

2024年11月21-23日

岩手大学・教育学部

場の量子論：輻射補正と繰り込み

徳島大学 日置 善郎

I. 場の量子論の基本構成・基本事項

- I-1. 量子場と生成消滅演算子
- I-2. 量子系の時間発展の記述
- I-3. 場の理論でのS行列
- I-4. 伝播関数と時間順序積
- I-5. 朝永-ディラック描像とS行列
- I-6. 散乱断面積と崩壊幅

II. 輻射補正と繰り込み

- II-1. 摂動第1次近似でのスカラー粒子散乱
- II-2. 最低次近似を超えて：輻射補正
- II-3. 紫外発散と繰り込みの考え方
- II-4. 発散積分の有限化：次元正則化法
- II-5. 繰り込み処方：相殺項と繰り込み条件
- II-6. 量子電磁力学の繰り込み
- II-7. 重い粒子の寄与：脱結合定理
- II-8. 赤外発散・質量発散

補遺

- A-1. ループ積分の虚数項
- A-2. ウィックの定理

本講義ノートについて

筆者は、2022年12月・2023年10月・2024年11月と3年連続で岩手大学・教育学部ならびに同・大学院において馬渡研究室に所属する物理学専攻の学生・院生を対象に集中講義を行った。講義題目は、相対論的な場の量子論、特に共変摂動計算の基礎であり、1年目は筆者自身の著書「場の量子論-摂動計算の基礎-第3版」(吉岡書店)の第I章、2年目は同書第II章に基づいた内容で、配布した講義ノートも同書の中身を土台として作成した。これに対して3年目に依頼されたテーマは「輻射補正と繰り込み」で、これは同書には含まれていない事項だったので、新たに講義ノートを作成した上でそれを配布して講義を実施した。

その後、その内容を再点検する中で、計算途中のループ積分に現れる対数の虚部を特に説明することなく落としてしまったことが気になり始め、最低限必要な説明を補遺という形で加えたものを講義ノート増補版として講義出席者に送付した。これによって3回に亘った集中講義も完結したと一旦は考えた。しかしながら、輻射補正と繰り込みというテーマに関しては、筆者自身が長年取り組んだ研究課題であったにも拘わらず自分の言葉で解説したものが(研究論文以外には)何もないと気付き、今回素粒子論研究にて公表すると決めた次第。

但し、これは、あくまで「岩手大学における集中講義」に基づくものなので、投稿に際して大幅な追加説明などは控えた。従って、主な解説は中性スカラー場という最も簡単なシステムを通じて行われており、より現実的な量子電磁力学に関する記述は不十分なままである。一方で、実際の講義においては、受講生は馬渡研究室でのゼミを通じて予習をしてくれていたもので配布したノートでは省略できた説明なども幾つかあるが、本誌に掲載された場合には、一般の読者にそのような予備知識は期待すべきではないことを考慮し、必要最小限の加筆・修正を施した。

なお、本文は第I章と第II章から成っているが、前者は2022年・2023年の講義内容とほぼ同じである。これは、講義ノートとしての整合性・完備性を考えて加えたもので、後者が新しいものである。このノートが、場の量子論を学び始めた学生・院生・その他の方々に「輻射補正」および「繰り込み」への最短入門コース教材として活用されれば幸いである。最後に、このような講義を準備し講義ノートを作成するという実に貴重な機会を与えて下さった馬渡健太郎教授、ならびに教室で熱心に受講して下さい下さった全ての皆様に、心より御礼申し上げます。

2026年1月 日置 善郎

相対論的な場の量子論における共変摂動論は、様々な散乱過程・崩壊過程の精密な記述を可能にする強力かつ信頼性の高い計算手法であり、素粒子物理学の重要な基礎となっている。しかしながら、この理論も、誕生以来しばらくの間は深刻な困難に苦しんでいた。すなわち、その枠内で実際に種々の物理量の計算を始めると、第1次近似（最低次近似）では何の問題も生じないものの、そこで得た結果に対する摂動高次項からの補正〔輻射補正〕にはしばしば発散する積分が現れ、求める物理量が無限大になってしまったのである。

これを解決しようとする試みの中で朝永 - シュヴィンガー - ファインマン が到達したのは「繰り込み」という発想である。これは、理論を記述する基本パラメータを実際に我々が測定する際にはその値は外界からの影響で必然的に変化することに注目し、その差の中に無限大の量を押し込める（繰り込む）、というものである。この操作を施すことにより、考察している物理量から無限大の項は全て除去され、有限な結果が導かれる。この結果、量子電磁力学などにおいては、摂動の高次項まで含めた理論値と対応する実験値の間に見事な一致が見られている。

この講義においては、相対論的場の量子論の基本構成・基本事項を復習したのち、スカラー場の ϕ^4 模型を用いて摂動の最低次および次の近似においてスカラー粒子散乱の不変散乱振幅を計算し、それを通じて発散積分が生まれてしまう仕組みを実際に体験する。次に、その発散量は、どのような考え方により除去できるかを示し、それを系統的に進めるための繰り込み手法を紹介する。続いて、この繰り込み手法が如何に量子電磁力学に適用されるかにつき解説し、最後に、理論と実験の比較において処理しなければならない他の発散 - 赤外発散など - にも簡単に触れる。

I. 場の量子論の基本構成・基本事項

I-1. 量子場と生成消滅演算子

本講義では、ラグランジアン (Lagrangian) が最も基本的な役割を果たすラグランジュ形式 (Lagrange formalism) を採用し、それに基づく正準量子化 (Canonical quantization) の枠内において解説を進める。古典場の系統的な記述方法を整備するために、まず、粒子系の扱いを思い出そう。複数粒子系のラグランジアンは、もし粒子同士が相互作用をしていなければ

$$L = \sum_i L(q_i, \dot{q}_i) \quad (\text{I.1})$$

という形をとる。ここで、右辺の $L(q_i, \dot{q}_i)$ は、粒子 i のラグランジアンである。これを参考にすると、広がった領域に連続的に分布する場の系 - 電場 \mathbf{E} や磁場 \mathbf{H} など - についても、同

様にラグランジュ形式の適用が可能になる。その説明のため、以下では、種々の場を簡潔に ϕ と記し、空間座標 $\mathbf{x} (= (x, y, z))$ の点での時刻 t における場を $\phi(\mathbf{x}, t)$ と表そう。

では、はじめに場 ϕ と座標 \mathbf{x} の役割を明確にしておこう。この \mathbf{x} は、粒子記述に用いる座標（上記の q_i ）と同じ意味を持つのか？ 答えは否である。粒子座標は当該粒子が存在する場所を表しており、質点の場合には“粒子そのもの”と言ってもよい。一方、場の引数としての \mathbf{x} は、単に自由度としての空間各点を区別するパラメータに過ぎない。つまりは、多粒子系の座標の添字 i と同じである。それなら粒子座標 q に相当する量は何か？ それは場 ϕ 自身である：

[場-粒子対応関係]	$\mathbf{x} \longleftrightarrow i,$	$\phi \longleftrightarrow q$
-------------------	-------------------------------------	------------------------------

よって、この ϕ 系のラグランジアン [場のラグランジアン] は、(I.1) 式に倣い \mathbf{x} で区別される各 ϕ を記述する“ラグランジアン的な関数”の総和になる。但し、添字 i は離散的であるのに対し \mathbf{x} は連続的なので、この総和は積分を用いて与えられる。4元座標 $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ を簡単に x と表せば、その形は

$$L = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \equiv \int d^3\mathbf{x} \mathcal{L}(\phi(x), \dot{\phi}(x), \partial_i \phi(x)) \quad (\text{I.2})$$

($i = 1, 2, 3$) である。^{#1} この右辺に現れた \mathcal{L} が、上で述べた「各 ϕ を記述する関数」であり、これをラグランジアン密度 (Lagrangian density) と呼ぶ。^{#2}

このような場の系の変分では、時間および空間積分の境界で $\delta\phi = 0$ が要請され、また、自由度を表すパラメータが連続変数なので、粒子系のラグランジュ方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (\text{I.3})$$

($i = 1 \sim n$) に対応するのは

$$\frac{\delta L}{\delta \phi(x)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(x)} = 0 \quad (\text{I.4})$$

という変分方程式になる【注意：上記 (I.2) 式を見ると、 L は ϕ 及び $\dot{\phi}$ だけでなく $\partial_i \phi$ にも依存するように思えるが、 $\delta[\partial_i \phi] (= \partial_i \delta\phi)$ 項は部分積分で $\delta\phi$ 項と発散項に分かれ、前者は $\delta L/\delta\phi$ に含まれる一方で後者はガウスの定理を通じて表面積分となり境界条件で消える】。これは、

^{#1} 時間座標と空間座標が同等に扱われる相対論的な理論では、 \dot{q} に対応する量は、一般に $\partial_\mu \phi(x) (\equiv \partial\phi(x)/\partial x^\mu)$ となる。

^{#2} 体積積分したものが L になるのだから、正に \mathcal{L} は「 L の密度」である。但し、実際には、 \mathcal{L} も少なからぬ場面で“ラグランジアン”と略称される。ここでも特に厳密な区別はしない。

任意関数 φ とその任意汎関数に対する変分公式 $\delta[\int d^3\mathbf{x}' F(\varphi(x'))]/\delta\varphi(x) = \partial F(\varphi(x))/\partial\varphi(x)$ から直ちに得られる $\delta L/\delta\dot{\phi}$ および上記注意も考慮して導かれる $\delta L/\delta\phi$ の二つ

$$\delta L/\delta\dot{\phi} = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}, \quad \delta L/\delta\phi = \partial\mathcal{L}/\partial\phi - \sum_i \partial_i [\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_i\phi)]$$

を合わせ、 \mathcal{L} についての通常の微分方程式にも書き直せる：

$$\frac{\partial}{\partial\phi(x)}\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x)) - \partial_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha\phi(x))}\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x)) \right] = 0 \quad (\text{I.5})$$

また、この場合の $\phi(x)$ に正準共役な一般化運動量 $\pi(x)$ は

$$\pi(x) = \frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}(x)} = \frac{\partial}{\partial\dot{\phi}(x)}\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x)) \equiv \frac{\partial}{\partial\dot{\phi}(x)}\mathcal{L}(\phi(x), \dot{\phi}(x), \partial_i\phi(x)) \quad (\text{I.6})$$

と導入され、これに基づいてハミルトニアン密度 (Hamiltonian density) \mathcal{H} ならびにハミルトニアン H が

$$\mathcal{H}(\pi(x), \phi(x), \partial_i\phi(x)) = \pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(\phi(x), \dot{\phi}(x), \partial_i\phi(x)) \quad (\text{I.7})$$

$$H = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{H}(\pi(x), \phi(x), \partial_i\phi(x)) = \int d^3\mathbf{x} \pi(x)\dot{\phi}(x) - L \quad (\text{I.8})$$

と定まる。勿論 (I.7)・(I.8) の中では、全ての $\dot{\phi}(x)$ は、全ての $\dot{\phi}(x)$ は、 $\pi(x) = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}(x)$ を $\dot{\phi}(x)$ について解いた $\dot{\phi} = \dot{\phi}(\pi, \phi, \partial_i\phi)$ で置き換えられている。

更に、場が幾つかの成分を持っていたり、異なる種類の場が共存しているような場合には、その一つ一つの自由度 (a) に対して (I.5) が成り立ち、また、 \mathcal{H} を与える (I.7) 式の右辺第 1 項は、全自由度についての和となる： ラグランジアン密度とハミルトニアン密度をそれぞれ $\mathcal{L}(x)$, $\mathcal{H}(x)$ と略記すれば

$$\frac{\partial}{\partial\phi_a(x)}\mathcal{L}(x) - \partial_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha\phi_a(x))}\mathcal{L}(x) \right] = 0 \quad (\text{I.9})$$

$$\mathcal{H}(x) = \sum_a \pi_a(x)\dot{\phi}_a(x) - \mathcal{L}(x) \quad (\text{I.10})$$

それでは、この ϕ 場の量子化を考えよう。はじめに、まず、量子力学における離散固有値・連続固有値に対する波動関数の規格直交関係を思い出そう：

- 離散固有値の場合

$$\int dq \psi_i^*(q)\psi_j(q) = \delta_{ij}$$

- 連続固有値の場合

$$\int dq \psi_k^*(q)\psi_{k'}(q) = \delta(k - k')$$

このように、離散量におけるクロネッカーのデルタは、連続量の場合にはディラック (Dirac) のデルタ (δ) 関数となる。

この対応関係は正準量子化においても同様で、量子力学の出発点である同時刻での p と q の交換関係

$$[p_i, q_j] = -i\delta_{ij}$$

に対する場 ϕ の量子化条件は、 ϕ に共役な一般化運動量 π と共に

$$[\pi(x), \phi(x')] = -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (\text{I.11})$$

と設定される。但し、ここで x, x' は 4 元座標かつ $x^0 = x'^0 (= t)$ である【3 頁で示した〈場-粒子対応関係〉も参照】。これで時刻 t における場の演算子 $\pi(x), \phi(x)$ が決まる。^{#3}

なお、量子化については、本ノートでは一貫して「正準量子化」法を用いているが、他にも「経路積分 (Path-integral) 量子化」や「確率過程 (Stochastic) 量子化」といった方式があることを付記しておく。

以上が場の量子化の基本的な手続きである。そして、このように場が量子化されたあとは、量子場 (演算子) となった ϕ を平面波展開 (運動量展開) し、そこに現れる展開係数から生成消滅演算子が導入され、それに基づいて量子状態 (状態ベクトル) が構成されていく。この作業を、より具体的に

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - \frac{1}{2}m^2\phi^2(x) \quad (\text{I.12})$$

に従う系を例としてスケッチしよう。これは、質量 m の実スカラー場系である。

まず、このラグランジアンからは、ラグランジュ方程式として

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0 \quad (\text{I.13})$$

が導かれる。これは、**クライン-ゴルドン方程式** (Klein-Gordon equation) と呼ばれ、この方程式の古典解が

$$\phi(x) = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} [a(\mathbf{k})e^{-ikx} + a^*(\mathbf{k})e^{ikx}] \quad (\text{I.14})$$

であることは容易に確かめられる。但し、ここでの解の条件は

$$k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \quad (\text{或いは同じことだが } k^2 = k_\mu k^\mu = m^2)$$

^{#3} 注意: 以下この節において時間 t を含む量が幾つか出てくるが、量子化した後の量 (演算子) については、その t は任意の時刻ではなく、この「量子化の時刻」を意味する。それらがその後どのように時間発展していくかについては、次節において考える。

である。これより、 ϕ に正準共役な運動量 $\pi = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi} = \dot{\phi}$ も

$$\pi(x) = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} [-ik^0 a(\mathbf{k})e^{-ikx} + ik^0 a^*(\mathbf{k})e^{ikx}] \quad (\text{I.15})$$

と与えられる。

次に、これら二つの古典場に対し、量子化の手続きとして正準交換関係

$$[\pi(x), \phi(x')] = -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (\text{I.16})$$

及び

$$[\pi(x), \pi(x')] = [\phi(x), \phi(x')] = 0 \quad (\text{I.17})$$

【 $x = (t, \mathbf{x})$, $x' = (t, \mathbf{x}')$ 】を要請すれば、両者は時刻 t で定義された演算子になり、その運動量展開 (I.14)・(I.15) における展開係数 a と a^* は、それぞれ下記の交換関係を満たす演算子 a 及び a^\dagger として ϕ と π の重要な構成要素を務めることになる：

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 2k^0 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (\text{I.18})$$

$$[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = 0$$

$$\phi(x) = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} [a(\mathbf{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx}]_{x^0=t} \quad (\text{I.19})$$

$$\pi(x) = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} [-ik^0 a(\mathbf{k})e^{-ikx} + ik^0 a^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx}]_{x^0=t} \quad (\text{I.20})$$

ここで、 $a^\dagger(\mathbf{k})$ と $a(\mathbf{k})$ は、それぞれ質量 m および運動量 \mathbf{k} を持つスカラー粒子の生成演算子・消滅演算子になっている。

これ以上の詳細な解説については一昨年・昨年の講義ノートに任せるが、要点は、次のようにまとめられる：

- (1) 考察する体系のラグランジアンを定めて、それより一般化座標としての場 $\phi(x)$ が従う運動方程式を導き、完全系を構成する同運動方程式の解で $\phi(x)$ を展開する。運動量の固有状態 [平面波 (Plane wave)] による展開がよく知られた例だが、角運動量の固有状態 [球面波 (Spherical wave)] による展開などを考えることもある。
- (2) 一般化運動量を求め、一般化座標との間に同時刻 (反) 交換関係を設定する。これで、両者は当該時刻における場の演算子となる [場の量子化]。次に、この過程で同じく演算子となった $\phi(x)$ の展開係数 a , a^\dagger 相互の (反) 交換関係を導出する。それに基づけば、それぞれ a と a^\dagger は上記完全系の解が表す状態の粒子 (あるいは反粒子) を 1 個消す演算子 [消滅演算子] および 1 個生み出す演算子 [生成演算子] との解釈が可能になる。また、各種物理量に含まれる場の演算子の積は、すべて正規積として扱う。

(3) 消滅演算子 a を用いて $a|0\rangle = 0$ という条件で真空状態を定義する. 続いて, その $|0\rangle$ に生成演算子を逐次作用させ, 粒子数・運動量が確定した状態を揃えていく: $|\mathbf{p}\rangle = a^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$, $|\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\rangle = a^\dagger(\mathbf{p}_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2)|0\rangle, \dots$. こうして構成した状態の全体 $\{|\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\dots\rangle\}$ は, 個数演算子・運動量演算子の固有ベクトル系として完全系をなす. より詳しく言えば, $\{|\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\dots\rangle\}$ は, 基底として一つのヒルベルト空間 (Hilbert space) を張ることになる. 量子力学・場の量子論で重要な役割を果たす同空間と基底は, それぞれフォック空間 (Fock space) およびフォック基底 (Fock basis) と呼ばれている.

最後の (3) について少し補足しておく. 「生成された状態の全体 $\{|\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\dots\rangle\}$ が完全系をなす」とは, 任意の物理系の状態ベクトル $|\Psi\rangle$ が

$$|\Psi\rangle = \sum_n \int \prod_i^n d^3\tilde{\mathbf{p}}_i |\mathbf{p}_1\dots\mathbf{p}_n\rangle \langle \mathbf{p}_1\dots\mathbf{p}_n|\Psi\rangle \quad (\text{I.21})$$

と展開できるということである. そして, これは, 多体系の量子力学と場の量子論の同等性を示す重要な関係式になる. つまり, 右辺の展開係数 $\langle \mathbf{p}_1\dots\mathbf{p}_n|\Psi\rangle$ は, n 粒子系の (運動量表示) 波動関数に他ならず, 従って, 状態 $|\Psi\rangle$ を用いる物理系の「場の量子論的記述」は, $\{1$ 粒子波動関数, 2 粒子波動関数, $\dots\}$ という多体系波動関数の総体による「量子力学的な記述」と同等という訳である.

