

重点領域研究 231「無限可積分系」

レクチャーノート

No.11

**Introduction to Conformal Symmetry
and Its Applications**

米谷民明 述

菊川芳夫、辻丸 詔 記

Kyoto, 1995

Lecture Note

Introduction to Conformal Symmetry and Its applications

米谷 民明 氏 述

菊川 芳夫、辻丸 詔 記

これは、主に大学院 M1, M2 の学生のみなさんの共形場理論への入門を助けることを念頭において若手夏の学校 (1989 年) で行った講義です。講義の際特に留意した点は、BPZ のオリジナルな論文や他のレビューでは、十分に説明されていないような通常の場の理論の立場からの共形場理論の背景と考え方につき、前半の部分で詳しく議論したことと、後半部では弦理論の立場から共形場理論への戦略、またその意義や展望を私なりに議論してみたことです。内容的には上滑りに終わっているところや、具体的な例題が少ない等、不十分なところが目につきますが、共形場理論を学ぶのに一つの参考として利用して頂ければ幸いです。

終わりに、これだけ詳しく講義ノートを取り、TeX 原稿を作成していただいた菊川芳夫、辻丸詔の両氏と、このような形でノートを印刷する企画をしていただいた土屋昭博氏に深く感謝いたします。

1995年3月

東京大学教養部

米谷 民明

目次

1	Conformal symmetry とは何か？	3
2	Kinematics of conformal symmetry	5
2.1	Conformal transformation and Weyl transformation	5
2.2	2 dim. conformal symmetry	10
3	Derivation of conformal Ward identity	13
3.1	Anomalous Ward identity	13
3.2	Properties of redefined energy-momentum tensor and primary fields	21
3.3	Fundamental axioms of conformal field theory (CFT)	27
4	Virasoro algebra and its representations	29
4.1	Hilbert space interpretation of correlation functions	29
4.2	Degenerate representation	39
5	Minimal models	52
5.1	Posibility of Solvable models	52
5.2	Methods (or strategies) of explicit construction	54
6	Feigin-Fuchs construction of minimal models	56
7	Further strategies	83
8	Meanings of CFT and prospects	92

1 Conformal symmetry とは何か？

Conformal 変換とは各点、各点で角度を保つ様な座標変換のことです。ここで各点、各点とは、局所的に常にそうになっているということで、例えば、global に見て直線でできた三角形が曲線で囲まれた三角形に写されることがあってよい。しかし、頂点の角度は不変に保たれていなければならない。このことを式でいうと、座標変換

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu$$

のもとで、無限小ベクトル $\Delta x_1, \Delta x_2$ に対して、

$$\frac{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2}{\|\Delta x_1\| \|\Delta x_2\|} = \frac{\Delta x'_1 \cdot \Delta x'_2}{\|\Delta x'_1\| \|\Delta x'_2\|}$$

が成り立つことです。この式を flat space でみると次のような変換を含んでいることがわかります。

1. Poincaré transformation

$$x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$$

2. Scale transformation (dilatation)

$$x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu$$

$$x^\mu \rightarrow e^\lambda x^\mu$$

3. Special conformal transformation

$$x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu + c^\mu x^2}{1 + 2c \cdot x + c^2 x^2} \quad (c^\mu : \text{constant vector})$$

ここで最後の special conformal transformation は、2次元でいうと、 $SL(2, \mathbb{C})$ 変換に相当しています。

次にこのような conformal 対称性をどの様に使うかが問題になります。通常、場の理論を厳密に解くことは非常に難しいので、対称性が極めて重要で、例えば、場の理論で最も重要な相関関数の性質を調べるのに、対称性にもとづいて議論して、その大枠の性質を決めます。したがって対称性が高ければ高いほど理論についての詳しい情報が得られるわ

けです。それでは、conformal 対称性とはどういう時に期待されるかという、

理論の定式化が長さの scale あるいは mass の scale によらず、かつその理論を記述している力学が十分に local な時、すなわち Lagrangian あるいは action が local な物理量で書けているとき

です。又、conformal 対称性が厳密に成り立っていなくても、対称性の破れ方がわかっているならばこの対称性が有効です。例えば、実際に我々が扱う conformal field theory はこの場合に対応していて、conformal anomaly を通してのみ破れていることがわかっているの、で完全な conformal 不変性が成り立っていなくても conformal 対称性をいかに使えばいいのかが分かります。

ここでの様な応用例があるのか、歴史的にどうなっているかを簡単に見てみます。

1. 場の理論 (摂動論) における、高エネルギーでの振幅の振舞い ('69 ~)

(Scaling arguments in deep inelastic scattering)

高エネルギーでは、mass の scale は無視できるので essential に massless の理論になり、従ってここでの振舞いは conformal 不変性にもとづいて議論できる。これに関連して次の様な idea がでてきた。

(a) Light-cone expansion (Operator product expansion)

(b) Conformal bootstrap, Renormalization group, (Skeleton expansion)

2. 4次元 Yang-Mills 理論と 2次元 non-linear σ model ('76 ~)

特に、instanton の計算に conformal 対称性は有用。4次元 Yang-Mills 場の理論では、conformal anomaly を通して conformal 対称性が破れていることがわかっている、このことを使って instanton の interaction の効果が計算できる。

→ 超対称性と組み合わせるとより強力な理論。N=4 SYM₄.

3. 2次元の統計系の臨界現象 ('70 ~)

Scaling arguments → Renormalization group method (Kadanoff, Wilson)

string state

80年代

4. 2次元 conformal field theory の最近の発展

Virasoro 代数の発見から始まる

[string theory]

[mathematics]

Virasoro (1969)

Gelfand-Fuchs (1968)

Basic framework (~ '73)

Kac's formula (1979)

↓

これらの方法の統一 (1984)

Belavin-Polyakov-Zamolodchikov

exact soluble lattice model

N.P. 13241 (1984) 333

2 Kinematics of conformal symmetry

2.1 Conformal transformation and Weyl transformation

前節で説明した conformal 変換

$$\frac{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2}{\|\Delta x_1\| \|\Delta x_2\|} = \frac{\Delta x'_1 \cdot \Delta x'_2}{\|\Delta x'_1\| \|\Delta x'_2\|} \quad (1)$$

を metric tensor で表現すると、全体の normalization だけ違う次の形に書けます。

$$g'_{\mu\nu}(x') = e^{\Lambda(x)} g_{\mu\nu}(x) \quad (2)$$

この関係式を無限小変換

$$g_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu} \quad (3)$$

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x) \quad (3)$$

で書き直してみると、いわゆる conformal killing equation が得られます。

$$\nabla_\mu \epsilon_\nu + \nabla_\nu \epsilon_\mu + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{conformal killing equation}) \quad (4)$$

ここで ∇_μ は共変微分で、metric tensor の無限小変換は

$$\delta_E g_{\mu\nu}(x) = g'_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) = -\nabla_\mu \epsilon_\nu - \nabla_\nu \epsilon_\mu \quad (5)$$

で与えられます。従って、conformal 変換とは conformal killing equation を満たすような変換です。この conformal killing equation から Λ についての条件が、次のように得られます。

$$g^{\mu\nu}(\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu + \Lambda g_{\mu\nu}) = 0 \rightarrow 2\partial \cdot \epsilon + d\Lambda = 0 \quad (6)$$

$$\partial^\mu(\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu + \Lambda g_{\mu\nu}) = 0 \rightarrow \partial_\alpha \partial^\alpha \epsilon_\mu + \partial_\mu(\partial \cdot \epsilon) + \partial_\mu \Lambda = 0 \quad (7)$$

但し、ここからは簡単のため時空は flat として計算します。また、 d は時空の次元です。二次元の場合は以下にあるように、実際に任意の metric のままで同様の議論ができます¹。この二式から

$$\partial_\alpha \partial^\alpha (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) - (d-2)\partial_\mu \partial_\nu \Lambda = 0 \quad (8)$$

となり、(4) を代入して

$$g_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial^\alpha \Lambda + (d-2)\partial_\mu \partial_\nu \Lambda = 0 \quad (9)$$

が得られます。この式から 2 次元が特別であることがわかります。すなわち

$$\begin{cases} d \neq 2 & \cdots \partial_\mu \partial_\nu \Lambda = 0 \\ d = 2 & \cdots \partial_\alpha \partial^\alpha \Lambda = 0 \end{cases} \quad (10)$$

となるので、 $d=2$ と $d \neq 2$ の二つの場合に分けて議論します。

まず、 $d \neq 2$ の場合に (10) を解くと、

$$\Lambda = 2a + 4b_\mu x^\mu \quad (11)$$

これを、conformal killing equation を使って ϵ の式に書き直すと

$$-\epsilon^\mu = c^\mu + \omega^{\mu\nu} x_\nu + ax^\mu + 2x^\mu(b \cdot x) - b^\mu x^2 \quad (12)$$

となります。右辺第一、第二項は Poincaré 変換 ($w_{\mu\nu} = -w_{\nu\mu}$)、第三項は scale 変換、第四、五項は special conformal 変換に対応している。この変換は $O(d, 2)$ 群をなしていて、その次元は Poincaré 変換、scale 変換、special conformal 変換のそれぞれの次元の和

$$\dim O(d, 2) = \frac{1}{2}d(d+1) + 1 + d = \frac{1}{2}(d+1)(d+2) \quad (13)$$

¹ 二次元以上では、一般に曲率が存在するため、独立な killing vector の個数は flat の場合より減るのでやはり変換群の次元は有限になって以下の議論が成り立つ。

$$\begin{aligned} \partial_z \epsilon_2 + \partial_{\bar{z}} \epsilon_1 + \Lambda g_{12} &= 0 \\ g_{12} (\partial_z \epsilon_2 + \partial_{\bar{z}} \epsilon_1) + \Lambda &= 0 \\ \partial_z \epsilon_2 + \partial_{\bar{z}} \epsilon_1 + \Lambda &= 0 \end{aligned}$$

で与えられます。次元が三以上の場合には結局これしかなくて理論に対する制限もそれほど強くない、それでも実際いろいろ役に立ちます。(Light cone expansion における制限や、Yang-Mills 場への応用など。)

これに対して、2次元の場合は事情が一変し、 Λ は Klein-Gordon 方程式をみたせばよい。これは curved space でもそうであり (10) 式はより一般に、

$$\nabla_\alpha \nabla^\alpha \Lambda = 0 \tag{14}$$

と書けます。以下、時空は Euclidean と仮定して、conformal gauge

$$g_{\mu\nu} = e^\phi \delta_{\mu\nu} \tag{15}$$

をとり、複素座標

$$z = x^1 + ix^2, \quad \bar{z} = x^1 - ix^2 \tag{16}$$

を用いて、

$$\nabla_\alpha \nabla^\alpha = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu [\sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu] = 4e^{-\phi} \partial_z \partial_{\bar{z}} \tag{17}$$

と書けるので、

$$\nabla_\alpha \nabla^\alpha \Lambda = 4e^{-\phi} \partial_z \partial_{\bar{z}} \Lambda = 0 \Rightarrow \Lambda(x) = f(z) + \bar{f}(\bar{z}) \tag{18}$$

となって2次元の conformal 変換群は無限次元であることがわかる。ここで、 $f(z), \bar{f}(\bar{z})$ はそれぞれ任意の holomorphic、anti-holomorphic 関数です。あるいは、(4) 及び、(6) を解いて、conformal killing vector が

$$\epsilon^\mu \partial_\mu = \epsilon^z(z) \partial_z + \epsilon^{\bar{z}}(\bar{z}) \partial_{\bar{z}} \tag{19}$$

と書けることから明らか。

これを無限小変換の generator の交換関係で書くと、プライムを微分として、

$$[l(f), l(g)] = l(f'g - g'f) \quad l(f) \equiv -(f(z) \partial_z + \bar{f}(\bar{z}) \partial_{\bar{z}}) \tag{20}$$

となり、特に、 $f = z^{n+1}, g = z^{m+1}$ を代入すると central extension のない Virasoro 代数が得られます。

$$[l_n, l_m] = (n - m) l_{n+m} \quad l_n \equiv l(z^{n+1}) \tag{21}$$

$$\begin{aligned} f \partial_z g - g \partial_z f &= f \partial_z (g \partial_z) - g \partial_z (f \partial_z) \\ &= f g' \partial_z - g f' \partial_z = +l(f'g - f'g') \end{aligned}$$

flat $\rightarrow$ curved (conf. gauge)

$$ds' = e^{\phi} ds d\bar{z}$$

$$x' = f(x), \quad y' = \frac{\partial f}{\partial x} x$$

$$\lambda = e^{\phi} \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial y'}{\partial y} = e^{\phi} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dx}{dy} \quad \therefore e^{\phi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} e^{\phi'}$$

さて、今までは座標変換としての conformal 変換を議論してきたのですが、ここで Weyl 変換との関係を見てみます。この二つは、しばしば混乱されて使われるので注意が必要です。Weyl 変換は座標変換とは無関係に metric tensor 自身を任意の正定値関数倍だけ scale する変換

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g_{\mu\nu}(x)e^{\rho(x)} \quad (22)$$

として定義される。それではなぜ、この Weyl 変換が重要かという、通常の conformal field theory では $g_{\mu\nu}$ は fix しておいて力学変数として扱わない。(これに対して、重力理論では $g_{\mu\nu}$ は力学変数、すなわち path integral する量である。) この時、座標変換としての conformal 変換をして metric が変わっても Weyl 不変性があれば、その自由度を使って元の metric に引き戻すことができる。このことから metric が fix されていても conformal 不変性があるわけです。従って、座標変換 (以下 Einstein 変換とよぶことにします。) と Weyl 変換の両方のもとで理論が不変であるとき、conformal 不変性があると言います。

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow g'_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu}$$



conformal transf.

Weyl transf.

$$\epsilon^\mu$$

$$\rho = -\Lambda = \frac{2}{d} \nabla \cdot \epsilon$$

Einstein transf.

conformal killing eq. から

ρ は conformal killing equation を用いて metric が全体として不変になるように決めます。このことからわかるように、conformal 変換のもとで理論が不変だと言うときには、場の変換性は Einstein 変換と Weyl 変換の両方を含めて考える必要があることに注意しなければなりません。

$$\text{Einstein} \quad \delta_E \phi \quad (= \phi'(x) - \phi(x))$$

$$\text{Weyl} \quad \delta_W \phi$$

従って、一般には

$$\epsilon \delta_{\text{conf}} \phi = \epsilon^\mu \delta_{E\mu} \phi + \frac{2}{d} \nabla \cdot \epsilon \delta_W \phi \quad (23)$$

というように、場の変化分は Einstein 変換と Weyl 変換の両方からの寄与を含みます。この事実は、二次元では以下に述べる理由であり問題になりませんが、四次元では重要になります。具体的な例をいくつか挙げます。

● 計量テンソル

定義より conformal 変換で不変で、

$$\delta_{\text{conf}} g_{\mu\nu} = 0$$

● スカラー場

$$\begin{cases} \delta_E \phi &= -\partial_\mu \phi \\ \delta_W \phi &= -\frac{d-2}{4} \phi \end{cases} \quad (24)$$

と変換しますから

$$\epsilon \cdot \delta_{\text{conf}} \phi = -\epsilon^\mu \partial_\mu \phi + \frac{2}{d} (\nabla \cdot \epsilon) \left(-\frac{d-2}{4} \phi \right) \quad (25)$$

となります。ここで、Weyl 次元を次のように定義します。

$$\delta_W \phi \equiv -\frac{\Delta_W}{2} \phi \quad \text{for dilation } \epsilon^\mu = x^\mu \quad (26)$$

また、 $d=2$ の場合には、conformal 変換は単なる座標変換に等しいことに注意してください。

● ゲージベクトル

ゲージ場の場合は Weyl 変換に対しては dimension zero で、

$$\begin{cases} \epsilon \delta_E A_\nu &= -\epsilon \cdot \partial A_\nu - (\partial_\nu \epsilon^\mu) A_\mu \\ \delta_W A_\nu &= 0 \end{cases} \quad (27)$$

となり、

$$\epsilon \delta_{\text{conf}} A_\nu = -\epsilon \cdot \partial A_\nu - (\partial_\nu \epsilon^\mu) A_\mu \quad (28)$$

この様に、Weyl 不変性を 4 次元で保とうとすれば、ゲージ場は変換しない。通常 4 次元のゲージ場の scale dimension を naive に 1 と言っている理由は、Einstein 変換と Weyl 変換の両方をあわせていっているからで、ゲージ場の Einstein 変換の式の右辺第 1 項は、global な変換 ($\epsilon^\mu \propto x^\mu$) をとると次元 1 として振舞います。この場合は、Einstein 変換の寄与からきていることがわかります。

● スピノール

スピノール場は local Lorentz frame の gauge を fix していないときには Einstein 変換に対して不変なので、

$$\begin{cases} \delta_E \psi = 0 \\ \delta_W \psi = -\frac{d-1}{4} \psi \end{cases} \quad (29)$$

これから、

$$\epsilon \delta_{\text{conf}} \psi = -\frac{d-1}{4} \psi \quad (30)$$

となります。

一般には global な conformal 変換に対する場の scale 変換を conformal 次元 Δ_c であらわすと

$$\Delta_c = [\text{lower tensor rank}] - [\text{upper tensor rank}] + [\text{Weyl dimension}] \quad (31)$$

$$\epsilon \cdot \delta_{\text{conf}} \phi = -a(x \cdot \partial \phi + \Delta_c \phi), \quad \epsilon^\mu = ax^\mu \quad (32)$$

となります。

2.2 2 dim. conformal symmetry

(Euclid metric)

ここからは 2 次元を扱うことにします。2 次元の conformal symmetry は複素座標 (複素構造, complex structure) を用いると一番簡単に書き表すことができます。どの様にし

て complex structure が出てくるのか、flat space では明白なのですが、曲がった時空の場合も含めてもう少し詳しく考えて見ます。重力理論の量子化を考えるとよくでてる lapse-shift の関係

$$ds^2 = (N^1 dx^2)^2 + g_{11}(dx^1 + N^1 dx^2)^2 \quad (33)$$

を 2 次元の場合に次のように、 (η_1, η_2) という変数で置き換えます。

$$\begin{aligned} g_{11} &= e^\rho \\ N^1 &= e^{\frac{\rho}{2}} \eta_2 \quad (\text{Lapse}) \\ N^1 &= \eta_1 \quad (\text{Shift}) \end{aligned}$$

(η_1, η_2) は十分局所的には常に定数に選ぶことができるので、

$$dz = dx^1 + \eta dx^2, \quad d\bar{z} = dx^1 + \bar{\eta} dx^2$$

$$\eta = \eta_1 + i\eta_2 = \eta(x^1, x^2)$$

という複素座標を導入して

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^\rho [(dx^1 + \eta_1 dx^2)^2 + (\eta_2 dx^2)^2] \\ &= e^\rho (dx^1 + (\eta_1 + i\eta_2) dx^2)(dx^1 + (\eta_1 - i\eta_2) dx^2) \\ &= e^\rho dz d\bar{z} = g_{z\bar{z}}(dz d\bar{z} + d\bar{z} dz) \end{aligned} \quad (34)$$

と書き直せる。この η という量は幾何学的に重要な量で、複素構造を特徴付ける parameter です。また、この複素座標でみると座標変換としての conformal 変換は曲がった時空でも簡単に、任意の解析関数 $f(z)$ を用いてあらわせます。

$$z \rightarrow \tilde{z} = f(z)$$

この座標変換をすると metric が scale factor だけ変わることは明かです。

特に、flat space で考えると Weyl 変換の寄与、

$$\rho = \partial_\mu \epsilon^\mu = \partial_z \epsilon^z + \partial_{\bar{z}} \epsilon^{\bar{z}} \quad (35)$$

は、 z の微分と $\bar{z}$ の微分の和の形に分離していて、(23) 式、

$$\epsilon \delta_{\text{conf}} \phi = \epsilon^\mu \delta_{E\mu} \phi + (\partial_\mu \epsilon^\mu) \delta_W \phi$$

の右辺第二項を第一項の Einstein tensor の変換性の holomorphic 部分、anti-holomorphic 部分にそれぞれ吸収できることがわかります。こういうわけで、2次元の場合はその特殊性から Weyl 変換が tensor の変換性と同じ形をしているので、conformal 変換が一見全部 tensor の変換のように扱えます。しかし曲がった時空では少し問題があります。それは Ward identity の議論の時、説明します。

従って、2次元の場合 conformal 変換のもとでの field の変換性は普通の Einstein 変換であるかのように定義するのが自然です。primary field と呼ばれる conformal tensor を次のように定義します。

$$\phi^{(h,\bar{h})}(z,\bar{z}) \rightarrow \phi^{(h,\bar{h})}(\tilde{z},\tilde{\bar{z}}) = \left(\frac{d\tilde{z}}{dz}\right)^{-h} \left(\frac{d\tilde{\bar{z}}}{d\bar{z}}\right)^{-\bar{h}} \phi^{(h,\bar{h})}(z,\bar{z}) \quad (36)$$

$$\Delta_c = \text{conformal dimension} = h + \bar{h} \quad s = \text{spin} = h - \bar{h}$$

無限小変換で書くと、

$$z \rightarrow z + \epsilon z^{n+1}$$

$$\begin{aligned} \delta \phi^{(h,\bar{h})}(z,\bar{z}) &= -\left(z^{n+1} \partial_z + h(n+1)z^n\right) \phi^{(h,\bar{h})}(z,\bar{z}) \\ &\quad -\left(\bar{z}^{n+1} \partial_{\bar{z}} + \bar{h}(n+1)\bar{z}^n\right) \phi^{(h,\bar{h})}(z,\bar{z}) \end{aligned} \quad (37)$$

となり、 z と $\bar{z}$ の変換性がまったく独立になっています。境界条件が入って z と $\bar{z}$ に関係がつく場合を除いてこの二つは独立に扱っていいわけです。

次に保存則をみておきます。Noether の定理から、Einstein 不変性に対応する classical な保存則は energy-momentum tensor

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta A}{\delta g_{\mu\nu}} \quad (38)$$

を用いて

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (39)$$

とかけます。複素座標を使って書くと、

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{z}}T_{zz} + e^{\rho}\partial_z(e^{-\rho}T_{\bar{z}\bar{z}}) &= 0 \\ \partial_zT_{\bar{z}\bar{z}} + e^{\rho}\partial_{\bar{z}}(e^{-\rho}T_{z\bar{z}}) &= 0\end{aligned}\tag{40}$$

又、naive な Weyl 不変性があれば、

$$g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = 0\tag{41}$$

すなわち、

$$T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = 0\tag{42}$$

が成り立ち、結局 (40) と (42) から、metric 依存性がない次の形になる。

$$\partial_{\bar{z}}T_{zz} = \partial_zT_{\bar{z}\bar{z}} = 0\tag{43}$$

すなわち、

$$T_{zz} = T_{zz}(z), \quad T_{\bar{z}\bar{z}} = T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z})\tag{44}$$

が、成り立ちます。量子論では、実は Weyl 不変性 (41) が成りたっておらず (Weyl anomaly)、energy-momentum tensor の保存則に metric 依存性が入ってきます。それでも conformal field theory では、あたかも Weyl 不変性があるかのようにして得られる classical な保存則を使う。その理由については、次の Ward identity の議論の中で説明します。

anomaly があることは非常に universal な性質です。たとえ massless の理論でも、理論をくりこむ時にどうしてもくりこみの scale が入ってきて、conformal 不変性は破れる。たとえば、QCD や curved space の場の理論でもみられる、場の理論における普遍的な性質です。

3 Derivation of conformal Ward identity

3.1 Anomalous Ward identity

Conformal field theory において一番大切な役割を果たす、つまり基礎となる Ward identity の導出とその意味を場の理論の立場から議論することにします。まず、場の量子

論における Ward identity の path integral の方法による導き方を復習してみます。今、conformal 不変な理論を考えたときに、その理論の action A は一般に metric によつていますが、ここでは metric は積分しないで fix しておきます。そしてこのもとで相関関数を定義する。

$$\langle \phi_1(x_1) \cdots \phi_n(x_n) \rangle = N^{-1} \int [d\phi]_{g,\phi} \exp - A[g, \phi] \prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) \quad (45)$$

ここで、 N は規格化因子、 ϕ_i は場を表わします。

さて action が Einstein 変換に対して不変なので、無限小 Einstein 変換に対する変換性 $\delta_E g, \delta_E \phi$ を代入して右辺を書き換えることができる。

$$\Rightarrow N^{-1} \int [d\phi]_{g,\phi} \exp - A[g + \delta_E g, \phi + \delta_E \phi] \prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) \quad (46)$$

矢印は、(45) 式の右辺の書き換えを意味するものとします。

次に ϕ の代わりに変換された新しい場を ϕ' として、 ϕ' を新しい積分変数として選び直してやる。この時 ϕ から ϕ' への measure の変換もおこなうのですが、Einstein 変換については measure は不変にとると仮定をしておきます。regularization としてそういうものが存在するという仮定のもとでやるのです。これは少なくとも摂動論ではできる、すなわち metric tensor を用いて ϕ の空間に不変な長さが、形式的には Einstein 不変性を保つように導入できます。その measure を使って積分 volume を定義するわけです。これは標準的な仮定で Einstein 不変性を破ってしまうと理論を構成するための原理があいまいになるからです。従つて、

$$\phi' = \phi + \delta_E \phi, \quad g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \delta_E g_{\mu\nu}$$

$$[d\phi']_{g',\phi'} = [d\phi]_{g,\phi}$$

から、

$$\Rightarrow N^{-1} \int [d\phi']_{g',\phi'} \exp - A[g', \phi'] \prod_{i=1}^n (\phi'_i - \delta_E \phi_i)(x_i) \quad (47)$$

