} + \mathrm{d}s^2_{T^6}\,,$$

$$B_2 = \frac{(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y)\wedge \mathrm{d}z}{t^4+x^2+y^2}\,, \qquad \Phi = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{1}{t^2\,(t^4+x^2+y^2)}\right],$$

これは通常の超重力理論の解ではない

しかし、次の余剰なベクトル場

$$\boxed{I^z = -2}$$

[Fernandez Melgarejo-Sakamoto-Sakatani-KY, 1710.06849]

を加えると、この背景は一般化された超重力理論の解になる。

更なる検証： [M. Hong-Y. Kim-O Colgain, 1801.09567]

もっと多くの ``病的な背景” が、一般化された超重力理論の解かもしれない。

4.　まとめと今後の展望

まとめ

Yang-Baxter変形と 一般化された超重力理論

Green-Schwarz形式の超弦のκ-対称性 → 一般化された超重力理論

弦理論における基礎的な進展

- Yang-Baxter変形は、一般化された超重力理論の解の生成手法　[坂本さんの講演]

  よく知られているTsT変換も、Yang-Baxter変形に含まれる

- 一般化された超重力理論のベクトル場 I は、non-geometric Q-flux

  非リーマン幾何学 (T-foldなど) と関係

- かつての病的な背景は、一般化された超重力理論の解？　EX　Non-abelian T-duality

- 一般化された超重力理論は、DFTやEFTから導出できる

今後の展望

- 一般化された超重力理論の解を背景時空としてもつ弦理論？

  κ-対称性があるため、古典論的には整合的

  量子論的には、弦の世界面におけるスケール不変性はある。Weyl不変性？

- 一般化された超重力理論における新たなベクトル場の起源、物理的な解釈は？

  未知のオブジェクト？　弦の古典作用には現れない。ディラトン結合項の修正。

  [Fernandez-Melgarejo-Sakamoto-Sakatani-KY, PRL 122 (2019) 11, 11602, arXiv:1811.10600]

- 量子R-行列の役割？

  [Beisert-Roiban, hep-th/0505187]

  スピン鎖を構成するS-行列の変形　(TsT変換に対応する場合には明確な理解)

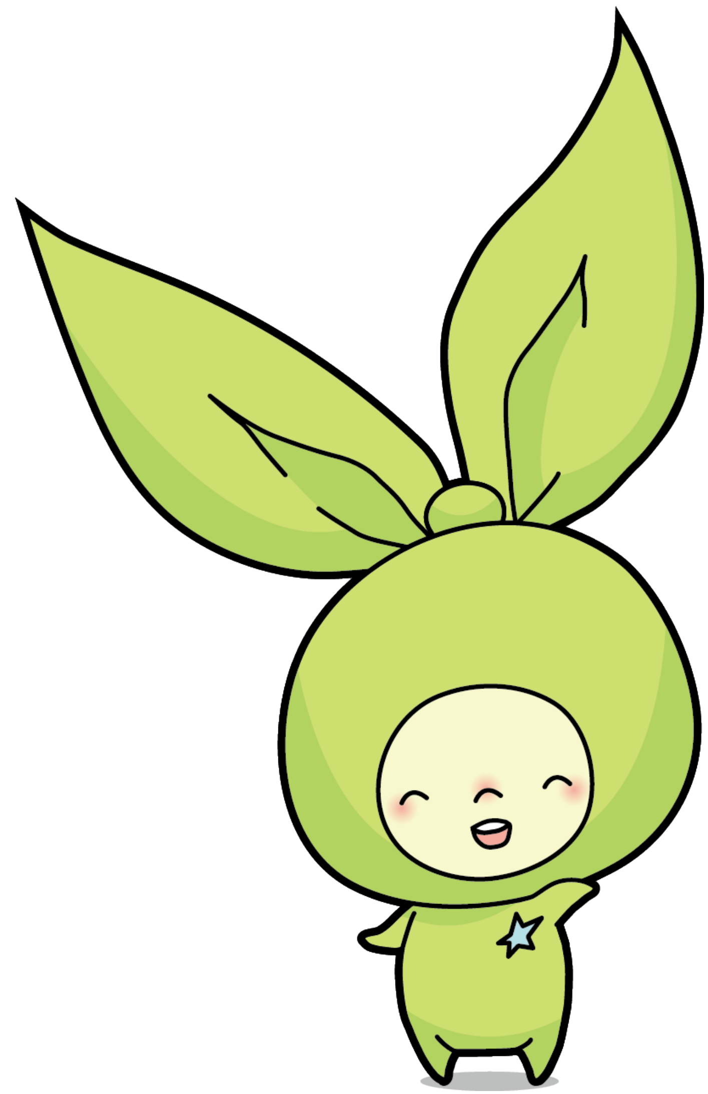
- 4D Chern-Simons理論 [Costello-Yamazaki, 1908.02289] との関係