さて, ここまでは相互作用は一切考えてこなかった. 実を言うと, 相互作用がある時に系を量子化し必要な量をそれに基づいて計算するのは, 自由場の量子論とは大きく異なり極めて難しい. 上例の実スカラー場系に $\mathcal{L}_1 = -\lambda\phi^4/4!$ という相互作用項を加えた

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - \frac{1}{2}m^2\phi^2(x) - \frac{\lambda}{4!}\phi^4(x) \quad (\text{I.22})$$

というラグランジアンを考えてみよう. これは $\lambda\phi^4$ 模型と呼ばれており, λ は相互作用の強さを特徴づける **結合定数** (Coupling constant) である. このとき, 場が従う方程式は

$$(\square + m^2)\phi(x) = -\frac{\lambda}{3!}\phi^3(x) \quad (\text{I.23})$$

となる. この例が示すように, 相互作用の存在により場の運動方程式は一般に

$$(\square + m^2)\phi(x) = j(x) \quad (\text{I.24})$$

という形に変わる. それでも, この解を

$$\phi(x) = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} q(\mathbf{k}, t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

と展開すること自体は可能だが、これを (I.24) 式に代入しても、自由場の時のような調和振動子型の微分方程式は得られない。また、全体が実になるように係数 $q(\mathbf{k}, t)$ を分解して

$$\phi(x) = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} [a(\mathbf{k}, t)e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} + a^*(\mathbf{k}, t)e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}]$$

と書き直しても、 $a(\mathbf{k}, t)$, $a^*(\mathbf{k}, t)$ の時間依存性は具体的に相互作用の形が与えられないと決定できないし、 $\lambda\phi^4$ 模型のように \mathcal{L}_1 を決めたとしても、その形は複雑になるため生成消滅演算子のような解釈は無理である。

このため、散乱過程の扱いにおいては、反応の遙か前および後では相互作用の影響は無視できると仮定し、そのような時間領域で系の量子化を行う。 反応が起こる時刻を 0 とした場合、相互作用項に $e^{-\epsilon|t|}$ というような因子（但し ϵ は無限小定数）が掛かっていると考えるのである。事実、この因子は、時間が有限の時には単に 1 になってしまうだけだが、 $t \rightarrow \pm\infty$ では急速に 0 に近づく。これを認めれば、必要な作業は、自由な場の生成演算子から構成された状態ベクトルが相互作用の影響で如何に時間発展するかを調べることとなる。そこで、「量子系の時間発展の記述」を次節の主題とする。

I-2. 量子系の時間発展の記述

前節で説明したように、古典場の体系は、ある時刻 t_0 を選びそこで場の量 [一般化座標と一般化運動量] の間に同時刻 (反) 交換関係

$$[\pi(x), \phi(y)]_{x^0=y^0(=t_0)} = -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

を設定することで量子場の体系となる。そして、これにより得られた量子場 (場の演算子) $\phi(\mathbf{x}, t_0)$ に含まれる生成消滅演算子を用いればこの時刻における状態ベクトル $|\Psi(t_0)\rangle$ も確定できる訳だが、物理として重要なのは、このあと体系が時間経過と共に相互作用の影響でどのように変化していくかである。ある場合には、粒子同士が衝突し別の粒子を生成するだろう。或いは、幾つかの粒子が崩壊するかも知れない。ともかく、どんな現象がどんな確率で起こるかを詳しく調べ、それを実験結果と比較することが、系とそこで働く力 (相互作用) の性質の理解にとって必要不可欠である。

系の時間発展の代表的な記述法 [描像] には **シュレディンガー描像** (Schrödinger picture)、**ハイゼンベルク描像** (Heisenberg picture) と **朝永-ディラック描像** (Tomonaga-Dirac picture) [または **相互作用描像** (Interaction picture)] の 3 種類がある。例として、量子化の時刻 t_0 に任意の状態 $|\Psi(t_0)\rangle$ と $|\Phi(t_0)\rangle$ および任意の演算子 $Q(t_0)$ がつくる行列要素 $\langle\Phi(t_0)|Q(t_0)|\Psi(t_0)\rangle$

が如何に時間進行していくか考えてみよう。このような場合、状態ベクトルも演算子もそれぞれ固有の規則に従って変化し 時刻 t での行列要素は $\langle \Phi(t)|Q(t)|\Psi(t) \rangle$ となる、というのが一般的予想だろうが、上記三つの描像は、これを次のように扱う：

- [シュレディンガー描像] 状態ベクトルのみが時間発展し、演算子是不変。
- [ハイゼンベルク描像] 演算子のみが時間発展し、状態ベクトル是不変。
- [朝永-ディラック描像] 状態ベクトル・演算子の両方が、共に時間発展する。

このように、3描像は正に“三者三様”である。もっとも、各描像間の差は本質的なものではない。それは、単に（異なる座標系から同一の現象を眺めるのと同じく）立場の違いであり、どの方式で物理的な計算を進めようと、上掲の行列要素も含め常に同じ結果が出るよう三者は関係づけられている。但し、この先説明するように、摂動計算に最適なのは朝永-ディラック描像である。

以下ではシュレディンガー描像・ハイゼンベルク描像・朝永-ディラック描像における演算子および状態ベクトルは $S \cdot H \cdot T$ という添字で区別し（但し、どの描像でも同じになる量には何も付けない）、基準となる量子化の時刻 t_0 の場の演算子と状態ベクトルは $\phi_0(\mathbf{x})$ 及び $|\Psi_0\rangle$, $|\Phi_0\rangle$ と表すことにする。

1. シュレディンガー描像

この描像では、演算子としては時刻 t_0 での量子化で決まった $[\phi_0(\mathbf{x})]$ のみが使われ、状態だけが

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle_S = H |\Psi(t)\rangle_S \quad (\text{I.25})$$

に従い変化していく。ここで、勿論ハミルトニアンも演算子なので $\phi_0(\mathbf{x})$ で表されている。この $\phi_0(\mathbf{x})$ に含まれる $a^\dagger(\mathbf{p})$ が本描像での生成演算子であり、フォック基底もこの生成演算子から構成される。なお、この描像の場の演算子はしばしば $\phi_S(\mathbf{x})$ と表されるが、これは $\phi_0(\mathbf{x})$ のことである：

$$\phi_S(\mathbf{x}) = \phi_0(\mathbf{x}) = \int d^3 \tilde{\mathbf{k}} \left[a(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} + a^\dagger(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \right]_{x^0=t_0} \quad (\text{I.26})$$

上掲の微分方程式 (I.25) を $|\Psi(t_0)\rangle_S = |\Psi_0\rangle$ という境界条件の下で解くのがこの描像に必要な作業であるが、その解は

$$|\Psi(t)\rangle_S = e^{-iH(t-t_0)} |\Psi_0\rangle \quad (\text{I.27})$$

あるいは、時刻 $t_{1,2}$ の状態の関係として

$$|\Psi(t_2)\rangle_S = e^{-iH(t_2-t_0)}|\Psi_0\rangle = e^{-iH(t_2-t_1)}e^{-iH(t_1-t_0)}|\Psi_0\rangle = e^{-iH(t_2-t_1)}|\Psi(t_1)\rangle_S$$

と書ける。但し、(I.27) は、相互作用がない自由状態 ($H = H_0$ と表す) なら

$$H_0|\Psi_0\rangle = H_0 a^\dagger(\mathbf{p}_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2)\cdots|0\rangle = (p_1^0 + p_2^0 + \cdots)|\Psi_0\rangle = E|\Psi_0\rangle$$

【 $E \equiv p_1^0 + p_2^0 + \cdots$ は状態 $|\Psi_0\rangle$ の全エネルギー】より

$$|\Psi(t)\rangle_S = e^{-iE(t-t_0)}|\Psi_0\rangle$$

と簡単になるが、相互作用の下では形式的な表現と言わざるを得ない。^{#4}

しかし、ともかく (I.27) 式を用いれば、時刻 t_i において Ψ_i という状態にあった系が時刻 t_f に Ψ_f という状態に遷移する確率振幅 $\mathcal{A}(\Psi_i \rightarrow \Psi_f)$ も、(形式的ながら) コンパクトな式で表せる: 話を具体的にするために、始状態 Ψ_i と終状態 Ψ_f をそれぞれ運動量が $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ の n 粒子系および $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m$ の m 粒子系とすると、対応する状態ベクトルは

$$|\Psi_i\rangle_S = a^\dagger(\mathbf{p}_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2)\cdots a^\dagger(\mathbf{p}_n)|0\rangle$$

$$|\Psi_f\rangle_S = a^\dagger(\mathbf{q}_1)a^\dagger(\mathbf{q}_2)\cdots a^\dagger(\mathbf{q}_m)|0\rangle$$

と与えられ、求める確率振幅は

$$\mathcal{A}_S(\Psi_i \rightarrow \Psi_f) = {}_S\langle\Psi_f|\Psi(t_f)\rangle_S = {}_S\langle\Psi_f|e^{-iH(t_f-t_i)}|\Psi(t_i)\rangle_S \quad (\text{I.28})$$

【但し、ここでは $|\Psi(t_i)\rangle_S = |\Psi_i\rangle_S$ が初期条件】となる。

なお、通常はシュレディンガー描像での演算子や状態は時刻 $t = 0$ の量として導入されるが、ここでは一般性を保つために $t = t_0$ を基準とした。このため、以下ではしばしば他の教科書と $e^{(-)iHt_0}$ といった因子だけの差が現れる。これが気になる読者は、本ノート of t_0 を全て 0 と置かか、あるいは、逆に他の教科書の対応する箇所ですべての時間変数 t を $t - t_0$ で置き換えればよい。

2. ハイゼンベルク描像

この描像では、(シュレディンガー描像とは逆に) 状態はそのままで演算子の方が時間発展する。但し、すでに述べた通り、どちらの描像に立とうと演算子の行列要素は同じになるよう

^{#4} ここで“形式的”というのは、『確かに (I.27) は方程式 (I.25) を満たしはするものの、実際には $e^{-iH(t-t_0)}$ が演算子 H の無限級数になるため、これを使っても (相互作用がある場合には) 具体的な計算は簡単には出来ない』という意味である。

に両者は結びついている。従って、本節はじめに登場した $\langle \Phi(t_0)|Q(t_0)|\Psi(t_0)\rangle$ を用いれば、時刻 t において

$$\begin{aligned}\langle \Phi_0|Q_H(t)|\Psi_0\rangle &= {}_S\langle \Phi(t)|Q(t_0)|\Psi(t)\rangle_S \\ &= \langle \Phi_0|e^{iH(t-t_0)}Q(t_0)e^{-iH(t-t_0)}|\Psi_0\rangle\end{aligned}\quad (\text{I.29})$$

つまり、ハイゼンベルク描像での演算子は

$$Q_H(t) = e^{iH(t-t_0)}Q(t_0)e^{-iH(t-t_0)}\quad (\text{I.30})$$

あるいは、ここでも時刻 $t_{1,2}$ の関係として表すなら

$$Q_H(t_2) = e^{iH(t_2-t_1)}Q_H(t_1)e^{-iH(t_2-t_1)}$$

となる。これは、しばしば**ハイゼンベルク演算子**（特に Q が場なら**ハイゼンベルク場**）とも呼ばれる。また、上記 (I.30) 式の両辺を時間微分すると

$$i\frac{\partial}{\partial t}Q_H(t) = [Q_H(t), H]\quad (\text{I.31})$$

という方程式が得られるが、これは、ハイゼンベルク描像における演算子の時間発展方程式で、**ハイゼンベルク方程式** (Heisenberg equation) と名付けられている。

この方程式について一つ注意をしておこう： 上述のように、シュレディンガー描像との関係に基づいて同方程式を導き出すと、読者諸君には、その意義が強くは感じられないかも知れない。しかし、実際には、このハイゼンベルク方程式は、シュレディンガー描像における (I.25) 式と同じ役割を果たす重要な方程式であり、ここから出発するのがハイゼンベルク描像なのである。

では、ここで再び (I.30) 式に戻り、これを場の演算子に適用すれば

$$\begin{aligned}\phi_H(\mathbf{x}, t) &= e^{iH(t-t_0)}\phi_0(\mathbf{x})e^{-iH(t-t_0)} \\ &= \int d^3\tilde{\mathbf{k}} \left[e^{iH(t-t_0)}a(\mathbf{k})e^{-iH(t-t_0)}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + e^{iH(t-t_0)}a^\dagger(\mathbf{k})e^{-iH(t-t_0)}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right]_{x^0=t_0}\end{aligned}$$

となるので、この描像では生成消滅演算子も

$$a^{(\dagger)}(\mathbf{k}) \rightarrow a_H^{(\dagger)}(\mathbf{k}, t) = e^{iH(t-t_0)}a^{(\dagger)}(\mathbf{k})e^{-iH(t-t_0)}\quad (\text{I.32})$$

と時間発展していくことがわかる。つまり、この描像では、各時刻毎に生成消滅演算子が存在し、⁴⁵ ある時刻のフォック基底は、その時刻の生成演算子から構成されることになる。 各時刻毎に状態ベクトルの完全系が導入されるという訳である。

⁴⁵ 但し、実際には、相互作用の下では“生成消滅演算子”という簡単な解釈が出来ないことは既に説明した通りだが。

特に、相互作用がない場合には $[H_0, a(\mathbf{k})] = -k^0 a(\mathbf{k})$ となることが示せるので、消滅演算子は

$$\begin{aligned}
a_{\text{H}}(\mathbf{k}, t) &= e^{iH_0(t-t_0)} a(\mathbf{k}) e^{-iH_0(t-t_0)} \\
&= a(\mathbf{k}) + i(t-t_0)[H_0, a(\mathbf{k})] + \frac{1}{2}i^2(t-t_0)^2[H_0, [H_0, a(\mathbf{k})]] + \dots \\
&= a(\mathbf{k})[1 + (-ik^0)(t-t_0) + \frac{1}{2}(-ik^0)^2(t-t_0)^2 + \dots] \\
&= a(\mathbf{k})e^{-ik^0(t-t_0)}
\end{aligned} \tag{I.33}$$

同様に $[H_0, a^\dagger(\mathbf{k})] = k^0 a^\dagger(\mathbf{k})$ より（或いは、上式両辺のエルミート共役より）生成演算子は

$$a_{\text{H}}^\dagger(\mathbf{k}, t) = e^{iH_0(t-t_0)} a^\dagger(\mathbf{k}) e^{-iH_0(t-t_0)} = a^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik^0(t-t_0)} \tag{I.34}$$

と変形できて

$$\phi_{\text{H}}(x) = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} [a(\mathbf{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx}] \tag{I.35}$$

を得る。これは、時間に依存しない生成消滅演算子 $a^{(\dagger)}(\mathbf{k})$ で表したハイゼンベルク描像の自由粒子（場）演算子である。

さて、ここまでの説明でわかるように、シュレディンガー描像のところで扱った確率振幅 $\mathcal{A}(\Psi_i \rightarrow \Psi_f)$ をこの描像で求めるために必要になる作業は、運動方程式を $\phi_{\text{H}}(x)|_{x^0=t_0} = \phi_0(x)$ という境界条件で解き、得られた解から時刻 $t_{i,f}$ での生成演算子 $a_{\text{H}}^\dagger(\mathbf{k}, t_{i,f})$ を抜き出して始・終状態 $|\Psi_{i,f}\rangle_{\text{H}}$ を

$$\begin{aligned}
|\Psi_i\rangle_{\text{H}} &= a_{\text{H}}^\dagger(\mathbf{p}_1, t_i) a_{\text{H}}^\dagger(\mathbf{p}_2, t_i) \cdots a_{\text{H}}^\dagger(\mathbf{p}_n, t_i) |0\rangle \\
|\Psi_f\rangle_{\text{H}} &= a_{\text{H}}^\dagger(\mathbf{q}_1, t_f) a_{\text{H}}^\dagger(\mathbf{q}_2, t_f) \cdots a_{\text{H}}^\dagger(\mathbf{q}_m, t_f) |0\rangle
\end{aligned}$$

と構成していくことである。これにより、ハイゼンベルク描像での確率振幅は

$$\mathcal{A}_{\text{H}}(\Psi_i \rightarrow \Psi_f) = {}_{\text{H}}\langle \Psi_f | \Psi_i \rangle_{\text{H}} \tag{I.36}$$

と与えられる。

これと (I.28) 式で示したシュレディンガー描像での確率振幅 $\mathcal{A}_{\text{S}}(\Psi_i \rightarrow \Psi_f)$ を比較してみよう。(I.32) 式より本描像の生成演算子は

$$a_{\text{H}}^\dagger(\mathbf{k}, t) = e^{iH(t-t_0)} a^\dagger(\mathbf{k}) e^{-iH(t-t_0)} \tag{I.37}$$

だから、始状態は

$$|\Psi_i\rangle_{\text{H}} = a_{\text{H}}^\dagger(\mathbf{p}_1, t_i) a_{\text{H}}^\dagger(\mathbf{p}_2, t_i) \cdots a_{\text{H}}^\dagger(\mathbf{p}_n, t_i) |0\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= e^{iH(t_i-t_0)} a^\dagger(\mathbf{p}_1) e^{-iH(t_i-t_0)} \dots e^{iH(t_i-t_0)} a^\dagger(\mathbf{p}_n) e^{-iH(t_i-t_0)} |0\rangle \\
&= e^{iH(t_i-t_0)} a^\dagger(\mathbf{p}_1) \dots a^\dagger(\mathbf{p}_n) |0\rangle \\
&= e^{iH(t_i-t_0)} |\Psi_i\rangle_S
\end{aligned} \tag{I.38}$$

同様に，終状態は

$$\begin{aligned}
|\Psi_f\rangle_H &= a_H^\dagger(\mathbf{q}_1, t_f) a_H^\dagger(\mathbf{q}_2, t_f) \dots a_H^\dagger(\mathbf{q}_m, t_f) |0\rangle \\
&= e^{iH(t_f-t_0)} |\Psi_f\rangle_S
\end{aligned} \tag{I.39}$$

【ここで真空の性質 $|0\rangle_H = |0\rangle_S = |0\rangle$ 及び $e^{-iHt}|0\rangle = |0\rangle$ を用いた】とシュレディンガー描像の状態で表せる．従って，両描像での確率振幅の関係は

$${}_H\langle\Psi_f|\Psi_i\rangle_H = {}_S\langle\Psi_f|e^{-iH(t_f-t_0)}e^{iH(t_i-t_0)}|\Psi_i\rangle_S = {}_S\langle\Psi_f|e^{-iH(t_f-t_i)}|\Psi_i\rangle_S \tag{I.40}$$

つまり，**どちらの描像で計算しても確率振幅は同じ**という極めて当然の事実

$$\mathcal{A}_S(\Psi_i \rightarrow \Psi_f) = \mathcal{A}_H(\Psi_i \rightarrow \Psi_f)$$

が確認できる．

以上のように，この描像でも，時間発展は形式的には $\phi_H(x) = e^{iH(t-t_0)}\phi_0(\mathbf{x})e^{-iH(t-t_0)}$ と書ける訳だが，これを用いても自由状態以外での実際の計算はやはり不可能に近い．そこで，次に，少なくとも相互作用の寄与が小さい場合に有効な近似になる**摂動**（Perturbation）計算に適した第3の描像が導入される．

3. 朝永-ディラック（相互作用）描像

時刻 $t = t_0$ において，ハミルトニアンを，相互作用を含まない部分 H_0 と相互作用項 H_1 に分ける：

$$H = H_0 + H_1 \tag{I.41}$$

シュレディンガー描像では，状態のみが

$$|\Psi(t)\rangle_S = e^{-iH(t-t_0)}|\Psi_0\rangle$$

と時間発展し，逆にハイゼンベルク描像では，演算子のみが

$$Q_H(t) = e^{iH(t-t_0)}Q(t_0)e^{-iH(t-t_0)}$$

と時間発展するのであるが，ここで両者の中間的な描像を考える．より具体的には，演算子が相互作用 H_1 を除くハミルトニアン（つまり H_0 ）に従い

$$Q_T(t) = e^{iH_0(t-t_0)}Q(t_0)e^{-iH_0(t-t_0)} \tag{I.42}$$

と変化する描像である。これは、朝永-ディラック描像あるいは相互作用描像と呼ばれる。要するに、この描像での演算子は、自由ハイゼンベルク場 [$H_1 = 0$ の場合のハイゼンベルク描像の場合] と同じ方程式を満たすのである。