となります。さらに ϕ' の i は取ってしまっても同じことですから

$$\Rightarrow N^{-1} \int [d\phi]_{g',\phi} \exp - A[g', \phi] \prod_{i=1}^n (\phi_i - \delta_E \phi_i)(x_i) \quad (48)$$

ここまで変形したものをもとの式 (45) の右辺と比べるわけです。

さてここで、量子化した意味での energy-momentum tensor を次のように定義します。

$$\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}}[d\phi]_{g,\phi} \exp - A[g, \phi] \equiv -\frac{1}{2}\sqrt{g} T^{\mu\nu}[d\phi]_{g,\phi} \exp - A[g, \phi] \quad (49)$$

metric に依存するのは action と量子化に対応する積分 volume ですが、その両方合わせた部分を metric tensor で変分したものを量子化した意味での energy-momentum tensor と定義することにします。operator ordering などについての情報はみんなここに入っていると考えられます。

これを使うと (5) 式を代入して、次の恒等式が得られます。

$$\begin{aligned} & \langle \int d^2x \left(T^{\mu\nu}(x) \sqrt{g(x)} \nabla_\mu \epsilon_\nu \right) \prod_i \phi_i(x_i) \rangle \\ &= \sum_i \langle \phi_1(x_1) \cdots \epsilon(x_i) \cdot \delta_E \phi_i(x_i) \cdots \phi_n(x_n) \rangle \end{aligned} \quad (50)$$

これは Einstein 変換による Ward identity であって conformal 変換そのものではないので注意しなければなりません。

一方でまったく同じようにして Weyl 不変性からでてくる Ward identity をもとめます。

$$\langle \phi_1(x_1) \cdots \phi_n(x_n) \rangle = N^{-1} \int [d\phi]_{g,\phi} \exp - A[g, \phi] \prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) \quad (51)$$

$$\Rightarrow N^{-1} \int [d\phi]_{g,\phi} \exp - A[g + \delta_W g, \phi + \delta_W \phi] \prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) \quad (52)$$

$$\delta_W g = \sigma g_{\mu\nu} \quad (53)$$

ここで考えているのは、conformal 変換に付随した Weyl 変換ではなくて、一般の Weyl 変換なので σ は勝手な関数です。次に prime のついた新しい積分変数

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \delta_W g_{\mu\nu}, \quad \phi' = \phi + \delta_W \phi$$

に変換えると今度は measure が、不変ではありません。先ほど、regularization を適当に取って Einstein 不変性を保つようにしましたが、今度は、ほとんど必然的に Weyl 不変性を保つようにできないことは明らかです。一般に必ず measure は Weyl 不変性を破る形

になっている。その破り方ですが、locality と Einstein 不変性の仮定と次元解析から、適当な係数 κ が存在して、unique につぎの形になることがわかります。

$$[d\phi']_{g',\phi'} = [d\phi]_{g,\phi} \exp \kappa \int R \sqrt{g} \sigma d^2 x \quad (54)$$

R はスカラー曲率、また、 σ は dimensionless です。local な量で書いて mass 次元が 2 の scalar というと、total derivative の任意性をのぞいて

$$\int R \sqrt{g} \sigma d^2 x$$

しかない。この効果を考慮すると

$$\Rightarrow \left(\exp - \kappa \int R \sqrt{g} \sigma d^2 x \right) N^{-1} \int [d\phi']_{g',\phi'} \exp - A[g',\phi'] \prod_{i=1}^n (\phi'_i - \delta_W \phi_i)(x_i) \quad (55)$$

となります。再び、 ϕ' の l をとって、 $g_{\mu\nu}$ についての変分を先ほどと同様にとれば、Weyl 不変性に対する Ward Identity が得られます。

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \langle \int d^2 x (\sqrt{g} T^{\mu\nu}(x) g_{\mu\nu} \sigma) \prod_i \phi_i(x_i) \rangle &= \sum_i \langle \phi_1(x_1) \dots \delta_W \phi_i(x_i) \dots \phi_n(x_n) \rangle \\ &+ \kappa \int R \sqrt{g} \sigma d^2 x \langle \phi_1(x_1) \dots \phi_n(x_n) \rangle \end{aligned} \quad (56)$$

ここで、metric tensor の変分が左辺、場が変換したのが右辺第一項、anomaly の寄与が第二項。

次に、(50), (56) を用いて我々が考えている conformal 変換に対する、Ward identity を導出します。Einstein 変換

$$\delta_E g_{\mu\nu} = -(\nabla_\mu \epsilon_\nu + \nabla_\nu \epsilon_\mu) \quad (57)$$

が、もし conformal 変換ならば、対応してそれを打ち消さなければならない Weyl 変換は同じ ϵ を使って

$$\delta_W g_{\mu\nu} = (\nabla \cdot \epsilon) g_{\mu\nu} \quad i.e. \quad \sigma = \nabla \cdot \epsilon \quad (58)$$

となる必要がある。

$$\nabla_z \epsilon^{\bar{z}} = \partial_z \epsilon^{\bar{z}} = \int \partial_z \bar{z} \nabla_z \epsilon^{\bar{z}}$$

$$\nabla_z \epsilon^z = \partial_z \epsilon^z = \int \partial_z z \nabla_z \epsilon^z$$

$$\epsilon^{\bar{z}} = \bar{\epsilon}(\bar{z})$$

$$\epsilon^z = \epsilon(z)$$

今、2次元で考えていますから conformal 変換は、 $\epsilon(z)$ と $\bar{\epsilon}(\bar{z})$ の二つの任意関数で書いている。場の変換性は、Einstein 変換に対して、

$$\delta_E \phi(z, \bar{z}) = -(\epsilon^z \partial_z + \Delta_j^z \partial_z \epsilon^z) \phi(z, \bar{z}) - (\epsilon^{\bar{z}} \partial_{\bar{z}} + \Delta_j^{\bar{z}} \partial_{\bar{z}} \epsilon^{\bar{z}}) \phi(z, \bar{z}) \quad (59)$$

となります。ここで Δ_j は先ほど Δ_c (32) と書いたものではなくて、Weyl 変換からの寄与のないものです。

また、Weyl 変換に対しては Weyl dimension を使って、

$$\delta_W \phi = -\frac{1}{2} \Delta_W \phi \sigma \quad \Delta_W = \text{Weyl dimension} \quad (60)$$

と定義します。以下では、 z と $\bar{z}$ は独立に扱うので、形式的に $\epsilon^{\bar{z}}$ は 0 にしておきます。

そうすると Einstein 変換の不変性から導いた Ward identity は

$$\begin{aligned} \langle \int d^2x (T_{zz} \nabla_z \epsilon^z) \phi_1(x_1) \cdots \phi_n(x_n) \rangle &= -\langle \int d^2x (T_{\bar{z}\bar{z}} \nabla_z \epsilon^z) \phi_1(x_1) \cdots \phi_n(x_n) \rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \langle \phi_1(x_1) \cdots (\epsilon^z \partial_z + \Delta_j^z \partial_z \epsilon^z) \phi_i(x_i) \cdots \phi_n(x_n) \rangle \end{aligned} \quad (61)$$

また、Weyl 不変性から導いた Ward identity は

$$\begin{aligned} -\langle \int d^2x (T_{\bar{z}\bar{z}} \nabla_z \epsilon^z) \phi_1(x_1) \cdots \phi_n(x_n) \rangle &= \kappa \int R \sqrt{g} \nabla_z \epsilon^z d^2x \langle \phi_1(x_1) \cdots \phi_n(x_n) \rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \langle \phi_1(x_1) \cdots \frac{1}{2} \Delta_{W_i} \nabla_z \epsilon^z \phi_i(x_i) \cdots \phi_n(x_n) \rangle. \end{aligned} \quad (62)$$

もし、classical な理論なら energy-momentum tensor の保存は T_{zz} が $\bar{z}$ によらないこと、すなわち $\partial_{\bar{z}} T_{zz} = 0$ で表されます。(61) の右辺第一項は classical な式とのずれを表しているわけですが、よく見ると判るように Weyl 変換を表す部分 (62) の左辺になっている。このことが conformal 変換を考えるとときには Einstein 変換と Weyl 変換とを同時に考える必要があることの一つの現れです。そこで二つの式を足すと、Conformal Ward Identity

$$\begin{aligned} &\langle \int d^2x (T_{zz} \nabla_z \epsilon^z) \phi_1(x_1) \cdots \phi_n(x_n) \rangle \\ &= \kappa \int d^2x R \sqrt{g} \nabla_z \epsilon^z \langle \phi_1(x_1) \cdots \phi_n(x_n) \rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \langle \phi_i(x_i) \cdots (\epsilon^z \partial_z + \Delta_j^z \partial_z \epsilon^z + \frac{1}{2} \Delta_{W_i} \nabla_z \epsilon^z) \phi_i(x_i) \cdots \phi_n(x_n) \rangle \end{aligned} \quad (63)$$

が得られます。

ここで右辺第二項の場の変換は、ほとんど先ほど定義した primary field のものですが、一つ違うのは Weyl 変換の部分が metric に依存していることです。metric が入っていると取り扱いが面倒です。conformal field theory を考えるとき、単に Riemann 面ではなくて、その Riemann 面の上に metric を入れて、そしてその metric によって理論が変わるというのは不都合です。できるだけ metric の依存性を気にしないで議論できるようにしたいわけです。特に string theory についてはこのことは essential です。 $\frac{1}{2}\Delta_{W_i}\nabla_z\epsilon^z\phi_i(x_i)$ を $\frac{1}{2}\Delta_{W_i}\partial_z\epsilon^z\phi_i(x_i)$ としたいのですが、そのために次のように field を redefine します。

$$\phi_i \equiv (g_{z\bar{z}})^{-\Delta_{W_i}/2} \hat{\phi}_i \quad (64)$$

この様に、definite な Einstein 変換性と Weyl 変換性を持った場から、metric 依存性を含んだ場を定義します。そうすると場の微分は

$$\partial_z\phi_i \equiv (g_{z\bar{z}})^{-\Delta_{W_i}/2} \left\{ \partial_z\hat{\phi}_i - \frac{\Delta_{W_i}}{2} (g^{z\bar{z}}\partial_z g_{z\bar{z}}) \hat{\phi}_i \right\} \quad (65)$$

となり、covariant derivative の定義

$$\nabla_z\epsilon^z = \partial_z\epsilon^z + (g^{z\bar{z}}\partial_z g_{z\bar{z}})\epsilon^z \quad (66)$$

と合わせると次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} -(\epsilon^z\partial_z + \Delta_{J_i}\partial_z\epsilon^z + \frac{1}{2}\Delta_{W_i}\nabla_z\epsilon^z)\phi_i &= (g_{z\bar{z}})^{-\Delta_{W_i}/2} (-\epsilon^z\partial_z - h_i\partial_z\epsilon^z)\hat{\phi}_i \\ &\equiv (g_{z\bar{z}})^{-\Delta_{W_i}/2} \delta_{conf}\hat{\phi}_i \end{aligned} \quad (67)$$

以上まとめると、conformal field theory では $\hat{\phi}$ についての correlation function を計算していると思い直して、

$$\begin{aligned} \langle \delta_{conf}[\prod_{i=1}^n \hat{\phi}_i(x_i)] \rangle &\equiv -\sum_{i=1}^n \langle \hat{\phi}_1(x_1) \cdots (\epsilon^z\partial_z + h_i\partial_z\epsilon^z)\hat{\phi}_i(x_i) \cdots \hat{\phi}_n(x_n) \rangle \\ &= -\kappa \int d^2x R \sqrt{g} \nabla_z\epsilon^z \langle \prod_{i=1}^n \hat{\phi}_i(x_i) \rangle \\ &+ \langle \int d^2x (T_{zz}\nabla_{\bar{z}}\epsilon^z) \hat{\phi}_1(x_1) \cdots \hat{\phi}_n(x_n) \rangle \end{aligned} \quad (68)$$

と書き直します。ここで h は、もとの tensor の変換性から決まる次元と Weyl 次元との和です。もちろん今いったことは $\bar{z}$ についても同じことで、やはり Weyl 次元が加わります。差をとれば落ちるので spin には効きませんが、dimension には寄与するわけです。

$$h_i = \Delta_{j_i}^z + \frac{1}{2}\Delta_{w_i} \quad \bar{h}_i = \Delta_{j_i}^{\bar{z}} + \frac{1}{2}\Delta_{w_i} \quad (69)$$

このように conformal field theory では $\wedge$ のついた field を扱うわけで、特に off-critical な所で manifest に covariance が見えるようにして議論する場合、場を同定するのに注意が必要です。

いま、 $\hat{\phi}$ は変換性がきれいになるように形式的に導入したのですが、特にそれは Weyl 不変になっているという意味があります。

$$\delta_W \hat{\phi} = \delta_W (g_{z\bar{z}}^{\Delta_W/2} \phi) = 0 \quad (70)$$

結局、Weyl 不変な場を定義してちょうど classical な理論と parallel に議論したいわけです。Weyl 変換に対する場の変換性が zero という事実と、先ほどの Ward identity の導出から $\hat{\phi}$ について Weyl 不変性に対する Ward identity を書くと、次のようになります。

$$\begin{aligned} \langle \delta_W [\prod_{i=1}^n \hat{\phi}_i(x_i)] \rangle &= \langle \int d^2x (T_{z\bar{z}}(x) \sigma(x) + \kappa R \sqrt{g} \sigma) \prod_{i=1}^n \hat{\phi}_i(x_i) \rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (71)$$

これは、ちょうど energy momentum tensor の trace が $R\sqrt{g}$ に比例するという trace anomaly を表す式です。

さらに conformal field theory との対応を見るために (68) 式に注目して変形を続けます。metric を conformal gauge にとって curvature tensor に $\sqrt{g}$ をかけたものを書き直すと

$$R\sqrt{g} = 4\partial\bar{\partial}\rho \quad (72)$$

$$\partial = \partial_z, \quad \bar{\partial} = \partial_{\bar{z}} \quad g_{z\bar{z}} = \frac{1}{2}e^\rho, \quad g_{zz} = g_{\bar{z}\bar{z}} = 0$$

となりますが、この式はちょうど total derivative で書かれていますから積分すると metric の local な性質に依存しない global な量、すなわち Euler 指数になります。total derivative

になることが topological な量であることを表しているわけです。 ϵ^z の covariant derivative も ρ で表すと

$$\nabla_z \epsilon^z = e^{-\rho} \partial(e^\rho \epsilon^z) = \partial \epsilon^z + \partial \rho \epsilon^z$$

となり、この二つの式を用いて anomaly の項を書き直すと、

$$\int d^2x R \sqrt{g} \nabla_z \epsilon^z = 4 \int d^2x \left(\partial^2 \rho - \frac{1}{2} (\partial \rho)^2 \right) \nabla_{\bar{z}} \epsilon^z \quad (73)$$

が得られます。このことから (68) 式は、

$$\langle \delta_{\text{conf}} [\prod_{i=1}^n \hat{\phi}_i(x_i)] \rangle = \langle \int d^2x \nabla_{\bar{z}} \epsilon^z \left\{ T_{zz} - 4\kappa \left(\partial^2 \rho - \frac{1}{2} (\partial \rho)^2 \right) \right\} \prod_{i=1}^n \hat{\phi}_i(x_i) \rangle \quad (74)$$

となります。結局、何をやったかということ anomaly の部分と energy momentum tensor の項が同じ factor $\nabla_{\bar{z}} \epsilon^z$ でくくれるようにしたわけです。(71),(74) 式を classical な式と対応させると、field だけでなく energy momentum tensor も metric 依存性 (ρ) を持っているように見えます。やはり energy momentum tensor を議論する時も一々 metric 依存性が入ってくるのでは、不都合です。最初から flat space だけを議論しているうちはいいのですが、genus の高い Riemann 面を議論するときには問題です。特に string theory ではそうで、conformal field theory のもっとも重要な応用の一つは string theory ですからこのことは essential です。

そこで、energy momentum tensor も metric 依存性が見えなくなるように redefine しやると classical な式と対応がつくことがわかります。すなわち

$$T_{z\bar{z}} + 4\kappa \partial \bar{\partial} \rho \equiv \hat{T}_{z\bar{z}} \quad (75)$$

$$T_{zz} - 4\kappa \left(\partial^2 \rho - \frac{1}{2} (\partial \rho)^2 \right) \equiv \hat{T}_{zz} \quad (76)$$

と再定義します。 $\hat{T}$ で書き直した Ward identity は metric independent になっているわけです。普通の場合の理論では、ハットの無い場を扱うのに対して、conformal field theory では、ハット付きの場を扱います。両者を比較するときには注意する必要があります。

3.2 Properties of redefined energy-momentum tensor and primary fields

再定義した energy-momentum tensor や primary field の性質をまとめておきます。まず⁷³⁾のついた energy-momentum tensor の保存則は

$$\partial_z \hat{T}_{zz} = 0, \quad \partial_z \hat{T}_{z\bar{z}} = 0 \quad (77)$$

$$\hat{T}_{z\bar{z}} = 0 \quad (\text{or } T_{z\bar{z}} = -\kappa R \sqrt{g}) \quad (78)$$

となり、classical なものと essential に同じです。correlation function の中では singularity をのぞいて成り立つ式です。また、これは curved space でも成り立ちます。2 次元時空に metric が勝手に入っている、成り立っている。変換性については、redefine した field は Weyl 不変ですから、conformal 変換は Einstein 変換であるかのように取り扱ってよろしい。その時の変換性は

$$\delta \hat{\phi} = \delta_E \hat{\phi} = -\{\epsilon^z \partial_z + h(\partial_z \epsilon^z)\} \hat{\phi} \quad (79)$$

$$h = \Delta_J^z + \frac{1}{2} \Delta_W \quad (80)$$

となります。ここで h は本当の tensor の rank に Weyl dimension の寄与が加わったものです。たとえば、Majorana spinor の場合は $(h, \bar{h}) = (\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2})$ です。もとの Δ は $(\Delta_J^z, \Delta_J^{\bar{z}}) = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}), (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), \Delta_W = \frac{1}{2}$ でした。

Energy-momentum tensor については conformal 変換としての Einstein 変換

$$z \rightarrow \zeta = \zeta(z)$$

をおこなうと、重要なことは、 ρ も次のように変換し、

$$\rho \rightarrow \tilde{\rho}, \quad \tilde{\rho}(\zeta) = \rho(z) - \ln \frac{d\zeta}{dz}$$

のついた energy-momentum tensor の変換性は

$$\begin{aligned} \hat{T}_{zz}(z) &= T_{zz}(z) - 4\kappa \left(\partial^2 \rho - \frac{1}{2} (\partial \rho)^2 \right) \\ &= \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 \hat{T}_{\zeta\zeta}(\zeta) - 4\kappa \{\zeta, z\}. \end{aligned} \quad (81)$$

で与えられます。普通の tensor の変換性に、おつりがついている。このおつりが、いわゆる、Schwartz derivative と呼ばれる、次のような量です。

$$\{\zeta, z\} = \frac{\zeta'''}{\zeta'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\zeta''}{\zeta'} \right)^2 \quad (82)$$

それから、普通の notation では κ はいわゆる central charge を使って次のように書けます。

$$\kappa = -\frac{c}{48\pi}, \quad (83)$$

今述べたことを無限小変換について書くと、conformal 変換と Einstein 変換が同じなので、

$$-\delta_E \hat{T}_{zz} = \{\epsilon^z \partial_z + 2\partial_z \epsilon^z\} \hat{T}_{zz} + \frac{c}{12\pi} \partial_z^3 \epsilon^z \quad (84)$$

となり、これが、Polyakov 達の論文の出発点になった式です。出発点は何故あの式でいいのかということはあの論文には書いてなかったのですが、場の理論の立場からはいまいにちのように考えればいいわけです。

それから energy-momentum tensor を redefine するといっても、果して勝手にしていいかという疑問があります。energy-momentum tensor というのは、量子化した場合は measure の寄与も含みますが、essential に action の微分でした。それを勝手に変えたということは結局、action を変えたことになります。ちょうど、変分すると anomaly の加わった $\hat{T}$ がでてくるような action に変えたことになっている。これがいわゆる Liouville action です。

$$A \rightarrow \hat{A} = A + \kappa \int d^2x \sqrt{\hat{g}} \left(\frac{1}{2} \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \rho \partial_\nu \rho + \hat{R} \rho \right) \quad (85)$$

$$g_{\mu\nu} = e^\rho \hat{g}_{\mu\nu} \quad (86)$$

ただし、ここでは上のように g の代わりに determinant を 1 に normalize した $\hat{g}$ を使い、 $\hat{g}$ についての curvature tensor などに $\wedge$ をつけてあります。 $\wedge$ 付きの量で書いて上のようになるのであって、もとの g では簡単に、local な形では書けません。従って、これはいわゆる counterterm とみなすことはできない。むりやり counterterm とみなそうとすると non-local になってしまうわけで、non-local な counterterm を加えたのでは、anomaly を打ち消したとはいえず、勝手に手で消したにすぎません。ただ手で消すことが上で議論し

たような意味付けをもってできるわけです。そういう意味で、この action は非常に重要です。つまり conformal field theory では metric の依存性がなくなるように $\hat{g}$ を使いたいのですが、それに対応して $\hat{A}$ は metric に依らなくなっている。 A の metric 依存性をおつりの項がちょうど打ち消しているわけです。ただし、単に A というのではなく、量子化したときには、correlation function などの metric 依存性も含めての話ですが。

また、これに関連して、おつりの部分は path integral measure の Weyl anomaly をちょうど打ち消すようになっている。すべて $\wedge$ のついた量で書けば Weyl 変換に対して完全に不変になっていると思っていいといいましたから、anomaly は打ち消しているべきで、実際計算してみると次のようになっていることがわかります。

$$\frac{\delta}{\delta \rho} \int d^2 x \sqrt{\hat{g}} \left(\hat{R} \rho + \frac{1}{2} \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \rho \partial_\nu \rho \right) = R \sqrt{g} \quad (87)$$

ここで $R\sqrt{g} = (\hat{R} - \hat{\nabla}_\alpha \hat{\nabla}^\alpha \rho) \sqrt{\hat{g}}$ という関係式を使いました。

結局 conformal Ward identity は次のような単純な式にまとまります。

$$\begin{aligned} \langle \delta_\epsilon [\prod_{i=1}^n \hat{\phi}_i(x_i)] \rangle &= \langle \int d^2 x \left(\hat{T}_{zz} \partial_z \epsilon^z \right) \prod_{i=1}^n \hat{\phi}_i(x_i) \rangle \\ &= - \langle \sum_{i=1}^n \hat{\phi}_1(x_1) \cdots (\epsilon^z \partial_z + h_i \partial_z \epsilon^z) \hat{\phi}_i(x_i) \cdots \hat{\phi}_n(x_n) \rangle \end{aligned} \quad (88)$$

これが一番、要になる式です。いろいろな使い方がありますが、たとえば local な形に書き直すことができます。 ϵ は勝手な解析関数ですから w で pole をもつ次の関数にとれます。

$$\epsilon^z = \frac{1}{2\pi(z-w)} \quad (85)$$

これから、

$$\bar{\partial} \epsilon^z = \frac{1}{2} \delta^{(2)}(z-w) \quad (86)$$

が得られ、そうすると、

$$\pi \langle \hat{T}_{zz}(w) \hat{\phi}_i(x_i) \cdots \hat{\phi}_n(x_n) \rangle = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{h_i}{(w-z_i)^2} + \frac{1}{w-z_i} \partial_{z_i} \right\} \langle \hat{\phi}_1(x_1) \cdots \hat{\phi}_n(x_n) \rangle \quad (89)$$

となります。これからの議論で notation を標準的なもので表すために π を含めて、それから $\wedge$ も面倒ですから取って T, ϕ とすることにします。

$$\pi \hat{T}_{zz} \rightarrow T, \quad \hat{\phi} \rightarrow \phi$$

従って

$$\langle T(z) \prod_i \phi_i(x_i) \rangle = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{h_i}{(z-z_i)^2} + \frac{1}{z-z_i} \partial_{z_i} \right\} \langle \prod_i \phi_i(x_i) \rangle \quad (90)$$

となります。

又、解析性を使って積分形にも書き直せて、

$$\langle \frac{1}{2\pi i} \oint_c f(z) T(z) \prod_i \phi_i(x_i) \rangle = \sum_{i=1}^n \{ f(z_i) \partial_{z_i} + h_i f'(z_i) \} \langle \prod_i \phi_i(x_i) \rangle. \quad (91)$$

ここで積分の経路はすべての場の insertion のある点を含むように取っています。変換性が上のように与えられていますから、pole からの residue をひろってくるわけです。

さらに energy-momentum tensor の変換性もわかっていますから、 $T(z)$ の入った correlation function についても同様に Ward identity がもとまります。

$$\begin{aligned} \langle T(z) T(z_1) \prod_{i=2}^n \phi_i(x_i) \rangle &= \left\langle \left\{ \frac{c/2}{(z-z_1)^4} + \frac{2T(z_1)}{(z-z_1)^2} + \frac{\partial_{z_1} T(z_1)}{z-z_1} \right\} \prod_{i=2}^n \phi_i(x_i) \right\rangle \\ &\quad + \sum_{i=2}^n \left\{ \frac{h_i}{(z-z_i)^2} + \frac{1}{z-z_i} \partial_{z_i} \right\} \langle T(z_1) \prod_{i=2}^n \phi_i(x_i) \rangle. \end{aligned} \quad (92)$$