  Yang-Baxter変形は、R-演算子によるゲージ場の境界条件の変形

  [Delduc-Lacroix-Magro-Vicedo, 1909.13824]: PCM　[Fukushima-Sakamoto-KY, 2005.04950]: symmetric coset, $AdS_5 x S^5$ superstring

  別の観点からのYang-Baxter変形と関連する双対性の理解

Thank you!



埼玉大学マスコットキャラクター　メリンちゃん

Back up

An example of R-operator for squashed S^3

Consider the su(2) algebra : $$[T^3, T^\pm] = \pm 2T^\pm, \quad [T^+, T^-] = T^3$$

$$T^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

The r-matrix of Drinfeld-Jimbo type

$$r_{\rm DJ} = -i \left[T^+ \otimes T^- - T^- \otimes T^+\right]$$

The unique solution of mCYBE

$$\Longleftrightarrow \quad R(T^+) = -i\, T^+\,, \quad R(T^-) = +i\, T^-\,, \quad R(T^3) = 0$$

The resulting action:

$$S = \frac{1}{1+\eta^2} \int d^2x\, \gamma^{\alpha\beta} \left[\mathrm{Tr}(J_\alpha J_\beta) + \frac{\eta^2}{2} \mathrm{Tr}(T^3 J_\alpha)\mathrm{Tr}(T^3 J_\beta)\right]$$

Target space is a squashed S^3

The detail of the computation:

Let us first consider $$J \equiv g^{-1}\mathrm{d}g, \quad A \equiv \frac{1}{1-\eta R} J$$

and expand them like $$\begin{cases} J = J^{+}T^{-} + J^{-}T^{+} + J^{3}T^{3} \\ A = A^{+}T^{-} + A^{-}T^{+} + A^{3}T^{3} \end{cases}$$

Then J can be rewritten as

$$\begin{aligned} J &= (1-\eta R)A \\ &= (1-i\eta)A^{+}T^{-} + (1+i\eta)A^{-}T^{+} + A^{3}T^{3} \end{aligned}$$

Thus we obtain $$A^{+} = \frac{J^{+}}{1-i\eta}, \quad A^{-} = \frac{J^{-}}{1+i\eta}, \quad A^{3} = J^{3}$$

The resulting action is given by

$$\begin{aligned} S &= \frac{2}{1+\eta^2}\int \mathrm{d}^2x\,\gamma^{\alpha\beta}\left[J_\alpha^{+}J_\beta^{-} + (1+\eta^2)J_\alpha^{3}J_\beta^{3}\right] \\ &= \frac{1}{1+\eta^2}\int \mathrm{d}^2x\,\gamma^{\alpha\beta}\left[\mathrm{Tr}(J_\alpha J_\beta) + \frac{\eta^2}{2}\mathrm{Tr}(T^3 J_\alpha)\mathrm{Tr}(T^3 J_\beta)\right] \end{aligned}$$

Group element representation of squashed S^3

Let us introduce the *SU(2)* group element: $g = \mathrm{e}^{-i\left(\frac{\phi}{2}\right)T_1}\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)T_2}\mathrm{e}^{i\left(\frac{\psi}{2}\right)T_3}$

Here θ, ϕ, ψ are the angles of S^3 and T_A's are the SU(2) generators:

Then the left-invariant 1-form

$$J = g^{-1}\mathrm{d}g = J^1 T_1 + J^2 T_2 + J^3 T_3$$

can be expressed in terms of the angle coordinates.