このとき、状態の時間発展については「演算子の行列要素は描像に依らない」という条件から

$$\begin{aligned} {}_T\langle\Phi(t)|Q_T(t)|\Psi(t)\rangle_T &= {}_S\langle\Phi(t)|Q(t_0)|\Psi(t)\rangle_S \\ &= {}_T\langle\Phi(t)|e^{iH_0(t-t_0)}Q(t_0)e^{-iH_0(t-t_0)}|\Psi(t)\rangle_T \end{aligned}$$

つまり、

$$|\Psi(t)\rangle_S = e^{-iH_0(t-t_0)}|\Psi(t)\rangle_T \quad (\text{I.43})$$

或いは

$$|\Psi(t)\rangle_T = e^{iH_0(t-t_0)}|\Psi(t)\rangle_S = e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)}|\Psi_0\rangle \quad (\text{I.44})$$

が得られる。^{#6} 更に、 $|\Psi(t_{1,2})\rangle_T$ の関係を直接書くことも出来るが、シュレディンガー描像に比べると少々長くなる：

$$|\Psi(t_2)\rangle_T = e^{iH_0(t_2-t_0)}e^{-iH(t_2-t_1)}e^{-iH_0(t_1-t_0)}|\Psi(t_1)\rangle_T \quad (\text{I.45})$$

次に、(I.44) を時間微分すれば

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle_T &= -H_0 e^{iH_0(t-t_0)}|\Psi(t)\rangle_S + e^{iH_0(t-t_0)}i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle_S \\ &= -H_0 e^{iH_0(t-t_0)}|\Psi(t)\rangle_S + e^{iH_0(t-t_0)}H|\Psi(t)\rangle_S \\ &= e^{iH_0(t-t_0)}H_1 e^{-iH_0(t-t_0)}|\Psi(t)\rangle_T \end{aligned}$$

より $H_1(t) = e^{iH_0(t-t_0)}H_1 e^{-iH_0(t-t_0)}$ と置いて

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle_T = H_1(t)|\Psi(t)\rangle_T \quad (\text{I.46})$$

を得る。これが、朝永-ディラック描像において状態の時間発展を支配する方程式で、 $H_1(t)$ は、この描像での相互作用ハミルトニアンである。この方程式は、後でわかるように摂動計算で基本的な役割を果たすことになる。 また、これを時間変数 t だけを特別扱いすることのない明白に共変的な形に書き直したものは、朝永-シュヴインガー方程式 (Tomonaga-Schwinger equation) という名で知られている。

^{#6} 一般には H と H_0 は可換ではないので、ここで $e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)} = e^{i(H_0-H)(t-t_0)} = e^{-iH_1(t-t_0)}$ といった式変形は許されない。

なお、上の方程式は、シュレディンガー描像の $i\partial|\Psi(t)\rangle_S/\partial t = H|\Psi(t)\rangle_S$ に似ているが、 $H_I(t)$ 自体が t を含むので形式的にも $|\Psi(t)\rangle_T = e^{-iH_I(t)(t-t_0)}|\Psi_0\rangle$ などとは解けないことに注意しよう。

さて、この描像でも、始状態・終状態は、ハイゼンベルク描像と同様に時刻 $t_{i,f}$ での $\phi_T(x)$ に含まれる生成演算子 $a_T^\dagger(\mathbf{k}, t_{i,f})$ から構成される：

$$\begin{aligned} |\Psi_i\rangle_T &= a_T^\dagger(\mathbf{p}_1, t_i) a_T^\dagger(\mathbf{p}_2, t_i) \cdots a_T^\dagger(\mathbf{p}_n, t_i) |0\rangle \\ |\Psi_f\rangle_T &= a_T^\dagger(\mathbf{q}_1, t_f) a_T^\dagger(\mathbf{q}_2, t_f) \cdots a_T^\dagger(\mathbf{q}_m, t_f) |0\rangle \\ a_T^\dagger(\mathbf{k}, t) &= e^{iH_0(t-t_0)} a^\dagger(\mathbf{k}) e^{-iH_0(t-t_0)} \end{aligned}$$

これより、シュレディンガー描像およびハイゼンベルク描像で考察した確率振幅 $\mathcal{A}(\Psi_i \rightarrow \Psi_f)$ を本描像で扱うと

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_T(\Psi_i \rightarrow \Psi_f) &= {}_T\langle \Psi_f | \Psi(t_f) \rangle_T \\ &= {}_T\langle \Psi_f | e^{iH_0(t_f-t_0)} e^{-iH(t_f-t_i)} e^{-iH_0(t_i-t_0)} | \Psi_i \rangle_T \end{aligned} \quad (\text{I.47})$$

となる。これが $\mathcal{A}_{S,H}(\Psi_i \rightarrow \Psi_f)$ に一致することを示すのは容易である。

それでは、 $a_T^{(\dagger)}(\mathbf{k}, t)$ は、シュレディンガー描像での演算子 $a^{(\dagger)}(\mathbf{k})$ とはどんな関係にあるだろうか？ この演算子に (I.42) を適用した

$$a_T^{(\dagger)}(\mathbf{k}, t) = e^{iH_0(t-t_0)} a^{(\dagger)}(\mathbf{k}) e^{-iH_0(t-t_0)} \quad (\text{I.48})$$

は (I.37) に似ているが、ここでは時間発展を決めるのは自由ハミルトニアン H_0 である。従って、(I.33)・(I.34) 式と同様に

$$a_T(\mathbf{k}, t) = a(\mathbf{k}) e^{-ik^0(t-t_0)}, \quad a_T^\dagger(\mathbf{k}, t) = a^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik^0(t-t_0)}$$

となるので、結局 $a_T^\dagger(\mathbf{k}, t_{i,f})$ と $a^\dagger(\mathbf{k})$ の差は、それぞれ $e^{\pm ik^0(t_{i,f}-t_0)}$ という因子だけであることがわかる。しかも、これは、絶対値が1の単なる位相因子であって ${}_T\langle \Psi_f | \Psi(t_f) \rangle_T$ を求める時には消えてしまう。それ故、両者は、実質的には同じ演算子と考えてよい。また、これより、場の演算子も

$$\begin{aligned} \phi_T(x) &= \int d^3\tilde{\mathbf{k}} \left[a_T(\mathbf{k}, t) e^{-ikx} + a_T^\dagger(\mathbf{k}, t) e^{ikx} \right]_{x^0=t_0} \\ &= \int d^3\tilde{\mathbf{k}} \left[a(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx} \right] \end{aligned} \quad (\text{I.49})$$

と時間に依存しない生成消滅演算子で表すことが出来る。実際の計算では、この $a^{(\dagger)}(\mathbf{k})$ による表現が用いられることになる。

最後に、この描像での相互作用ハミルトニアン $H_I(t)$ について、次の点を強調しておく：ハミルトニアン密度は、(I.7) 式からもわかるように場の演算子とその空間微分の関数（多項式）だから、

$$\begin{aligned} H_I(t) &= e^{iH_0(t-t_0)} H_I e^{-iH_0(t-t_0)} \\ &= \int d^3\mathbf{x} e^{iH_0(t-t_0)} \mathcal{H}_I(\pi(\mathbf{x}, t_0), \phi(\mathbf{x}, t_0), \partial_i\phi(\mathbf{x}, t_0)) e^{-iH_0(t-t_0)} \\ &= \int d^3\mathbf{x} \mathcal{H}_I(\pi_T(\mathbf{x}, t), \phi_T(\mathbf{x}, t), \partial_i\phi_T(\mathbf{x}, t)) \end{aligned} \quad (\text{I.50})$$

つまり、 $H_I(t)$ は自由ハイゼンベルク演算子だけで表される。これは、本描像の大きな利点と言える：摂動計算の出発点は自由場であり、各種自由場の平面波展開および生成消滅演算子が、そのまま $H_I(t)$ の中でも使えるのである。

I-3. 場の理論での S 行列

様々な粒子間反応の発生確率計算を系統的・定量的に進める上で極めて重要な役割を担うのが **S 行列** (S matrix) という名の演算子である。 $\mathcal{A}(\Psi_i \rightarrow \Psi_f)$ の計算は、時刻 $t = t_i = -\infty$ の始状態 Ψ_i [反応前の自由状態] が力のある場との相互作用で時刻 $t = t_f = +\infty$ にどのような終状態 Ψ_f [反応後の自由状態] へ転換されるか、を調べる形で行われる。^{#7} そこで、量子化の時刻 t_0 を $t = t_i$ に採ることとすれば、散乱の始状態 $|P_1(\mathbf{p}_1)P_2(\mathbf{p}_2)\rangle$ は場 $\phi_0(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, t_i)$ の生成演算子を用いて $a_1^\dagger(\mathbf{p}_1)a_2^\dagger(\mathbf{p}_2)|0\rangle$ と、また、崩壊の始状態 $|P(\mathbf{p})\rangle$ は $a^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$ と構成される。これらの状態が時刻 $t = +\infty$ で如何に変化しているかを定量的に表すのが S 行列である。

はじめに、シュレディンガー描像で考えてみよう（但し、添字 S は略す）。すでに説明したように、この描像では、状態の変化を表す方程式は

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = H|\Psi(t)\rangle$$

である。これを $|\Psi(t = t_i)\rangle = |\Psi_i\rangle$ という境界条件で解くと、(形式的ながら) 時刻 $t = t_f (= +\infty)$ における状態が

$$|\Psi(t_f)\rangle = e^{-iH(t_f-t_i)}|\Psi_i\rangle \quad (\text{I.51})$$

と得られ、これより $\Psi_i \rightarrow \Psi_f$ という遷移の確率振幅は次のように与えられる：

$$\mathcal{A}(\Psi_i \rightarrow \Psi_f) = \langle\Psi_f|\Psi(t_f)\rangle = \langle\Psi_f|e^{-iH(t_f-t_i)}|\Psi_i\rangle \quad (\text{I.52})$$

^{#7} 始めの時刻が $t = -\infty$ で終りの時刻が $t = +\infty$ と言っても、もちろん数学的な意味での無限大などではない。しかしながら、反応は正に一瞬のうちに起こるので、実質的には非常によい近似でこのように扱うことが出来る。

では、ここで仮に相互作用が全くなかったとしてみよう。すると、系が始めに定常状態であれば、それ以後何の変化も起こらず $|\Psi_i\rangle \rightarrow |\Psi_f\rangle$ の確率振幅も単に $\langle\Psi_f|\Psi_i\rangle$ のはずだが、実際に上式において $H_1 = 0$ つまり $H = H_0$ とすると $|\Psi_i\rangle$ のエネルギーを E_i として

$$\langle\Psi_f|e^{-iH_0(t_f-t_i)}|\Psi_i\rangle = e^{-iE_i(t_f-t_i)}\langle\Psi_f|\Psi_i\rangle$$

となり、 $e^{-iE_i(t_f-t_i)}$ という余計な因子が出てしまう。これは $|\langle\Psi_f|\Psi(t_f)\rangle|$ の計算には効かない単なる位相因子だが、それでも無い方が自然だろう。そこで、この因子を取り除くために、 $e^{iH_0(t_f-t_i)}$ という演算子を用いて

$$S = e^{iH_0(t_f-t_i)}e^{-iH(t_f-t_i)} \quad (I.53)$$

と定義すれば、これは系の $|\Psi_i\rangle \rightarrow |\Psi(t_f)\rangle$ という時間発展を記述し、かつ $H_1 = 0$ の時には

$$S = 1$$

つまり、上述の位相因子を出さない演算子となる。これが、摂動論的な場の理論で中心的な役割を果たす S 行列演算子である。上の定義より、この S が

$$SS^\dagger = 1 \quad (I.54)$$

を満たす、つまりユニタリ演算子であることは明らかだろう。

この S 行列は、**漸近場** (Asymptotic field) という概念に基づくなら、もっとエレガントに定式化できる。これについて簡単に説明しておこう。但し、厳密な議論には立ち入らないことにする。こんどの出発点はハイゼンベルク場 $\phi(x)$ である。時刻 $t \rightarrow \pm\infty$ では、束縛状態を考えない限り各粒子はお互い遠く離れ自由な状態になっている訳だから、 $\phi(x)$ も、ある自由ハイゼンベルク場に一致するはずである。そのような自由ハイゼンベルク場を漸近場と呼び、 $t \rightarrow -\infty, t \rightarrow +\infty$ に対応してそれぞれ $\phi_{\text{in}}(x), \phi_{\text{out}}(x)$ と表す：

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} [\phi(x) - \phi_{\text{in}}(x)] = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} [\phi(x) - \phi_{\text{out}}(x)] = 0 \quad (I.55)$$

この漸近場を、時間因子を含まない生成消滅演算子で表現した (I.35) 式のように

$$\phi_{\text{in}}(x) = \int d^3\tilde{\mathbf{p}} [a_{\text{in}}(\mathbf{p})e^{-ipx} + a_{\text{in}}^\dagger(\mathbf{p})e^{ipx}] \quad (I.56)$$

$$\phi_{\text{out}}(x) = \int d^3\tilde{\mathbf{p}} [a_{\text{out}}(\mathbf{p})e^{-ipx} + a_{\text{out}}^\dagger(\mathbf{p})e^{ipx}] \quad (I.57)$$

と展開し、そこに含まれる生成演算子 $a_{\text{in}}^\dagger(\mathbf{p})$ から構成される状態を $|\Psi, \text{in}\rangle$, 同様に $a_{\text{out}}^\dagger(\mathbf{p})$ から成る状態を $|\Psi, \text{out}\rangle$ のように書く. これを用いて $|\alpha, \text{in}\rangle \rightarrow |\beta, \text{out}\rangle$ という変化を記述する S 行列, 正確にはその $(\beta\alpha)$ 成分が

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta, \text{out} | \alpha, \text{in} \rangle \quad (\text{I.58})$$

と, また, S 行列演算子が

$$\langle \beta, \text{out} | = \langle \beta, \text{in} | S \quad (\text{I.59})$$

と定義されるのである.

では, このように導入された S 行列演算子は $S = e^{iH_0(t_f-t_i)} e^{-iH(t_f-t_i)}$ と同じものだろうか? これを確かめるために, まず, $\phi_{\text{in}}(x)$ と $\phi_{\text{out}}(x)$ の関係を調べよう. ハイゼンベルク演算子の時間発展式

$$\phi(\mathbf{x}, t_2) = e^{iH(t_2-t_1)} \phi(\mathbf{x}, t_1) e^{-iH(t_2-t_1)}$$

の両辺で $t_1 = t_i (= -\infty)$, $t_2 = t_f (= +\infty)$ と置けば, $\phi_{\text{in, out}}$ の定義より

$$\phi(\mathbf{x}, t_i) = \phi_{\text{in}}(\mathbf{x}, t_i), \quad \phi(\mathbf{x}, t_f) = \phi_{\text{out}}(\mathbf{x}, t_f)$$

だから, 両者は

$$\phi_{\text{out}}(\mathbf{x}, t_f) = e^{iH(t_f-t_i)} \phi_{\text{in}}(\mathbf{x}, t_i) e^{-iH(t_f-t_i)} \quad (\text{I.60})$$

と結ばれる. 一方, $\phi_{\text{in}}(x)$ という自由ハイゼンベルク場自身の時間発展は H_0 で決まるから

$$\phi_{\text{in}}(\mathbf{x}, t_i) = e^{-iH_0(t_f-t_i)} \phi_{\text{in}}(\mathbf{x}, t_f) e^{iH_0(t_f-t_i)} \quad (\text{I.61})$$

と書ける [ここでは $\phi_{\text{in}}(\mathbf{x}, t_f)$ を用いて $\phi_{\text{in}}(\mathbf{x}, t_i)$ を表していることに注意]. これを上 (I.60) 式右辺に代入すれば

$$\begin{aligned} \phi_{\text{out}}(\mathbf{x}, t_f) &= e^{iH(t_f-t_i)} e^{-iH_0(t_f-t_i)} \phi_{\text{in}}(\mathbf{x}, t_f) e^{iH_0(t_f-t_i)} e^{-iH(t_f-t_i)} \\ &= [e^{iH_0(t_f-t_i)} e^{-iH(t_f-t_i)}]^{-1} \phi_{\text{in}}(\mathbf{x}, t_f) e^{iH_0(t_f-t_i)} e^{-iH(t_f-t_i)} \end{aligned}$$

これより 生成消滅演算子 $a_{\text{in}}(\mathbf{p})$ と $a_{\text{out}}(\mathbf{p})$ の関係

$$a_{\text{out}}(\mathbf{p}) = [e^{iH_0(t_f-t_i)} e^{-iH(t_f-t_i)}]^{-1} a_{\text{in}}(\mathbf{p}) e^{iH_0(t_f-t_i)} e^{-iH(t_f-t_i)} \quad (\text{I.62})$$

が導かれる. 一方, 漸近場による S 行列の定義 (I.59) に基づけば

$$\begin{aligned} \bullet \langle \beta, \text{out} | a_{\text{out}}(\mathbf{p}) | \alpha, \text{in} \rangle &= \langle \beta, \text{in} | S a_{\text{out}}(\mathbf{p}) | \alpha, \text{in} \rangle \\ \bullet \langle \beta, \text{out} | a_{\text{out}}(\mathbf{p}) | \alpha, \text{in} \rangle &= \langle \beta, \mathbf{p}, \text{out} | \alpha, \text{in} \rangle \\ &= \langle \beta, \mathbf{p}, \text{in} | S | \alpha, \text{in} \rangle = \langle \beta, \text{in} | a_{\text{in}}(\mathbf{p}) S | \alpha, \text{in} \rangle \end{aligned}$$

より $\langle \beta, \text{in} | S a_{\text{out}}(\mathbf{p}) | \alpha, \text{in} \rangle = \langle \beta, \text{in} | a_{\text{in}}(\mathbf{p}) S | \alpha, \text{in} \rangle$ という等式を得るが、ここで $|\alpha, \text{in}\rangle$ も $|\beta, \text{in}\rangle$ も任意の状態であればよいのだから $S a_{\text{out}}(\mathbf{p}) = a_{\text{in}}(\mathbf{p}) S$ 、すなわち

$$a_{\text{out}}(\mathbf{p}) = S^{-1} a_{\text{in}}(\mathbf{p}) S \quad (\text{I.63})$$

従って、(I.62) 式と (I.63) 式を比べれば、確かに漸近場による定義においても

$$S = e^{iH_0(t_f - t_i)} e^{-iH(t_f - t_i)}$$

が成立していることが見て取れる。^{#8}

なお、 $\langle \beta, \text{in} | S | \alpha, \text{in} \rangle$ においては $|\alpha, \text{in}\rangle$, $|\beta, \text{in}\rangle$ 共に $a_{\text{in}}(\mathbf{p})$ から構成されているが、ここまでの説明からわかるように、それは実質的にはシュレディンガー描像の演算子 $a(\mathbf{p})$ に等しい。また、 $a_{\text{out}}(\mathbf{p})$ も $a_{\text{in}}(\mathbf{p})$ とは S による変換の分だけの差はあるが、やはりその性質は $a(\mathbf{p})$ と同じであることは明らかである。従って、漸近場による議論と言っても特に緊張して身構える必要はない。但し、(I.53) で S 行列演算子を導入した時には、 H_0 による時間因子を“手で”持ち込んだのに対し、ここでは首尾一貫して漸近場を用いたお蔭で、自然な流れに乗って同じ定義に到達できたことは理解しておきたい。