Conformal field theory というのは結局この conformal Ward identity をいかにうまく使うかということであり、その一番単純な帰結をいくつか書いてみます。まず、 T と field ϕ 、あるいは T 同士が非常に近づいた場合の singularity の構造がわかります。上の式で z をどれかひとつの座標に近づけてみます。 T と T の場合は z を z_1 に近づける。そのとき singular にふるまう項を抜き出せば、

$$T(z) \phi_i(x_1) \sim \frac{h_i}{(z-z_1)^2} \phi_i(x_1) + \frac{1}{z-z_1} \partial \phi_i(x_1) + \text{regular part} \quad (93)$$

$$T(z) T(z_1) \sim \frac{c/2}{(z-z_1)^4} + \frac{2}{(z-z_1)^2} T(z_1) + \frac{1}{z-z_1} \partial T(z_1) + \text{regular part} \quad (94)$$

となります。(93) 式は primary field を特徴づける式です。

もう一つは energy-momentum tensor の argument z についての analyticity が議論できます。correlation function は field を insertion した点以外で z について analytical です。ただし、background に何か隠れた field が存在する場合があります。つまり insert された field 以外に理論の構造から必ずどこかに隠れた field が存在することがあります。

たとえば ghost field など、その場合は新たにその点で、singular な振舞いをするので注意しなければいけません。ここではそのような場はないものとする、 z を insert した以外の点に勝手にもっていても有限です。

$$T(z) \rightarrow \text{finite}, \quad z \rightarrow z_0 \quad (\neq z_i)$$

また、 z を無限大にもっていくと、

$$T(z) \rightarrow O\left(\frac{1}{z^4}\right), \quad z \rightarrow \infty$$

といった振る舞いをします。この理由については、少し注意が必要です。まず、座標が無限大になるのはよくないので patch を張り替えて有限な座標にします。ここでは

$$\zeta = \frac{1}{z}$$

と変数変換します。この変換に対しては Schwartz derivative は 0 なので energy-momentum tensor の変換は

$$T(\zeta) = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)^{-2} T(z) = z^4 T(z) \quad (95)$$

となり $T(\zeta)$ は $\zeta = 0$ で有限ですから上の結果になる。 $T(z)$ が z の 4 乗で落ちますから $f(z)$ が無限遠で適当な振舞いをしていれば、contour を無限遠にもって行って積分を 0 にすることができる。すなわち、これは $f(z)$ が z が大きい時に、たかだか z^2 の振舞いを示すときです。かつ原点で regular でなければならぬので $f(z)$ の関数は三つしかない。constant と z と z^2 です。この三つがちょうど $SL(2, \mathbb{C})$ 変換に対応しています。すなわち次式が成り立ちます。

$$\sum_{i=1}^l \left\{ z_i^{n+1} \partial_i + h_i(n+1) z_i^n \right\} \langle \prod_i \phi_i(x_i) \rangle = 0 \quad (96)$$

ただし、 $n = -1, 0, 1$ です。この 3 つの微小変換は

$$z \rightarrow \zeta = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (ad - bc = 1)$$

という $SL(2, \mathbb{C})$ 変換 (あるいは Möbius 変換) の微小形になっています。つまり、これは $SL(2, \mathbb{C})$ 不変性から従う correlation function を制限する式です。

あるいは、いまの式を積分すると、

$$\langle \prod_i \phi_i(z_i) \rangle = \prod_i \left(\frac{d\zeta_i}{dz_i} \right)^{h_i} \left(\frac{d\bar{\zeta}_i}{d\bar{z}_i} \right)^{\bar{h}_i} \langle \prod_i \phi(\zeta_i) \rangle \quad (97)$$

$$\text{for } \zeta = \frac{az+b}{cz+d}$$

と書くこともできます。 ζ は上の条件を満たす勝手な a, b, c, d , で与えられる数ですから、かなりきつい制限です。この制限を利用して field の数が少ない場合、correlation function の形を決めることができます。例えば二点関数ならば、normalization を適当にとり、

$$\langle \phi_i(z, \bar{z}) \phi_j(w, \bar{w}) \rangle = \delta_{h_i, h_j} \frac{1}{(z-w)^{2h_i} (\bar{z}-\bar{w})^{2\bar{h}_i}} \quad (98)$$

と決めることができ、conformal dimension が等しい時だけ、0 でないわけです。また、三点関数の時には、

$$\langle \phi_i(z_1) \phi_j(z_2) \phi_k(z_3) \rangle = C_{ijk} (z_1 - z_2)^{h_k - h_i - h_j} (z_2 - z_3)^{h_i - h_j - h_k} (z_3 - z_1)^{h_j - h_k - h_i} \times (c.c.)$$

となります。このように三点関数までは、normalization をのぞいて決まるのですが、四点関数以上では、normalization の自由度だけでなく任意関数が入ってきてしまいます。それは何故かという、4つの点を使って Möbius 変換に対する invariant を作れるからです。invariant が一旦できてしまうと、その invariant の任意関数が上の条件を満たす。この invariant は anharmonic ratios とよばれる、

$$X = \frac{(z_i - z_j)(z_k - z_l)}{(z_i - z_l)(z_k - z_j)}, \quad \dots$$

という量で、この任意関数ならばいいわけです。

いま、使った対称性は $n = -1, 0, 1$ に対応する3つです。2次元の場合 conformal 対称性は無限次元ですからほんの一部です。そこで、もっと高い対称性は如何に使えるのかということが問題になります。'83頃まではこのことはあまり真剣に考えられていませんでした。但し、string theory では higher symmetry は crucial だったわけですが、ただ使い方が特殊でした。現在の conformal field theory ではもう少し一般的に使われ、higher symmetry は大切な役割を果たします。

3.3 Fundamental axioms of conformal field theory (CFT)

高い対称性を如何に使うか、という問題を考えるときにはどうしても、もう少し仮定が必要になります。その仮定がいくつかあるのですが、数学のように公理的にまとめるということは、まだなされていません。またそのようなことをしても、物理的にはあまり役にたたないでしょう。ただ essential にはどういう事を仮定するのかという公理のようのものであるわけです。conformal field theory では必ずしも Lagrangianなどを仮定しません。結局 conformal Ward identity だけを essential には基にしている。だから、

$T(z)$: energy - momentum tensor

$\phi_i(x)$: primary fields

というのが、Lagrangian を仮定しなくとも、独立に存在していることを仮定します。そしてさらに dynamical に一番重要な仮定は、operator の積が閉じているということです。

short distance expansion

$$\phi_i(z_1)\phi_j(z_2) \sim \sum_k C_{ij}^k(z_1 - z_2) [\phi_k(z_2)]$$

short distance expansion

$$\phi_i(z_1)\phi_j(z_2) \sim \sum_k C_{ij}^k(z_1 - z_2)^{h_k - h_i - h_j} [\phi_k(z_2)]$$

$[\phi_k(z)]$: ϕ_k and its conformal transforms

すなわち、operator の積をとると、ある operator とその operator を conformal 変換したものの線型結合で書けるというものです。いろんな operator が出てきていいのですが、それがすべて operator の conformal 変換したものになっているということです。これが一番重要なことです。ただし、積については、associativity を満たすとします。

$$(\phi_1\phi_2)\phi_3 = \phi_1(\phi_2\phi_3)$$

これも非常にきつい条件です。こういう仮定のもとに議論をする。そうすると、非常にきつく、場合によってはそのことだけで理論が解けてしまうような model が作れるというわけです。

このようなことを勝手に仮定してもいいのは、実際にそういう理論が存在するからです。たとえば、相互作用のない 2 次元, massless, 一個の scalar 場はそのような理論です。string theory でもやはりそうなっています。また、fermion (Majorana) についても

そうで、実は、この model はちょうど Ising model になっているということが昔から知られています。従って、このような仮定にもとづいて理論を構成するというのは、非常に意味があることなのです。

こういう仮定から、いろいろな可能性がでてきます。まず、Virasoro 代数の表現論から、primary field としてどういうものが存在するのか制限がつく可能性があります。さらに Virasoro 代数との consistency から、operator の積の閉じ方に制限がつく。一番単純なのは、

$$C_{ij}^k(z_1 - z_2) \sim (z_1 - z_2)^{-h_i - h_j + h_k} \quad (z_1 \rightarrow z_2)$$

というように、係数 C の leading term が operator の次元だけで決まる、といったものです。もっと higher な項も原理的には決められます。

また、operator algebra が閉じていることから、係数 C (一種の structure constant ですが、) に強い制限がつくことになります。とくに重要なのは上のような仮定をしてしまつたら原理的には何点の correlation function も計算できてしまうということです。 N 点関数を与えられたら、どこか二つの積をとって一つ減らせて $N - 1$ 点になり、これを続ければ、最後は必ず 3 点関数の組合せで書ける。3 点関数は先ほど見たように、係数 C_{ijk} を除いて全部決まっていました。だから、structure constant さえ与えられれば原理的には理論は決ってしまうわけです。そういう意味で非常に強い条件です。

従ってこれからやることは、Virasoro 代数の表現論からどういう制限がつくかということ調べる。次に、operator の積で二つの場が一つになる仕方、普通 fusion rules と呼んでいます、それからどれだけの制限がつくかを調べる。こういう事を調べて correlation function を求めたり、計算する technics をまとめたりするわけです。

4 Virasoro algebra and its representations

4.1 Hilbert space interpretation of correlation functions

今まで path integral で計算できる correlation function だけで議論してきたわけですが、表現論の話をするときには operator の言葉を使った方が簡単なので、operator 的に解釈しなおします。そのために radial ordering と呼ばれる operator の順序づけを導入します。それは複素平面上で correlation function の中の場の insert される位置を原点からの距離に応じて ordering することです。すなわち

$$|z_1| > |z_2| > \cdots > |z_n| \quad (99)$$

とした時に correlation function を次のように解釈しなおします。

$$\langle \prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) \rangle \stackrel{d}{=} \langle v^* | \phi_1(z_1) \phi_2(z_2) \cdots \phi_n(z_n) | v \rangle \quad (100)$$

但し、

$$\begin{aligned} v &: \text{vacuum state} \\ v^* &: \text{dual of } v \end{aligned}$$

要するに何か真空 v に相当するものがあって、これで原点からの距離が遠いものを先に来るように並べた operator の積にたいして、期待値をとってやります。一般に、ボソンの場に対して (99) のもとで operator の ordering を radial ordering

$$R(\phi_1(z_1)\phi_2(z_2)\cdots\phi_n(z_n)) = \phi_1(z_1)\phi_2(z_2)\cdots\phi_n(z_n)$$

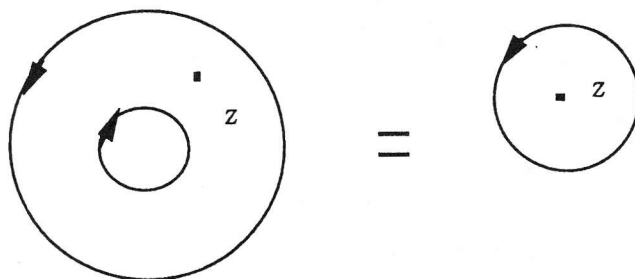
と仮定し、以下 R は省略する。なぜこういう定義をするかということ、実際に CFT の公理をみたすような場の理論 (3.3 参照) では、まさにこうなっているからで consistent に理論がつくれるからです。通常の場の理論のオペレーター形式とのアナロジーからすると、理論が十分に局所的なものであれば、これは常に可能であると考えられます。

• Conformal Ward Identity

Operator 的に見直したことに対応して Ward identity を交換関係を使ってあらわしてみます。Ward identity は

$$[f(z_k)\partial_k + h_k f'(z_k)] \langle \prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) \rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_k} dz f(z) \langle T(z) \prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) \rangle \quad (101)$$

でした。但し、 C_k は z_k のみ含む contour です。一方、これを下図の様に書き直してもよい。



この積分を実際に書くと contour の向きが逆であることから交換関係がでてきて

$$(101) = \langle v^*, \phi_1(x_1) \cdots \left[\frac{1}{2\pi i} \oint dz f(z) T(z), \phi_k(x_k) \right] \cdots \phi_n(x_n) \rangle v$$

これをもとの式と比較して、

$$\left[\frac{1}{2\pi i} \oint dz f T, \phi(z) \right] = (f \partial_z + h f') \phi(z) \quad (102)$$

が得られます。この式は $\frac{1}{2\pi i} \oint f T$ が field ϕ の変換の generator になってることを示している。

もしここで f が原点で regular だと仮定し contour を operator の insertion が無いように原点の周りに十分小さくとると ordering の定義によって、変換の generator は vacuum に直接かかって

$$\frac{1}{2\pi i} \oint dz f T |v\rangle = 0 \quad (103)$$

となります。これは原点で regular な conformal 変換に対する vacuum の不変性を意味します。無限遠でもまったく同様で

$$\langle v^* | \frac{1}{2\pi i} \oint dz f T = 0 \quad (104)$$

if f is $O(z^2)$ at $z = \infty$

となることがわかります。

このような意味で vacuum の conformal 不変性は、解析性に読み変えることができます。CFT の特徴は対称性を解析性に置き換えてほとんど複素関数論そのものになっていることにあります。いま述べたことを mode 展開の言葉でいうと、まず T を

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n-2} L_n \quad (105)$$

$$L_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} dz z^{n+1} T(z) \quad (106)$$

と原点のまわりで Laurant 展開して、vacuum の不変性を使うと

$$L_n |v\rangle = 0 \quad \text{for } n \geq -1 \quad (107)$$

同様に無限遠では

$$\langle v^* | L_n = 0 \quad \text{for } n \leq 1 \quad (108)$$

ですから、先ほど言った $SL(2, C)$ 不変性というのは、両者に共通の n の値である L_1, L_0, L_{-1} に対する不変性で、この n の値を持つ generator との交換関係の真空期待値は zero となります。

$$\langle v^* | [L_n, \dots] | v \rangle = 0 \quad (109)$$

これが真空の $SL(2, C)$ 不変性の operator での表現です。

o In state

Primary field の insertion を原点にもってくるという操作をとります。これを in state と呼び

$$|\phi\rangle \equiv \lim_{z \rightarrow 0} \phi(z)|v\rangle$$

で定義します。この状態に conformal 変換をほどこしてやりますと、交換関係と先ほど言った真空の性質を使って

$$\begin{aligned} L_n|\phi\rangle &= \lim_{z \rightarrow 0} \{[L_n, \phi(z)]|v\rangle + \phi(z)L_n|v\rangle\} \\ &= \delta_{n,0}h|\phi\rangle \quad \text{for } n \geq 0 \end{aligned} \quad (110)$$

が、得られます。ここで (102) 式から、

$$[L_n, \phi(z)] = (z^{n+1}\partial + h(n+1)z^n)\phi(z) \quad (111)$$

を使いました。すなわち $n > 0$ のときには $|\phi\rangle$ は L_n で annihilate されて $n = 0$ の時には固有値がでてきます。

o Out state

まったく同じように定義すればいいのですが、energy momentum tensor の時と同じで無限遠を扱うには、正しく座標 patch をとる必要があります。従って $\zeta = \frac{1}{z}$ として $\zeta \rightarrow 0$ で無限遠を定義して、field の変換性

$$\phi(z)z^{2h} = \phi(\zeta) \quad (112)$$

を考慮すると

$$\langle\phi^*| \equiv \lim_{z \rightarrow \infty} \langle v^*|\phi(z)z^{2h} \quad (113)$$

となり、2点関数の性質 (98) から background charge がない場合には $\langle\phi_i^*|$ と $|\phi_i\rangle$ が dual な関係にあることは実際に計算してみればすぐにわかります。

$$\langle\phi_j^*|\phi_i\rangle = \delta_{ij} \quad (114)$$

また、このように定義した out state に Virasoro 代数 L_n を作用させると $n \leq 0$ に対して

state

$$\begin{aligned}\langle \phi^* | L_n &= \lim_{z \rightarrow \infty} z^{2h} \langle v^* | [\phi(z), L_n] \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta^{-2h} \langle v^* | \left\{ 2h \zeta^{2h-n} \phi(\zeta) + \zeta^{2h} \left(\zeta^{-n+1} \frac{d}{d\zeta} - h(n+1) \zeta^{-n} \right) \phi(\zeta) \right\} \\ &= \delta_{n,0} \langle \phi^* | h\end{aligned}\quad (115)$$

にほど

となります。ここで

$$\begin{cases} z = \zeta^{-1} \\ \phi(z) = \zeta^{2h} \phi(\zeta) \end{cases}$$

を使いました。

(110)

一般にこれらの式から分かるように dual な state に移ることは結局、座標の patch を張り替えること、つまり z から z^{-1} に移ることです。これは普通の場合の理論での conjugation, * operation に当たるのですが、注意しなくてはならないのは、ここには複素共役をとるという概念はまだ入っておらず普通の Hermitian conjugate とは少し違うので区別して考える必要があることです。ただ unit circle 上で考えると、 $\frac{1}{z}$ とすることは、ちょうど複素共役をとることに対応しているので、そこで考えれば dual space に移ることはちょうど Hermitian conjugate をとることに対応しています。しかし、一般にはそうではなくて、今のように Euclidian field theory を考えている場合には、

(111)

の時に

同じで

 $\zeta \rightarrow 0$

(112)

$$\begin{aligned}L_n^* &= \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} dz z^{n+1} T(z) \right)^* \\ &= \left(-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\infty} dz z^{n+1} T(z) \right)^* \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} d\zeta \zeta^{-2} \zeta^{-n-1} \zeta^4 T(\zeta) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} d\zeta \zeta^{-n+1} T(\zeta) = L_{-n}\end{aligned}\quad (116)$$

(113)

すなわち、

s dual

$$\langle L_{-n} \phi^* | = \langle \phi^* | L_n \quad (117)$$

が成り立つ。こういう意味で dual space に移るということは、

(114)

$$L_n \longrightarrow L_{-n} \quad (118)$$

とすることです。

• Axiom of closed operator algebra (completeness of states)

先ほど CFT の基本的な公理の一つとして operator 代数が閉じているということを述べましたが、これは別の言葉で言うと、primary fields を使って in states を作ったらその空間での complete set はそれを conformal 変換したもので張られる、ということです。これは非常にきつい条件で、式で書くと

$$\begin{aligned}\phi_i(z)|\phi_j\rangle &= \phi_i(z)\phi_j(0)|v\rangle \\ &= \sum_{k\{n\}} C_{ij}^k \{z; -n_1 \cdots -n_N\} L_{-n_1} \cdots L_{-n_N} \phi_k(0)|v\rangle \\ &= \sum_{k\{n\}} C_{ij}^k \{z; -n_1 \cdots -n_N\} L_{-n_1} \cdots L_{-n_N} |\phi_k\rangle\end{aligned}\quad (119)$$

となり、また completeness relation は

$$1 = \sum_{k,l,\{n\},\{m\}} L_{-\{n\}} |\phi_k\rangle C_{kl}^{-1}(\{n\}, \{m\}) \langle \phi_l^* | L_{\{m\}} \quad (120)$$

となります。ここで

$$L_{-\{n\}} \equiv L_{-n_1} \cdots L_{-n_N} \quad (121)$$

で、 C_{kl} という行列は

$$C_{kl}(\{n\}\{m\}) \equiv \langle \phi_k^* | L_{\{n\}} L_{-\{m\}} | \phi_l \rangle \quad (122)$$

で定義されます。 C_{kl} は普通数学で contravariant form とよべれます。もし、background charge がない、つまり普通の場合の理論の場合には primary state に対して

$$\langle \phi_k^* | \phi_l \rangle = \delta_{kl} \quad (123)$$

という直交性になりたち、こういう場合には $k = l$ の時だけ、つまり同じ primary field を conformal 変換したものの間の内積のみが zero ではない。

$$C_{kl}(\{n\}\{m\}) \neq 0 \quad \text{only when } k = l \quad (124)$$

又、level に関して

$$\sum n_i = \sum m_i \quad \dots \text{level} \quad (125)$$

という条件が必要なことも少し調べればわかります。このような単項式 $L_{-n_1} \cdots L_{-n_N} |\phi\rangle$ と、その線形結合を全部集めたものを Verma module と呼びますが、これは Virasoro 代数の表現の一つです。Virasoro 代数とは、先ほど書いた energy momentum tensor の変換則の式

$$[T(f), T(z)] = \{f(z)\partial_z + 2f'(z)\}T(z) + \frac{c}{12}f'''(z) \quad (126)$$

を mode 展開したもので、すなわち、

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0} \quad (127)$$

で与えられます。この式の右辺第二項は、物理的には conformal anomaly に相当していて、central extention とよばれる。Verma module はこの代数の一つの表現になっているわけで、その表現がどういう風に特徴づけられるかということ "highest weight vector" $|\phi\rangle$ すなわち

$$L_n|\phi\rangle = h\delta_{n,0}|\phi\rangle \quad \text{for} \quad n \geq 0 \quad (128)$$

なる state によって特徴づけられるわけです。基本的には角運動量の表現を上げ下げ演算子を使って議論する仕方と同じです。

• Connection to ordinary field theory formalism

ここで少し普通の場合の理論的な見方をしてみます。普通の場合の理論との対応を見るのにまず L_0 を考えます。明らかに

$$L_0^* = L_0$$

が成立ち、また L_0 と primary field は

$$[L_0, \phi(z)] = (h + z\partial_z)\phi(z) \quad (129)$$

という関係を満たす。これは L_0 が二次元平面で global な scale 変換を引き起こすことを示していますが、 z の代わりに

$$z = e^\rho; \quad \rho = s + i\theta \quad \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ -\infty \leq s \leq \infty \end{cases} \quad (130)$$

と座標変換して ρ で見ると global な translation に対応していることがわかります。

$L_0 \cdots$ translation with respect to ρ

この変換のもとで $T(z)$ と $T(\rho)$ の関係は

$$T(z) = \left(\frac{d\rho}{dz} \right)^2 T(\rho) + \frac{c}{12} \{\rho, z\} \quad (131)$$

$$\left(\frac{d\rho}{dz} \right)^2 = \frac{1}{z^2}, \quad \{\rho, z\} = \frac{1}{2z^2}$$

与えられますが、この式を使って Hamiltonian を定義することを考えます。そのために (s, θ) という二次元空間をシリンダーの様に考えて s を時間とみなし θ を空間とします。この空間で Hamiltonian を考えると、energy momentum tensor $T(\rho)$ を空間座標 θ について積分すればいいから、

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta T(\rho) + \text{anti-holomorphic part} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz \frac{1}{z} \left(z^2 T(z) - \frac{c}{24} \right) + \text{anti-holomorphic part} \\ &= L_0 - \frac{c}{24} + \bar{L}_0 - \frac{c}{24} = L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12} \end{aligned} \quad (132)$$

となります。このことから前に定義した in-state, out-state は s についてのものであることがわかります。 $-c/12$ はいわゆる Casimir energy に相当するものです。

同じように二次元空間における運動量を定義しようと思ったら、こんどは θ に関しての translation を考えます。 θ についての translation を ρ でいうと、 ρ が translate されれば、 $\bar{\rho}$ は逆の方向に translate されるので、momentum の operator は holomorphic part から anti-holomorphic part をひいたものになります。すなわち

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta T(\rho) - \text{anti-holomorphic part} \quad (133)$$

$$= L_0 - \bar{L}_0 \quad (134)$$

(130)

この場合には Hamiltonian の場合と違って central charge は打ち消しあって、できません。上のことから $|z|$ についての radial ordering は s についての time ordering に等しいことが分かります。

(131)

またこの立場から Virasoro 代数がどういう役割をはたしているかという、いわゆる Spectral Generating Algebra (SGA) と呼ばれるものに対応しています。SGA とは、理論を与えたときにその理論の Hamiltonian の固有状態を何かある群の生成子の作用のもとですべて作り出せる、あるいはすべてでなくてもいいから、その spectrum の一部を作り出せる、そういう代数のことをいいます。この代数は Hamiltonian の対称性ではありません。つまり H の対称性だったら H と可換ですからある状態が H の固有状態なら、その状態に operator を作用させたものは、やはり同じ固有値を持った状態で H に関する multiplet をつくるからです。だから普通の対称性は H に関する multiplet を作り出すのに対して、今の場合は H の固有値を変えます。けれども、その固有値の変え方が、代数の作用の元で起きる。そういうものを SGA とよびます。Virasoro 代数は L_0 に対して $L_{-1}, L_{-2}, \dots$ が L_0 の固有値を変えるので、そういう意味で SGA になっています。この考え方自体は、CFT とは独立に昔からあって、例えば hadron の spectrum を分類するのに考えられたこともあります。その昔、Pauli が水素原子を行列力学で解こうとしたときに最初に現れた考え方です。

(132)

このように考えると結局、vacuum から最初の excited state である “primary state” がつくられ、さらに conformal 変換を施して次の様な完全系ができます。

$$|v\rangle = \text{ground state of } H$$

$$\{|\phi_i\rangle\} = \text{primary excited states}$$

$$\{L_{-\{n\}}|\phi_i\rangle\}_{n>0} = \text{conformal excited states}$$

(133)

しかし、vacuum から primary excited states を構成するのは、conformal 変換 ではないので、理論に入っている対称性だけからは決まらず、以下でふれる力学的な仮定が必要です。

(134)