Finally the metric of squashed S^3 is rewritten as

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= -[(J^1)^2 + (J^2)^2 + (1+\eta^2)(J^3)^2] \\ &= \frac{1}{4}[\mathrm{d}\theta^2 + \cos^2\theta\mathrm{d}\phi^2 + (1+\eta^2)(\mathrm{d}\psi + \sin\theta\mathrm{d}\phi)^2] \end{aligned}$$

(The metric of squashed S^3)

Definitions of the quantities

Maurer-Cartan 1-form

$$A_a \equiv g^{-1}\partial_a g\,, \quad g \in SU(2,2|4) \quad ,$$

Projection on the group manifold

$$d \equiv P_1 + 2P_2 - P_3$$

Projection on the world-sheet

$$P_{\pm}^{ab} \equiv \frac{1}{2}(\gamma^{ab} \pm \epsilon^{ab})$$

$$\left[\begin{array}{l} \gamma^{ab} = \mathrm{diag}(-1,1) \\ \epsilon^{ab} : \ \text{anti-symm. tensor} \end{array}\right.$$

A chain of operations

$$R_g(X) \equiv g^{-1}R(gXg^{-1})g\,, \qquad \forall X \in \mathfrak{su}(2,2|4)$$

A group element: $g = g_{\rm b}\, g_{\rm f} \quad \in SU(2,2|4)$

$$g_{\rm b} = {g_{\rm b}}^{\rm AdS_5}\, {g_{\rm b}}^{\rm S^5}\,,$$

[For a big review, Arutyunov-Frolov, 0901.4937]

$$g_{\rm f} = \exp(\mathbf{Q}^I \theta_I)\,, \quad \mathbf{Q}^I \theta_I \equiv (\mathbf{Q}^{\check{\alpha}\hat{\alpha}})^I\,(\theta_{\check{\alpha}\hat{\alpha}})_I \quad (I=1,2;\; \check{\alpha},\hat{\alpha}=1,\ldots,4)$$

When we take a parametrization like

$$\begin{aligned} {g_{\rm b}}^{\rm AdS_5} &= \exp\Big[x^0\,P_0 + x^1\,P_1 + x^2\,P_2 + x^3\,P_3\Big]\,\exp\Big[(\log\, z)\,D\Big]\,, \\ {g_{\rm b}}^{\rm S^5} &= \exp\Big[\frac{i}{2}(\phi_1\,h_1 + \phi_2\,h_2 + \phi_3\,h_3)\Big]\,\exp\Big[\xi\,\mathbf{J}_{68}\Big]\,\exp\Big[-i\,r\,\mathbf{P}_6\Big]\,, \end{aligned}$$

the metric of AdS_5 x S^5 is given by

(the undeformed case)

$$\begin{aligned} ds^2 &= ds^2_{\rm AdS_5} + ds^2_{\rm S^5}\,, \\ ds^2_{\rm AdS_5} &= \frac{-(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}{z^2} + \frac{dz^2}{z^2}\,, \\ ds^2_{\rm S^5} &= dr^2 + \sin^2 r\, d\xi^2 + \cos^2\xi\,\sin^2 r\, d\phi_1^2 + \sin^2 r\,\sin^2\xi\, d\phi_2^2 + \cos^2 r\, d\phi_3^2 \end{aligned}$$

i) gamma-deformations of S^5

c.f. Leigh-Strassler deformation

[Matsumoto-KY, 1404.1838]

Abelian classical r-matrix: $r = \frac{1}{8}\left(\mu_3\, h_1 \wedge h_2 + \mu_1\, h_2 \wedge h_3 + \mu_2\, h_3 \wedge h_1\right)$

where μ_i and h_i $(i = 1, 2, 3)$ are deformation parameters and the Cartan generators of $\mathfrak{su}(4)$.