これ以降は、 $\Psi_i \rightarrow \Psi(t_f)$ という状態の時間発展および $\Psi_i \rightarrow \Psi_f$ という遷移の確率振幅 \mathcal{A} としては、それぞれ (I.51) と (I.52) ではなく、そこから観測には全く影響を与えない位相因子を除いた

$$|\Psi(t_f)\rangle = S |\Psi_i\rangle \quad (= e^{iH_0(t_f - t_i)} e^{-iH(t_f - t_i)} |\Psi_i\rangle) \quad (\text{I.64})$$

$$\mathcal{A}(\Psi_i \rightarrow \Psi_f) = \langle \Psi_f | \Psi(t_f) \rangle \quad (= \langle \Psi_f | S | \Psi_i \rangle) \quad (\text{I.65})$$

を用いることにする【 $|\Psi_{i,f}\rangle$ は共に時間に依存しない $a(\mathbf{p})$ から構成される】。この変更は、勿論これまで考えてきた物理量には何の本質的影響も与えない。

I-4. 伝播関数と時間順序積

摂動計算で不可欠な役割を果たすもう一つの量は、**ファインマン伝播関数** (Feynman propagator: 以後「伝播関数」と略すが「プロパゲータ」とも呼ばれる) である。これは、スカラー場の場合には $\Delta_F(x)$ と表され、

$$\Delta_F(x - y) = i \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \quad (\text{I.66})$$

^{#8} 例えば Greiner-Rheinhardt の教科書に従えば $S = e^{iH_0 t_f} e^{-iH(t_f - t_i)} e^{-iH_0 t_i}$ となるが、これは $t = 0$ が基準 (量子化の時刻) として選ばれているからである。本節のように $t = t_i$ を出発点とするなら、10 頁で述べた注意に従い 全ての時間変数 t (t_i, t_f なども含む) は $t - t_i$ で置き換えられ、その結果 本ノートと同じ式になる。

と定義される。^{#9} ここで、 $\phi(x)$ には相互作用を含めたハイゼンベルク場を用いることもあるが、摂動計算には不要なので本講義では 自由ハイゼンベルク場 を採る。また、「T」は、それに続く時間依存演算子を時間順に並べ直して掛け合わせることを意味し、その積は **時間順序積** (Time-ordered product / Chronological product) あるいは **T積** と呼ばれる。例えば、演算子 $A(x), B(y), C(z)$ において時間変数の間に $z^0 > y^0 > x^0$ という大小関係があるなら

$$T[A(x)B(y)C(z)] = C(z)B(y)A(x)$$

である。但し、これはボース統計に従う演算子の例であり、フェルミ統計演算子の場合には「順序を1回交換する度にマイナス符号を付与」という規則が加わるため（この例の場合なら）右辺は $-C(z)B(y)A(x)$ となる。

この T積は、任意の x^0, y^0, z^0 に対しては階段関数 $\theta(x)$ を用いて

$$\begin{aligned} T[A(x)B(y)C(z)] &= A(x)B(y)C(z)\theta(x^0 - y^0)\theta(y^0 - z^0) + A(x)C(z)B(y)\theta(x^0 - z^0)\theta(z^0 - y^0) \\ &+ B(y)A(x)C(z)\theta(y^0 - x^0)\theta(x^0 - z^0) + B(y)C(z)A(x)\theta(y^0 - z^0)\theta(z^0 - x^0) \\ &+ C(z)A(x)B(y)\theta(z^0 - x^0)\theta(x^0 - y^0) + C(z)B(y)A(x)\theta(z^0 - y^0)\theta(y^0 - x^0) \end{aligned}$$

と表せ【階段関数は $\theta(x > 0) = 1, \theta(x = 0) = 1/2, \theta(x < 0) = 0$ と定義され、微分するとデルタ関数になるという性質を持つ】、更に、これは任意個数の演算子積へと一般化することも出来る：

$$\begin{aligned} T[A_1(x_1)A_2(x_2)\cdots A_n(x_n)] &= \sum_P A_{p(1)}(x_{p(1)})A_{p(2)}(x_{p(2)})\cdots A_{p(n)}(x_{p(n)}) \\ &\quad \times \theta(x_{p(1)}^0 - x_{p(2)}^0)\theta(x_{p(2)}^0 - x_{p(3)}^0)\cdots\theta(x_{p(n-1)}^0 - x_{p(n)}^0) \end{aligned} \quad (I.67)$$

ここで $\{p(1), p(2), \dots, p(n)\}$ は $\{1, 2, \dots, n\}$ の一つの並べ替えであり、 \sum_P は、そのような並べ替え全てに亙る和を意味する。従って、項の総数は $n!$ である。

上で導入した $\Delta_F(x)$ は、 $\phi(x)$ がクライン-ゴールドン方程式 $(\square + m^2)\phi(x) = 0$ を満たす場なら、クライン-ゴールドン演算子 $(\square + m^2)$ のグリーン (Green) 関数にもなっている：

$$(\square + m^2)\Delta_F(x) = \delta^4(x) \quad (I.68)$$

^{#9} Δ_F の定義には逆符号や i を除く流儀もある。(I.66) の右辺が実際に $x - y$ にしか依存しないことは、 $\phi(x)$ と $\phi(y)$ に (I.49) を代入することで確認できる [後述の (I.72) 式参照]。

実際,

$$\begin{aligned}\partial^\mu T[\phi(x)\phi(0)] &= \partial^\mu[\phi(x)\phi(0)\theta(x^0) + \phi(0)\phi(x)\theta(-x^0)] \\ &= [\partial^\mu\phi(x)]\phi(0)\theta(x^0) + \phi(x)\phi(0)\partial^\mu\theta(x^0) \\ &\quad + \phi(0)[\partial^\mu\phi(x)]\theta(-x^0) + \phi(0)\phi(x)\partial^\mu\theta(-x^0)\end{aligned}$$

において, 量子化条件の同時刻交換関係および $d\theta(x)/dx = \delta(x)$ を用いると

$$\begin{aligned}\text{右辺第2項} + \text{第4項} &= \delta_{\mu 0}[\phi(x)\phi(0)\delta(x^0) - \phi(0)\phi(x)\delta(x^0)] \\ &= \delta_{\mu 0}\delta(x^0)[\phi(x), \phi(0)] = 0\end{aligned}$$

となるので $\square T[\phi(x)\phi(0)]$ は

$$\begin{aligned}\square T[\phi(x)\phi(0)] &= \partial_\mu\partial^\mu T[\phi(x)\phi(0)] \\ &= [\square\phi(x)]\phi(0)\theta(x^0) + [\partial^\mu\phi(x)]\phi(0)\partial_\mu\theta(x^0) \\ &\quad + \phi(0)[\square\phi(x)]\theta(-x^0) + \phi(0)[\partial^\mu\phi(x)]\partial_\mu\theta(-x^0)\end{aligned}$$

と変形でき, これより導かれる関係

$$\begin{aligned}(\square + m^2)T[\phi(x)\phi(0)] &= [(\square + m^2)\phi(x)]\phi(0)\theta(x^0) + [\partial^\mu\phi(x)]\phi(0)\partial_\mu\theta(x^0) \\ &\quad + \phi(0)[(\square + m^2)\phi(x)]\theta(-x^0) + \phi(0)[\partial^\mu\phi(x)]\partial_\mu\theta(-x^0) \\ &= [\partial^\mu\phi(x)]\phi(0)\partial_\mu\theta(x^0) + \phi(0)[\partial^\mu\phi(x)]\partial_\mu\theta(-x^0) \\ &= [\partial^0\phi(x)]\phi(0)\delta(x^0) - \phi(0)[\partial^0\phi(x)]\delta(x^0) = \dot{\phi}(x)\phi(0)\delta(x^0) - \phi(0)\dot{\phi}(x)\delta(x^0) \\ &= [\pi(x), \phi(0)]\delta(x^0) = -i\delta^3(\mathbf{x})\delta(x^0) = -i\delta^4(x)\end{aligned}$$

を真空状態で挟んで (I.68) 式が得られる.

さて, 摂動計算に頻繁に顔を出すのは, $\Delta_F(x-y)$ よりもそのフーリエ展開

$$\Delta_F(q) = \int d^4(x-y) e^{iq(x-y)} \Delta_F(x-y) \quad (\text{I.69})$$

の方である. 複素積分により, これは

$$\Delta_F(q) = \frac{1}{m^2 - q^2 - i\varepsilon} \quad (\text{I.70})$$

となること,^{#10}あるいは同じことだが

$$\Delta_F(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{e^{-ip(x-y)}}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} \quad (\text{I.71})$$

が成立することを示すことが出来る．但し， $\varepsilon (> 0)$ は，すべての計算が完了したら 0 と置く微小定数（無限小定数）である．^{#11}

それを実行するには，まず，(I.71) 式左辺の Δ_F に（その定義式を通じて） ϕ の平面波展開を代入する．すると，真空状態で挟まれ $aa, a^\dagger a, a^\dagger a^\dagger$ 項は皆 0 になり

$$\begin{aligned} \Delta_F(x-y) &= i \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \\ &= i \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \theta(x^0 - y^0) + i \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle \theta(y^0 - x^0) \\ &= i \int d^3\tilde{\mathbf{p}} d^3\tilde{\mathbf{q}} \left[\langle 0 | a(\mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{q}) | 0 \rangle e^{-i(px-ty)} \theta(x^0 - y^0) \right. \\ &\quad \left. + \langle 0 | a(\mathbf{q}) a^\dagger(\mathbf{p}) | 0 \rangle e^{i(px-ty)} \theta(y^0 - x^0) \right] \\ &= i \int d^3\tilde{\mathbf{p}} \left[e^{-ip(x-y)} \theta(x^0 - y^0) + e^{ip(x-y)} \theta(y^0 - x^0) \right] \end{aligned} \quad (\text{I.72})$$

という 3 次元運動量積分の形になる．次に，(I.71) 右辺の被積分関数

$$e^{-ip(x-y)} / (m^2 - p^2 - i\varepsilon)$$

は， p^0 複素平面上で点 $p^0 = p_{1,2}^0 \equiv \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \mp i\varepsilon$ に極を持ち，また， $x^0 < y^0$ ならその上半面 [$\text{Im } p^0 > 0$]， $x^0 > y^0$ なら下半面 [$\text{Im } p^0 < 0$] それぞれ ($x^0 = y^0$ なら両方) の無限遠方 $|p^0| \rightarrow +\infty$ で $|p^0|$ の逆数より速く 0 になる，ということを確認する．この性質のお蔭で， $x^0 - y^0$ の符号に応じ

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} \equiv - \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} \int_{-\infty}^{+\infty} dp^0 \frac{e^{-ip^0(x^0-y^0)}}{(p^0 - p_1^0)(p^0 - p_2^0)}$$

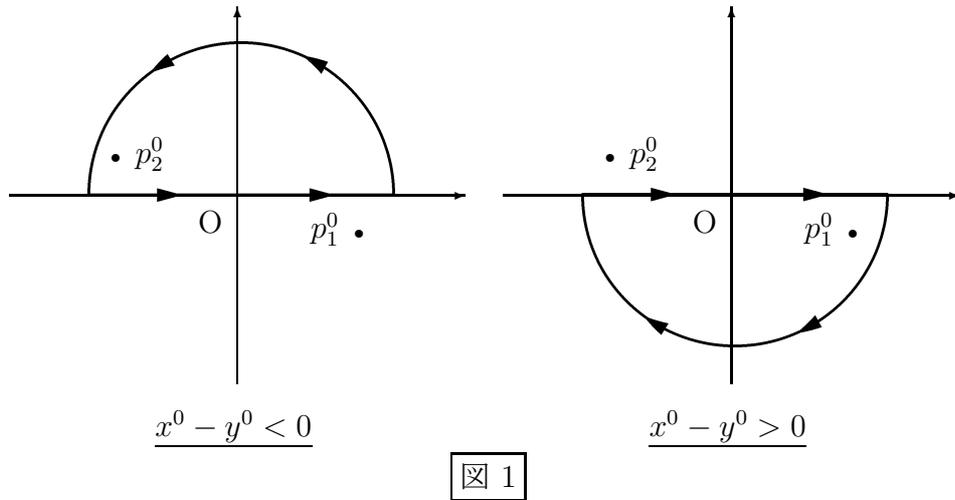
の p^0 積分路は（積分値は変えず）半径無限大の上半円・下半円一周へ拡張できる（図 1）．あとは，そこに任意の解析関数 (f) が満たすコーシー (Cauchy) の積分公式

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \frac{f(z)}{z - a}$$

【 a は f の定義域内の任意の点，積分路 C は a を囲む閉曲線で反時計回りが正の向き】を適用すればよい ($x^0 = y^0$ ならどちらの経路でも計算可能)．結果は (I.72) に一致する．それは正に (I.71) 式の両辺が等しいということである．

^{#10} 現実世界の粒子なら，その 4 元運動量 (p) と質量 (M) は当然 $p^2 = M^2$ という関係を満たす．そのような運動量はオンシェル (On shell) 運動量という名を持つ．しかしながら，ここでの q は，仮想的中間状態だけに現れ何の制限も付いていないため一般には $q^2 \neq m^2$ であり，オフシェル (Off shell) 運動量と呼ばれる．

^{#11} ε は無限小定数なので，これに有限の因子を掛けたものも同じく ε と書かれる．



最後に、時間微分項を含むT積についての注意をしておこう。この積の定義にそのまま従えば、例えば $\dot{A}(x)$ と $B(y)$ のT積は

$$T[\dot{A}(x)B(y)] = \dot{A}(x)B(y)\theta(x^0 - y^0) + B(y)\dot{A}(x)\theta(y^0 - x^0)$$

となる訳だが、これとは別に

$$T^*[\dot{A}(x)B(y)] \equiv \frac{\partial}{\partial x^0} T[A(x)B(y)] \quad (\text{I.73})$$

として時間微分はT積の左外側に出してしまう定義もある。これは、**共変的時間順序積** (Covariant time-ordered product) あるいは **T*積** と呼ばれることもあるが、明らかに両者間には階段関数の時間微分の有無による差が生じる。これだけの説明では読者は混乱するだろうが、しかし、実はT*積の方が摂動計算には有用と後でわかるので、以後、特に断わらない限りT積はこのT*積を指すものとする。但し、これが伝播関数の定義には影響しないことは明白だろう。

I-5. 朝永-ディラック描像とS行列

S行列に話を戻そう。 $S = e^{iH_0(t_f - t_i)} e^{-iH(t_f - t_i)}$ という式だけ得ても具体的な計算はどう進めたらいいのか見当もつかないが、朝永-ディラック描像において状態の時間発展を決める (I.44) 式

$$|\Psi(t)\rangle_T = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} |\Psi_0\rangle$$

を見れば、これはS行列演算子による時間発展に一致していることがわかる。つまり、朝永-ディラック描像は、この演算子にとり自然な描像だった訳である。従って、同描像に基づいて状態の時間発展を調べるのが、正にS行列による時間発展の記述方法を知ることにつながる。

そこで、上式は (I.46) で示した通り

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle_T = H_I(t) |\Psi(t)\rangle_T$$

という微分方程式に書き直せることを思い出し、この時間発展方程式に基づいて S 行列の摂動論的な表現を導くこと、これを本節の主題とする。

では、はじめに同微分方程式を時刻 t_0 から t まで積分しよう。すると、

$$|\Psi(t)\rangle = |\Psi(t_0)\rangle + (-i) \int_{t_0}^t dt' H_I(t') |\Psi(t')\rangle \quad (\text{I.74})$$

という積分方程式が現れる。^{#12} 勿論、これで解が求まった訳ではないが、相互作用が強くない、つまり H_I が 微小定数 \times 演算子項 といった形の場合には、これは **逐次近似法** (Successive approximation) で解くことが出来る：

まず、第 0 次近似として $H_I = 0$ と置く。それにより、(I.74) 式は

$$|\Psi(t)\rangle = |\Psi(t_0)\rangle$$

となり、これを同じ (I.74) 右辺の $|\Psi(t')\rangle$ に代入して積分変数を t_1 に変えれば

$$|\Psi(t)\rangle = \left[1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) \right] |\Psi(t_0)\rangle$$

この $|\Psi(t)\rangle$ で再び (I.74) の $|\Psi(t')\rangle$ を置き換え、改めて積分変数を $t_{1,2}$ とすると

$$|\Psi(t)\rangle = \left[1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) \right] |\Psi(t_0)\rangle$$

この作業を繰り返すのが逐次近似法で、これによって次のような級数展開の形の解に達する：

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle = & \left[1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) \right. \\ & + \dots \dots \dots \\ & + (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n) \\ & \left. + \dots \dots \dots \right] |\Psi(t_0)\rangle \quad (\text{I.75}) \end{aligned}$$

この中で第 n 次の積分項に注目しよう。各積分の上端・下端から明らかなように、積分変数 t_1, t_2, \dots, t_n の大小関係は常に $t > t_1 > t_2 > \dots > t_{n-1} > t_n > t_0$ である。従って、被積分関数に階段関数の積 $\theta(t_1 - t_2)\theta(t_2 - t_3) \dots \theta(t_{n-1} - t_n)$ を掛けてやれば、積分値は変えることなく全積分の上限を t に揃えられる：

$$\begin{aligned} & (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n) \\ & \quad \times \theta(t_1 - t_2)\theta(t_2 - t_3) \dots \theta(t_{n-1} - t_n) \quad (\text{I.76}) \end{aligned}$$

^{#12} これ以降は特に断わらない限り、演算子も状態ベクトルも朝永-ディラック描像のものなので、添字 T は全て省略する。

次に、定積分では、どんな文字を積分変数として使っても構わないので、 t_1, t_2, \dots, t_n を $t_{p(1)}, t_{p(2)}, \dots, t_{p(n)}$ に置き換える【 $p(1), \dots, p(n)$ は $1, \dots, n$ を適当に並べ替えたもの】。但し、このような操作を施しても、すでに全ての積分の上端・下端は同じ t, t_0 に統一されているので各積分の順序は自由に交換でき、いつでも左から t_1 積分, t_2 積分, \dots と昇順に並ぶよう整えられる:

$$\begin{aligned} & (-i)^n \int_{t_0}^t dt_{p(1)} \int_{t_0}^t dt_{p(2)} \cdots \int_{t_0}^t dt_{p(n)} H_I(t_{p(1)}) H_I(t_{p(2)}) \cdots H_I(t_{p(n)}) \\ & \quad \times \theta(t_{p(1)} - t_{p(2)}) \theta(t_{p(2)} - t_{p(3)}) \cdots \theta(t_{p(n-1)} - t_{p(n)}) \\ &= (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \cdots \int_{t_0}^t dt_n H_I(t_{p(1)}) H_I(t_{p(2)}) \cdots H_I(t_{p(n)}) \\ & \quad \times \theta(t_{p(1)} - t_{p(2)}) \theta(t_{p(2)} - t_{p(3)}) \cdots \theta(t_{p(n-1)} - t_{p(n)}) \end{aligned}$$

この並べ替え $\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{p(1), p(2), \dots, p(n)\}$ は全部で $n!$ 通りあるが、その一つ一つに対応する積分は勿論どれも同じ値なので、それらを全て足し合わせて全体を $n!$ で割ったものも元の積分の値 (I.76) に等しい。一方で、(I.67) 式と見比べれば明らかのように、そのように足し合わされた被積分関数の全体

$$\begin{aligned} & \sum_P H_I(t_{p(1)}) H_I(t_{p(2)}) \cdots H_I(t_{p(n)}) \\ & \quad \times \theta(t_{p(1)} - t_{p(2)}) \theta(t_{p(2)} - t_{p(3)}) \cdots \theta(t_{p(n-1)} - t_{p(n)}) \end{aligned}$$

は、時間順序積 $T[H_I(t_1) H_I(t_2) \cdots H_I(t_n)]$ そのものである。^{#13} よって、 n が任意であることも考え合わせ、解 (I.75) は次のように書き直せる:

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \left[1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T[H_I(t_1) H_I(t_2)] \right. \\ & \quad + \cdots \\ & \quad + \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \cdots \int_{t_0}^t dt_n T[H_I(t_1) H_I(t_2) \cdots H_I(t_n)] \\ & \quad \left. + \cdots \right] |\Psi(t_0)\rangle \end{aligned} \quad (\text{I.77})$$

さて、ここでは $t = t_i = -\infty$ の初期状態が $t = t_f = +\infty$ で如何なる状態に遷移するか考察したいので、(I.77) 式で $t_0 = -\infty, t = +\infty$ と置こう。すると、 $|\Psi(+\infty)\rangle$ と $|\Psi(-\infty)\rangle$ は (I.64) により

$$|\Psi(+\infty)\rangle = S |\Psi(-\infty)\rangle \quad (\text{I.78})$$

^{#13} 仮にフェルミオンが関与していても、通常の相互作用ではフェルミオン数は保存される、つまり $H_I(t)$ の中に奇数個のフェルミ演算子の積が含まれることはないので、全体の符号はこのままでよい。

と関係づけられているのだから、S行列について

$$\begin{aligned}
S &= 1 + S^{(1)} + S^{(2)} + \cdots + S^{(n)} + \cdots \\
&= 1 + (-i) \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 H_I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 T[H_I(t_1)H_I(t_2)] \\
&\quad + \cdots \cdots \cdots \\
&\quad + \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dt_n T[H_I(t_1)H_I(t_2) \cdots H_I(t_n)] \\
&\quad + \cdots \cdots \cdots
\end{aligned} \tag{I.79}$$

或いは、ハミルトニアン密度を用いて

$$\begin{aligned}
S &= 1 + (-i) \int d^4x_1 \mathcal{H}_I(x_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 T[\mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2)] \\
&\quad + \cdots \cdots \cdots \\
&\quad + \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \cdots \int d^4x_n T[\mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2) \cdots \mathcal{H}_I(x_n)] \\
&\quad + \cdots \cdots \cdots
\end{aligned} \tag{I.80}$$

という摂動展開表現を得る。この時、4次元積分の積分領域は全時空である。また、状態 $|\Psi(-\infty)\rangle$ と $|\Psi(+\infty)\rangle$ は、共に時間に依存しない生成演算子 $a^\dagger(\mathbf{p})$ から構成されるのだから、 $H_I(t)$ に含まれる場の演算子も、(I.49) で与えたように $a^{(\dagger)}(\mathbf{p})$ による表現

$$\phi_T(x) = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} \left[a(\mathbf{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx} \right]$$

を用いるのが適切である。

ここで、相互作用が $\partial^\mu\phi$ のような場の微分は含まない場合を考えてみよう。すると、第1節で与えた場のラグランジュ形式に従い

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) = \mathcal{L}_0(\phi, \partial_\mu\phi) + \mathcal{L}_1(\phi), \quad \pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\dot{\phi}}$$

より

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\dot{\phi}}\dot{\phi} - \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_1 = \mathcal{H}_0 - \mathcal{L}_1$$

となるから、

$$\mathcal{H}_1(x) = -\mathcal{L}_1(x) \tag{I.81}$$

よって、S行列は、スカラー量である $\mathcal{L}_1(x)$ を用いて

$$\begin{aligned}
S &= 1 + i \int d^4x_1 \mathcal{L}_1(x_1) + \frac{i^2}{2!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 T[\mathcal{L}_1(x_1)\mathcal{L}_1(x_2)] + \cdots \\
&\equiv T \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}_1(x) \right]
\end{aligned} \tag{I.82}$$

とローレンツ不変性が明白な形に書き換えることが出来る。但し、指数関数の形をした第2の式は、第1の式を形式的にまとめて表したものである。

一方、もし \mathcal{L}_I が場の微分も含む形 [微分結合 (Derivative coupling)] なら

$$\pi = \partial\mathcal{L}_0/\partial\dot{\phi} + \partial\mathcal{L}_I/\partial\dot{\phi}$$

となるため、 \mathcal{H}_I と \mathcal{L}_I の関係も (I.81) とは異なり

$$\mathcal{H}_I(x) \neq -\mathcal{L}_I(x)$$

となってしまう、上式のように S を $\mathcal{L}_I(x)$ で表すことは出来ないように思われる。しかし、実際には、相互作用が繰り込み可能 (Renormalizable) で摂動展開が有効になる場合には「T積をT*積のことと約束」しておけば、やはり

$$S = T \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}_I(x)\right]$$

が成立することが知られている。^{#14}

積分方程式 (I.74) を解き始めるときに相互作用は微小ということを前提とした。事実、 \mathcal{L}_I が十分に小さい定数に比例する形をしているなら、摂動展開 $S = 1 + S^{(1)} + S^{(2)} + \dots$ の初めの2～3項の寄与を調べるだけで高精度の近似解が得られると期待できる。このような摂動技法は非相対論的量子力学にも現れるが、本講義の対象は相対論的な場の量子論なので、**共変摂動論 (Covariant perturbation theory)** とも呼ばれる。これを具体的に様々な反応の解析に適用することが摂動計算の主題となるが、その前に、散乱断面積や崩壊幅といった反応確率を表す重要な量を次節で導入しよう。

I-6. 散乱断面積と崩壊幅

ここまでの解説により、粒子反応に関する種々の理論計算を進める枠組みが整ってきた。その中で実際に確率振幅などが求まれば、それに基づく実験データ分析を通じて関与する相互作用の諸性質も解明されるだろう。ただ、例えば散乱実験では、粒子1・2のビーム同士ある

^{#14} $\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I + [\text{差額}]$ とすると、この「差額」およびT積をT*積と読み替える時に現れる「差額」の寄与が打ち消し合ってしまうのである。詳しくは、例えば「Quantum Field Theory」(C. Itzykson, J-B. Zuber 著: McGraw-Hill Inc.) の6-1-4節参照。

また、「Introduction to the Theory of Quantized Fields」(N.N. Bogoliubov, D.V. Shirkov 著: Wiley Inc.) III-18節では、状態変化 $|\Psi(-\infty)\rangle \rightarrow |\Psi(+\infty)\rangle = S|\Psi(-\infty)\rangle$ に対し [共変性・ユニタリ性・因果性] を要請することで、 \mathcal{H}_I を経由せず (I.82) が導出されている。

いは粒子1のビームと多数の固定標的(粒子2)が作用し合う訳で、決して1回限りの衝突を観測するのではない。よって、ビーム強度なども適切に考慮しないと正確な情報は引き出せない。つまり、散乱でも崩壊でも、様々な実験条件を含めより厳密に反応発生の確率を定義する必要がある。そこに登場する重要な量が、**散乱(衝突)断面積**(Scattering cross section: しばしば**断面積**と略される)と**崩壊幅**(Decay width)である。

散乱断面積の定義

まず、実際に実験で用いられる粒子ビームについて、注意すべき点を列挙しておく:

(1) ビームは、我々には非常に細く絞り込まれているように見えても、一つ一つの粒子の特徴的サイズと比較すると、無限大と言えらるほどに広がっている。

また、

(2) ビーム内部では、個々の粒子は互いに十分離れた状態で運動しており、その間の相互作用は無視できる。

従って、ビーム同士(あるいはビームと固定標的)が衝突している瞬間を除けば、どの粒子も自由粒子として記述できる。更に、

(3) 入射する始状態粒子も飛び去る終状態粒子も共に超高速であるため、我々には全過程が一瞬で終わるように見えても、やはり微視的スケール(反応そのものの時間スケール)で見れば無限の長さとして扱える。■

これにより、時刻 $t = t_i (= -\infty)$ で互いに自由だった二つの状態が相互作用し、そのあと時刻 $t = t_f (= +\infty)$ で再び自由状態になる、という一連の過程を記述する S 行列演算子が適用可能となる。

これで準備はできた。ある**散乱過程の断面積**とは、**単位体積および単位時間当りの反応回数を粒子1・2の個数密度と両者の相対的な速さで割った量**である。従って、両粒子のビーム内個数密度を ρ_1 及び ρ_2 , その相対速度の大きさを v_{rel} とし、体積 V の空間内で時間 T の間に衝突が N 回起こったとすると、この場合の散乱断面積 σ は

$$\sigma = N / (VT\rho_1\rho_2 v_{\text{rel}}) \quad (\text{I.83})$$

で与えられる。また、終状態として特別な状態 - 例えば入射粒子がビーム方向に対して角度 θ と $\theta + d\theta$ の間に散乱された状態 - のみに着目する場合には、反応回数も微小になるはずなので、 N と σ をそれぞれ dN 及び $d\sigma$ と書き改め

$$d\sigma = dN / (VT\rho_1\rho_2 v_{\text{rel}}) \quad (\text{I.84})$$

として、この $d\sigma$ 或いは $d\sigma/d\theta$ を（この方向への）**微分断面積**（Differential cross section）と呼ぶ。

断面積は、(I.83) 式が示す通り（通常の単位系では）面積の次元を持ち、「標的（粒子 2）1 個に対し、それを含む面に垂直に、単位面積当り 1 個の粒子（粒子 1）が入射した時に衝突が起こる確率」を表す。実際、これは次のように確認できる：時間 T の間に各単位面に達するのは、「当該単位面を断面とする長さ $v_{\text{rel}} T$ の立体領域」（図 2）の内部にいる粒子 1 で、その数は個数密度 $= \rho_1$ より $\rho_1 v_{\text{rel}} T$ 個。すると、上記の確率を σ' と書

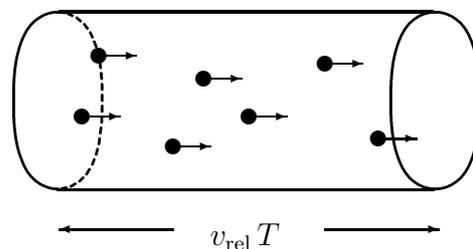


図 2

けば、粒子 2（標的）1 個当り衝突は $\rho_1 v_{\text{rel}} T \sigma'$ 回起こることになるが、体積 V の空間内には粒子 2 も $\rho_2 V$ 個存在するから全衝突回数は $N = \rho_1 \rho_2 v_{\text{rel}} V T \sigma'$ 。これを断面積 σ の定義 (I.83) と比べれば、正に $\sigma' = \sigma$ という訳である。

こうして導入した断面積を、「 $|\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2\rangle$ という始状態」および「質量が M_i で運動量が微小区間 $[\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_i + d\mathbf{q}_i]$ にある粒子 ($i = 1 \sim n$) からなる終状態」に適用し、S 行列ならびに実際に測定されるエネルギー・運動量で表現しよう。

そのために、まず v_{rel} を粒子 1・2 の運動量 $\mathbf{p}_{1,2}^\mu = (p_{1,2}^0, \mathbf{p}_{1,2})$ と質量 $m_{1,2}$ で書き表そう。一般には両者の速度 $\mathbf{v}_{1,2}$ の関係には何の制限もないが、ここでは実用上特に重要な重心系および粒子 2 が静止している実験室系に話を限る。すると、 \mathbf{v}_1 と \mathbf{v}_2 は互いに（反）平行 ($\mathbf{v}_2 = 0$ の場合も含む) となるので、

$$v_{\text{rel}} = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = |\mathbf{p}_1/p_1^0 - \mathbf{p}_2/p_2^0| = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} / (p_1^0 p_2^0) \quad (\text{I.85})$$

を得る。^{#15}

次に、始状態の表現に必要な個数密度 ρ について考える。 $\langle \mathbf{p} | \mathbf{p} \rangle$ は、1 粒子波動関数を用いて

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{p} \rangle = \int d^3 \mathbf{x} \psi_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \int d^3 \mathbf{x} |\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})|^2$$

と表せることからわかるように、全空間内に存在する粒子の総数を与えるから、 $|\mathbf{p}\rangle$ で記述される状態においては $\int d^3 \mathbf{x} = V_{\text{全空間}}$ と書けば

^{#15} 実は、一般の場合には逆に (I.85) 式の右辺が v_{rel} の「定義」として用いられる。

$$\rho = \langle \mathbf{p} | \mathbf{p} \rangle / V_{\text{全空間}}$$

である．ここで，本講義での規格化 $\langle \mathbf{p} | \mathbf{p}' \rangle = (2\pi)^3 2p^0 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ を思い出せば，

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{p} \rangle = (2\pi)^3 2p^0 \delta^3(0) = 2p^0 \int d^3 \mathbf{x} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{p}=0} = 2p^0 \int d^3 \mathbf{x} = 2p^0 V_{\text{全空間}}$$

と変形できるので，最終的に

$$\rho = 2p^0 \quad (\text{I.86})$$

が得られる．

他方，終状態の表現のためには一般の多粒子状態について考察する必要がある．まず，本講義で採用している規格化方式では，フォック基底の完全性条件は，(I.21) 式のところでも触れたように

$$\sum_n \int \prod_i^n d^3 \tilde{\mathbf{p}}_i |\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n\rangle \langle \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n| = 1 \quad (\text{I.87})$$

で与えられることを確認しよう【但し，この左辺は，関与する全ての物理的粒子状態に互る和とその運動量についての積分を表すが， $n=0$ の場合には左辺 = $|0\rangle\langle 0|$ であると約束する．また，状態の中に m 個の同種粒子がある場合には，積分において同じ状態を重複して数えないよう，対応する項全体を $m!$ で割るものとする】．事実，この両辺がどのような物理的状態ベクトルとの内積に対しても等しくなることを示すのは難しくない．

この完全性条件により，任意の状態 $|\Psi\rangle$ は

$$|\Psi\rangle = \sum_n \int \prod_i^n d^3 \tilde{\mathbf{p}}_i |\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n\rangle \langle \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n | \Psi \rangle \quad (\text{I.88})$$

と展開され，そのノルムは

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \sum_n \int \prod_i^n d^3 \tilde{\mathbf{p}}_i |\langle \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n | \Psi \rangle|^2 \quad (\text{I.89})$$

と表される．1粒子状態 $|\mathbf{p}\rangle$ の場合は，前述のように $\langle \mathbf{p} | \mathbf{p} \rangle =$ 粒子の総数 だったが，一般の状態においては， $\langle \Psi | \Psi \rangle$ は $|\Psi\rangle$ が記述する状態の総数を与える．それが上式右辺のように表されるということは，その中で各粒子の運動量がそれぞれ $[\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_i + d\mathbf{p}_i]$ という微小な区間に入っている n 粒子状態の数が

$$\prod_i^n d^3 \tilde{\mathbf{p}}_i |\langle \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n | \Psi \rangle|^2$$

であることを意味する。故に、この $|\Psi\rangle$ として始状態 $|\alpha\rangle (= |\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\rangle)$ の時間発展した形 $S|\alpha\rangle$ をとり、想定中の終状態 $|\mathbf{q}_1 \cdots \mathbf{q}_n\rangle$ と組み合わせれば、衝突が生むこの終状態の数、すなわち、断面積の定義 (I.84) における反応回数 dN は

$$dN = \prod_{i=1}^n d^3\tilde{\mathbf{q}}_i |\langle\beta|S|\alpha\rangle|^2 \quad (\text{I.90})$$

であることがわかる。但し、簡単のため、終状態 $|\mathbf{q}_1 \cdots \mathbf{q}_n\rangle$ は $|\beta\rangle$ と表した。

ここで一つ補足しておく： S は、あらゆる可能な時間発展を記述する演算子なので、その中には「無反応」という場合も含まれる。これは、 S の摂動展開

$$S = 1 + S^{(1)} + S^{(2)} + \cdots + S^{(n)} + \cdots$$

では右辺の「1」に対応する。よって、厳密に言えば $S - 1$ が反応を記述する演算子ということになるが、 $\alpha \neq \beta$ なら勿論この1は S 行列要素 $\langle\beta|S|\alpha\rangle$ には寄与しないので、これ以降もこのまま S を用いて話を進めることにする。

では本題に戻ろう。どんな反応においても全エネルギー・運動量 P は常に保存されるから、上に現れた $\langle\beta|S|\alpha\rangle$ は、 $\delta^4(P_\beta - P_\alpha)$ という因子を含むはずである。そこで、それを（標準的に用いられる定数因子と一緒に）陽に抜き出して

$$\langle\beta|S|\alpha\rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) \mathcal{M}_{\beta\alpha} \quad (\text{I.91})$$

と書き、核となる $\mathcal{M}_{\beta\alpha}$ を**不変散乱振幅** (Invariant scattering amplitude) と呼ぶ。また、この $\langle\beta|S|\alpha\rangle$ が記述する遷移の舞台は全時空であり、その体積は

$$[VT]_{\text{全時空}} = \int d^3\mathbf{x} \int dt = \int d^4x$$

で与えられる。従って、これらの表現を用いると

$$|\langle\beta|S|\alpha\rangle|^2 = |(2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) \mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2$$

の右辺で $\mathcal{M}_{\beta\alpha}$ を除く部分は

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) (2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) &= (2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) (2\pi)^4 \delta^4(0) \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) \int d^4x = [VT]_{\text{全時空}} (2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) \end{aligned}$$

となり、反応回数 dN は

$$dN = [VT]_{\text{全時空}} \prod_{i=1}^n d^3\tilde{\mathbf{q}}_i (2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \quad (\text{I.92})$$

と表される。これは、うまい具合に $[VT]_{\text{全時空}}$ に比例する形になっている。このお蔭で単位体積・単位時間当りの反応回数も直ちに得られ、それを、すでに調べた相対速度の大きさ (I.85) や個数密度の表現 (I.86) と共に (I.84) 式に代入すれば、最終的に $\alpha \rightarrow \beta$ という反応の微分断面面積として

$$d\sigma = \prod_{i=1}^n d^3\tilde{\mathbf{q}}_i \frac{1}{4F} (2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \quad (\text{I.93})$$

$$(F \equiv [(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{1/2})$$

が、更に、これを積分することにより**全断面面積** (Total cross section)

$$\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^n d^3\tilde{\mathbf{q}}_i \frac{1}{4F} (2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \quad (\text{I.94})$$

が得られる。但し、この積分を実行する際には、完全性条件 (I.87) の下で述べた注意は忘れないようにしよう。すなわち、終状態の中に同種粒子が n_1 個、 n_2 個、 \dots ある場合には、この右辺全体を $n_1! n_2! \dots$ で割ることが必要である。これは、例えば 1 と 2 が同種である場合、それぞれの運動量が \mathbf{q}, \mathbf{q}' である場合と \mathbf{q}', \mathbf{q} である場合が原理的に区別不可能 (不可弁別性) で全く同じ終状態を与えるため、 $\mathbf{q}_{1,2}$ 両方について全ての積分領域で積分を行うと、その同じ状態を 2 度数えてしまうことになるからである。^{#16}

さて、断面面積の基礎事項は以上だが、実用的な観点から有用な公式も幾つか導いておこう。実際の実験では、全ての終状態粒子を同時に追いかけることは簡単ではない。特に、多数のクォーク (ハドロン) が生成される場合などは、それは不可能なことも珍しくはない。むしろ、終状態の特定の粒子一つか二つに焦点を絞る、その他の粒子については全ての状態を含める (積分する) といった分析の方が普通である。例えば、上の式で終状態の粒子 1 が $[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1 + d\mathbf{q}_1]$ という微小な運動量区間に生成される微分断面面積は次のようになる：

$$\frac{d\sigma}{d^3\tilde{\mathbf{q}}_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=2}^n d^3\tilde{\mathbf{q}}_i \frac{1}{4F} (2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \quad (\text{I.95})$$