• state-operator correspondence

今まで述べたことから state と operator を一対一に対応づけることができます。

$$|\phi_i\rangle \longleftrightarrow \phi_i(z)$$

$$L_{-\{n\}}|\phi_i\rangle \longleftrightarrow L_{-\{n\}}\phi_i(z)$$

ここで、

$$\begin{aligned} L_{-\{n\}}\phi_i(z) &= L_{-n_1}L_{-n_2}\cdots L_{-n_N}\phi_i(z) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} dz_1 (z_1 - z)^{-n_1+1} T(z_1) \cdots \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_N} dz_N (z_N - z)^{-n_N+1} T(z_N) \phi(z) \end{aligned}$$

となることは先ほどの Ward identity を使えばすぐに分かります。contour はそれぞれ、 z を中心に内側から C_N 、その周りを C_{N-1} 、..... 一番外側を C_1 が回るようにとる。例えば、 $L_{-n}\phi_i(z)$ は operator 積

$$T(z)\phi_i(z) = \sum_{n \geq 0} L_{-n}\phi_i(w)(z-w)^{n-2} \quad (135)$$

の $n \geq 0$ に対する展開係数として得られる。

このような理論の枠内では correlation function あるいは一般に matrix element はすべて primary states に対するものから計算できる。と言うのは primary states でないものには、energy momentum tensor が入っているので、これは correlation function に insertion されているときには、先ほどの Ward identity を使ってはずしていけるからです。

結局 CFT の中に入っている dynamical な情報はどこにあるかということ、conformal family とそれが fusion したときに、どういう field に変わるか、という議論の中に入っています。それでこれらを決める原理は何かと言うと、つぎの三つにまとめられます。

1. associativity of operator algebra (duality)
2. modular invariance

一般の Riemann 面を考えるとときに仮定される対称性。

3. higher symmetry

上記の二つで理論の内容がすべて決まるとは限らないので、一般にはもっと情報が必要です。その時にはより高い対称性を考えて理論に強い制限をつけることが考えられます。

ex.

current algebra, superconformal algebra, W_n algebra, etc

4.2 Degenerate representation

この節では Virasoro 代数の表現を実際に構成することを考えます。

• Null states (singular vector)

最初に null state と呼ばれるものを考えます。まず、conformal 次元 h の highest weight state $|\phi\rangle$ から作られる Verma module の中からある state $|\psi\rangle$ を一つとってきます。

$$|\psi\rangle \in \{L_{-\{n\}}|\phi\rangle : \text{Verma module}\} \quad (136)$$

これが次の条件を満たすときに $|\psi\rangle$ のことを null state とよびます。すなわち、

$$\begin{aligned} L_n|\psi\rangle &= 0 & \text{for all } n \geq 1 \\ L_0|\psi\rangle &= (h + \sum_i n_i)|\psi\rangle \end{aligned} \quad (137)$$

(実際の計算では $L_1|\psi\rangle = L_2|\psi\rangle = 0$ とするだけで十分で $n \geq 3$ に対しては、すべて交換関係によって自動的に満たされている。) この時 $|\psi\rangle$ はもともとある Verma module に入っている全ての状態と直交してしまう。それは

$$\langle (L_{-n}\phi)^* | \psi \rangle = \langle \phi^* | L_n | \psi \rangle = 0 \quad (138)$$

となるからで、特に自分自身との内積は zero (null) になります。

$$\langle \psi^* | \psi \rangle = 0 \quad (139)$$

つまりこの理論における完全系を構成している state のすべてと直交しているわけで、中間状態を考えたときに null state は全く効かないことになり、したがって理論から落とせるわけです。だから実質的には今の仮定の元で zero とおいていい。このような null state が表現の中に入っているの、これは既約ではない。だからそういう表現を落として既約表現をつくるわけですが、問題はどういう時に null state がでてくるのか、ということになります。これに対する答えは Kac によって与えられていて証明はやりませんが、次のようになります。

Kac's Theorem

For a given central charge c , a null state exists at level N when

$$h = h_{r,s} \quad N = rs \quad (r, s = \text{positive integer})$$

$$h_{r,s} = -\frac{1}{4}(\alpha_+ + \alpha_-)^2 + \frac{1}{4}(\alpha_+ r + \alpha_- s)^2$$

$$\alpha_{\pm} = \frac{\sqrt{1-c} \pm \sqrt{25-c}}{\sqrt{24}}.$$

この公式は先ほど述べた covariant form の determinant (Kac's determinant) を計算して、その zero 点として $h_{r,s}$ がでて来るのを示したものです。null state があれば、そこで線形独立ではない状態があるので、 $\det = 0$ となるからです。

$$\det C_N(\{n\}\{m\}) = \prod_{p=1}^N \left\{ \prod_{rs=p} (h - h_{r,s}) \right\}^{\Pi(N-p)}$$

$$\Pi(N) : \# \text{ of partitions of } N, \quad N = \sum_{i=1} in_i = \sum_i im_i$$

但し、

$$C_N(\{n\}, \{m\}) \equiv \langle h | L_1^{m_1} L_2^{m_2} \cdots L_{-1}^{n_1} L_{-2}^{n_2} \cdots | h \rangle$$

です。さて、null state があると、それを新しい highest weight state にして、そこから新しい表現ができますから、最初にあった表現の中に部分表現が作られます。したがって表現は可約になっている。既約表現をつくるためには null state によってつくられる

submodule でもとの表現を割って商空間をつくってやればよい。このような表現

$$\begin{aligned} & \text{Irreducible Virasoro representation } \mathcal{V}(h, c) \\ & \simeq [\text{Verma module}] / [\text{all summodules of null states}] \end{aligned}$$

を degenerate 表現といいます。商空間 $\mathcal{V}(h, c)$ のなかでは $|\psi\rangle = 0 : |\psi\rangle \text{ null state}$. いうことが物理的に何故正当化されるのかということ、Verma module で完全系が張れると仮定したからです。すでに述べたようにその中で、null state はすべての状態と直交していて、中間状態としてきかないからで、zero とおいてよい。このように correlation function の中では必ず zero という役割をはたすので、CFT の枠内で自然にこうなるのです。

• Degenerate state (field)

null state

$$|\psi\rangle = \sum C_{\{n\}} L_{-\{n\}} |\phi\rangle \quad (140)$$

を作るような元の状態 $|\phi\rangle$ を degenerate state と呼び、対応する operator ϕ を degenerate field と呼びます。

• Unitary representation

今までの話は、一般的な表現の話で内積は必ずしも正とは限らなかったが、もし話を場の理論の枠内におさめようとする、内積は正でなくてはならない。このような表現を unitary 表現と呼びます。ただ意味を取り違えないでほしいのですが、これは普通の意味での unitary ではありません。つまり conjugation は一般には Hermite conjugate とは違います。但し unit circle 上では Hermitian conjugate と同じで、この上で Virasoro 代数の表現を考えれば、普通の意味での unitary 表現になります。そしてそのようにできるのは内積が正の場合に限られます。結局この意味で

$$\text{unitarity} \iff \begin{cases} \text{既約な module (quotient) に対する} \\ \text{covariant form が正定値} \end{cases}$$

が成り立ちます。それでは unitary 表現が、どういう時に可能なかは、Kac 公式を詳しく調べればわかり、次の結果が知られています。(Friedan-Qiu-Shenker)

$$c \geq 1 \quad h \geq 0 \quad (141)$$

or

$$\begin{aligned} c &= 1 - \frac{6(p-p')^2}{pp'} & p-p' = \pm 1, \quad \frac{\alpha_+}{\alpha_-} = -\frac{p'}{p} \\ &= 1 - \frac{6}{m(m+1)} & m = \min(p, p') \geq 3 \\ h_{r,s} &= \frac{(rp - sp')^2 - (p-p')^2}{4p'p}, & \begin{cases} 1 \leq r \leq p'-1 \\ 1 \leq s \leq p-1 \end{cases} \\ &= h_{-r, -s} \\ &= h_{p'+r, p+s} \end{aligned} \quad (142)$$

これから分かるように $c \geq 1$ の時には $h \geq 0$ である限りすべての unitary 表現が可能ですが、 $c < 1$ の時には離散的な値だけが許されます。また $c < 1$ の時の unitary 表現はすべて degenerate 表現になっていることもつけ加えておきます。

• Example of null states

null states が具体的に、どのようにできるのかを例を挙げて示しておきます。

level 1 $L_0|\phi\rangle = h|\phi\rangle$ を用いて

$$L_1 L_{-1}|\phi\rangle = [L_1 L_{-1}]|\phi\rangle = 2h|\phi\rangle = 0$$

よって、 $h=0$ となります。また、

$$L_2 L_{-1}|\phi\rangle = 0$$

は自明です。したがって level 1 のところで null state をつくろうと思ったら $h=0$ です。これは Kac 公式の一番簡単な例になっています。

し

level 2 $L_{-2}|\phi\rangle$ と $L_{-1}^2|\phi\rangle$ の 2 つに対してその線型結合 $(L_{-2} + \alpha L_{-1}^2)|\phi\rangle$ に L_1, L_2 を作用させて、zero になる条件を求める。但し、 α は定数。

41)

$$L_1(L_{-2} + \alpha L_{-1}^2)|\phi\rangle = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{2(2h+1)}$$

さらに、

$$L_2(L_{-2} + \alpha L_{-1}^2)|\phi\rangle = 0$$

から、

42)

$$\begin{aligned} h_{\pm} &= \frac{1}{16}[5 - c \pm \sqrt{(c-1)(c-25)}] \\ &= -\frac{1}{4}(\alpha_+ + \alpha_-)^2 + \frac{1}{4}(2\alpha_+ + \alpha_-)^2 \\ &\text{or} \\ &= -\frac{1}{4}(\alpha_+ + \alpha_-)^2 + \frac{1}{4}(\alpha_+ + 2\alpha_-)^2 \end{aligned}$$

能で
はす

Note ; $c = 26$ という特別な場合を考えます。これは string 理論の critical dimension です。前に述べた free の massless scalar field は central charge が 1 で、もし 26 次元時空を考えてその座標が全部 free の massless scalar field で表せるなら central charge は 26 になります。 $c = 26$ のとき

$$h_+ = \frac{1}{16}(5 - 26 + 5) = -1$$

になりますが、それとは無関係に level 1 の状態で ϕ の conformal dimension が zero なら $L_{-1}|\phi(h=0)\rangle$ は null state になります。また今求めた α から

$$(L_{-2} + \frac{3}{2}L_{-1}^2)|\phi(h_+ = -1)\rangle$$

は level 2 の null state です。重要なことはこの二つの null state $L_{-1}|\phi(h=0)\rangle$ と $(L_{-2} + \frac{3}{2}L_{-1}^2)|\phi(h_+)\rangle$ とがともに L_0 の固有値が 1 の固有状態になっていることです。すなわち、

= 0

$$L_0|\psi\rangle = |\psi\rangle$$

実は string 理論の critical dimension が、なぜ 26 かというと、ちょうどこの事情に関係しています。今回の講義ではやりませんが、string theory で ghost がないという条件に対して、この二つの null state があるということが essential です。

• Role of degenerate fields

degenerate field の役割を少し述べておきます。degenerate field ϕ から null state をつくり、これを ψ として correlation function の中に入れると、これは conformal completeness によって zero となります。すなわち、

$$\begin{aligned} \langle \psi(z) \prod_{i=1} \phi_i(w_i) \rangle &= \langle \sum_{\{n\}} C_{\{n\}} L_{-\{n\}} \phi(z) \prod_{i=1} \phi_i(w_i) \rangle = 0 \\ &= \sum_{\{n\}} C_{\{n\}} \langle \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} dz_1 (z_1 - z)^{-n_1+1} T(z_1) \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} dz_2 (z_2 - z)^{-n_2+1} T(z_2) \cdots \\ &\quad \cdots \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_N} dz_N (z_N - z)^{-n_N+1} T(z_N) \phi(z) \prod_{i=1} \phi_i(w_i) \rangle \end{aligned}$$

が成り立つ。この式は conformal Ward identity を使って degenerate field をふくんだ correlation function についての微分方程式として書き直せる。実際、 z を回る contour, i.e. 内側から $C_N, \dots, C_1$ を、 $\{w_i\}$ たちの周りを逆向きに回る contour, i.e. 内側から $\tilde{C}_1, \tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_N$ に変形し、Ward Identity を用いればよい。

簡単のために、 ϕ_i をすべて primary field と仮定すると、微分方程式

$$\sum_{\{n\}} C_{\{n\}} \hat{\mathcal{L}}_{-n_N}(z; w_N) \hat{\mathcal{L}}_{-n_{N+1}}(z; w_{N+1}) \cdots \hat{\mathcal{L}}_{-n_1}(z; w_1) \langle \phi(z) \prod_i \phi(w_i) \rangle = 0 \quad (143)$$

が得られます。ここで、

$$\hat{\mathcal{L}}_{-n}(z; w_i) = - \sum_{i=1} \left[\frac{(1-n)h_i}{(w_i - z)^n} + \frac{\partial_{w_i}}{(w_i - z)^{n-1}} \right] \quad (144)$$

結局、相関関数 $\langle \phi(z) \prod_i \phi(w_i) \rangle$ は高々、 ψ の level の order の微分方程式を満たすのがわかります。これは非常にきつい条件で、理論に対する一つの dynamical な (conformal symmetry からはでてこない) input になっています。

• Fusion rule for degenerate fields

例えば簡単のためレベル 2 の null state を作り出すような $\phi_{(1,2)}(z)$ という degenerate field をもってくる。いま言ったことから correlation function

$$\langle \phi_{(1,2)}(z) \prod_{i=1}^n \phi_i(z_i) \rangle \quad (145)$$

は微分方程式

$$\left\langle \left(\hat{\mathcal{L}}_{-2} - \frac{3}{2(2h_{1,2} + 1)} \hat{\mathcal{L}}_{-1}^2 \right) \phi_{(1,2)}(z) \prod_{i=1}^n \phi_i(z_i) \right\rangle = 0 \quad (146)$$

すなわち、

$$\left\{ \frac{3}{2(2h_{1,2} + 1)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{(z - z_i)^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial_i}{z - z_i} \right\} \langle \phi_{(1,2)}(z) \prod_{i=1}^n \phi_i(z_i) \rangle = 0 \quad (147)$$

をみます。(Note ; $L_{-1}\phi = \partial_z \phi$)

この微分方程式を使うと Green function の性質、例えば singularity の構造がきつく制限されます。実際、

$$z \sim z_i$$

としたときに、どういう singularity があるのかを調べるために、

$$\phi_{(1,2)}(z) \phi_i(z_i) \sim (z - z_i)^{K_{1,2}} \{ \phi_j(z_i) + \text{descendants} \} \quad (148)$$

とおいて、微分方程式に代入すると、 $K_{1,2}$ に対する代数方程式、

$$\frac{3}{2(2h_{1,2} + 1)} K_{1,2}(K_{1,2} - 1) + K_{1,2} - h_i = 0 \quad (149)$$

が得られる。解は、

$$K_{1,2} = \frac{1}{2} [1 - \alpha_-^2 \pm \alpha_- \alpha_i]$$

となる。ただし $\alpha_{\pm}$ は Kac の公式にでてきたもので、また α_i は ϕ_i の持つ conformal dimension を次のように parametrize したものです。

$$h_i = -\frac{(\alpha_+ + \alpha_-)^2}{4} + \frac{1}{4} \alpha_i^2 \quad (150)$$

$$\alpha_i = n' \alpha_+ + n \alpha_- \quad (151)$$

同様にして $\phi_{(2,1)}(z)$ に対して調べると

$$K_{2,1} = \frac{1}{2}[1 - \alpha_+^2 \pm \alpha_+ \alpha_i] \quad (152)$$

となります。

さて、ここで operator ϕ_j の dimension を h_j とすると、

$$K_{1,2} = h_j - h_i - h_{1,2} \quad (153)$$

が成り立つので、

$$K_{1,2} \Rightarrow h_j = -\frac{(\alpha_+ + \alpha_-)^2}{4} + \frac{(\alpha_i \pm \alpha_-)^2}{4} \quad (154)$$

$$K_{2,1} \Rightarrow h_j = -\frac{(\alpha_+ + \alpha_-)^2}{4} + \frac{(\alpha_i \pm \alpha_+)^2}{4} \quad (155)$$

となって h_j が求まります。

ここでもし ϕ_i も degenerate field とすると必然的に ϕ_j も degenerate field になることがわかります。というのは、 ϕ_i を degenerate field とすると $(\alpha_i \pm \alpha_-)$ や $(\alpha_i \pm \alpha_+)$ は再び、 α_+ と α_- の整数係数の一次結合となるからです。

従って、Fusion rule が degenerate field だけで閉じることになる。式で書くと

$$\phi_{(2,1)}(z)\phi_{(n',n)}(z) = [\phi_{(n'-1,n)}(z)] + [\phi_{(n'+1,n)}(z)] \quad (156)$$

$$\phi_{(1,2)}(z)\phi_{(n',n)}(z) = [\phi_{(n',n-1)}(z)] + [\phi_{(n',n+1)}(z)] \quad (157)$$

となる。もちろん今行なった計算は leading のところでみているので primary field だけでよかったのですが、実際には leading 以外のところに descendants が出てくる。その意味で右辺は $[\phi]$: conformal family にしてあります。

次にこのことを何回もくり返して使ってやります。すると一般に degenerate field の間の積がどのように従うのか簡単に予想できます。

さらに以下のような仮定をします。もともと conformal dimension は $h_{(n',n)} = h_{(-n',-n)}$, $h_{(n'+p',n+p)} = h_{(n',n)}$ というような性質をもっていたので conformal dimension が同じものを identify してしまいます。

$$\phi_{(n',n)} = \phi_{(-n',-n)}$$

$$\phi_{(n'+p',n+p)} = \phi_{(n',n)}$$

もちろん dimension が同じ場がたくさんあっていいわけですが、こういう identification を仮定してみるのです。すると以下の fusion rule が出てきます。

$$\phi_{(n',n)}\phi_{(m',m)} = \sum_{k'=|n'-m'|+1}^{\min(n'+m'+1, 2p'-n'-m'-1)} \sum_{k=|n-m|+1}^{\min(n+m+1, 2p-n-m-1)} [\phi_{(k',k)}] \quad (158)$$

• Character formula for the minimal representation

Minimal 表現に対する Character 公式を導くことにします。そのために表現空間内で固有値を与える様な、対角化された operator を考えます。今の場合それは L_0 すなわち Hamiltonian に対応するもので、それを用いて、character をつぎのように定義します。

Character

$$\chi_{n',n}(\tau) \equiv \text{Tr}_{V_{(n',n)}} \left[e^{2\pi i \tau (L_0 - \frac{c}{24})} \right] \quad (159)$$

ここで前に述べたように Hamiltonian を定数だけずらして、 $H = L_0 - \frac{c}{24}$ と定義しました。従って exponential の肩にあるのは Hamiltonian ですから、これは時間推進を表しているように見えます。ただなぜ Euclidean なのに $2\pi i \tau$ と書いているかということ、 τ を複素数にとっているからで τ の imaginary part が Euclidean 時間で、real part が座標の translation の parameter を表しています。結局、時間推進と座標の translation を両方含めてこの形に書いてあるのです。そして H の固有値が与えられたとして、trace をとったのが character ですから、character とは固有空間の次元を表しています。

もし Verma module で表現が最初から既約だったら、この計算は trivial ですが、今の場合 null state があるので、それを差し引かなくてはならない。そのためには与えられた表現の中に null state がどのように存在しているのか調べる必要があります。

そこでいま出発点として、level $N = n'n$ のところに null state ができるような degenerate field S_0 をもってきます。

$$\phi_{(n',n)} = \phi_{(-n',-n)} = \phi_{(n'+p',n+p)} \equiv S_0 \quad (160)$$

ここで conformal 次元は

$$h_{n',n} = \frac{(n'p - np')^2 - (p - p')^2}{4pp'} \quad (161)$$

で与えられます。そしてこの上の表現を考えて、このときの singular vector の構造を調べると図 1 のような series に書けます。

この series を導くときには $p - p' = \pm 1$ の条件をはずして、より一般的に (minimal model) 考えます。上の null state の構造自体は p と p' の差が 1 でなくても成り立つからです。さて図の意味を簡単に説明すると $S_0(h_{n',n})$ の定義から level が $N = n'n$ のところに null field が存在しますが、この conformal 次元は

$$h_{n',-n} = h_{n',n} + n'n$$

と書けます。ここまでは Kac の公式から明かですが、今 minimal 表現を考えているので n' のかわりに $(p' - n')$, n のかわりに $(p - n)$ とした field も同じ field と見なす。従って level が $N = (p' - n')(p - n)$ のところにも null state があって、その conformal 次元は

$$h_{n',-n+2p} = h_{n',n} + (p' - n')(p - n)$$

となります。今述べた操作がそれぞれ

$$S_0(h_{n',n}) \longrightarrow S_2(h_{n',-n})$$

$$S_0(h_{n',n}) \longrightarrow S_1(h_{n',-n+2p})$$

の arrow (or chain) を意味します。このようにしてできた S_1, S_2 は又 null state ですから、まったく同じようにして null state の arrow を次々につくっていくことができる。ただ注意することは、Kac の公式で level は正に、すなわち (r, s) にとってありますから、 $S_2(h_{n',-n})$ のように、負の suffix がでてきたら、field の identification を使って正になおしてから新しい null state S_3 及び S_4 をつくります。このようにして無限個の null state がつくられるので、既約表現は最初の Verma module の中にできた無限個の sub module を zero とみなして、商空間をつくることです。

$$\mathcal{V}(h_{n',n}) = \mathcal{V}(S_0) \quad / \quad \mathcal{V}(S_1) \oplus \mathcal{V}(S_2) \oplus \dots$$

161)

を調

imal

つか

とこ

ので

って

は

すか

た

ら、

なお

ate

dule

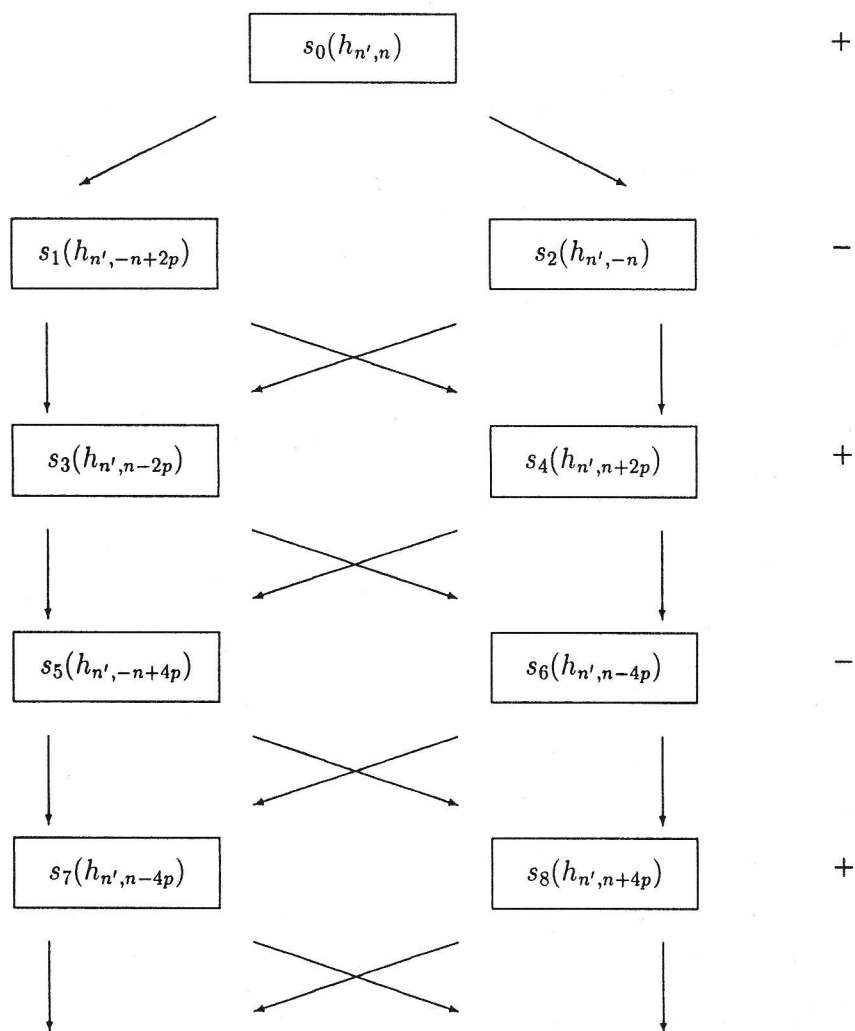


図 1: The structure of singular vectors (Feigin-Fuchs)

このような商空間の構成を character 公式で行うには、まず最初に sub module をつくる null state があることを忘れて単純に character を計算して、そこから sub module のつくる character を次々にひいていきます。このようなことを実際におこなったのが次の公式です。

$$\begin{aligned}\chi_{n',n} &= \text{Tr}_{V(h_{n',n})} \left[e^{2\pi i \tau \left(L_0 - \frac{c}{24} \right)} \right] \\ &= \frac{1}{\eta(\tau)} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(e^{2i\pi\tau \frac{(2p'pj + pn' - p'n)^2 - 1}{4p'p}} - e^{2i\pi\tau \frac{(2p'pj + pn' + p'n)^2 - 1}{4p'p}} \right)\end{aligned}$$

ここで

$$\eta(\tau) = e^{i\frac{\pi\tau c}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i \tau n}) \quad (162)$$