Metric: $$ds^2 = ds^2_{\mathrm{AdS}_5} + \sum_{i=1}^{3}(d\rho_i^2 + G\rho_i^2 d\phi_i^2) + \eta^2 G \rho_1^2\rho_2^2\rho_3^2 \left(\sum_{i=1}^{3} \mu_i\, d\phi_i\right)^2 ,$$

B-field: $$B_2 = \eta\, G \left(\mu_3\, \rho_1^2\rho_2^2\, d\phi_1 \wedge d\phi_2 + \mu_1\, \rho_2^2\rho_3^2\, d\phi_2 \wedge d\phi_3 + \mu_2\, \rho_3^2\rho_1^2\, d\phi_3 \wedge d\phi_1\right) ,$$

dilaton: $$\Phi = \frac{1}{2}\log G\,, \quad G^{-1} \equiv 1 + \eta^2(1 + \mu_3^2\rho_1^2\rho_2^2 + \mu_1^2\rho_2^2\rho_3^2 + \mu_2^2\rho_3^2\rho_1^2)\,, \qquad \textstyle\sum_{i=1}^{3} \rho_i^2 = 1$$

R-R: $$F_3 = -4\eta \sin^3\alpha\, \cos\alpha\, \sin\theta\, \cos\theta \left(\sum_{i=1}^{3} \mu_i\, d\phi_i\right) \wedge d\alpha \wedge d\theta\,,$$

$$F_5 = 4\left[\omega_{\mathrm{AdS}_5} + G\, \omega_{\mathrm{S}^5}\right] .$$

$$\rho_1 = \sin\alpha \cos\theta\,, \quad \rho_2 = \sin\alpha \sin\theta\,, \quad \rho_3 = \cos\alpha\,.$$

[Lunin-Maldacena, Frolov, 2005]

iii) Schrödinger spacetimes

c.f. [Son, 0804.3972], [Balasubramanian-McGreevy, 0804.4053]

Mixed r-matrix: $r = -\frac{i}{4} p_- \wedge (h_4 + h_5 + h_6)$

[Matsumoto-KY, 1502.00740]

Metric: $$ds^2 = \frac{-2dx^+dx^- + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + dz^2}{z^2} - \eta^2 \frac{(dx^+)^2}{z^4} + ds^2_{\mathrm{S}^5}$$

B-field: $$B_2 = \frac{\eta}{z^2} dx^+ \wedge (d\chi + \omega)\,,$$

dilaton: $$\Phi = \mathrm{const.}$$

The R-R sector is the same as AdS_5 x S^5.

[Herzog-Rangamani-Ross, 0807.1099]
[Maldacena-Martelli-Tachikawa, 0807.1100]
[Adams-Balasubramanian-McGreevy, 0807.1111]

S^5-coordinates:
$$ds^2_{\mathrm{S}^5} = (d\chi + \omega)^2 + ds^2_{\mathbb{C}\mathrm{P}^2}\,,$$
$$ds^2_{\mathbb{C}\mathrm{P}^2} = d\mu^2 + \sin^2\mu\,\left(\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2 + \cos^2\mu\,\Sigma_3^2\right)$$

NOTE the dilaton and R-R sector have not been deformed.

In the middle of computation, the fermionic sector becomes really messy and quite complicated. So the cancellation of the deformation effect seems miraculous.