この式は、 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ といった 2 体反応を重心系で記述する場合には特に簡単な形になる。実際、 \mathbf{q}_2 積分は、4 次元デルタ関数の空間部分 $\delta^3(\mathbf{P}_\beta - \mathbf{P}_\alpha) \Rightarrow \delta^3(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{P}_\alpha) = \delta^3(\mathbf{q}_2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1))$ の助けで直ちに完了する：

$$\frac{d\sigma}{d^3\tilde{\mathbf{q}}_1} = \frac{1}{(2\pi)^3 2q_2^0} \frac{1}{4F} (2\pi)^4 \delta(P_\beta^0 - P_\alpha^0) |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \quad (\text{I.96})$$

^{#16} 実は、多くの教科書は、すでに微分断面面積の段階で $1/(n_1! n_2! \dots)$ を含めている。定義の問題だから深く議論してもあまり意味はないが、少なくとも筆者の個人的な見解では、この因子 [統計因子 (Statistical factor)] は含めない方が微分断面面積の本来の意味に合致すると思う。

ここで、 $P_\beta^0 = q_1^0 + q_2^0 = \sqrt{\mathbf{q}_1^2 + M_1^2} + \sqrt{\mathbf{q}_2^2 + M_2^2}$ であり、また、 q_2^0 及び $\mathcal{M}_{\beta\alpha}$ の中の全ての q_2 は、実行した3次元デルタ関数積分により $\mathbf{q}_2 = \mathbf{P}_\alpha - \mathbf{q}_1 = -\mathbf{q}_1$ (重心系では $\mathbf{P}_\alpha = 0$ だから) と置き換えられる。更に、極座標を用いると $d^3\mathbf{q}_1 = q_1^2 d|\mathbf{q}_1| d\Omega$ となるが、このうち、 $|\mathbf{q}_1|$ の値は残っているデルタ関数のため固定されてしまうので、 $|\mathbf{q}_1|$ 積分も簡単に実行できる。すなわち、

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \int_0^{+\infty} d|\mathbf{q}_1| \frac{d\sigma}{d|\mathbf{q}_1| d\Omega} \\ &= \int_0^{+\infty} |\mathbf{q}_1| d|\mathbf{q}_1| \frac{|\mathbf{q}_1|}{64\pi^2 q_1^0 q_2^0} \frac{1}{F} \delta(\sqrt{s} - q_1^0 - q_2^0) |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \\ &\quad (\text{但し, } s \equiv (p_1 + p_2)^2 = (p_1^0 + p_2^0)^2) \end{aligned}$$

の中で、 $|\mathbf{q}_1|^2 = (q_1^0)^2 - M_1^2 = (q_2^0)^2 - M_2^2$ から $|\mathbf{q}_1| d|\mathbf{q}_1| = q_1^0 dq_1^0 = q_2^0 dq_2^0$ が得られることを利用し積分変数を $|\mathbf{q}_1|$ から $q_1^0 + q_2^0$ に変換する。すると上式は

$$\begin{aligned} &\int_{M_1+M_2}^{+\infty} d(q_1^0 + q_2^0) \frac{q_1^0 q_2^0}{q_1^0 + q_2^0} \frac{|\mathbf{q}_1|}{64\pi^2 q_1^0 q_2^0} \frac{1}{F} \delta(\sqrt{s} - q_1^0 - q_2^0) |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \\ &= \frac{|\mathbf{q}_1|}{64\pi^2 \sqrt{s}} \frac{1}{F} |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \end{aligned}$$

となり、 $F \equiv \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} = |p_2^0 \mathbf{p}_1 - p_1^0 \mathbf{p}_2| = (p_2^0 + p_1^0) |\mathbf{p}_1| = \sqrt{s} |\mathbf{p}_1|$ を用いてコンパクトな形

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\mathbf{q}_1|}{64\pi^2 s |\mathbf{p}_1|} |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \quad (\text{I.97})$$

を得るという訳である。ここで、 $|\mathbf{p}_1|$ と $|\mathbf{q}_1|$ は $s = (p_1^0 + p_2^0)^2 = (q_1^0 + q_2^0)^2$ から

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_1| &= \sqrt{(p_1^0)^2 - m_1^2}, & p_1^0 &= (s + m_1^2 - m_2^2)/(2\sqrt{s}) \\ |\mathbf{q}_1| &= \sqrt{(q_1^0)^2 - M_1^2}, & q_1^0 &= (s + M_1^2 - M_2^2)/(2\sqrt{s}) \end{aligned}$$

である。(I.97) 式は、生成粒子1の角分布を与える公式であり、素粒子反応の解析においてよく利用される。

崩壊幅の定義

電子 (Electron)、光子やニュートリノ (Neutrino) 等 ごく少数の例外を除き大多数の素粒子は不安定で、時間の経過に伴い (外部から作用がなくても自発的に) より軽い素粒子群に変化していく。これが崩壊現象である。 これも、衝突過程と同じく素粒子相互作用の性質を調べるために頻繁に分析される反応で、断面積に対応して崩壊幅という量で記述される。これは、**1個の粒子の単位時間当りの崩壊確率**を表す。数式的には断面積とほとんど同じように取り扱うことができるが、初期状態 $|\alpha\rangle$ としては、通常は崩壊する粒子の静止状態を考える。

散乱過程と同様に、質量 m の粒子が状態 $|\beta\rangle$ へ崩壊し、終状態粒子の各運動量が $[\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_i + d\mathbf{q}_i]$ ($i = 1 \sim n$) という微小区間に入るとしよう。すると、そのような崩壊過程の全時間・空間における発生回数は (I.92) と同じく

$$dN = [VT]_{\text{全時空}} \prod_{i=1}^n d^3\tilde{\mathbf{q}}_i (2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \quad (\text{I.98})$$

となる。但し、ここの始状態 α は、上記のように全運動量 $P_\alpha^\mu = (m, 0, 0, 0)$ の 1 粒子状態で、それは、散乱での $|\mathbf{p}\rangle$ の個数密度算出 (30 頁) に倣えば、全空間に $2P_\alpha^0 V_{\text{全空間}} (= 2mV_{\text{全空間}})$ 個の粒子が存在する状態を表すことになる。よって、上述の定義に従えば、この過程の微分崩壊幅 (Differential decay width) は

$$d\Gamma = \frac{dN}{2m[VT]_{\text{全時空}}} = \prod_{i=1}^n d^3\tilde{\mathbf{q}}_i \frac{1}{2m} (2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \quad (\text{I.99})$$

で与えられることがわかる。これも、断面積と同様に終状態が 2 体の場合には

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{|\mathbf{q}|}{32\pi^2 m^2} |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \quad (\text{I.100})$$

と簡単な形にまとめられる。

この $d\Gamma$ を全ての運動量領域に互り積分した量 Γ は (考察中の終状態への) **部分崩壊幅** (Partial decay width), 更に、この Γ をあらゆる可能な終状態について足し上げた和 Γ_{tot} は **全崩壊幅** (Total decay width) と呼ばれる:

$$\Gamma_{\text{tot}} = \sum_{\text{全終状態}} \Gamma = \sum_{\text{全終状態}} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^n d^3\tilde{\mathbf{q}}_i \frac{1}{2m} (2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \quad (\text{I.101})$$

また、**分岐比** (Branching ratio) とは、両者の比 $Br \equiv \Gamma/\Gamma_{\text{tot}}$ を意味する。

全崩壊幅は、始状態粒子の「単位時間当りの全崩壊確率」を表しており、それが Γ_{tot} ということは、この粒子は平均時間 $\tau = 1/\Gamma_{\text{tot}}$ で崩壊するということである。 つまり、 Γ_{tot} の逆数は、崩壊粒子の**平均寿命** (Mean lifetime, あるいは略して**寿命**) を与える。但し、崩壊粒子の非静止系 ($P_\alpha^0 \neq m$) では上記公式の $2m$ が $2P_\alpha^0$ で置き換わるため、寿命は P_α^0/m 倍に延びる。これは、よく知られた「相対論効果による時間の遅れ」を表す。

全断面積と全崩壊幅

この節を終える前に、少々細かい用語の注意をしておこう。同じ「全」で始まる量でも、全断面積と全崩壊幅を比べると両者の使い方には微妙な違いが見られる。全断面積の方は、生成される粒子の種類を固定して、その反応が起こる全確率を表すのに使われることが多い。従っ

て、 $|\Psi_A\rangle \rightarrow |\Psi_B\rangle$ の全断面積、 $|\Psi_A\rangle \rightarrow |\Psi_C\rangle$ の全断面積、 \dots というように、散乱の種類毎に全断面積が現れる。一方、全崩壊幅は、すべての終状態について足し合わせた全崩壊確率を指す方が普通である。上でも一応そのように説明しておいた。これは、全崩壊確率の逆数が「平均寿命」という特別な意味を持つこととも無関係ではないだろう。但し、この使い分けには確立された規則がある訳ではないので、多少面倒でも「過程 $A \rightarrow B$ の全断面積・全崩壊幅」のように明記するのが安全だろう。

II. 輻射補正と繰り込み

II-1. 摂動第 1 次近似でのスカラー粒子散乱

共変摂動論において不変散乱振幅がどのように導かれるかを具体的に示すため、最も簡単な中性スカラー粒子同士の散乱 $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ を取り上げ、まずは、摂動の第 1 次（最低次）近似で扱ってみよう。ここで、反応を引き起こす相互作用は、第 I-1 節に現れた $\lambda\phi^4$ 模型の

$$\mathcal{L}_I(x) = -\frac{\lambda}{4!} : \phi^4(x) : \quad (\text{II.1})$$

であるとする。

S 行列の摂動展開 $S = 1 + S^{(1)} + S^{(2)} + \dots$ において、最低次の近似で寄与するのは

$$S^{(1)} = i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) = -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x : \phi^4(x) : \quad (\text{II.2})$$

であり、散乱前の粒子の運動量を $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 、散乱後の運動量を $\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ とすると、その行列要素は

$$\begin{aligned} & \langle \phi(\mathbf{p}_3)\phi(\mathbf{p}_4) | S^{(1)} | \phi(\mathbf{p}_1)\phi(\mathbf{p}_2) \rangle \\ &= -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \langle 0 | a(\mathbf{p}_3)a(\mathbf{p}_4) : \phi^4(x) : a^\dagger(\mathbf{p}_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

と与えられる。この過程では、始状態と終状態で粒子数は変化していないから、 $\phi(x)$ をその生成演算子部分 $\phi^{(c)}(x)$ ($c = \text{creation}$) と消滅演算子部分 $\phi^{(a)}(x)$ ($a = \text{annihilation}$) に分けて^{#17} $: \phi^4(x) :$ を展開した時、各項の中で生成・消滅演算子が二つずつ含まれているものだけが効く。四つ並んだ $\phi(x)$ の中から生成演算子 2 個と消滅演算子 2 個を抜き出す方法は ${}_4C_2 = 6$

^{#17} 通常は $\phi^{(c)}(x)$ は負の振動数部分ということで $\phi^{(-)}(x)$ と、また $\phi^{(a)}(x)$ は正振動数部分ということで $\phi^{(+)}(x)$ と記される。しかしながら、少なくとも筆者には (±) に惑わされ どうしても逆に $\phi^{(+)}(x)$ の方が生成部分、 $\phi^{(-)}(x)$ の方が消滅部分に見えてしまうので、ここでは (c), (a) を用いることにする。

通りあるから

$$\begin{aligned}
\text{上式} &= -\frac{6i\lambda}{4!} \int d^4x \langle 0|a(\mathbf{p}_3)a(\mathbf{p}_4)\phi^{(c)}(x)\phi^{(c)}(x)\phi^{(a)}(x)\phi^{(a)}(x)a^\dagger(\mathbf{p}_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2)|0\rangle \\
&= -\frac{i\lambda}{4} \int d^4x \int \prod_{i=1}^4 d^3\tilde{\mathbf{q}}_i e^{i(q_1+q_2-q_3-q_4)x} \\
&\quad \times \langle 0|a(\mathbf{p}_3)a(\mathbf{p}_4)a^\dagger(\mathbf{q}_1)a^\dagger(\mathbf{q}_2)a(\mathbf{q}_3)a(\mathbf{q}_4)a^\dagger(\mathbf{p}_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2)|0\rangle
\end{aligned}$$

ここで、まず $a(\mathbf{q}_3)a(\mathbf{q}_4)a^\dagger(\mathbf{p}_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2)|0\rangle$ 部分に注目しよう。これは

$$\begin{aligned}
&a(\mathbf{q}_3)a(\mathbf{q}_4)a^\dagger(\mathbf{p}_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2)|0\rangle \\
&= a(\mathbf{q}_3)[a(\mathbf{q}_4), a^\dagger(\mathbf{p}_1)]a^\dagger(\mathbf{p}_2)|0\rangle + a(\mathbf{q}_3)a^\dagger(\mathbf{p}_1)a(\mathbf{q}_4)a^\dagger(\mathbf{p}_2)|0\rangle \\
&= a(\mathbf{q}_3)(2\pi)^3 2q_4^0 \delta^3(\mathbf{q}_4 - \mathbf{p}_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2)|0\rangle + a(\mathbf{q}_3)a^\dagger(\mathbf{p}_1)[a(\mathbf{q}_4), a^\dagger(\mathbf{p}_2)]|0\rangle \\
&\quad + a(\mathbf{q}_3)a^\dagger(\mathbf{p}_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2)a(\mathbf{q}_4)|0\rangle
\end{aligned}$$

と変形していけるが、最後の項は、消滅演算子が直接 $|0\rangle$ に作用するため 0 となる。更に同様の計算を続けると

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^3 2q_4^0 \delta^3(\mathbf{q}_4 - \mathbf{p}_1)[a(\mathbf{q}_3), a^\dagger(\mathbf{p}_2)]|0\rangle \\
&\quad + (2\pi)^3 2q_4^0 \delta^3(\mathbf{q}_4 - \mathbf{p}_2)[a(\mathbf{q}_3), a^\dagger(\mathbf{p}_1)]|0\rangle \\
&= (2\pi)^6 (2q_3^0)(2q_4^0) \left[\delta^3(\mathbf{q}_3 - \mathbf{p}_2)\delta^3(\mathbf{q}_4 - \mathbf{p}_1) + \delta^3(\mathbf{q}_3 - \mathbf{p}_1)\delta^3(\mathbf{q}_4 - \mathbf{p}_2) \right] |0\rangle
\end{aligned}$$

となって演算子は姿を消してしまう。すると、残る $a(\mathbf{p}_3)a(\mathbf{p}_4)a^\dagger(\mathbf{q}_1)a^\dagger(\mathbf{q}_2)$ も直接 $|0\rangle$ に掛かるようになるので、上と全く同じ操作によって

$$\begin{aligned}
&a(\mathbf{p}_3)a(\mathbf{p}_4)a^\dagger(\mathbf{q}_1)a^\dagger(\mathbf{q}_2)|0\rangle \\
&= (2\pi)^6 (2q_1^0)(2q_2^0) \left[\delta^3(\mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_4)\delta^3(\mathbf{q}_2 - \mathbf{p}_3) + \delta^3(\mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_3)\delta^3(\mathbf{q}_2 - \mathbf{p}_4) \right] |0\rangle
\end{aligned}$$

となり、残った $\langle 0|$ と $|0\rangle$ は直接結合して $\langle 0|0\rangle = 1$ となる。また、 $e^{i(q_1+q_2-q_3-q_4)x}$ の x 積分はデルタ関数になるので、結局

$$\begin{aligned}
&\langle \phi(\mathbf{p}_3)\phi(\mathbf{p}_4)|S^{(1)}|\phi(\mathbf{p}_1)\phi(\mathbf{p}_2)\rangle \\
&= -\frac{i\lambda}{4} \int (2\pi)^{12} \prod_{i=1}^4 (2q_i^0) d^3\tilde{\mathbf{q}}_i (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - q_3 - q_4) \\
&\quad \times \left[\delta^3(\mathbf{q}_3 - \mathbf{p}_2)\delta^3(\mathbf{q}_4 - \mathbf{p}_1) + \delta^3(\mathbf{q}_3 - \mathbf{p}_1)\delta^3(\mathbf{q}_4 - \mathbf{p}_2) \right] \\
&\quad \times \left[\delta^3(\mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_4)\delta^3(\mathbf{q}_2 - \mathbf{p}_3) + \delta^3(\mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_3)\delta^3(\mathbf{q}_2 - \mathbf{p}_4) \right] \\
&= -i\lambda (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \tag{II.4}
\end{aligned}$$

に達する．よって，これを不変散乱振幅の定義 (I.91) と比較すれば次式が得られる：

$$\mathcal{M}(\phi\phi \rightarrow \phi\phi) = -\lambda \quad (\text{II.5})$$

ファインマン則

以上のように計算を進めれば，常に，与えられた相互作用ラグランジアンから出発して必要な不変散乱振幅を導き出すことが出来る．しかし，上例はスカラー場のみが関与する反応で易しかったが，スピノル場やベクトル場が絡む反応はもっと複雑で，毎回それを行うのは面倒である．ところが，幸いなことに，このような作業を必要な分だけ予め済ませて一定の規則さえ導いておけば，後は，いかなる過程の散乱振幅も **ファインマン図** (Feynman diagram) と呼ぶ図形との対応から求まることが知られており，その規則は**ファインマン則** (Feynman rule) と名付けられている．

この図形規則では，始状態でも終状態でもそこに現れるスカラー粒子・スピノル粒子・ベクトル粒子は，それぞれ **破線**・(矢印付きの) **実線**・**波線** で示され，これらの粒子線が交わる点が相互作用である．従って，ここで扱った $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ 散乱を表すファインマン図は以下のようなになる：

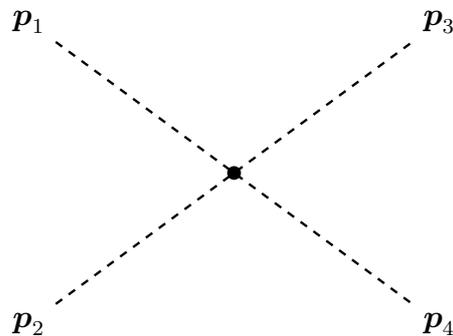


図 3

また，二つの相互作用点の間の状態（中間状態）も同じ種類の線で表され，そこには伝播関数－スカラー粒子であれば

$$\Delta_F(q) = \frac{1}{m^2 - q^2 - i\epsilon}$$

電子のようなディラック粒子の場合には

$$S_F(q) = \frac{1}{m - \not{q} - i\epsilon} \left(\equiv \frac{m + \not{q}}{m^2 - q^2 - i\epsilon} \right)$$

光子のような無質量ベクトル粒子なら

$$D_F^{\mu\nu}(q) = \frac{g^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}$$

が対応させられる。^{#18} 例えば、電子 (e) と光子 (γ) の散乱 - コンプトン散乱 (Compton scattering) - であれば、そこには中間状態として電子伝播関数が現れ、そのファインマン図は以下のようなになる [不変散乱振幅は二つの図 (1) と (2) の和から求められる] :

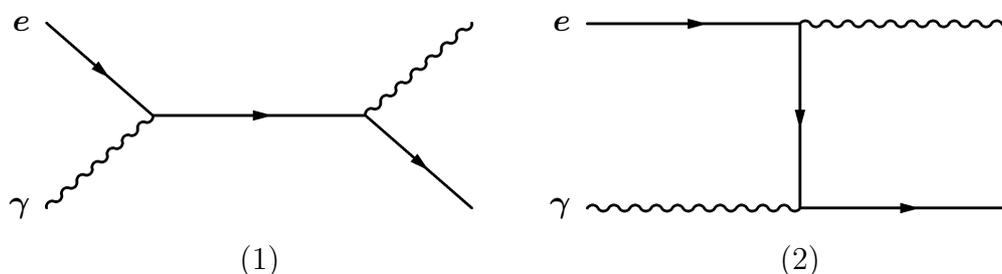


図 4

II-2. 最低次近似を超えて：輻射補正

それでは、次に摂動の第2近似に進もう。そこにはS行列展開の中の $S^{(2)}$ が関与する：

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= \frac{i^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 T[\mathcal{L}_1(x_1)\mathcal{L}_1(x_2)] \\ &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{\lambda}{4!}\right)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 T[:\phi^4(x_1)::\phi^4(x_2):] \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