は Dedekind の η -function と呼ばれます。この character 公式の右辺で $j=0$ が $S_0(h_{n',n})$ からつくられる Verma module をあたかも既約だと思って全部足したもので ground state の energy が exponential の肩にのっています。さらに higher excited states があるために Dedekind の η 関数が係数としてかかっている。つまり ground state 上の conformal family の寄与を表しています。ただこれだけでは既約ではないので、null state からつくられる submodule を引かなくてはならない。この時、単純に sub module を引いていくと null state の arrow が二重構造をもっているので、(例えば S_4 は S_1 と S_2 からつくられる。) 二重に引いてしまうことになります。そこで重複が無いように、きちんとひいていくには null state の arrow の図に書いてあるように、まず S_0 の character は足して (+)、次に S_1 と S_2 character は引いて (-)、さらに S_3 と S_4 の character は足して (+)、... というように交互にプラス、マイナスになるように加えていけばいいことが、少し考えると分かります。このようにして求めたのが既約表現に対する character 公式です。

• Hilbert space of general conformal field theory

一般の CFT の Hilbert 空間はこのようにしてできた既約な Virasoro 代数の表現を

holomorphic part と anti-holomorphic part について適当に組み合わせて構成されます。

$$H = \bigoplus_{h, \bar{h}} \mathcal{V}(h, c) \otimes \mathcal{V}(\bar{h}, \bar{c})$$

このことに対応して、一般に CFT にでてくる correlation function は次の形にかけます。

$$\langle \prod \phi_i(z_i, \bar{z}_i) \rangle = \sum_{I, J} d_{IJ} \mathcal{F}_I\{z_i, \tau_i\} \bar{\mathcal{F}}_J\{z_j, \tau_j\}$$

ここで $\mathcal{F}_I\{z_i, \tau_i\}$ は conformal block と呼ばれる analytic な関数を表していて、higher genus の Riemann 面を考えるとときには Riemann 面を指定する parameter である moduli parameter にも依存しています。

Conformal block; $\mathcal{F}_I\{z_i, \tau_i\}$ $\tau_i \cdots$ moduli parameters

このように correlation function は holomorphic な conformal block と anti-holomorphic な conformal block の積を適当に組み合わせて書けていて、その組合せの係数 d_{IJ} は structure constant や表現の次元で決まっている。conformal block の簡単な例としては先ほどの character があげられます。

conformal field theory のもつ、このような構造の、一つの数学的な特徴づけを Friedan-Shenker が与えました。それを以下に述べます。conformal block はすべて線形の微分方程式に従っています。今 modular 変換や、座標変換を考えたときにこれらの変換のもとで、conformal block がどの様に変換するのかを考えると、線形の微分方程式の間の変換ですから、当然、線形に変換するはず。その意味で conformal block は base space を moduli 空間 $\{(z_i, \tau_i)\}$ としたときの一種の vector 束になっています。この vector 束上には Hermitian metric と呼ばれる計量 d_{IJ} が与えられていて、これを用いて、invariant な量(つまり内積)をつくるのです。座標 z_i あるいは moduli τ_i をずらすというのは、言い換えると、energy momentum tensor の作用による conformal 変換のことで、このもとで fibre がどうずれるのか、ちゃんとわかっている。そういう意味で connection (EM-tensor) が与えられています。かつ、その connection は閉じた代数 (Virasoro 代数) を満たしています。このような閉じた代数は実は flat connection に対応しているのですが、今の場合は central extention されているので、その分普通と違って projectively flat と呼びま

す。この connection を非常に大ざっぱな analogy でいうと、普通の gauge 場 A_μ と gauge potential V の関係式

$$A_\mu \sim V^{-1} \partial_\mu V$$

にちょうど energy momentum tensor と partition function の間の関係式

$$\frac{\sqrt{g}}{2} \langle T^{\mu\nu} \rangle \sim Z^{-1} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} Z$$

が対応している。この対応式からも energy momentum tensor が flat connection になっているのが、想像つくでしょう。

5 Minimal models

5.1 Possibility of Solvable models

solvable な model というのは correlation function が原理的には、すべて計算できるという意味ですが、そのようなものの具体的な例として、どういうものが知られているか、その結果を述べておきます。まず、unitary 表現で $m = 3$ の場合を考えると

$$c = 1 - \frac{6}{3 \cdot 4} = \frac{1}{2} \quad (163)$$

$$h_{r,s} = \frac{(3r - 4s)^2 - 1}{48} \quad (164)$$

ここで、

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 3 \\ 1 \leq s \leq 2 \end{cases}$$

となり可能な conformal dimension を表にすると図 2 のようになります。minimal 表現では field の identification があるので、この場合の degenerate field と、その conformal dimension は

$$h_{(1,2)} = h_{(3,1)} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \phi_{(1,2)} \equiv \phi_{(3,1)}$$

$$h_{(2,1)} = h_{(2,2)} = \frac{1}{16} \quad ; \quad \phi_{(2,1)} \equiv \phi_{(2,2)}$$

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	0
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$

図 2: conformal grid $c = \frac{1}{2}$

となります。実はこれが exact に解ける模型の一つである 2 次元 Ising model の conformal dimension と、ちょうど一致しています。これらはそれぞれ energy operator と呼ばれる essential には Boltzmann weight を決める energy と spin operator と呼ばれる order parameter に対応しています。実際これらの operator の次元は critical point での相関関数の振舞いからわかっていて、(Onsager, Kadanoff et al)

$$\begin{aligned} \epsilon &= \text{energy operator } (\sim \sigma_i \sigma_{i+1}) & 2h &= 1 \\ \sigma &= \text{spin operator } (\sim \sigma_i) & 2h &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

となり、holomorphic な conformal dimension が ($2h$ としているのは anti-holomorphic part の寄与も足している) それぞれ先ほどあげた degenerate field の次元と一致していることが分かります。又、これらについて閉じた代数が成り立つことも示されていて次のようになります。

Closed Operator Algebra $\{ I, \sigma, \epsilon \}$

$$I \cdot \sigma = [\sigma] \quad I \cdot \epsilon = [\epsilon]$$

$$\epsilon \cdot \epsilon = [I] \quad \epsilon \cdot \sigma = [\sigma] \quad \sigma \cdot \sigma = [I] + [\epsilon]$$

ここで、 I は identity operator。この例からわかるように Virasoro 代数の構造だけから導かれる性質が実際に知られている model で確かに成り立っている。

これからもっと一般の Virasoro 代数の表現に対応する model が存在するのではないかと予想されます。そこで今いったことを一般化して、すべての primary field が degenerate field になっている model を考えてみますと、無限個の微分方程式が原理的には成りたっ

ているので、ほとんどの correlation function は完全に決まっているだろうと予想されます。すなわち、この model は exact に解ける model に相当するはずです。後は具体的な structure constant さえ計算すれば、すべての correlation function は原理的には計算できるはずです。このような可能性の最も簡単な class の一つが minimal model で、以下この場合に限って話を進めます。(以下では表現の unitarity は仮定しません。)

Minimal Models

$$\begin{aligned} c &= 1 - \frac{6(p-p')^2}{pp'} \\ h_{r,s} &= \frac{(rp - sp')^2 - (p-p')^2}{4pp'} \\ 1 \leq r \leq p' - 1, \quad 1 \leq s \leq p - 1, \quad p < p' \end{aligned} \tag{165}$$

5.2 Methods (or strategies) of explicit construction

実際の構成にあたっていろいろな方法があるのでそれを簡単にまとめておきます。

- Solving differential equations

簡単な場合には実際に微分方程式を解くことが可能。

$$(p, p') = (3, 4) \longrightarrow \text{Ising (BPZ)}$$

$$(p, p') = (4, 5) \longrightarrow Z_3 \text{ model (Dotsenko)}$$

しかし明らかに (p, p') が増えていくと、ひじょうに難かしくなって、実際には計算できない。

- Embedding the models into free field theories (Coulomb gas formalism)

Feigin-Fuchs construction or Coulomb gas 表示と呼ばれるもので free field の理論に埋め込むので一応なんでも計算できる。これは後で述べる様に微分方程式を積分表示に直して解いていると見なすこともできます。Coulomb gas という言葉は free

field として massless の scalar 場を考えているからです。2次元 massless scalar の二点関数は $\log$ で与えられ、これがちょうど二次元での Coulomb 相互作用をする系の potential と同じ形をしています。

- Seeking for exactly solvable lattice statistical models corresponding to minimal CFT's

必ずしも conformal 不変性がなくてもいいから、何か別の方法で exact に解ける model を考えてこれを critical point に持って行って CFT の結果と比較する。但し、この場合解けるといっても全ての correlation function が求まるということはほとんどなくて、せいぜい free energy や相関関数の単純な場合が計算できる程度です。代表的な model としては Restricted Solid-On-Solid (RSOS) model があり、これは minimal model を実際に含んでいます。

- Coset construction (embedding into Kac-Moody algebra)

Kac-Moody 代数を使って Virasoro 代数のいろいろな表現を coset construction で書き表します。

$$V_{min} \simeq SU(2)_N \times SU(2)_1 / SU(2)_{N+1}$$

N ; level of Kac-Moody algebra

$$c = \frac{3N}{N+2} + 1 - \frac{3(N+1)}{N+3} = 1 - \frac{6}{(N+2)(N+3)}$$

この式は Kac-Moody algebra の central charge が coset 構成した後に minimal model の central charge に等しくなっていることを表していて、これで実際に作れそうだという感じは分かってもらえると思います。ただ、こういう構成法では代数の表現としては可能ですが、一般論として correlation function の計算に常に有用かどうかは、まだ明らかではありません。

6 Feigin-Fuchs construction of minimal models

Scalar 場 φ の次の action から出発します。

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \sqrt{g} (\partial\varphi)^2 + \frac{i\alpha_0}{4\pi} \int d^2x \sqrt{g} R\varphi \quad (166)$$

第一項は Polakov action で、第二項は二次元の scalar curvature R に field φ が linear に couple している。これを flat space で考えて energy momentum tensor を計算すると、

$$T_{zz} = -\frac{1}{2} \partial_z \varphi \partial_z \varphi + i\alpha_0 \partial_z^2 \varphi \quad (167)$$

$$T_{z\bar{z}} = i\alpha_0 \partial_z \partial_{\bar{z}} \varphi \quad (168)$$

となります。ここで $T_{z\bar{z}}$ の右辺は Weyl 不変性の破れを意味しますが、これは action の中で Weyl 不変ではない R を含む項からきたものです。これに対して、Polyakov action は Weyl 不変だからこの項には寄与しない。ところが今の場合、運動方程式を使うと

$$T_{z\bar{z}} = 0$$

となります。運動方程式によって conformal 不変性が一見回復するわけです。もちろん曲がった空間では運動方程式を使っても zero ではなくて R に比例する項が残ります。

$$T_{z\bar{z}} \propto i\alpha_0 R$$

しかし、これは trace に anomaly があるようなものですから、前に述べた一般論の枠内で議論することができます。またこの場合 anomaly と言っても量子化してでてきたわけではなくて classical な段階で既に入っているのです、普通の意味での anomaly とは少し違うことを注意しておきます。以下ではこのような energy momentum tensor が与えられたとして標準的な方法で量子化し、conformal field theory と、どの様に対応しているかを調べます。

まず φ は essential に free field だから、その operator 積は

$$\varphi(z_1, \bar{z}_1) \varphi(z_2, \bar{z}_2) \sim -2 \ln |z_1 - z_2| \quad (169)$$

となります。holomorphic part と anti-holomorphic part を分離して

$$\varphi(z, \bar{z}) = \phi(z) + \bar{\phi}(\bar{z})$$

書き直すと、holomorphic part に対しては、

$$\phi(z_1)\phi(z_2) \sim -\ln(z_1 - z_2) \quad (170)$$

となる。次に場を mode 展開します。

$$\phi(z) = q_0 - ia_0 \ln z + i \sum_{n \neq 0} \frac{a_n}{n} z^{-n} \quad (171)$$

$$\partial\phi(z) = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n-1}$$

交換関係は、operator 積から

$$[a_n, a_m] = n\delta_{n+m,0}$$

$$[q_0, a_0] = i$$

となります。

Holomorphic な energy momentum tensor

$$T_{zz} \equiv T = -\frac{1}{2} : (\partial_z \phi)^2 : + i\alpha_0 \partial_z^2 \phi \quad (172)$$

の operator 積を計算すると、

$$T(z_1)T(z_2) \sim \frac{c/2}{(z_1 - z_2)^4} + \frac{2T(z_2)}{(z_1 - z_2)^2} + \frac{\partial_{z_2} T(z_2)}{z_1 - z_2} + \dots \quad (173)$$

但し、

$$c = 1 - 12\alpha_0^2$$

となります。ここで、 $::$ は、normal ordering を意味します。すなわち、 a_n のマイナス mode ($n < 0$) をプラス mode ($n > 0$) の左に来るように並べます。central charge の 1 というのが量子効果で $-12\alpha_0^2$ が classical な寄与です。

これを用いて energy momentum tensor の mode 展開式を求めると

$$T(z) = \sum_n L_n z^{-n-2}$$

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k} a_k - \alpha_0(n+1)a_n \quad (n \neq 0)$$

$$L_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} a_k + \frac{1}{2} a_0^2 - \alpha_0 a_0 \quad (174)$$

となります。ここで action に φ の二階微分が linear に入っていることに対応して L_n に a_n の linear な term が入っています。

○ Fock space $F(\alpha, \alpha_0)$

真空 (vacuum) を次の様に定義する。

$$vacuum = |v(\alpha, \alpha_0)\rangle$$

$$a_n |v(\alpha, \alpha_0)\rangle = 0 \quad n \geq 1 \quad (175)$$

$$a_0 |v(\alpha, \alpha_0)\rangle = \alpha |v(\alpha, \alpha_0)\rangle \quad (176)$$

真空に生成演算子 a_{-n} ($n \geq 1$) を作用させて Fock space

$$F(\alpha, \alpha_0) = \oplus_{k=0}^{\infty} \oplus_{n_i} C a_{-n_1} \cdots a_{-n_k} |v(\alpha, \alpha_0)\rangle$$

を定義する。ここで α_0 は central charge を決める parameter で、 α は a_0 の固有値、すなわち普通の free field theory で言うと momentum に対応します。

また、 F に対して dual な空間を $F^*(\alpha, \alpha_0)$ と書く。すなわち F と F^* の要素は内積を通して一対一に対応していて、次の関係式が成り立ちます。

$$\psi_1 \in F(\alpha, \alpha_0) \quad \psi_2 \in F^*(\alpha, \alpha_0)$$

$$\langle \psi_2, L_n \psi_1 \rangle = \langle L_{-n} \psi_2, \psi_1 \rangle = \langle L_n^* \psi_2, \psi_1 \rangle$$

この式を a_n で読みかえると

$$\begin{cases} a_n^* = -a_{-n} & (n \neq 0) \\ a_0^* = -a_0 + 2\alpha_0 \end{cases}$$

となることがわかります。この式からわかるように $*$ をとると minus 符号が現れますが、Fock space の定義は a_n に対して普通に $n > 0$ が annihilation operator で $n < 0$ が creation operator にしているので、 a_n^* で見るとこのマイナス符号は計量が正定値ではない、すなわち indefinite metric になっていることを意味します。また a_0 の $*$ をとる際に定数だけ translate しなければならないということは background charge (or momentum) が存在するという事です。これらの事情をもう少し詳しく調べてみましょう。

○ Indefinite metric になっていることについて

$a_{-n}|v(\alpha, \alpha_0)\rangle$ を考えると

$$\langle a_{-n}^* v^*(\alpha, \alpha_0), a_{-n} v(\alpha, \alpha_0) \rangle = -\langle v^*, a_n a_{-n} v \rangle = -n \quad n \geq 1$$

従って norm が負になります。

○ Background charge が存在することについて

例えば次のような matrix element を考えると

$$\begin{aligned} \langle v^*(\alpha, \alpha_0), a_0 v(\alpha, \alpha_0) \rangle &= \alpha \\ &= \langle a_0^* v^*(\alpha, \alpha_0), v(\alpha, \alpha_0) \rangle \\ &= \langle (-a_0 + 2\alpha_0) v^*(\alpha, \alpha_0), v(\alpha, \alpha_0) \rangle \end{aligned}$$

となる。従って v^* という dual Fock vacuum の a_0 固有値は

$$a_0 |v^*(\alpha, \alpha_0)\rangle = (-\alpha + 2\alpha_0) |v^*(\alpha, \alpha_0)\rangle \quad (177)$$

となります。すなわち

$$|v^*(\alpha, \alpha_0)\rangle \sim |v(-\alpha + 2\alpha_0, \alpha_0)\rangle \quad (178)$$

となり、vacuum v と dual space の vacuum を比べると momentum が $2\alpha_0$ ずれています。もしこれがなければ単に運動量の保存則で、入って来る momentum と出ていく momentum がちょうど等しくなっていることを意味しているだけです ($-\alpha$ になっている理由)。ここで無理やりもとの vacuum と同じ momentum を持った vacuum を用いて、ある operator K の真空期待値を計算したとすると、これが zero にならないためには K が charge $2\alpha_0$ を持つことが必要で、明らかにつぎの関係式を満たす必要があります。

$$\langle v(-\alpha, \alpha_0) | K | v(\alpha, \alpha_0) \rangle \neq 0 \quad \text{only when } K \text{ has a charge } 2\alpha_0 \quad (179)$$

以上のことをまとめると Fock space $F(\alpha, \alpha_0)$ と、その dual space $F^*(\alpha, \alpha_0)$ との関係は次のようになっています。

$$F^*(\alpha, \alpha_0) \sim F(-\alpha + 2\alpha_0, \alpha_0) \quad (180)$$

$$a_{n_1}^* a_{n_2}^* \dots a_{n_N}^* | v^*(\alpha, \alpha_0) \rangle \sim (-1)^N a_{-n_1} a_{-n_2} \dots a_{-n_N} | v(-2\alpha_0 + \alpha, \alpha_0) \rangle \quad (181)$$

最後の式の $(-1)^N$ は indefinite metric のためです。

ですから、これからやる議論では普通の free field theory ではなく、negative metric を持つような理論です。なぜそうなるのかというと、minimal model は一般に unitary 表現である必要はなく、non-unitary な場合も含むので一般論としては必然的に indefinite metric が入って来るからです。

◦ Vertex operator (emmission of charge α at z)

これまで Virasoro operator と、その Fock 表示を議論してきましたが、次に primary field がどの様に作られるかということが問題になります。free field の場合にはいわゆる vertex operator と呼ばれるものを使えばよくて、次式で定義します。

$$\begin{aligned} V_\alpha(z) &= : e^{i\alpha\phi(z)} : \\ &= e^{i\alpha q_0} z^{\alpha a_0} e^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{n} z^n e^{-\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} z^{-n}} \end{aligned} \quad (182)$$

この vertex operator と energy momentum tensor との operator 積を計算すると conformal

dimension が

$$h = \frac{1}{2}(\alpha^2 - 2\alpha\alpha_0) \quad (183)$$

であることがわかります。

o Embedding of the minimal models

この理論の central charge と、vertex operator の conformal dimension を minimal model に一致するように parameter (α_0, α) を決めてやります。すなわち

$$c = 1 - \frac{6(p-p')^2}{pp'} = 1 - 12\alpha_0^2, \quad (p < p') \quad (184)$$

$$\begin{aligned} h &= \frac{(n'p - np')^2 - (p - p')^2}{4pp'} = h_{n',n} \\ &= \frac{1}{2}(\alpha^2 - 2\alpha\alpha_0) = \frac{1}{2}(\tilde{\alpha}^2 - 2\tilde{\alpha}\alpha_0) \end{aligned} \quad (185)$$

と置きます。ここで、

$$\tilde{\alpha} = -\alpha + 2\alpha_0$$

これらの式から α_0 と α を解くと

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_+ + \alpha_-) \quad (186)$$

$$\alpha_{n',n} = \frac{1}{\sqrt{2}}[(1-n')\alpha_- + (1-n)\alpha_+] \quad (187)$$

但し、

$$\begin{aligned} \alpha_+ &= \sqrt{\frac{p'}{p}} = \frac{\sqrt{1-c} + \sqrt{25-c}}{\sqrt{24}} \\ \alpha_- &= -\sqrt{\frac{p}{p'}} = \frac{\sqrt{1-c} - \sqrt{25-c}}{\sqrt{24}} \end{aligned}$$

です。さらにこの性質を使うと次のような symmetry があることがわかります。

$$\alpha_{n'+kp', n+kp} = \alpha_{n',n}, \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (188)$$

$$\alpha_{-n',-n} = -\alpha_{n',n} + 2\alpha_0 \quad (189)$$

又、あとで重要な役割を果たす $\alpha = \sqrt{2}\alpha_{\pm}$ のときの vertex operator を考えます。これはちょうど

$$h = \frac{1}{2}(\alpha^2 - 2\alpha\alpha_0) = 1$$

を満たすような α のことで、なぜこの場合が重要かというと、このときには少なくとも local には vertex operator の z に関する積分が定義できるからです。つまり $h=1$ から、contour integral に対して density の変換性をするので、global に見て表面積分が残るようなことがなければ、積分が可能なのです。積分可能という意味は、積分の path を連続的に変形して値が変わらないということです。いいかえると Virasoro 代数と可換、

$$[L_n, \oint V_{\pm}] = \oint \partial(z^{n+1} V_{\pm}) = 0$$

ということです。

以下 notation の約束として

$$V_{n',n} \equiv V_{\alpha_{n',n}}$$

$$V_{\pm} \equiv V_{\sqrt{2}\alpha_{\pm}}$$

と置くことにします。

◦ Integration in terms of $\varphi(z, \bar{z})$

Minimal model と一致するように parameter を決めたのですが、このように決めた parameter に、どういう意味づけができるのか簡単にふれておきます。 φ を角度変数と考えて、半径 R の円周上にあると仮定します。角度変数だから一周した時には元に戻らなくてはならない。すなわち

$$\varphi(z, \bar{z}) \longleftrightarrow \varphi(z, \bar{z}) + 2\pi R \quad (190)$$

を同じ場と見なします。 $\varphi = \phi + \bar{\phi}$ を mode 展開すると

$$\phi(z) = q_0 - ia_0 \ln z + i \sum_{n \neq 0} \frac{a_n}{n} z^{-n}$$

$$\bar{\phi}(\bar{z}) = \bar{q}_0 - i\bar{a}_0 \ln \bar{z} + i \sum_{n \neq 0} \frac{\bar{a}_n}{n} \bar{z}^{-n}$$

$$[q_0, a_0] = [\bar{q}_0, \bar{a}_0] = i \Rightarrow \left[\frac{a_0 + \bar{a}_0}{2}, q_0 + \bar{q}_0 \right] = -i$$

ですが、(190) 式は zero mode すなわち $q_0 + \bar{q}_0$ が $2\pi R$ ずれても波動関数に周期性があるという意味で、これを q_0 と a_0 の共役性を用いて表現すると最後の式から a_0 と $\bar{a}_0$ の固有値は次の形に制限されます。

$$\frac{a_0 + \bar{a}_0}{2} = \frac{r}{R} \quad r \cdots \text{integer}$$

次に complex plane で z を原点の周りに一周したとします。あるいは cylinder の picture で言うと cylinder を一周して元に戻ったとします。そのときには元と同じ場になるわけですが、同じ場と言ったときの定義に円周の整数倍だけ不定性があるので、 a_0 と $\bar{a}_0$ に対して

$$a_0 - \bar{a}_0 = sR \quad s \cdots \text{integer}$$

となればよい。いいかえると a_0 と $\bar{a}_0$ は

$$a_0 = \frac{r}{R} + s \frac{R}{2}$$

$$\bar{a}_0 = \frac{r}{R} - s \frac{R}{2}$$

という固有値を持たなくてはなりません。 r は momentum に対応し s は、いわゆる winding number と呼ばれるものです。ここでこの式の R を $R = \sqrt{2}\alpha_+$ と選んでやると a_0 の固有値は

$$a_0 \longrightarrow \alpha_{n',n} = \frac{1}{\sqrt{2}}[(1-n')\alpha_- + (1-n)\alpha_+]$$

但し、

$$1 - n' = -r$$

$$1 - n = s$$

となります。

結局 Feigin-Fuchs construction で minimal model にするために特定の parameter の選び方をしましたが、これは言い替えると、こういう特定の半径を持った circle 上の場を

考えているといってもいいわけです。こういう議論は string 理論で torus や orbifold に compact 化したときに、よくでてきます。

最後に付け加えておきますが、background charge がどうして出てきたのかは、元の action から理解できます。元の action には φ の linear term として

$$\Delta A = \frac{i\alpha_0}{4\pi} \int d^2x \sqrt{g} R \varphi \quad (191)$$

が含まれています。この項があるために作用は $\varphi \rightarrow \varphi + \text{const}$ に対して不変ではありません。すなわち

$$\varphi \longrightarrow \varphi + \text{const.} \implies \Delta A \longrightarrow \Delta A + i\alpha_0 \chi \times (\text{const.}) \quad (192)$$

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{1}{4\pi} \int d^2x \sqrt{g} R \\ &= \text{Euler number} \end{aligned}$$

となります。このままでは circle 上での translation 不変性が壊れる、言い換えると運動量保存則が成立しなくなるわけです。このずれを打ち消して初めて、non-zero の matrix element が得られる。これを回復するには真空が background charge を持つと考えなければならぬわけです。結局、次のようになります。