Weyl invariance of the bosonic string theory (D=26)

<u>The classical action</u>

$a, b = \tau, \sigma, \quad \varepsilon^{\tau\sigma} = 1/\sqrt{-\gamma}, \quad \varepsilon_{\tau\sigma} = -\sqrt{-\gamma}$

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int \mathrm{d}^2\sigma \sqrt{-\gamma} \left[G_{mn}\gamma^{ab} - B_{mn}\varepsilon^{ab} \right] \partial_a X^m \partial_b X^n$$

At classical level,

$$T^a{}_a \equiv \frac{4\pi}{\sqrt{-\gamma}} \gamma^{ab} \frac{\delta S}{\delta \gamma^{ab}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Weyl invariant}$$

But at quantum level, the trace anomaly appears [Callan-Friedan-Martinec-Perry, '85]

$$2\alpha' \langle T^a{}_a \rangle = \left(\beta^G_{mn}\gamma^{ab} - \beta^B_{mn}\varepsilon^{ab} \right) \partial_a X^m \partial_b X^n$$

where

$$\beta^G_{mn} = \alpha' \left(R_{mn} - \frac{1}{4} H_{mpq} H_n{}^{pq} \right), \quad \beta^B_{mn} = \alpha' \left(-\frac{1}{2} D^k H_{kmn} \right)$$

Quantum scale invariance

[Hull-Townsend, '86]

Suppose that the beta functions take the following forms:

$$\beta^G_{mn} = -2\alpha' D_{(m}Z_{n)}, \quad \beta^B_{mn} = -2\alpha'(Z^k H_{kmn} + 2D_{[m}I_{n]}).$$

Then scale invariance is preserved at quantum level.

In fact, the trace anomaly can be rewritten into a total derivative form:

$$\langle T^a{}_a \rangle = -\mathcal{D}_a \left[(Z_n \gamma^{ab} - I_n \varepsilon^{ab}) \partial_b X^n \right]$$

where the eom of X has been utilized.

NOTE:

This supposition is satisfied for the solutions of the generalized SUGRA.

Here *Z* and *I* are arbitrary vector fields, and of course these are nothing but those in the generalized SUGRA!

The origin of the generalized SUGRA

Quantum Weyl invariance

As a special case of Hull and Townsend, one may take

$$Z_m = \partial_m \Phi, \qquad I_m = 0 \quad .$$

Then the trace anomaly is given by

$$\boxed{\langle T^a{}_a \rangle = -\mathcal{D}^a \partial_a \Phi \ .}$$

This anomaly can be cancelled out by adding the Fradkin-Tseytlin (FT) term:

$$S_{\mathrm{FT}} \equiv \frac{1}{4\pi} \int \mathrm{d}^2\sigma \sqrt{-\gamma}\, R^{(\gamma)} \Phi$$

alpha' is not contained!

because

$$\boxed{\langle T^a{}_a \rangle_{\mathrm{FT}} = \frac{4\pi}{\sqrt{-\gamma}} \gamma^{ab} \frac{\delta S_{\mathrm{FT}}}{\delta \gamma^{ab}} = \mathcal{D}^a \partial_a \Phi \,.}$$

Note: the FT term itself should be regarded as quantum contribution.

A generalization of the FT term

Question: Can one generalize the FT term for the case with $I_m \neq 0$?

Generalized FT term: [Sakamoto-Sakatani-KY, 1703.09213]

Dual coordinates

$$S_{\rm FT}^{(*)} = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{-\gamma}\,R^{(\gamma)}\Phi_*\,, \qquad \Phi_* = \Phi + I^i\underline{\widetilde{Y}_i}$$

$$\langle T^a{}_a\rangle_{\rm FT}^{(*)} = \frac{4\pi}{\sqrt{-\gamma}}\gamma^{ab}\frac{\delta S_{\rm FT}^{(*)}}{\delta\gamma^{ab}} = \underline{+\mathcal{D}_a\left[\left(Z_n\gamma^{ab} - I_n\varepsilon^{ab}\right)\partial_b X^n\right]}$$

Exactly cancels out Hull-Townsend's trace anomaly!

Here we have used the eom of Hull's double sigma model,

$$\boxed{\partial_a\widetilde{Y}_i - G_{in}\varepsilon^b{}_a\partial_b X^n - B_{in}\partial_a X^n = 0}$$