まず最初に必要になる作業は、補遺 A-2 で解説する **ウィックの定理** (Wick's theorem) に従い $T[:\phi^4(x_1)::\phi^4(x_2):]$ を正規積と伝播関数の積に展開することである。但し、ここでは始状態も終状態も2個ずつのスカラー粒子から成ると指定されているので、散乱振幅に寄与するのは4個のスカラー場の正規積を含む項のみであり、残る4個のスカラー場は二つの伝播関数を構成することになる。更に、「はじめから同じ正規積の中に入っていた演算子同士は伝播関数の対にはならない」というウィックの定理の基本事項を思い出せば $\phi(x_1)$ と $\phi(x_2)$ の対だけが伝播関数を構成できるとわかり、その結果、対応する正規積は $:\phi^2(x_1)\phi^2(x_2):$ となる：

$$\text{寄与する項の形} = \text{係数} \times :\phi^2(x_1)\phi^2(x_2): \langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle \langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle$$

これに該当する項は $S^{(2)}$ に幾つ含まれるだろうか。正規積に関しては、4個の $\phi(x_1)$ から2個を取り出す方法は ${}_4C_2 (= 6)$ 通り、これは $\phi(x_2)$ に関しても同様だから合わせて36通り

^{#18}ファインマン図の中では、始状態・終状態の粒子を表す線は**外線** (External line)、中間状態 (伝播関数) の粒子を表す線は**内線** (Internal line) と、またこれらの線の交点 (相互作用) は**頂点** (Vertex) と呼ばれる。ファインマン図・ファインマン則の詳細については、例えば「場の量子論 - 摂動計算の基礎 - 第3版」(日置善郎, 吉岡書店) 第III章を参照のこと。

の組み合わせがある．もちろん全て同じ形 $:\phi^2(x_1)\phi^2(x_2):$ である．一方，残る二つの $\phi(x_1)$ と二つの $\phi(x_2)$ から2個の伝播関数をつくる方法は2通り．従って，上記のような形の項は72個生まれることになる：

$$\begin{aligned} \text{寄与する項} &= -36\left(-\frac{\lambda}{4!}\right)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 : \phi^2(x_1)\phi^2(x_2): \\ &\quad \times \langle 0 | T \phi(x_1)\phi(x_2) | 0 \rangle \langle 0 | T \phi(x_1)\phi(x_2) | 0 \rangle \\ &= \frac{\lambda^2}{16} \int d^4x_1 d^4x_2 : \phi^2(x_1)\phi^2(x_2): \Delta_F(x_1 - x_2)\Delta_F(x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

これを，第1次近似の場合と同様に終状態と始状態で挟むことにより， $S^{(2)}$ の行列要素が

$$\begin{aligned} &\langle \phi(\mathbf{p}_3)\phi(\mathbf{p}_4) | S^{(2)} | \phi(\mathbf{p}_1)\phi(\mathbf{p}_2) \rangle \\ &= \frac{\lambda^2}{16} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | a(\mathbf{p}_3)a(\mathbf{p}_4) : \phi^2(x_1)\phi^2(x_2) : a^\dagger(\mathbf{p}_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2) | 0 \rangle \\ &\quad \times \Delta_F(x_1 - x_2)\Delta_F(x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

と与えられる．

この中で正規積を構成する ϕ を生成演算子部分 $\phi^{(c)}$ と消滅演算子部分 $\phi^{(a)}$ の和で書けば

$$\phi^{(c)}(x_1)\phi^{(c)}(x_1)\phi^{(a)}(x_2)\phi^{(a)}(x_2), \quad \phi^{(c)}(x_2)\phi^{(c)}(x_2)\phi^{(a)}(x_1)\phi^{(a)}(x_1)$$

および

$$\begin{aligned} &\phi^{(c)}(x_1)\phi^{(c)}(x_2)\phi^{(a)}(x_1)\phi^{(a)}(x_2), \quad \phi^{(c)}(x_1)\phi^{(c)}(x_2)\phi^{(a)}(x_2)\phi^{(a)}(x_1), \\ &\phi^{(c)}(x_2)\phi^{(c)}(x_1)\phi^{(a)}(x_1)\phi^{(a)}(x_2), \quad \phi^{(c)}(x_2)\phi^{(c)}(x_1)\phi^{(a)}(x_2)\phi^{(a)}(x_1) \end{aligned}$$

という項が生き残り，他の組み合わせ－例えば4個の $\phi^{(c)}$ の積－は全て0となる．このうち，はじめの2項は，積分変数 $x_{1,2}$ の交換および伝播関数が偶関数であることより互いに等しいと示せ，また，続く4項は， $\phi^{(c)}$ 同士および $\phi^{(a)}$ 同士が交換可能であることも用いればやはり皆一致することがわかる．従って，求める散乱振幅には，二つの $\phi^{(c)}(x_1)\phi^{(c)}(x_1)\phi^{(a)}(x_2)\phi^{(a)}(x_2)$ と四つの $\phi^{(c)}(x_1)\phi^{(c)}(x_2)\phi^{(a)}(x_1)\phi^{(a)}(x_2)$ が寄与することになる：

$$\langle \phi(\mathbf{p}_3)\phi(\mathbf{p}_4) | S^{(2)} | \phi(\mathbf{p}_1)\phi(\mathbf{p}_2) \rangle = \frac{\lambda^2}{16} [2I_1 + 4I_2] \quad (\text{II.9})$$

但し，

$$\begin{aligned} I_1 &= \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | a(\mathbf{p}_3)a(\mathbf{p}_4)\phi^{(c)}(x_1)\phi^{(c)}(x_1)\phi^{(a)}(x_2)\phi^{(a)}(x_2)a^\dagger(\mathbf{p}_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2) | 0 \rangle \\ &\quad \times \Delta_F(x_1 - x_2)\Delta_F(x_1 - x_2) \\ I_2 &= \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | a(\mathbf{p}_3)a(\mathbf{p}_4)\phi^{(c)}(x_1)\phi^{(c)}(x_2)\phi^{(a)}(x_1)\phi^{(a)}(x_2)a^\dagger(\mathbf{p}_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2) | 0 \rangle \\ &\quad \times \Delta_F(x_1 - x_2)\Delta_F(x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

まず, I_1 から計算しよう. 第1次近似の場合と同様に $\phi^{(c),(a)}$ に平面波展開の式を代入し, Δ_F もフーリエ展開式

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \Delta_F(k) e^{-ikx}, \quad \Delta_F(k) = \frac{1}{m^2 - k^2 - i\varepsilon}$$

で表せば

$$\begin{aligned} I_1 &= \int d^4x_1 d^4x_2 \int \prod_{i=1}^4 d^3\tilde{\mathbf{q}}_i \int d^4k_1 d^4k_2 e^{i(q_1+q_2)x_1} e^{-i(q_3+q_4)x_2} e^{-i(k_1+k_2)(x_1-x_2)} \\ &\quad \times \langle 0|a(\mathbf{p}_3)a(\mathbf{p}_4)a^\dagger(\mathbf{q}_1)a^\dagger(\mathbf{q}_2)a(\mathbf{q}_3)a(\mathbf{q}_4)a^\dagger(\mathbf{p}_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2)|0\rangle \\ &\quad \times \frac{1}{(2\pi)^8} \Delta_F(k_1) \Delta_F(k_2) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4x_1 d^4x_2 \int \prod_{i=1}^4 d^3\tilde{\mathbf{q}}_i \int d^4k_1 d^4k_2 e^{i(q_1+q_2-k_1-k_2)x_1} e^{-i(q_3+q_4-k_1-k_2)x_2} \\ &\quad \times \langle 0|a(\mathbf{p}_3)a(\mathbf{p}_4)a^\dagger(\mathbf{q}_1)a^\dagger(\mathbf{q}_2)a(\mathbf{q}_3)a(\mathbf{q}_4)a^\dagger(\mathbf{p}_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2)|0\rangle \Delta_F(k_1) \Delta_F(k_2) \end{aligned}$$

となるが, この中で $x_{1,2}$ 積分は, デルタ関数の公式を思い出せば

$$\begin{aligned} &\int d^4x_1 d^4x_2 e^{i(q_1+q_2-k_1-k_2)x_1} e^{-i(q_3+q_4-k_1-k_2)x_2} \\ &= (2\pi)^8 \delta^4(q_1+q_2-k_1-k_2) \delta^4(q_3+q_4-k_1-k_2) \\ &= (2\pi)^8 \delta^4(q_1+q_2-q_3-q_4) \delta^4(q_3+q_4-k_1-k_2) \end{aligned}$$

とわかる.^{#19} また, 生成消滅演算子の真空期待値については, すでに第1次近似において次のように求められている:

$$\begin{aligned} &\langle 0|a(\mathbf{p}_3)a(\mathbf{p}_4)a^\dagger(\mathbf{q}_1)a^\dagger(\mathbf{q}_2)a(\mathbf{q}_3)a(\mathbf{q}_4)a^\dagger(\mathbf{p}_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2)|0\rangle \\ &= (2\pi)^{12} (2q_1^0)(2q_2^0)(2q_3^0)(2q_4^0) \\ &\quad \times \left[\delta^3(\mathbf{q}_3-\mathbf{p}_2)\delta^3(\mathbf{q}_4-\mathbf{p}_1) + \delta^3(\mathbf{q}_3-\mathbf{p}_1)\delta^3(\mathbf{q}_4-\mathbf{p}_2) \right] \\ &\quad \times \left[\delta^3(\mathbf{q}_1-\mathbf{p}_4)\delta^3(\mathbf{q}_2-\mathbf{p}_3) + \delta^3(\mathbf{q}_1-\mathbf{p}_3)\delta^3(\mathbf{q}_2-\mathbf{p}_4) \right] \end{aligned}$$

従って,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \prod_{i=1}^4 d^3\mathbf{q}_i \int d^4k_1 d^4k_2 \Delta_F(k_1) \Delta_F(k_2) \\ &\quad \times \delta^4(q_1+q_2-q_3-q_4) \delta^4(q_3+q_4-k_1-k_2) \\ &\quad \times \left[\delta^3(\mathbf{q}_3-\mathbf{p}_2)\delta^3(\mathbf{q}_4-\mathbf{p}_1) + \delta^3(\mathbf{q}_3-\mathbf{p}_1)\delta^3(\mathbf{q}_4-\mathbf{p}_2) \right] \\ &\quad \times \left[\delta^3(\mathbf{q}_1-\mathbf{p}_4)\delta^3(\mathbf{q}_2-\mathbf{p}_3) + \delta^3(\mathbf{q}_1-\mathbf{p}_3)\delta^3(\mathbf{q}_2-\mathbf{p}_4) \right] \end{aligned}$$

^{#19} 同じ運動量積分の積分変数でも, $q_{1,2,3,4}$ がオンシェル運動量であるのに対して $k_{1,2}$ はオフシェル運動量であることを忘れないようにしよう.

この右辺の3行目と4行目の積から四つの項が現れる．それらは互いに異なるように見えるが，第2行と合わせて $\mathbf{q}_{1,2,3,4}$ 積分を行えば全て同じ形になり

$$\begin{aligned} I_1 &= 4 \int d^4 k_1 d^4 k_2 \Delta_F(k_1) \Delta_F(k_2) \\ &\quad \times \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \delta^4(p_3 + p_4 - k_1 - k_2) \\ &= 4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \int d^4 k \Delta_F(k) \Delta_F(p_1 + p_2 - k) \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

を得る．

では，次に I_2 を求めよう． I_1 との違いは $\phi^{(c)}\phi^{(c)}\phi^{(a)}\phi^{(a)}$ の引数が，前者では x_1, x_1, x_2, x_2 であるのに対して後者では x_1, x_2, x_1, x_2 ということだけなので， I_1 式に基づいて直ちに

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4 x_1 d^4 x_2 \int \prod_{i=1}^4 d^3 \tilde{\mathbf{q}}_i \int d^4 k_1 d^4 k_2 e^{i(q_1 - q_3 - k_1 - k_2)x_1} e^{i(q_2 - q_4 + k_1 + k_2)x_2} \\ &\quad \times \langle 0 | a(\mathbf{p}_3) a(\mathbf{p}_4) a^\dagger(\mathbf{q}_1) a^\dagger(\mathbf{q}_2) a(\mathbf{q}_3) a(\mathbf{q}_4) a^\dagger(\mathbf{p}_1) a^\dagger(\mathbf{p}_2) | 0 \rangle \Delta_F(k_1) \Delta_F(k_2) \\ &= \int \prod_{i=1}^4 d^3 \mathbf{q}_i \int d^4 k_1 d^4 k_2 \Delta_F(k_1) \Delta_F(k_2) \\ &\quad \times \delta^4(q_1 + q_2 - q_3 - q_4) \delta^4(q_1 - q_3 - k_1 - k_2) \\ &\quad \times \left[\delta^3(\mathbf{q}_3 - \mathbf{p}_2) \delta^3(\mathbf{q}_4 - \mathbf{p}_1) + \delta^3(\mathbf{q}_3 - \mathbf{p}_1) \delta^3(\mathbf{q}_4 - \mathbf{p}_2) \right] \\ &\quad \times \left[\delta^3(\mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_4) \delta^3(\mathbf{q}_2 - \mathbf{p}_3) + \delta^3(\mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_3) \delta^3(\mathbf{q}_2 - \mathbf{p}_4) \right] \end{aligned}$$

と書けるが，続いて $\mathbf{q}_{1,2,3,4}$ 積分を実行すれば， I_1 の場合とは異なり二つの項の和が現れる：

$$\begin{aligned} I_2 &= 2 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \int d^4 k \Delta_F(k) \Delta_F(p_1 - p_3 - k) \\ &\quad + 2 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \int d^4 k \Delta_F(k) \Delta_F(p_1 - p_4 - k) \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

以上で $I_{1,2}$ が求められたので，第1次近似の不変散乱振幅への補正項を $\mathcal{M}^{(2)}$ と書けば

$$\begin{aligned} &\langle \phi(\mathbf{p}_3) \phi(\mathbf{p}_4) | S^{(2)} | \phi(\mathbf{p}_1) \phi(\mathbf{p}_2) \rangle \\ &= \frac{\lambda^2}{2} \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \\ &\quad \times \int d^4 k \Delta_F(k) \left[\Delta_F(p_1 + p_2 - k) + \Delta_F(p_1 - p_3 - k) + \Delta_F(p_1 - p_4 - k) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}^{(2)}(\phi\phi \rightarrow \phi\phi) \\ &= \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^{4i}} \Delta_F(k) \left[\Delta_F(p_1 + p_2 - k) + \Delta_F(p_1 - p_3 - k) + \Delta_F(p_1 - p_4 - k) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

となるが，各項はどんな反応過程を表しているのだろうか．まず，第1項 $\Delta_F(k) \Delta_F(p_1 + p_2 - k)$ につき考えてみる．これは，始状態の2粒子が或る点で衝突して運動量 k と $p_1 + p_2 - k$ の二

つの伝播関数を生み出し、それらが $(p_1 + p_2 = p_3 + p_4)$ なので再び別の或る点で終状態の2粒子を生成していると解釈できるだろう。これに対して第2項は、粒子1が或る点で二つの伝播関数と粒子3になる（二つの伝播関数は粒子2と共に粒子4になる）過程、第3項は、粒子1が二つの伝播関数と粒子4に遷移する（二つの伝播関数は粒子2と共に粒子3になる）過程を表すと捉えていいだろう。これに対応するファインマン図は以下のようになる：

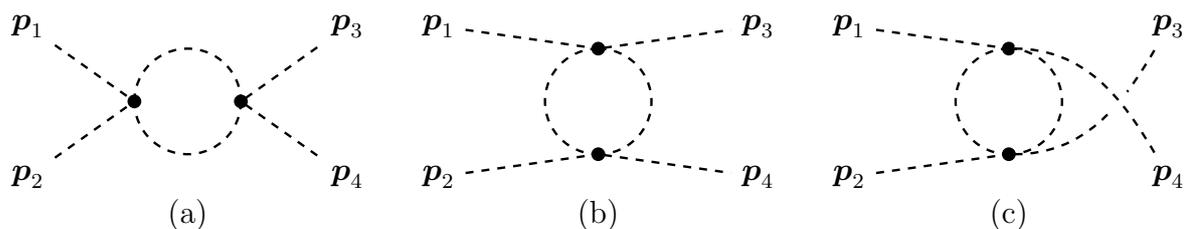


図 5

このような複数の伝播関数から成る閉じた図は**ループ (Loop) 図**， k のようにループの中だけを通る運動量を**ループ運動量**，このループ運動量の積分を**ループ積分**と呼ぶ。

II-3. 紫外発散と繰り込みの考え方

以上のように摂動第2近似での不変散乱振幅も計算すればよい…などと結論できたら苦労はないが、実は、上記3項は全て深刻な問題を孕んでいる： $\Delta_F(k) \sim k^{-2}$ なので、どの項も

$$\int d^4k \Delta_F(k) \Delta_F(\ell - k) \sim \int d^4k k^{-4}$$

$(\ell = p_1 + p_2, p_1 - p_3 \text{ または } p_1 - p_4)$ という形になるが、積分範囲は（省略しているが）皆フーリエ展開の積分なので勿論 $-\infty$ から $+\infty$ までで、従って、どの項も対数的に発散してしまうのである。これは、運動量が無限大になることで起こる発散なので紫外発散 (Ultraviolet divergence) と呼ばれる。これが「場の量子論における無限大の困難」であって、この難題は、実に多くの研究者を悩ませた。

これを解決したのは、朝永 (Tomonaga) - シュヴィンガー (Schwinger) - ファインマン (Feynman) により発見された繰り込み (Renormalization) という手法である。以下、その詳細について解説するが、まずは概要を述べておこう。摂動の第2近似では、不変散乱振幅は

$$\mathcal{M} = a_1 \lambda + a_2 \lambda^2$$

という形をしている。この右辺第2項のように、摂動の最低次近似を超える計算において現れる項は（第1項に対する）**輻射補正**（Radiative correction）と呼ばれる。さて、ここで、 λ は出発点のラグランジアンに含まれる結合定数だが、これは、我々が実験・観測で決められる結合定数と同じものだろうか。この問いに対し「そうではない」と認識するのが繰り込みの出発点となる。我々が（そのような散乱実験が可能であるとして）実験室で知りえるのは、全ての輻射補正項も含んだ不変散乱振幅（から導かれる散乱断面積）のはずであり、その結果、そこで求められる結合定数は、出発点の結合定数と同じものではない、という訳である。

そこで、もともとのラグランジアンが含む結合定数を改めて λ_0 と書き直し、我々が実際に直接感じる結合定数を λ 、両者の差を $\delta\lambda$ と書くことにしよう：

$$\lambda_0 = \lambda + \delta\lambda$$

輻射補正は全て無視する摂動の第1近似においては $\delta\lambda = 0$ だから、 $\delta\lambda$ を λ で級数展開した場合、初項は λ^2 に比例するはずである：

$$\lambda_0 = \lambda + c_1\lambda^2 + \dots$$

これにより、上記の不変散乱振幅も

$$\mathcal{M} = a_1\lambda_0 + a_2\lambda_0^2 \implies a_1\lambda + (a_1c_1 + a_2)\lambda^2 + \dots$$

となるが、ここで第1項が「観測される結合定数」で表されたからには、それ以上の補正は現れないはずということ、 λ^2 の係数 $a_1c_1 + a_2$ が0となるように c_1 を決め（すなわち $\delta\lambda$ を決め）、 λ に観測値を代入するというのが繰り込みである。^{#20}