Existance of background charge

↓

Anomaly with respect to translation

o Correlation functions

Energy momentum tensor も primary field も決まり、それらがすべて free field で書けているので correlation function の計算はただちにできます。correlation function を計算するには結局 vertex operator をいくつか掛けて真空期待値をとればいいわけです。その時、次の性質

$$\lim_{z \rightarrow 0} V_\alpha(z) |v(0, \alpha_0)\rangle = |v(\alpha, \alpha_0)\rangle \quad (193)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \langle v^*(0, \alpha_0) | V_\alpha(z) z^{2h(\alpha)} = \langle v^*(\alpha, \alpha_0) | \quad (194)$$

から、異なる momentum に対応する vacuum は vertex operator を使って互いに交換できるので、結局ある特定の momentum、例えば zero momentum を持った真空から出発して vertex operator を何個か掛けたものの期待値をとる、という操作に必ず帰着できます。

Correlation function を Wick の定理を用いて実際に計算すると

$$\langle v^*(0, \alpha_0) | \prod_{i=1}^n V_{\alpha_i}(z_i) | v(0, \alpha_0) \rangle = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{\alpha_i \cdot \alpha_j} \quad (195)$$

となります。ここで charge conservation あるいは momentum conservation から $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ が必要になります。(195) 式の右辺はちょうど Coulomb gas の energy になっています。

ただ、ここで問題になるのは minimal model に制限してあるのでこのままでは charge conservation が満たされないことです。この事情を見るのに

$$V_\alpha = V_{n', n}, \quad \begin{cases} 1 \leq n' \leq p' - 1 \\ 1 \leq n \leq p - 1 \end{cases} \quad (196)$$

の α の形を思い出すと次のようになっていますが、

$$\alpha_{n', n} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(1 - n')\alpha_- + (1 - n)\alpha_+] \quad (197)$$

これを見て明らかなように $\alpha_\pm$ の係数は必ず 0 以下です。従って一般に、これらをいくつか加えて zero にすることはできません。そこでこの困難を取り除くために screening operator を導入します。これが background charge を運ぶようにするのです。screening operator は、先ほど述べた $V_\pm$ という vertex operator を使って作ることができます。この screening operator を用いて minimal model の vertex operator (screened vertex operator) をあらためて次のように定義します。

$$V_{n', n}^{r', r}(z) \equiv \int V_{n', n}(z) \prod_{i=1}^{r'} V_-(u_i) du_i \prod_{j=1}^r V_+(v_j) dv_j \quad (198)$$

なぜ、このように定義するのかというと、もともと vertex operator は conformal dimension だけで決まっているので一般にはこのような operator であっていいからです。 $V_\pm$ の積分

が well-defined である限り、それは $V_{n',n}^{r',r}(z)$ の conformal dimension に寄与しません。理由は

$$[L_n, \oint V_{\pm}] = 0 \quad (199)$$

だからです。

ただ、このように積分すると一見 non-local に見えますが、積分は path の連続変形に依存しないので、そんなに悪いことをしているわけではない。

次にいくつかの必要な交換関係を計算しておきます。

$$[L_k, V_{n',n}^{r',r}(z)] = \left[z^{k+1} \frac{d}{dz} + h_{n',n}(k+1) \right] V_{n',n}^{r',r}(z) \quad (200)$$

$$[a_0, V_{n',n}^{r',r}(z)] = \alpha_{n'-2r',n-2r} V_{n',n}^{r',r}(z) \quad (201)$$

a_0 との交換関係から分かるように $V_{n',n}^{r',r}(z)$ の charge は正の方にずれています (suffix は負のほうにずれているが)。ですから、screened vertex operator をいくつか混ぜて、この charge が変化するという性質をうまく使えば先ほど満たされなかった保存則 ($\sum_i \alpha_i = 0$) を回復することができます。この vertex operator を用いて non-zero の correlation function を計算することができます。具体的な計算については Dotsenko-Fateev (Nuclear Physics B240('84) 312; B251('85)691) を参照して下さい。ただ一言注意しておくとして screening operator の積分はそれが well-defined になるように積分路を適当に選ぶ必要があります。この時の独立な積分路の数が、微分方程式として解いたときの独立な解の個数に相当しています。

○ “Quasi-unitarity”

これで一応計算はできますが、少し考え直してみると本当にこれでいいのか疑問が生じます。CFT の基本的な仮定は conformal completeness です。すなわち primary state があつたら、その descendant だけで完全系が張れている。これがあつたからこそ degenerate 表現が出てきたらそれをゼロと見なすことができ Green function は微分方程式を満たしたのです。今の formalism で本当にそうなっているのかどうかは自明ではありません。つまり今、状態は negative metric を含む Fock space で張られていますが、それが Virasoro

代数の既約表現と同等であることが保障されているかどうか？

$$1 = \sum_{\{n_1, \dots\}} a_{n_1}^* a_{n_2}^* \dots a_{n_l}^* |v(\alpha, \alpha_0)\rangle (-1)^l \langle v^*(\alpha, \alpha_0) | a_{n_1} a_{n_2} \dots a_{n_l}$$

$$\Downarrow$$

$$1 = \sum_{\{n_1, \dots\} \{m_1, \dots\}} L_{-n_1} L_{-n_2} \dots L_{-n_l} |v(\alpha, \alpha_0)\rangle C_{\{n, m\}}^{-1} \langle v^*(\alpha, \alpha_0) | L_{m_1} L_{m_2} \dots L_{m_k}$$

単純に index の数を比較して状態の個数を比べるというような議論は無限次元では使えません。一応、analyticity を満たすような correlation function で、Riemann 面上で適当な確定特異点を持つようなものは、ほとんど unique に決まりますからその意味で correlation function の計算結果は確かに正しい。しかし operator の level で、これがどのように置きかわるのかは自明ではありません。この問題は Felder が BRST-like な構造に基づいて、その対応関係を明確にしました。詳しい内容は次節で扱うので、ここでは具体的な例をもとに考えてみます。

いま charge zero の Fock space の vacuum に L_{-1} を作用させると、恒等的に次式が成り立つことがわかります。

$$L_{-1} |v(0, \alpha_0)\rangle = 0$$

又、charge が zero なら、この真空の conformal dimension は zero で、その場合には Kac 公式から level 1 に null state が存在することが分かっています。ところが、ちょうど $L_{-1} |v(0, \alpha_0)\rangle$ が null state を作り出す操作で、これが恒等的に zero になってしまうというのが上の結論です。このように恒等的に zero になる state があると明らかに

Fock space の張る空間 $\neq$ Primary state を conformal 変換して張られる空間

が成り立つ。それは同じ level 1 に Fock space では non-zero の状態

$$\text{i.e. } a_{-1} |v(0, \alpha_0)\rangle \neq 0$$

が存在するからです。この $a_{-1} |v(0, \alpha_0)\rangle$ は L_{-1} を使っては絶対に表せない state で、確かに Fock space の完全系と Virasoro 代数を使ってできる conformal descendant の空間

は異なります。もし、こういう状態が correlation function の計算に寄与したとすると、もともと CFT の根本的な仮定としていた conformal completeness を破るわけで、何かこういうことを起こさない mechanism がないといけません。実はこれが BRST 的な構造のために、うまくいっているということを示すことができます。

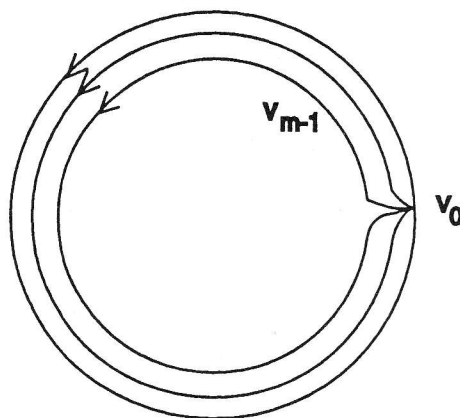
BRST-like structure of Feigin-Fuchs construction

◦ Construcion of null states by vertex operators

Vertex operator のうち、例えば V_+ の方だけをいくつかかけて、次のような operator を作ります。

$$Q_m \equiv \frac{1}{m} \int V_+(v_0) \cdots V_+(v_{m-1}) \prod_{i=0}^{m-1} dv_i \quad (202)$$

この時、積分路を適当に取って積分する必要がありますが、具体的には例えば図の様な積分路を取ります。



この積分は一番外側にある v_0 を固定して置いて、それ以外の変数について先に行いま

す。例えば v_{m-1} というのは z から出発して、又もとにもどってくる。すると end point では singularity があるのですが、point splitting の regularization (あるいは、解析接続) によってそれは適当に定義することにして well-defined にできます。こうしておいて最後に v_0 全体を一周させます。

この operator は Virasoro 代数と可換ですから、任意の整数 k に対して

$$[L_k, Q_m] = 0 \quad (203)$$

が成り立ちます。この性質を使って null state を直接 Fock space の中に作り出すことができます。すなわち、

$$\begin{aligned} L_k Q_m |v(\alpha, \alpha_0)\rangle &= Q_m L_k |v(\alpha, \alpha_0)\rangle \\ &= \frac{1}{2}(\alpha^2 - 2\alpha\alpha_0) Q_m |v(\alpha, \alpha_0)\rangle \delta_{k,0} \quad k \geq 0 \end{aligned} \quad (204)$$

ですから、少なくとも $Q_m |v(\alpha, \alpha_0)\rangle$ が zero にならない限り null state の条件を満たします。また、その conformal dimension は

$$h = h(\alpha, \alpha_0) = \frac{1}{2}(\alpha^2 - 2\alpha\alpha_0) \quad (205)$$

となり、 Q_m の作用のもとで次元は不変であることがわかります。ただし、これは contour 積分が well-defined であればの話で、先ほどの v_0 以外の積分については point splitting (あるいは、解析接続) で well-defined にしたので、あとは v_0 の積分について well-defined にできればよい。そのためには α を minimal model に合わせるように決めた parameter にとっておくと、うまくいくことが簡単に分かります。

$$\alpha = \alpha_{m',m} \quad (206)$$

この m は Q_m をつくるときの V_+ の個数です。どういうことをやればいいのかというと、今 v_0 を一周させますから v_0 を基準に取った他の変数 v_i も、それに応じていっしょに回転しなければならない。Integrability とは要するに uniqueness ですから

$$v_i \longrightarrow e^{2\pi i} v_i$$

と変化したときに Q_m がもとに戻るような一価関数であればよい。この条件は実は charge を $\alpha = \alpha_{m',m}$ とすると満たされます。

また直接計算することによって、次の性質が確かめられます。

$$Q_m |v(\alpha_{m',m}, \alpha_0)\rangle \begin{cases} = 0 & m' > 0 \\ \neq 0 & m' < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} 1 \leq m \leq p-1 \\ 1 \leq m \leq p-1 \end{matrix}$$

m の値が 1 から $(p-1)$ に制限してありますが、これは $\alpha_{m',m}$ の周期性を用いると必ずこの範囲に制限可能だからです。これからわかるように、 $m' < 0$ にとれば、non-zero の null state を Fock space 内に構成することができる。ですから、null state を作っても、それが最初から zero になる場合もあるし、zero でない場合もある。

それから Q_m はその construction からわかるように charge を $\sqrt{2}\alpha_+ m$ だけ持っています。

$$[a_0, Q_m] = \sqrt{2}\alpha_+ m Q_m \quad (207)$$

この性質を使うと次の重要な結果が得られます。まず

$$|v_{m',m}\rangle \stackrel{def}{=} |v(\alpha_{m',m}, \alpha_0)\rangle \in F_{m',m} \quad (208)$$

に Q_m を作用させると α の definition から

$$\alpha_{m',m} + \sqrt{2}m\alpha_+ = \alpha_{m',-m}$$

あるいは、

$$a_0 Q_m |v_{m',m}\rangle = \alpha_{m',-m} Q_m |v_{m',m}\rangle \quad (209)$$

より、

$$Q_m |v_{m',m}\rangle \in F_{m',-m} \quad (210)$$

となることがわかる。すなわち Fock space で

$$F_{m',m} \xrightarrow{Q_m} F_{m',-m} \quad (211)$$

という対応があります。

さらに周期性を用いて

$$F_{m',-m} = F_{p'+m',p-m} \quad (212)$$

とすると、 $(p-m)$ は再び 1 から $(p-1)$ に入ります。従って、この Fock space の元に Q_{p-m} を operate するのは well-defined で

$$Q_{p-m}Q_m|v_{m',m}\rangle \in F_{p'+m',-p+m} = F_{m',m-2p} \quad (213)$$

が成り立つ。これから

$$F_{m',-m} \xrightarrow{Q_{p-m}} F_{m',m-2p} \quad (214)$$

がわかる。

実はこの operator Q_m には nilpotency があることが、直接計算あるいは、もっと一般的な性質からも分かります。

$$Q_{p-m}Q_m = Q_mQ_{p-m} = 0 \quad (215)$$

この nilpotency の帰結として、mapping の sequence

$$\xrightarrow{Q_m} F_{m',-m+2p} \xrightarrow{Q_{p-m}} F_{m',m} \xrightarrow{Q_m} F_{m',-m} \xrightarrow{Q_{p-m}} \dots$$

に次の性質があることがわかります。

$$\text{Ker } Q_m \supset \text{Im } Q_{p-m}$$

$$\text{Ker } Q_{p-m} \supset \text{Im } Q_m$$

となります。

この Q_m という operator は gauge 理論の BRST operator とよく似た性質をもっていて physical operator と可換です。実際、今の場合は vertex operator が physical operator ですから、交換関係

$$Q_{m+n-2r-1}V_{n'n}^{r'r}(z) = e^{\sqrt{2}\pi i\alpha + \alpha_{n'n}(m+n-2r-1)}V_{n'n}^{r'n-r-1}(z)Q_m \quad (216)$$

を直接示すことができます。ただし phase の分だけ異なっているように見えますが、これは operator に phase を含めるように再定義すればいいわけですから、essential ではありません。また、その他の性質

$$[L_k, Q_m] = 0 \quad (217)$$

$$Q_m^* = Q_m \quad (218)$$

をまとめておきます。

o Virasoro sub-module structure of $F_{m',m}$

これから問題にするのは conformal completeness です。それがどの様に表現されるのかを調べます。具体例で見たように negative index を持った Virasoro operator を状態に作用させたときに、恒等的に zero になるような状態があったら実はそれに対応して必ず Virasoro operator の作用では書けない Fock space の状態が存在します。そこで Virasoro operator の descendant を作って、それがどういう時に Fock space の中で恒等的に zero になるのか調べればよい。

$$\text{When } \sum_I c_I L_{-I} |v(\alpha, \alpha_0)\rangle \equiv 0 \quad ?$$

$$L_{-I} = \text{monomials of } (L_{-1} L_{-2} \dots) \quad I = \{n\}$$

いま一般に L_n は Fock space の operator で表現されていますから、必ず a_n で書けるわけです。

$$L_{-I} |v(\alpha, \alpha_0)\rangle = \sum_J C_{IJ} a_{-J} |v(\alpha, \alpha_0)\rangle$$

Fock space の完全性から、上の条件は C_{IJ} に固有値 zero の固有ベクトル c_I が存在することを意味する。

このような null vector ができるということは、それを同じ level のところで L_n を使って表せない状態が Fock space の中にあるということを意味します。

このような事情があるために Fock space の中で null state を表すときには本当に zero になる状態と Fock space では zero にならないけれども、null state として現れる状態を

区別しなくてはなりません。このようなことを詳しく調べてやると図3のような構造がわかります。

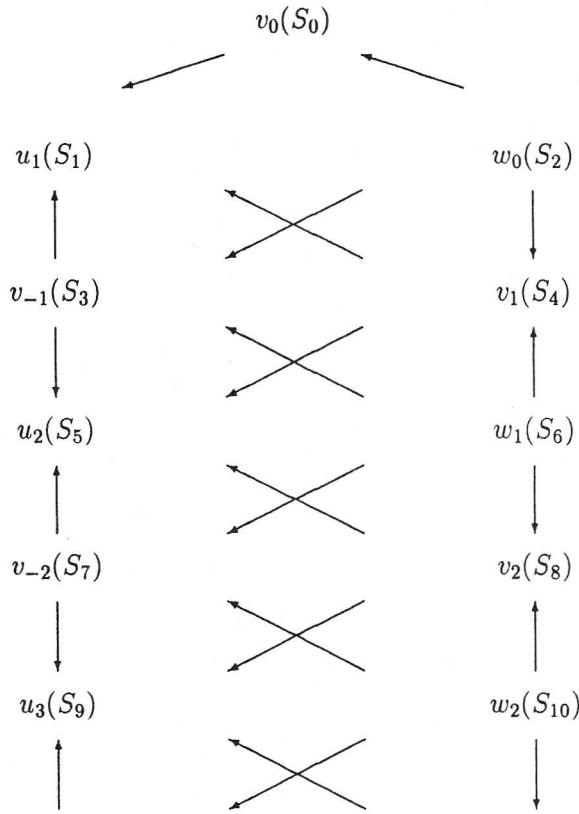
この図の意味を簡単に説明しましょう。まず、character 公式のところ singular vector の構造を議論するときに出てきた embedding pattern $S_1, S_2, \dots$ を書いて置きます。そのうちで、Fock space のなかで、Virasoro operator を作用させて non zero の状態ができるところは u_i と書いたところです。例えば S_1 は vacuum $v_0(S_0)$ から null state を作り出す operation によって作り出されますが、これは、Fock space の中で non zero の vector になっています。

しかし u_i と書いた状態は Fock space で直接 Virasoro operator を作用させてつくと、実は恒等的に zero になってしまいます。ですから、この状態に相当する Verma module に属さない Fock space の状態があるということです。ところがこの状態は、次のように商空間をつくと、再び singular vector になります。まず、 u_i という null state を highest weight state として、sub-module を作ります。それを $SF_{n',n}$ と書くことにします。 v_i という状態は a_n を使って書けている Fock space の element ですが、これに L_n を作用させたら、zero ではない。というのは、この状態は null state ではないからです。しかし、明らかに u_i でつくった sub module の中に入っています。

$$L_k v_i \in SF_{n',n} \quad (k > 0)$$

そこで、この sub-module をもとに、もとの Fock space $F_{n',n}$ の商空間を作ります。すると、その商空間では v_1, v_{-1} といった状態は再び singular vector になります。このことの具体的な例は先ほど言った一番単純な例がそうです。

さらに後残っている S_2 とか S_6 とかいった状態についてですが、これも次のような商空間をつくと、やはり singular vector とみなすことができます。それは先ほどつくった商空間 $F_{n',n}^{(1)}$ を $\{v_i\}$ によってつくられる sub module $SF_{n',n}^{(1)}$ で割って新しい商空間 $F_{n',n}^{(2)}$ をつくってやります。その中で w_i は singular vector と考えていい。すなわち w_i に positive な index をもった Virasoro operator を作用させたら、 $L_k w_i \in SF_{n',n}^{(1)}$ となりますが、そういうものは商空間の中で差し引いてありますから定義によって zero とみなしてよい。したがって singular vector とみなせます。このようにして元の Virasoro の Verma module



Note

$\rightarrow$; action of Virasoro operator

S_i ; singular vector in Verma module

u_i ; non-vanishing singular vectors in Fock space

$SF_{n',n} \equiv$ submodule generated by $\{u_i\}$

v_i ; non-vanishing singular vectors in the quotient

$F_{n',n}^{(1)} = F_{n',n}/SF_{n',n}$, i.e. $L_k v_i \in SF_{n',n}$ ($k > 0$)

$SF_{n',n}^{(1)} \equiv$ submodule generated by $\{v_i\}$

w_i ; singular vectors in $F_{n',n}^{(2)} = F_{n',n}^{(1)}/SF_{n',n}^{(1)}$, $L_k w_i \in SF_{n',n}^{(1)}$

図 3: The structure of singular vectors in Fock space

で singular vector に対応する状態が Fock space の中で分類されます。

最後に図の矢印についてですが、これはいま言ったことを図式で書いたもので Virasoro operator の作用によって状態がどう変化するかを示しています。たとえば w_1 という状態に positive index を持った Virasoro operator を作用させると、それは v_1 から generate される sub-module に入っていますから、矢印は v_1 の方へ向きます。又、 u_i は v_0 から直接 negative の index を持った Virasoro の作用で得られるので図の矢印のようになる。他も同様に行って、このような diagram が得られます。

◦ Mapping of singular vectors among different Fock spaces

先ほど charge の異なる Fock space は screening charge に相当する operator Q で map できるということを述べました。

$$\xrightarrow{Q_m} F_{m',-m+2p} \xrightarrow{Q_{p-m}} F_{m',m} \xrightarrow{Q_m} F_{m',-m} \xrightarrow{Q_{p-m}} \dots$$

そこで Fock space の singular vector がこの mapping のもとで、どのように写されるかを調べることができます。それを表したのが図 4 です。横に書いた矢印が Q による mapping です。実はこの矢印によって結ばれる singular vector の conformal dimension は等しくなっています。このことを例を挙げて見てみましょう。

今 v_0 として $F_{m',-m+2p}$ に入っている vacuum を選ぶと先ほどの約束に従って、これは

$$F_{m',-m+2p} = F_{m'-p',-m+p}$$

と identification できます。ここで $1 \leq m' \leq p' - 1$ ですから $m' - p'$ は負で

$$Q_{p-m}|v_{m'-p',-m+p}\rangle \neq 0$$

となり、この conformal dimension を調べると u_1 と同じ dimension を持っていることがわかります。だからこの vector を u_1 とおいてよくて、実際 u_1 の持つべき性質を持っています。なぜかという $Q_{p-m}v_0$ に positive index をもった Virasoro operator L_n を作用させると L と Q は可換ですから、vacuum に直接作用して、これは zero になります。したがって確かに null vector です。そして $Q_{p-m}v_0$ は $F_{m',m}$ の中の u_1 vector と同

$$\begin{array}{ccccccc}
 & Q_m & & Q_{p-m} & & Q_m & & Q_{p-m} & & Q_m \\
 \longrightarrow & F_{m',-m+2p} & \longrightarrow & F_{m',m} & \longrightarrow & F_{m',-m} & \longrightarrow & F_{m',m-2p} & \longrightarrow & \\
 \text{ghost \#} & -1 & & 0 & & 1 & & 2 & &
 \end{array}$$

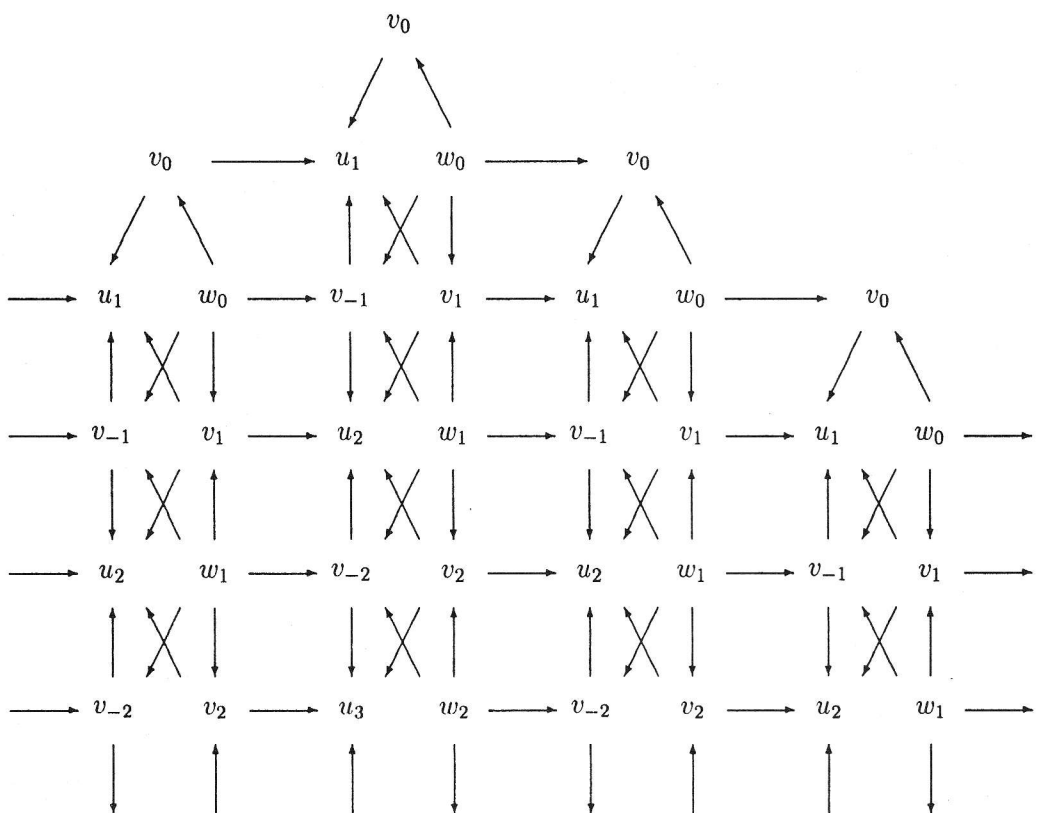


図 4:

じ conformal dimension を持っていますから、 v_0 は u_1 に map されるということがわかります。

同じようにして例えば $w_0 \in F_{m',m}$ から $v_0 \in F_{m',-m} \rightarrow$ mapping されることもわかります。この w_0 はもともと singular vector ではなくて quotient space $F_{m',m}^{(2)}$ で初めて singular vector と見なせるものでした。これが実際に mapping されることを見てみましょう。 v_0 は $F_{m',-m}$ に属しているわけですが、この Fock space の dual をとってやります。

$$(F_{m',-m})^* = F_{-m',m}$$

そしてこの dual space に $Q_m = Q_m^*$ を作用させると先ほどと同じ理由で、これは non zero の vector です。これが non zero の vector なので、必ずこれと dual な状態があるはずで、それを w_0 と置くことにします。なぜこう置いていいかという $w_0 \in F_{m',m}$ と同じ conformal dimension を持っているからです。さて v_0 から w_0 を決めたわけですが、この w_0 が本来持つべき性質を確かに満たしているかどうか調べる必要があります。

いま $Q_m w_0$ に positive な index を持つ Virasoro operator を作用させると

$$L_n Q_m w_0 \equiv L_n v_0 = 0, \quad (n > 0)$$

となります。 Q_m と L_n が可換であることを使うと $L_n w_0$ は Q_m の kernel にあることがわかります。つまり Q_m で annihilate される状態と言う意味ですが、実は conformal dimension を調べると、この状態は必ず $v_0 \in F_{m',m}$ から Virasoro operator の作用で generate される状態に入っていることがわかります。なぜかという w_0 に対して positive な index の Virasoro operator を作用させたから、conformal dimension は下がりますが、 w_0 より次元が低いところには null vector はありません。null vector がなければ、必ず Fock space の状態空間と Virasoro の module の張る空間は同じです。したがって必ず v_0 に Virasoro operator を作用させたところに入っているはずで、これは w_0 の定義そのものでした。というのは w_0 はどういう意味で singular だったかという v_0 からできる Virasoro の module の中に入っていればこれは商空間では zero とみなす。この定義にそのまま一致していますから、これは w_0 そのものと考えていいわけです。このようにして図に書かれた mapping が説明されます。結局、 v_0 という状態を除くと、上で述べたような Q 及び $Q^*(=Q)$ の作用と内積を通して mapping の pair ができます。

ここに現れた構造は gauge 理論の BRST formalism において現われるものと非常によく似ています。その対応を見るのに、まず普通の Fadeev-Popov 場を考えてみます。BRST 変換の元で gauge 場は ghost に、anti-ghost は gauge fixing 条件に変換されます。そして gauge 場と gauge fixing 条件が、又、ghost と anti-ghost が互いに dual な関係になっています。dual ということは、つまり内積が定義されているということです。先ほどの図 4 の構造は、ちょうどそうなっていて screening operator Q で結ばれる pair のうち左にある state を a , 右にある state を b とすると

$$\text{"BRST Quartet"} \quad (219)$$

$$a \xrightarrow{Q} b \quad (220)$$

$$a^* \xleftarrow{Q} b^* \quad (Q^* = Q) \quad (221)$$

となります。ここで a^*, b^* は dual space の元を表していますが、dual space ですから当然 mapping の向きは逆になります。ですからこれは gauge 理論における ghost と anti-ghost の mapping と内積の構造に対応しています。このように BRST 変換で結ばれる 4 つの組を 九後-小嶋に従って quartet と呼ぶことにします。この quartet は unphysical な状態ですから projection operator を導入して、取り除く必要があります。すなわち physical space への projection を考えたい。この時 quartet を projection する operator は次の形になります。

$$|a\rangle\langle a^*| + |b\rangle\langle b^*| = |a\rangle\langle b^*|Q + Q|a\rangle\langle b^*| = \{Q, |a\rangle\langle b^*|\} \quad (222)$$

ここで、 $\{, \}$ は反交換関係を表わす。これからやることは、この projection operator を使って physical space を取り出すことですが、その前に physical space とは何かを、今の場合に考えてみます。もともとの出発点は Fock space $F_{m',m}$ で Virasoro の descendant の張る空間が complete にできるかどうかを問題にしていますが、Fock space の中では complete になっていないことは確かです。そこで BRST charge を導入して physical state を BRST operator で annihilate される状態として取り出すことを考えます。但し、annihilate されるものすべてが physical state ではなくて、何か別の状態を BRST 変換してできたような状態は BRST operator の nilpotency のために、必ず Q で annihilate されますが、こ

ういうものは physical state とみなさない、あるいは zero と考えるのが BRST formalism の基本的な仮定です。このことを式で表すために ghost number を導入します。

“ghost number” of $F_{m',jm+2kp} = N_G$

$$\begin{cases} j = 1 & N_G = -2k \\ j = -1 & N_G = -2k + 1 \end{cases}$$

なぜこのように決めるのかというと BRST charge による mapping の sequence

$$\begin{array}{ccccccc} \xrightarrow{Q_m} & F_{m',-m+2p} & \xrightarrow{Q_{p-m}} & F_{m',m} & \xrightarrow{Q_m} & F_{m',-m} & \xrightarrow{Q_{p-m}} & F_{m',m-2p} \\ \text{“ghost\#”} & -1 & & 0 & & 1 & & 2 \end{array}$$

で Q の作用によって Fock space の charge がずれていきますが、この charge のずれを、ghost number に対応づけられるからです。いま我々は Fock space $F_{m',m}$ に興味がありますから $F_{m',m}$ に physical state condition である ghost number 0 を assign します。そして BRST charge は ghost 数を持っていますから Q を作用させると、上に述べた定義に従って Fock space の ghost 数は変化して行きます。又、ghost number の定義によって、次の関係式も成り立つことがわかります。

$$Q(-1)^{N_G} = -(-1)^{N_G}Q$$

◦ “physical” state condition $\mathcal{H}_p$

結局 physical state の条件は ghost number が zero のところを取り出して、かつ BRS operator を作用させたら zero になる state を取り出すこと、さらに別の状態を BRS 変換した形に書ける状態を足しても、元と同じ状態と見なすことです。

“physical” state condition

$$\begin{aligned} N_G|\psi\rangle &= 0 \\ Q|\psi\rangle &= 0 \quad |\psi\rangle \sim |\psi\rangle + Q|\Lambda\rangle \\ \text{if } N_G \neq 0 \quad \text{Ker}Q &= \text{Im}Q \end{aligned} \tag{223}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathcal{H}_p &= \text{Ker}Q/\text{Im}Q \\ &= \mathcal{V}_{m,m} \text{ (irreducible Verma module)}\end{aligned}\quad (224)$$

図 4 からわかるように、ghost number が zero でない状態で、 Q で annihilate される状態は必ず Q の image になっています。つまり $v_0 \in F_{m',m}$ のように孤立した状態は存在せず、 Q で annihilate される状態はすべて Q の image になっているのです。従って $N_G \neq 0$ なら $\text{Ker}Q = \text{Im}Q$ です。しかし ghost number が zero のところでは v_0 という state が存在して、これは Q_m の image になっていませんから、この時には

$$\text{Ker}Q \supset \text{Im}Q$$

となっています。そして physical state は image の部分を落とすということですから

$$\mathcal{H}_p = \text{Ker}Q/\text{Im}Q$$

となります。

ところがこれはちょうど、今の構造があるために Virasoro の既約な Verma module $\mathcal{V}_{m',m}$ と一対一に対応がついています。

$$\mathcal{H}_p \simeq \mathcal{V}_{m',m}$$

つまり元の Verma module で submodule を落とすということが BRST の physical condition で v_0 だけを残してあとの状態を落とすということに対応している。 v_0 からできる既約な submodule が Virasoro の既約な module に対応しているので、後はこのことを使って conformal completeness を証明すればよい。そのためには BRST 不変性によって $\mathcal{H}_p$ の状態だけが中間状態に寄与する、ということが言えればいいわけです。そこで vertex operator $\mathcal{O}$ の真空期待値を、例えば tree 近似で計算してみます。そして次に $\mathcal{O}$ の間に physical state への projection operator を insertion したものを計算して、前と結果が変わらなければ中間状態に寄与するのが $\mathcal{H}_p$ の状態だけですから conformal completeness が満たされることがわかります。すなわち

$$\langle v_{m',m}^* | \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 | v_{m',m} \rangle = \langle v_{m',m}^* | \mathcal{O}_1 \mathcal{P} \mathcal{O}_2 | v_{m',m} \rangle \quad : \text{quasi-unitarity}$$

where

$$P = 1 - \{Q, B\} = \text{projection operator onto } \mathcal{H}_p$$

$$B = \sum |a\rangle\langle b^*|$$

が成り立てばよい。これが実際に成り立っていることは容易にわかります。つまり先ほど言ったように projection operator は BRST quartets を落とせばよいわけですから、上のように入れられ、これを真空期待値の中に代入すると Q と physical operator の可換性から Q は vacuum $|v_{m',m}\rangle$ に直接かかります。今 m' は正ですから Q で vacuum は annihilate されて、結局 $\{Q, B\}$ は寄与せず、 P を insertion していない、naive に Fock space で計算した真空期待値と一致します。したがって中間状態として寄与するのは、projection された $\mathcal{H}_p$ の state だけで conformal completeness が確かに成り立っていることがわかります。

又、例えば loop 振幅を作りだそうと思うと trace の operation が入ってきますが、その際、そのまま単純に trace をとると明らかに Fock space の状態がすべて寄与してしまう。それでどうしたらいいかというと、これは普通の場合の理論の手続きと同じで次のようにすれば良いことがわかります。

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{v_{m',m}} \{O\} &= \text{Tr}_{F_{m',m}} P O \\ &= \text{Tr}_{F_{m',m}} P (-1)^{N_G} O \\ &= \text{Tr}_{F_{m',m}} (1 - \{Q, B\}) (-1)^{N_G} O \\ &= \text{Tr} (-1)^{N_G} O \quad ; \text{ Fadeev-Popov procedure} \end{aligned} \quad (225)$$

$$(\text{Tr} \{Q, B\} (-1)^{N_G} O = \text{Tr} Q B (-1)^{N_G} O - \text{Tr} B (-1)^{N_G} O Q = 0)$$

これはどういうことかというと、まず physical state へ projection する必要があるために P を insertion します。さらに physical state は ghost number が zero なので $(-1)^{N_G}$ を入れて差し支えない。するとあとは trace の計算で最後の式が得られます。これはまさに普通の Fadeev-Popov の手続きです。つまり physical な振幅を出そうと思ったら ghost number の分だけ統計性を変えて ghost についても全部積分しなさいということです。unphysical な mode も全部加えるとそれらの相殺が起こって physical な振幅が得られるというのが

Fadeev-Popov の手続きです。character 公式はまさにこれの具体的な例になっています。つまり Virasoro の sub module をプラス、マイナスと加えていった既約な module をつくりましたが、ちょうど今でできた $(-1)^{N_G}$ がこのプラス、マイナス に相当していて、physical operator ϕ が $e^{2\pi\tau L_0}$ に相当していることが、すぐに確かめられます (なぜなら $e^{2\pi\tau L_0}$ は Q と可換だから)。もちろん他の全ての correlation function もこうやって計算できます。

結局、最初は Feigin-Fuchs の construction において conformal completeness が満たされているどうか、あまりはつきりしなかったわけですが、BRST 的な構造のおかげで、成り立っているということがわかりました。ただ、今の議論はちょっと、ad-hoc です。だれでもすぐ疑問になるように、何か対称性のようなものが背後に隠されていて、こういう構造になっているのかどうか、つまり重要な問題は今の BRST structure に何か幾何学的な意味付けが与えられるのか、ということです。もし、そういうことが言えたら、もっと一般の model についてどういう風に議論したらいいのかということがわかるはずです。おそらく、これは量子群とか無限個の保存則が存在するということと関係していることはまちがいないと思います。ただ具体的にどういうことかわかっていませんが、それを深く理解できれば、多分、自然にこういう構造を出せると思います。

7 Further strategies

さらに、一般の model をどの様に作るか、ということが問題になりますが、いろいろな方向の一般化がなされています。ここでは、そのようなことをするときの、strategies として、どんなものがあるか簡単にまとめてみます。

一つは、operator product expansion が閉じていること、別の言葉でいうと、duality。あるいは、単純な duality そのものではないですが、modular 不変性。この二つは sewing procedure という言葉で、統一的に理解されるものです。これらを constraint として理論を制限する。Conformal field theory の特徴は、holomorphic part と anti-holomorphic part を独立に扱えて、physical な correlation function は必ず conformal block の組合せでかけるということでした。

$$\sum_{I,J} d_{IJ} \mathcal{F}_I\{z_i, \tau_i\} \bar{\mathcal{F}}_J\{z_j, \tau_j\} \quad ; \quad \mathcal{F}_I\{z_i, \tau_i\} \text{ conformal block}$$

このことがあったので Friedan-Shenker のような数学的な見方ができたわけです。そこでも、議論になったように、conformal block の basis の取り方には、任意性があります。これはベクトルバンドルの basis のとり方の任意性です。同じ Riemann 面をあらわすにしても、modular 変換の自由度があり、modular parameter の取り方は、unique ではない。違ったものは、お互いに線形な関係で結ばれている。physical な振幅はそれに依存しないで unique に定義されるべきです。

String 的な描像では普通の Feynman graph のように、基本となる 3 点関数の様なものをくっつけていって振幅を作りますが、その時、つなぎ方 (sewing procedure) に依らないで理論が定義できるということが duality とか modular 不変性の要求です。duality 変換と言うのは essential には operator 積の associativity ですし、modular 変換は、essential に nontrivial な cycle における Dehn twist と呼ばれるものです。

Riemann 面の一部に二つ vertex が insert されているところを図 5 の左側で表しているとする、点線が、ちょうど左右の vertex の sewing に対応する。Operator product の考えによると、 ϕ_i と ϕ_j の積を別の primary field の conformal family で展開できる。それを行なうと、図 5 の様に見える。sewing を見ると今度は、上下につないでいる。同じ振幅が二通りに見える。これが昔から知られている duality 不変性です。

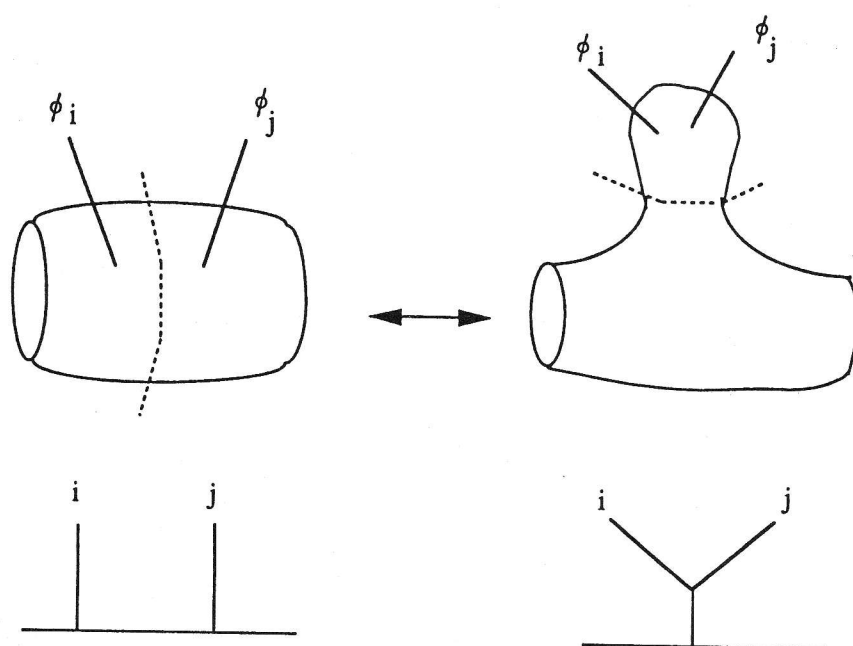


図 5: duality

Conformal block はこれらの変換のもとで線形に変換することが期待されます。Conformal block は線形な微分方程式を満たす。従って、duality 変換や modular 変換から出てくる consistency condition を満たす必要がある。例として有名なのは Pentagon identity (図 6) と呼ばれるもので、3 本足の correlation function を考えます。2, 3 の足に注目して duality 変換する、2 と 3 が fusion して次の (b) になる。この新しい足と 1 の足をさらに fusion して (c)。一方、先に 1, 2 を fusion して、さらに 3 と fusion すると (e)。ところが、2, 3 をさらに fusion すると実は、(c) と同じになる。すなわち道筋は違うが結果は同じになっている。このような consistency、一種の discrete 群の integrability のような条件を満たす必要があるわけです。

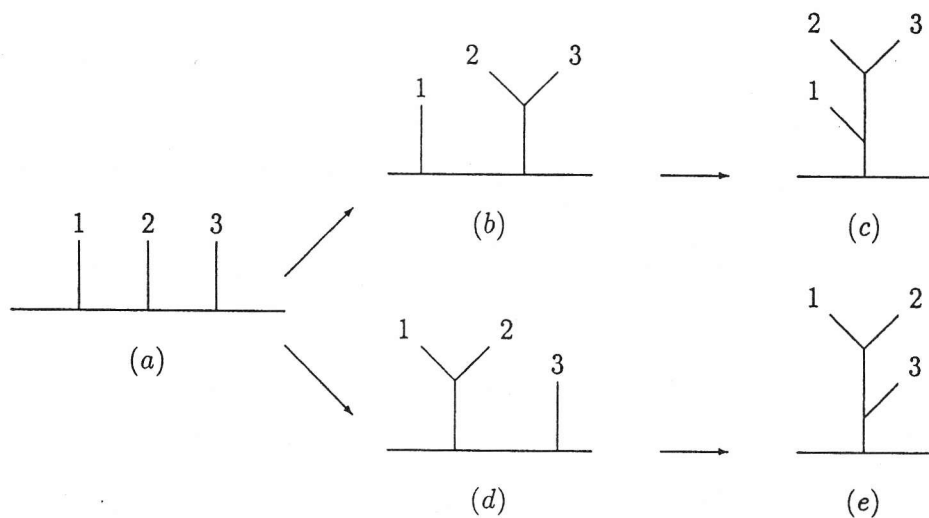


図 6: Pentagon identity

Modular 変換については、torus では平面上で図 7 のような平行四辺形を取り出して対辺を identify することで書ける。ここで sewing procedure を変えるというのは、例えば、対角線上で切り裂いてはじめに identify していた所をくっつける。これがいわゆる T 変換です。また、左下へ変換が S 変換です。しかし、これらはもとはまったく同じものですから、結局 τ と書いても $-\tau^{-1}$ 、または $\tau+1$ と書いてもよいことになる。道筋を変えて同じ結果に行き着くことが、やはり可能であり、ここで得られる consistency condition は例えば、

$$(ST)^3 = S^2$$

というものです。これらの consistency condition によって conformal block の性質がかなり制限され、従って理論を制限することが考えられるわけです。

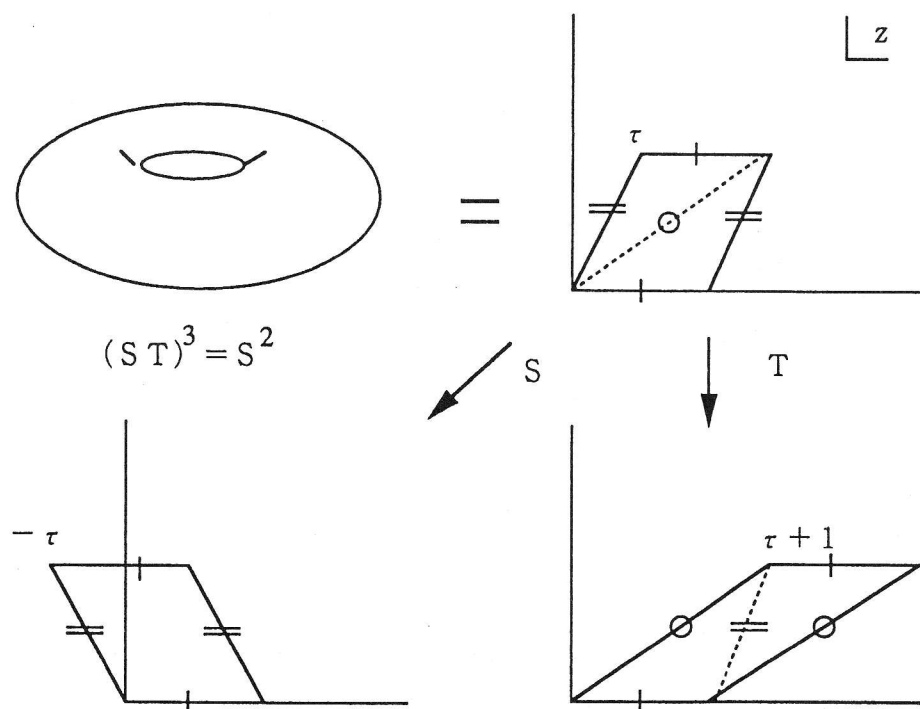


図 7:

また、building block としての tree の vertex と、line を張り合わせる trace の組合せが、この consistency condition を満たせば、自動的に任意の correlation function に対してどんな duality 変換、modular 変換をしてもその不変性は保証されます。例えば、図 8 にあるように任意の genus の closed surface にいくつ field が insert されていても、modular 変換を繰り返せば tree diagram に tadpole をいくつか付けたものになり、essential には、tree の意味での fusion に伴う duality 変換と 1 loop の modular 変換の consistency condition が満たされていれば、ほぼ証明できるわけです。この証明は Moore-Seiberg らの論文で詳しく議論されています。

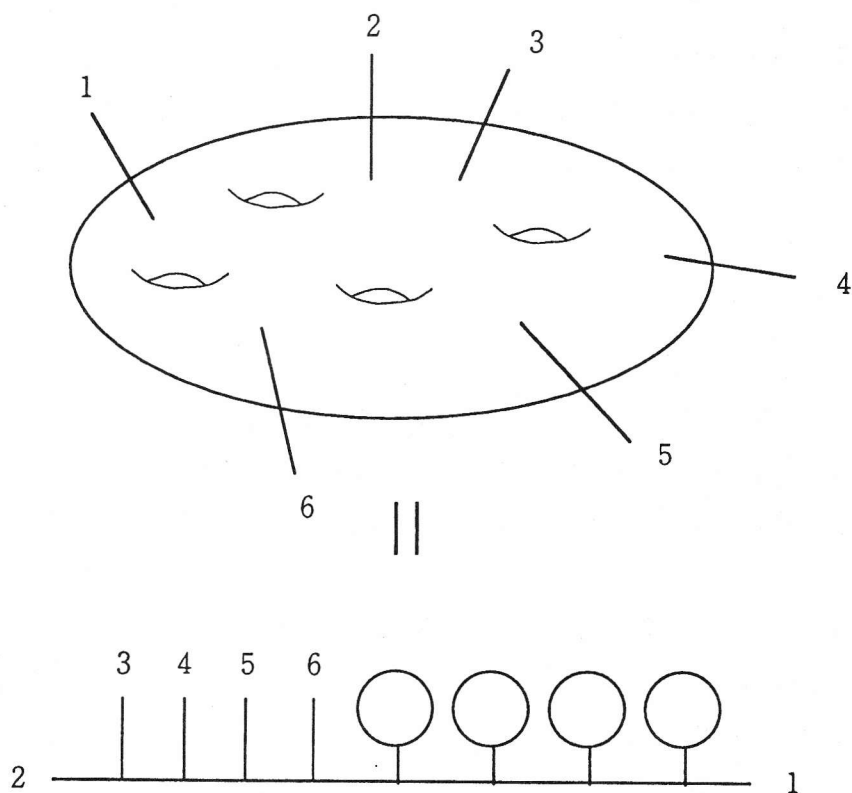


図 8:

ただ、こういう道筋でどれくらい理論が制限できて、具体的にどういう model がどの様に分類されるかということは、あまりまだやられていません。例えば、具体的にやられているのは、minimal 表現の枠内で modular 不変な partition function をすべて分類することです。genus 1 の torus の場合、有名な ADE classification で、なぜかわからないけど、Lie 代数の分類をするときの言葉を使って分類できます。これに相当することをもっと一般的に、genus を高めて、minimal 表現も仮定せずにできればいいわけです。期待は、いくつかの constraint を使ってすべての可能な理論を、少なくとも有限次元の理論なら (conformal block が finite)、制限できるのではないかということです。が、まだ実現はしていません。

さらに、いろいろな model をもっと一般的な framework で表すという試みがあります。一つは、Landau-Ginzberg type の記述で、Zamolodchikov が minimal model や、もう少し一般化した model でも議論しているものです。例えば、central charge が、次のような unitary minimal model の場合、

$$c = 1 - \frac{6}{p(p+1)} \quad p \geq 3 \quad (226)$$

ちょうど、action が、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \lambda\phi^{2(p-1)} \quad (227)$$

であるような理論の critical point に対応すると予想されています。 $p=3$ の場合、 $c=\frac{1}{2}$ で、これは Ising model ですが、その場合は massless の ϕ^4 理論の critical point というわけです。結局、適当な order parameter を用意し、その potential をうまく工夫することによって、いろいろ違った理論を表わそうとする目論見です。ただ、実際にはこの model は解けないので、対応をつけるのは、間接的な方法に頼るしかない。いまのところ、operator product expansion の構造を見てやると、その中に、上の action から導かれると予想される運動方程式が含まれているということで対応づけてます。まだ厳密ではないですが、将来こういう方法で一つのまとまった、かなり多くの model を記述できる可能性があります。とくに $N=2$ の super conformal symmetry をもつ理論では有効に働いているようです。というのは、このような symmetry が、potential の形を強く制限するし、non-renormalization theorem というものもあって potential を使うことが有効なわ

けです。また、 p が非常に大きいところでは、central charge は、1 に近づいて、ほとんど free theory になる。そこでは、摂動展開ができて、違った p の理論が繰り込み群で結び付くことが、Zamolodchikov によって議論されています。

それから、他の approach として、Witten の理論があります。これは、何をしようとしているかという、2+1 次元の Chern-Simons 理論の中に 2 次元の理論を埋め込むというものです。どうしてそんなことができるかという 2+1 次元でもこういう type の理論は物理的自由度が少ない、要するに topological な自由度しかない。式で書けば、

$$\int d^3x \text{Tr}(A \partial A + \frac{2}{3} A^3)$$

↓

$$\langle F_{\mu\nu} \rangle = 0 \cdots \text{flatness}$$

すなわち、運動方程式は field strength が zero、つまり flat という条件が physical space を決める構造になっている。この理論を Hamilton formalism で議論してみると、Chern-Simons 理論の Hilbert 空間は essential には、2 次元 space 上での conformal field theory の conformal block が作る空間に相当しているということが Witten の主張です。すべての conformal field theory が、Chern-Simons 理論に埋め込まれるというわけではありませんが、かなり多くの理論についてうまくいくことがわかっています。

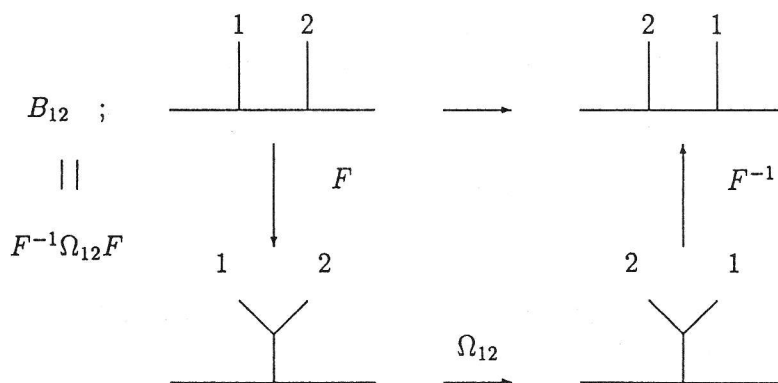


図 9: Braid group

それから他にどんな考え方があるかという、前のものに関係していますが、結び目の理論、Braid の理論があります。これは、先ほどの duality 変換の代わりに次のような変換を考えます。 B_{12} を 1 と 2 の line を入れ換える変換をとすると、これは duality 変換と密接な関係があります。まず、図 9 で 1, 2 の足を fusion すれば、vertex ができる。vertex では 1, 2 の足の入れ換えは簡単にできるので、これをおこないます。そしてまた fusion し直すと結局 1, 2 の line を入れ換えたことになる。すなわち Braid の操作、(Braid 群の element) は、duality 変換と

$$B_{12} = F^{-1}\Omega_{12}F$$

という関係がつくことになる。だから、duality 変換の consistency と Braid 群の consis-

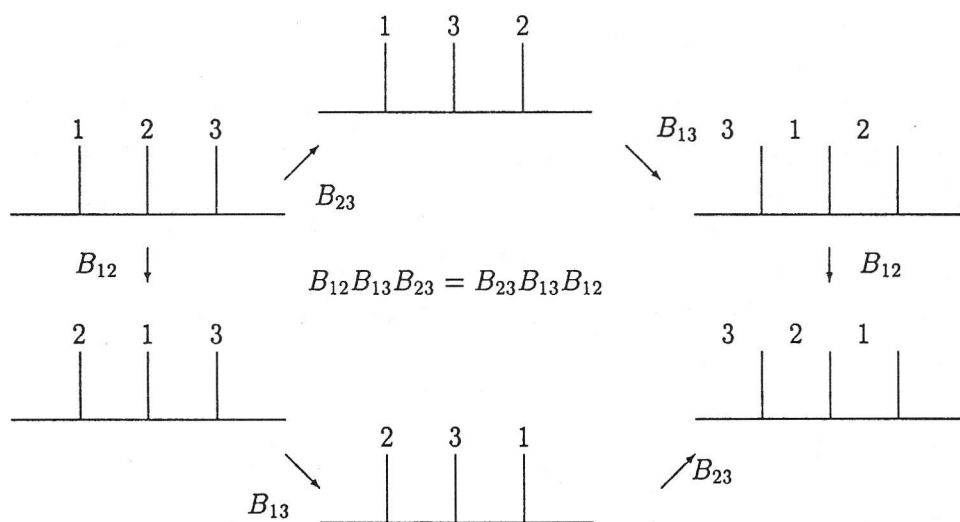


図 10: Yang-Baxter 方程式

tency とは essential に同じことを表しているわけです。 B は有名な Yang-Baxter 方程式を満たします。

$$B_{12}B_{13}B_{23} = B_{23}B_{13}B_{12}$$

2, 3 に着目して入れ換えをして、次に 1, 3 を入れ換え、さらに 1, 2 を変換する。一方、1, 2 に着目すれば 1, 3 に行って、2, 3 に行って同じ結果になる。これも積分可能条件になっています。この consistency を満たすような Braid 群の表現を求めれば、その中に conformal block が入っていないとおかしい。したがって conformal block の空間は Braid 群の表現空間になっているはずです。こういう考え方は、日本の土屋さん達が最初に提唱しました。このような結び目理論の別の表示として conformal field theory を理解できないかという目論見もあるわけです。ただ、こういう approach もいろいろ関係しているわけですが、断片的で、一見偶然に見える形でそれらの関係がわかっているだけで、全体の流れというか、理由というか、総合的な見方はできていません。だからこれからそういうものを作るのが一番大きな問題です。

8 Meanings of CFT and prospects

最後に、結論として conformal field theory の意味と、string theory における意味を考えてみます。conformal field theory というのは mass scale のない理論です。それは standard な場の理論でいうと high energy behavior を記述するのに重要でした。

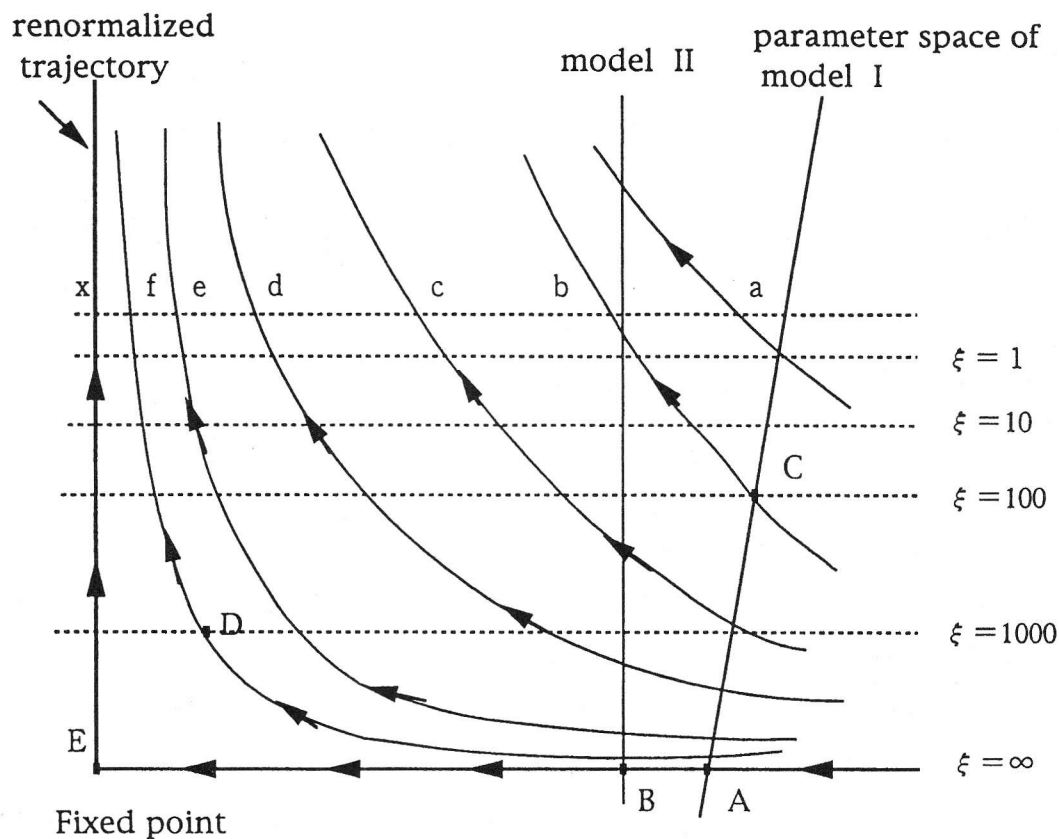
一方、統計物理的にみれば、むしろ large distance の現象、臨界現象を記述できます。臨界現象には、model がなんであろうとその large distance の構造を見ると universal な性質があって、いろいろな違った model の中にいろいろな universal な class が存在する。その同じ class の中では、みな同じ記述ができる。こういう統計物理学的な観点に立つと conformal field theory は、可能な 2 次元、second order (mass scale がないという意味で) の臨界現象の universality class を model に独立に分類しようとしていることになります。

つまり conformal field theory の philosophy というのは Lagrangian とか action を仮定せず、唯一 conformal 不変性のみを仮定してやってきたのであって、まったく model independent なわけです。ですから、何か特定のモデルと対応づけようとするとは内在的な方法ではできない、やはり observable を見るしかない。それはもともと model independent な方法をとっているからしょうがない。

統計物理的な見方では、なぜ universality class がでてくるのかということの一番基本的な説明は Wilson や Kadanoff らが始めたくりこみ群の議論です。その立場で見たとき conformal field theory はどういうところを議論しているかを簡単にみておくことにします。

図 11 はくりこみ群の picture における理論のつくる空間で、regularization の枠内で、local な場の理論 (統計系もすべてふくむ) として可能なもの全体のなす空間とします。もちろん複雑な無限次元の空間になりますが、ここでは簡単に 2 次元で表します。

Wilson 的なくりこみ群の考え方をを用いると、こういう理論の空間にはある特別な surface がある。その一つは critical surface というもので、correlation length が無限大、つまり理論の mass scale が 0 になっている surface です。ここでは、line で書いておきます。この line 上で、もしくりこみ群変換をしたら、correlation length がはじめから無限大なら変換しても無限大ですから、くりこみ群の flow は line にのっています。



ξ = measured in unit of lattice spacing

← trajectory of block spin transformation

renormalized trajectory = renormalization group of continuous field theory

Fixed point describes a universal critical behaviour independently of models

☒ 11:

一方、一般にはまた非常に特定の点で、fixed point というのがあります。fixed point ではくりこみ群変換しても理論は不変ですから correlation length は無限大でなければいけない。もし有限なら、くりこみ群変換で変わるはずですから、必ず critical surface 上に fixed point は乗っている。

一般の model はどうかというと、この空間で何か適当な surface をとって、理論の持つ parameter を動かしたときに理論がその上を動くようにする。違う model は違う surface で表される。その model がどこかで critical behavior を示すということは、model に含まれる温度などの parameter を変えていったときに critical surface の上に達するということで、そこで correlation length は無限大になっている。図では、A, B の点に対応する。

一般に critical surface 以外の点で、くりこみ群変換をすれば理論の形は変わって見えます。なぜなら correlation length は変わっているからです。いま、その correlation length を regularization の cut off を単位に計ったとします。それを ξ として、 $\xi =$ 一定の surface を line で模式的に書いておきます。critical line は ξ 無限大ですから、これから離れるに従って ξ は小さくなっていきます。もし最初の model が C にあったら、ここでくりこみ群変換をすると、どんどん correlation length の小さい方へ移っていく。くりこみ群変換は block spin 変換の意味で言ってますから、理論をだんだん長い scale の observable を使って見直すわけです。もともと理論を長い scale で書き直して見ているので correlation length は短くみえます。

また、model がどこから出発するかによっていろいろな動き方があります。ここで明らかなことは、model の line が critical surface に近いほど、くりこみ変換したときに critical surface の近くにとどまっている時間が長いということです。 ξ が大きければ、くりこみ変換しても相変わらず大きいわけです。したがって全体のくりこみの flow はだいたい図のようになると予想がつく。

そうすると一般に fixed point から何か別な、ある特徴的な line がでることも予想される。その line は、くりこみ変換の flow を critical surface に近づけていくと fixed point から離れていく flow が近づいていく line です。くりこみを続けて行くと最終的には ξ が小さくなっていくのですから図の上の方へ逃げていく。でも critical surface に近いところから出発すれば、critical surface の近くにとどまる時間が長いから D のような flow が自

然です。その極限的なものが、問題の line です。これは renormalized trajectory と呼ばれ、連続理論でのくりこみ群の flow になっている。どうしてかということ、連続極限をとるということは cut off に比べて十分に長い scale で理論を見直すことです。だから ξ を大きくしなければいけない。だからどんどんくりこみ変換をして scale を down させ、physical な scale、例えば ξ が 1 のところの理論を見るわけです。その step が長いほど連続理論に近づきますから a, b, c, d, e, f と行って最終的には renormalized trajectory 上の x が連続理論を記述することになります。そうすると、完全に scale 不変な conformal invariant な理論というのは E, くりこみ変換しても不変な点に対応すると期待されるわけです。こういう理論の場合は、もとの model で critical surface に近づいたときには E の近くに達するまでに無限の時間がかかるわけです。だからどんな model でもいいのですが、同じ critical surface にぶつかるような理論は、その critical point における large scale でのふるまいは E で記述されるのです。

だから fixed point ごとにひとつひとつの違った universality class が対応し、conformal field theory というのは、このような fixed point がどのように存在するか、どのようなふるまいをするかを調べていることになります。統計物理の観点から conformal field theory に期待することは fixed point としてどういう種類のものがあり得るのか、conformal 不変性の仮定のもとで可能な critical behavior がどれだけあるかを分類をしてくれるということなわけです。また fixed point での振舞いがわかれば、そのまわりの近傍もさらに詳しく調べて行くことができると考えるわけです。

次に、string theory からいえば、どういう意味があるかを考えてみます。String theory は Riemann surface にもとづいて理論を作っています。その Riemann surface がどういう役割を果たしているかというと、Riemann 面は、普通の場合の理論での Feynman parameter の作る空間に対応しています。今の string theory は摂動論ですから、ある新しい Feynman rule を構成する規則の集合になっている。普通の場合の理論で摂動をするときは、振幅は、Feynman parameter (Schwinger parameter, proper time ともいう) で書く。そういうものの空間は普通の場合の理論では line になっている。要するに Feynman diagram が line で書かれるわけで、vertex と propagator を組み合わせてできる。そうすると graph を特徴づけるのは vertex を結ぶ propagator の長さになり、それがちょうど Feynman parameter

です。

String theory は propagator として line でなく Riemann surface を持ってきて、その Riemann surface を特徴づける parameter、すなわち moduli parameter を Feynman parameter の代わりとして考えるという一般化をしたといえます。だから string theory というのは必然的に、Riemann surface 上の場の理論を使って作る理論であり、Riemann surface 上の場の理論は conformal 不変性がなければなりません。Riemann surface というのは conformal 変換しても変わらないものです。

Riemann surface の moduli 空間の次元は、ちょうど Feynman parameter の次元と同じになっています。loop の個数がちょうど genus の個数に対応していて、puncture とよばれる vertex を入れたときの Riemann 面の次元が ちょうど external line を入れたときの Feynman parameter の空間の次元と一致している。この Feynman parameter の次元の持つ物理的意味を考えてみます。Feynman parameter は、物理的には parameter が大きくなるところで、unitarity から要請される singularity (Landau singularity) を示す。当然 string theory も S matrix を作る理論であり unitarity を満たすべきです。従って Feynman parameter から出てくる unitarity singularity と同じ構造の singularity をもつべきです。それを自然に出しているのが、同じ次元を持つ moduli parameter で、無限大の極限 (degenerate limit, あるいは nontrivial な cycle を “pinching” する limit) では unitarity singularity が出るようになっていくわけです。そういう意味で Riemann surface は特別の役割を果たしていることになります。Riemann 面でないものと考えたら unitarity がなかなかうまくいかないことが予想されます。例えば membrane など考える model もありますが、上の意味で unitarity を保証することは大変難かしそうです。

このような対応があることがわかれば、string theory には moduli 空間上の積分が必然的に入ってくることになります。だから conformal field theory と string theory の結び付きとして重要なことは、moduli についての可積分性です。integrability とはそういう意味で、積分が consistent におこなわれるということが大切な条件です。

このことができるためには、まず conformal anomaly が打ち消されていないといけない。なぜかと言うと、積分を行うときにはいろんな patch を張り合わせていくわけですが、その patch を張り合わせる時の parameter として moduli parameter が出てくる。そして、

違った道筋にそって積分した時に同じ結果を与えないといけない。Conformal anomaly があるということは、あるいは central charge があるということは conformal 変換が道筋によって違ったものになるということです。Central extension というのは有限変換で言う、こういうことを意味します。ですから、moduli parameter を変えて行ってもとに戻ったとき、その道筋によって phase があらわれて積分可能でなくなってしまうのです。また、それに関連して global な anomaly もあってはいけない。duality とか modular 不変性も満たさなくてはならない。

さらに重要なことは、この integrability のために string の physical な mode は conformal dimension が $(h, \bar{h}) = (1, 1)$ のものに限られます。conformal field theory ではなんでもよかったのですが、string theory では physical mode は $(1, 1)$ でないといけない。そうでないと、積分できない。さきほどの Q という operator も次元が 1 だから積分できたのです。この中に必ず、graviton が入っている。ここで graviton というのは、conformal field theory を埋め込んだ target space を時空と見立てたときに、その時空を無限小だけ deform する operator です。要するに時空の metric の fluctuation です。

結局まとめると、integrable な conformal field theory があれば、それから string theory の Feynman rule が作れるという意味で conformal field theory が現在のところ string theory にとって非常に重要だということです。

Conformal 不変性が、string theory においてどういう役割を果しているかということ、二つあります。一つは、もし conformal 変換を系全体の conformal 変換の generator を使って書いたとすると、実は target space での gauge 変換を generate する generator になっています。すなわち、なにか一つ highest weight state があってそれに negative な index を持つ Virasoro operator を作用させて descendant を作ったとすると、これは必ず physical な mode から decouple します。何故かということ、理論に入っている physical operator はすべて積分されたものであり、negative index の Virasoro operator と可換だからです。ですからこういう operator は中間状態には寄与しないわけです。すなわち gauge mode だということです。string theory ではこのように unphysical mode を作るのに conformal symmetry が使われるのであって、conformal field theory で spectrum を生成するという使い方と対照的です。そうすると string theory で一番問題になるのは ghost がすべて今

のような unphysical mode に押し込められていて unitary な理論になるかということで、これが no-ghost theorem です。

それでは、いままで conformal field theory でやってきたような立場は string theory では意味がないかというと、そうではなくて例えば、string theory の total の Virasoro operator が、

$$L_0^{tot} = L_0^{flat} + \sum_i L_0^i$$

というように、flat space の (例えば、4 次元 Minkowski space の) Virasoro operator と、それに対して独立に compact 化された空間の (例えば、torus とか Calabi-Yau manifold, Orbifold など可能な内部空間の) Virasoro operator との和で書ける場合、すなわち群の空間としては積の構造をしているような product model の場合には、再び spectrum generating algebra としての役割を果たします。どうしてかということ、今言った、次元が 1 というのは total なものについて言えるのであって physical state の条件は

$$h = 1 \quad \Rightarrow \quad L_0^{tot} |phys\rangle = |phys\rangle$$

となります。 L_0^{flat} の spectrum を計算しようとすれば上の関係を使って L_0^i の spectrum がわかればよい。それは compact 化された部分が conformal field theory の公理を満たす様な理論から作られていれば全部 Virasoro の descendant で出来てしまうわけです。だからこのような model を使って内部空間の model を作り得るわけで、その時に今まで議論してきたような conformal field theory の立場が非常に役にたつのです。この時には使い方が少し違うことに注意してください。こういうことを典型的にやっているのが、いわゆる Gepner の construction です。

最後にもっと深く考えたときに conformal symmetry が果してどういう意味を string theory において持つのか見てみます。integrable な conformal field theory の target space (field 自体が動いている空間) が、string theory の space time に対応しているわけですが、統計物理的に考えると conformal field theory は universality class を記述しています。ということは、同じ conformal field theory に target space がいろいろ有り得るということです。

例えば、Ising model は、一番単純には spin の up, down の自由度をもつので target space は 1 と -1 の値からなります。だから、時空が 1 と -1 の二つしかない、そういう理論です。ところが一方、Landau-Ginzburg で記述しますと ϕ^4 です。今度は、時空が何かばけてしまって、potential でいうと図 12 のように、とる値が 1 と -1 からずれてくる。また、さらに同じものを Feigin-Fuchs で書きました。Feigin-Fuchs というのは物理的な見方をすると circle 上に compactify した model になっています。したがって今度は、時空は circle であるといっているわけですね。半径が R 、 R というのは $\sqrt{2}\alpha_+$ でした。そういう circle であるといっている。一方さらに、これを coset space で見直すこともできる。coset space というのは何か、群の manifold の商空間を適当に作ったものです。

こういうものは一見、全然違うものです。それが、全部同じ universality class で同じ conformal field theory なわけです。correlation function の level でみれば。ですから物理量は全部同じになる。だから時空は何でもいいわけですね。だけどこれを、critical point で、すなわち large distance で平均化して見るためにすべて同じに見えるということですね。こういうことを考えると、string theory では時空の short distance の構造がどうなっ

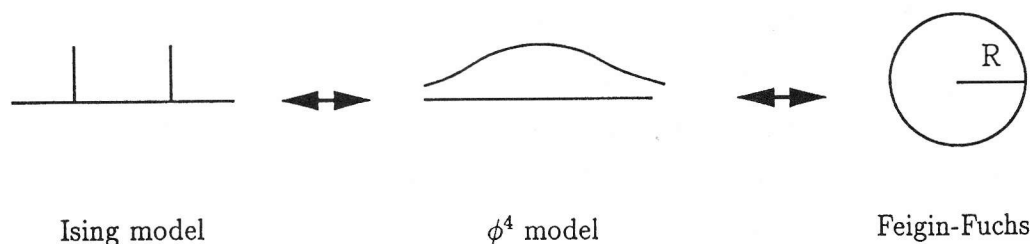


図 12:

ているかということは全然、意味がないといっていることになる。つまり時空の構造は模型によって 1 と -1 とか、図の potential のようだったり、circle だったりするのですが、それを平均化してみれば、全部同じ理論になっていて、また、それだけが observable な意味があるといっているわけです。conformal field theory を採用するのにはこういう意

味があるのです。

それでは、そういうものと我々の現実の理論との対応はどこにあるかという、いわゆる Planck scale です。string theory の長さの特徴付けというのは、唯一 Planck length しかない。Planck length よりはるかに長い scale に行ったら、もちろん我々の普通の時空の描像がとれるはずですが。実際、くりこみ群の枠内で scale がずっと大きいところでの理論というのは、2次元の場の理論の普通の摂動論、いわゆる α' 展開を使って調べることができて、そこではまさに target space は Riemann 幾何学的に記述できる、つまり一般相対論になっていることはわかっています。普通の摂動論でのくりこみの approach をしたり、S-matrix を直接計算してから α' を 0 にする極限をとったりして調べることができる、そういう対応原理的なものがある。だけど Planck scale の近くまで行ったら時空の構造を議論しても意味がないということを示唆している。従って、string theory を本当に non-perturbative にとらえるためには、今いったことを真剣に考えなければならないわけで、どういう枠組みでものごとを考えたらいいのかが問題なわけです。

僕自身の期待というか予想を少し言っておくことにします。conformal field theory というのは integrable であれば string theory になる。その場合、target space が時空だと言いました。しかしその時空の細かいことをいってもしかたない。large scale で見れば、Riemann 幾何学になっている。かつ、Planck scale というのはまさに量子化して始めて出てくる定数です。Planck がこれを発見して一番喜んだことは、Planck constant があれば長さの単位を作れる、ということだったのです。つまり長さの単位は量子化して初めて出てくる。だから、僕は Riemann 幾何学を自然に量子化したら、今はまだわからない量子化の手続きがあって、本来の量子化をしたら、実は自然に integrable な conformal field theory がでてくると期待しています。こういうことを結び付ける何か、量子化を特徴付ける関係がいろいろあるはずですが。一つとしては、時空の短い構造が見えなくなるある種の不確定性原理、そういうものがあるはずですが。そういうものをどう定式化するかが問題であって、前から色々考えているわけです。上で言ったことをひとまとめに見るような見方が将来できあがるのではないかというのが、ぼく自身の考えです。

この立場でいうと、universality というのは、時空はどういうものであってもいいとい

うのですから、ある意味でいえば、general covariance とか equivalence principle の一般化になってる。general covariance というのは 19 世紀の物理学からすれば、革命的だったわけです。つまり 20 世紀の初めでも慣性系が重要な役割を果していた。慣性系でないものを考えるのはあまり意味がないと思われていた。だけど Einstein が言ったことは慣性系でない座標系を使っても物理が同じように記述できるということで、これが general covariance でした。equivalence principle というのも加速度をもたせるということと重力があることは同じであるという、一見違ったものを同一視することでした。そういう意味での拡張だと思われます。universality というのもいろいろな model が全部同等であるといっているのですから。これを general covariance というべきか、equivalence principle というべきかは知りませんが、全部、理論を同じように記述できるという非常に大きな対称性があるということです。

こういうことが出来れば、たぶん将来、最終的には現在の量子論と幾何学というものが完全に融合したような理論ができあがる、というのが一つの夢です。ですから、conformal field theory は非常に technical な側面が強いのですが、実は物理的にも非常に重要な意味を持っているに違いないと思われれます。ですから、その内容を数学的な面からも物理的な面からもいろいろ追求するということは今後も一番重要な課題の一つと考えています。

606-01京都市左京区北白川追分町
京都大学理学部数学教室
上野健爾
Tel: 075-753-3707