これだけでは、この手法の有難味は不明確だが、繰り込み可能（Renormalizable）と呼ばれる相互作用の下では、一旦このように $\delta\lambda$ を決めてしまえば、他の物理量の輻射補正計算に現れる発散量も全て同じ $\delta\lambda$ により打ち消せる、というのが繰り込みの威力である。但し、この手法が通じない相互作用も存在し、それらは繰り込み不可能な（Non-renormalizable）相互作用という名称で区別されている。

II-4. 発散積分の正則化：次元正則化法

繰り込み手法の概観が終了したので、より詳しい解説に進もう。まずは、発散積分の正則化を考える。計算結果に無限大の量が残ったままでは数学的に意味ある議論が出来ないので、何

^{#20} 厳密に言えば、 $a_1c_1 + a_2 = 0$ とまで要求する必要はない。重要なことは無限大の除去なので $a_1c_1 + a_2 = \text{有限}$ という条件（繰り込み条件：Renormalization condition）を課せばよい。

らかの方法で発散積分を一時的に有限なものに抑え込む必要がある。それに対し、伝統的には運動量積分の上限・下限を $\pm\infty$ ではなく有限な $\pm\Lambda$ と置き換えてしまう方法が用いられていた。この Λ は切断 (カットオフ: Cutoff) と呼ばれる。ただ、これはフーリエ展開の厳密性を壊してしまうし、下手をすれば体系のローレンツ不変性も破りかねない。そこで、これに替って現在よく用いられるのが**次元正則化法** (Dimensional regularisation) である。これは、時空次元を「4」から「 D 」に拡張して計算を進め、全てが完了したら $D \rightarrow 4$ に戻すという技法である:

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4 \rightarrow D, \quad \int d^4k/(2\pi)^4 \rightarrow \int d^Dk/(2\pi)^D \quad (\text{II.15})$$

それでは D 次元ループ積分を実行してみよう。まずは (簡単のため上記 $(2\pi)^D$ は省略し),

$$I_{\text{loop}} = \int d^Dk \Delta_{\text{F}}(k)\Delta_{\text{F}}(\ell - k)$$

と置いて、二つの Δ_{F} に具体形を代入する:

$$I_{\text{loop}} = \int d^Dk \frac{1}{m^2 - k^2 - i\varepsilon} \cdot \frac{1}{m^2 - (\ell - k)^2 - i\varepsilon}$$

右辺の被積分関数の分母は、このままでは k の4次式になって複雑なので一工夫しなければならない。そこで、ファインマンのパラメータ公式

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} \quad (\text{II.16})$$

を用いると,^{#21}

$$\begin{aligned} I_{\text{loop}} &= \int_0^1 dx \int d^Dk \frac{1}{[x(m^2 - k^2 - i\varepsilon) + (1-x)[m^2 - (\ell - k)^2 - i\varepsilon]]^2} \\ &= \int_0^1 dx \int d^Dk \frac{1}{[k^2 - 2(1-x)\ell k + (1-x)\ell^2 - m^2 + i\varepsilon]^2} \end{aligned}$$

この式において

$$\begin{aligned} \text{右辺分母の } [] &= [k - (1-x)\ell]^2 - (1-x)^2\ell^2 + (1-x)\ell^2 - m^2 + i\varepsilon \\ &= [k - (1-x)\ell]^2 + x(1-x)\ell^2 - m^2 + i\varepsilon \end{aligned}$$

と書き換えられるので、 $k - (1-x)\ell$ を改めて k と置くと

$$I_{\text{loop}} = \int_0^1 dx \int d^Dk \frac{1}{[k^2 + x(1-x)\ell^2 - m^2 + i\varepsilon]^2}$$

^{#21}(II.16) 式において右辺の積分を実行した結果が左辺に一致することは容易に示せる。

ウィック回転

ここで、**ウィック回転** (Wick rotation) と呼ばれる技法を用いてミンコフスキー時空の積分をユークリッド時空の積分に書き直す。これは、 k^0 積分を複素平面上で考えてその経路を実軸から虚軸へと変換することで行われる：まず、図 6(a) において被積分関数は $|k^0| \rightarrow +\infty$ で十分に速く 0 に近づくので、積分路は、積分値に影響を与えることなく半径 ∞ の上半円を加えることが許され図 6(b) のような閉曲線へと拡張できる (下半分へ拡張してもよい)。次に、一旦このような複素積分に書き直せば、この閉曲線は図の黒点で示した極を横切らない限り自由に動かせるので図 6(c) のように変形する。ここで再び半径 ∞ の半円からの寄与は 0 であることを考えれば、結局 (d) のような積分路に到達する。これは、実軸に沿う積分路を反時計回りに 90° 回転させたことに相当するので「回転」という名が付いている。

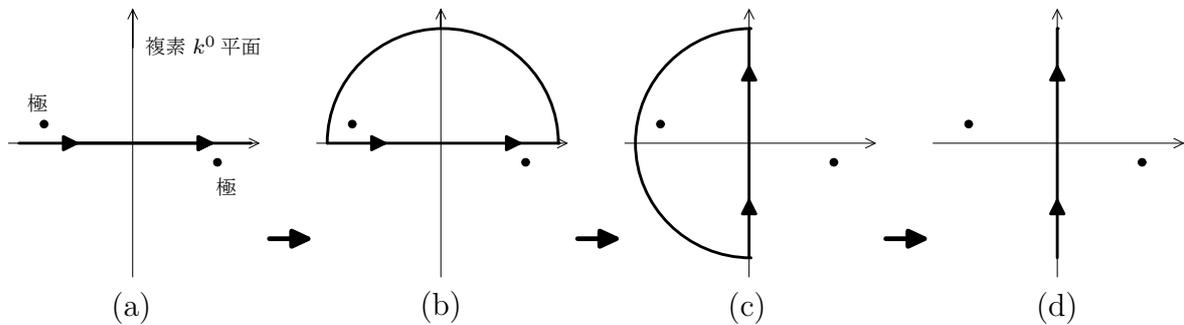


図 6

この操作で k^0 積分路は虚軸 つまり k^0 は純虚数になるので、虚数単位 i を陽に抜き出し

$$k^0 = iK^0$$

と置き、同時に、空間成分 k^i ($i = 1, 2, \dots, D-1$) も K^i と書き直そう。これにより

$$I_{\text{loop}} = i \int_0^1 dx \int d^D \mathbf{K} \frac{1}{[\mathbf{K}^2 - x(1-x)\ell^2 + m^2 - i\varepsilon]^2}$$

ここで $\mathbf{K}^2 = \sum_{a=0}^{D-1} (K^a)^2$, つまり $\mathbf{K} = (K^0, K^1, \dots, K^{D-1})$ は (D 次元) ユークリッド空間のベクトルになるので、そこでの積分公式

$$\int d^D \mathbf{K} = \int |\mathbf{K}|^{D-1} d|\mathbf{K}| d\Omega_D \quad (\text{II.17})$$

$$\begin{aligned} \int d\Omega_D &= \int_0^\pi d\theta_1 \sin^{D-2} \theta_1 \int_0^\pi d\theta_2 \sin^{D-3} \theta_2 \cdots \int_0^{2\pi} d\theta_{D-1} \\ &= 2\pi^{D/2} / \Gamma(D/2) \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

(Γ はガンマ関数) が利用できる:

$$\begin{aligned} I_{\text{loop}} \text{ の } \mathbf{K} \text{ 積分} &= \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \int d|\mathbf{K}| \frac{|\mathbf{K}|^{D-1}}{[\mathbf{K}^2 - x(1-x)\ell^2 + m^2 - i\varepsilon]^2} \\ &= \frac{\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \int d\mathbf{K}^2 \frac{(\mathbf{K}^2)^{D/2-1}}{[\mathbf{K}^2 - x(1-x)\ell^2 + m^2 - i\varepsilon]^2} \end{aligned}$$

ここで, $Z \equiv m^2 - x(1-x)\ell^2 - i\varepsilon$, $\xi \equiv Z/(\mathbf{K}^2 + Z)$ と置けば

$$\text{上式} = \frac{\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} Z^{D/2-2} \int_0^1 d\xi \xi^{1-D/2} (1-\xi)^{D/2-1}$$

と書き換えられ, ベータ関数の定義

$$B(\alpha, \beta) \equiv \int_0^1 d\xi \xi^{\alpha-1} (1-\xi)^{\beta-1} \quad (\text{II.19})$$

によって

$$\text{上式} = \frac{\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} Z^{D/2-2} B(2-D/2, D/2)$$

更に, このベータ関数とガンマ関数を結ぶ公式

$$B(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha + \beta) \quad (\text{II.20})$$

により

$$\text{上式} = \frac{\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} Z^{D/2-2} \frac{\Gamma(2-D/2)\Gamma(D/2)}{\Gamma(2)} = \pi^{D/2} Z^{D/2-2} \Gamma(2-D/2)$$

と表される.

以下, 最終的に必要になるのは $D = 4$ という現実世界での計算結果なので, それを意識して

$$\epsilon \equiv (4-D)/2 \quad (\text{II.21})$$

と置く. すると,

$$\text{上式} = \pi^{2-\epsilon} Z^{-\epsilon} \Gamma(\epsilon)$$

$D \rightarrow 4$ の極限では $\epsilon \rightarrow 0$ だから, ϵ は微小としてよい. その場合, ガンマ関数はオイラー定数 $\gamma (= 0.5772\dots)$ を使い, また $(\pi Z)^{-\epsilon}$ は展開公式 $a^x = 1 + (\ln a)x + O(x^2)$ より, それぞれ

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon), \quad (\pi Z)^{-\epsilon} = 1 - \epsilon \ln(\pi Z) \quad (\text{II.22})$$

と展開されるので

$$\text{上式} = \pi^2 \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \pi - \ln Z + O(\epsilon) \right]$$

従って,

$$I_{\text{loop}} = i\pi^2 \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \pi - \int_0^1 dx \ln [m^2 - x(1-x)\ell^2] + O(\epsilon) \right] \quad (\text{II.23})$$

但し, ここで $i\epsilon$ 項は不要なので落とした (これ以降も同様: 詳しくは巻末の補遺 A.1 参照).

これにより, 摂動の第 2 次近似における不変散乱振幅が

$$\mathcal{M}(\phi\phi \rightarrow \phi\phi) = -\lambda + \frac{3}{32\pi^2} \lambda^2 \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \pi - \frac{1}{3} \sum_{\ell^2=s,t,u} \int_0^1 dx \ln [m^2 - x(1-x)\ell^2] + O(\epsilon) \right] \quad (\text{II.24})$$

[$s \equiv (p_1 + p_2)^2$, $t \equiv (p_1 - p_3)^2$, $u \equiv (p_1 - p_4)^2$] と得られる. この中で $1/\epsilon$ は $\epsilon \rightarrow 0$ で発散する. つまり, これが紫外発散を表す項である. 概要で述べた通り, 結合定数 λ を $\lambda + \delta\lambda$ と分離し, 発散項が打ち消されるように $\delta\lambda$ を決めるのが繰り込みという技法なので, 最も簡潔に

$$\delta\lambda = \frac{3}{32\pi^2} \lambda^2 \frac{1}{\epsilon}$$

と置いてやれば (最小引算処方: Minimal subtraction または MS scheme),

$$\mathcal{M}(\phi\phi \rightarrow \phi\phi) = -\lambda - \frac{3}{32\pi^2} \lambda^2 \left[\gamma + \ln \pi + \frac{1}{3} \sum_{\ell^2=s,t,u} \int_0^1 dx \ln [m^2 - x(1-x)\ell^2] \right] \quad (\text{II.25})$$

と無限大を含まない結果を得る. 但し, 発散項の除去というだけなら最終結果には有限な不定性が残る. つまり, 上記のような必要最小限の $\delta\lambda$ ではなく

$$\delta\lambda = \frac{3}{32\pi^2} \lambda^2 \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi \right]$$

を用いると (修正最小引算処方: Modified minimal subtraction または $\overline{\text{MS}}$ scheme),

$$\mathcal{M}(\phi\phi \rightarrow \phi\phi) = -\lambda + \frac{3}{32\pi^2} \lambda^2 \left[2 \ln 2\pi - \frac{1}{3} \sum_{\ell^2=s,t,u} \int_0^1 dx \ln [m^2 - x(1-x)\ell^2] \right] \quad (\text{II.26})$$

となる. このような不定性を除くためには, 単に発散項を打ち消すというだけでなく, 始状態粒子のエネルギーが指定された値のときに輻射補正が 0 になる といった繰り込み条件を課す必要がある. 例えば, 低エネルギー極限として, 関与する 4 粒子すべての運動量が 0 という状態を考え, そのときに図 3 に基づく散乱断面積を実験値と比較することで結合定数 λ が測定されるとしてみよう (実際にそのような解析が可能という意味ではなく, あくまで一つの例として). その場合には, $\mathbf{p}_{1,2,3,4} = 0$ (従って, $s = 4m^2$, $t = u = 0$) と置いた輻射補正項は 0 でなければならない. つまりは,

$$\delta\lambda = \frac{3}{32\pi^2} \lambda^2 \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \pi - \frac{1}{3} \int_0^1 dx \ln [m^2 - 4m^2x(1-x)] - \frac{2}{3} \int_0^1 dx \ln [m^2] + O(\epsilon) \right] \quad (\text{II.27})$$

と決めることになり、不変散乱振幅が

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\phi\phi \rightarrow \phi\phi) = & -\lambda - \frac{1}{32\pi^2} \lambda^2 \left[\int_0^1 dx \ln \left[\frac{m^2 - x(1-x)s}{m^2 - 4m^2x(1-x)} \right] \right. \\ & \left. + \int_0^1 dx \ln \left[\frac{m^2 - x(1-x)t}{m^2} \right] + \int_0^1 dx \ln \left[\frac{m^2 - x(1-x)u}{m^2} \right] \right] \quad (\text{II.28}) \end{aligned}$$

と確定する.

以下では、そのような条件設定も含め、繰り込み操作を如何に系統的に実行するかにつき詳しく説明しよう.

II-5. 繰り込み処方：相殺項と繰り込み条件

まずは、量子化される前、つまり古典場のスカラー場ラグランジアンから出発しよう.

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x) - \frac{\lambda}{4!} : \phi^4(x) : \quad (\text{II.29})$$

摂動論の枠組みでは、量子化は $\lambda = 0$ と置いた自由場ラグランジアンに基づいて進められる. 従って、そのときの ϕ は、相互作用の影響を受けていない最も基本的な場である. それに対して、我々が実験等で直に扱う場は、相互作用の全ての影響を受けた現実の場のはずで、当然両者は同じものではない. それを示すため、上記の \mathcal{L} に含まれる場を改めて ϕ_0 と、我々が観測する場を ϕ と表し、両者の関係を

$$\phi_0(x) = \sqrt{Z} \phi(x) \quad (\text{II.30})$$

と置く. 更に、同様の考え方で

$$m_0^2 = m^2 + \delta m^2, \quad \lambda_0 = \lambda + \delta \lambda \quad (\text{II.31})$$

とする. ここに現れた ϕ_0 , m_0 , λ_0 は、それぞれ「裸の (Bare) 場」, 「裸の質量」, 「裸の結合定数」, また、 ϕ , m , λ は、「繰り込まれた (Renormalized) 場」, 「繰り込まれた質量」, 「繰り込まれた結合定数」と呼ばれる. これら繰り込まれた量でラグランジアンを表せば

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} Z \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2} Z (m^2 + \delta m^2) \phi^2(x) - \frac{1}{4!} Z^2 (\lambda + \delta \lambda) : \phi^4(x) : \quad (\text{II.32})$$

となる.^{#22} 図 7 は「裸の結合定数」と「繰り込まれた結合定数」の関係を表す模式図であり、結合定数には正・負の 2 種類があるとして描かれている. 内側の破線円が裸の結合定数であり、外側の実線円が繰り込まれた結合定数に対応している.

^{#22}摂動の最低次近似では輻射補正項は現れず $\phi = \phi_0$, $m = m_0$ および $\lambda = \lambda_0$ なので、 $Z = 1$, $\delta m^2 = \delta \lambda = 0$ である.

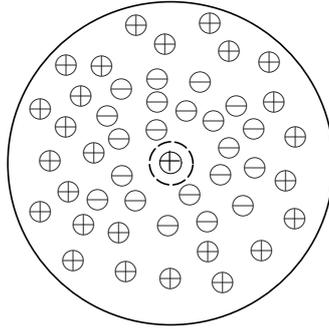


図 7

このラグランジアンを、繰り込まれた場で表された自由ラグランジアン

$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x)$$

と残りの部分

$$\mathcal{L}(x) - \mathcal{L}_0(x)$$

に分離し、 $\mathcal{L}_0(x)$ に基づいて量子化を行うことにより、 $\phi(x)$ は質量 m の量子場となる。一方、 $\mathcal{L}(x) - \mathcal{L}_0(x)$ には、もともと存在していた相互作用（但し、繰り込まれた量で表されたもの） $-\lambda : \phi^4 : / 4!$ に加え

$$\frac{1}{2} (Z - 1) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi, \quad -\frac{1}{2} [(Z - 1)m^2 + Z \delta m^2] \phi^2, \quad -\frac{1}{4!} [(Z^2 - 1)\lambda + Z^2 \delta \lambda] \phi^4$$

という項も現れるが、繰り込み処方のポイントは、これらも「この系の新たな相互作用ラグランジアン」と解釈し、三つの定数 Z , δm^2 および $\delta \lambda$ [繰り込み定数] (Renormalization constants) を、発散が打ち消されるように（そして、実験や観測の設定から課される物理的な条件が満たされるように）決めていくことである。

より具体的には、繰り込み定数を λ の級数の形に書いて、摂動の各次数で対応する項の係数を決めていく訳だが、この講義では λ^2 の輻射補正に限定するので、 $\delta Z \equiv Z - 1$, δm^2 および $\delta \lambda$ は皆 $O(\lambda^2)$ の量とする。従って、これ以降は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I(x) = & -\frac{1}{4!} \lambda : \phi^4(x) : \\ & + \frac{1}{2} \delta Z : \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) : - \frac{1}{2} [\delta Z m^2 + \delta m^2] : \phi^2(x) : - \frac{1}{4!} [2 \delta Z \lambda + \delta \lambda] : \phi^4(x) : \quad (\text{II.33}) \end{aligned}$$

を相互作用として計算を進めることになる。この繰り込み定数を含む新たな相互作用項は**相殺項** (Counterterm) と呼ばれる。ここで注意だが、このようにラグランジアンを書き換えたか

らと言って、何か新しい項を勝手に足した訳ではない。上で行われた操作は、単なる幾つかの項の「自由部分と相互作用部分への再配分・組み替え」に過ぎず、全体のラグランジアンは出発点のものと同じままということである。

このような新しい相互作用項の登場により、 $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ 散乱の不変散乱振幅にはどのような項が現れるのだろうか。 $S^{(2)}$ には $T[:\phi^4(x_1)::\phi^4(x_2):]$ に加えて

$$T[:\partial_\mu\phi(x_1)\partial^\mu\phi(x_1)::\phi^4(x_2):] \quad \text{および} \quad T[:\phi^2(x_1)::\phi^4(x_2):]$$

という項の寄与がある。簡単のため、微分を含まない後者について考えてみると、 $T[:\phi^2(x_1)::\phi^4(x_2):]$ は、ウィックの定理より

$$:\phi(x_1)\phi^3(x_2): \langle 0|\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle$$

という項を生む。ここまでの経験で、これは図 8 のようなファインマン図（および他の 3 本の外線にも同様に \otimes を挿入したもの）に対応することが予想できるだろう：

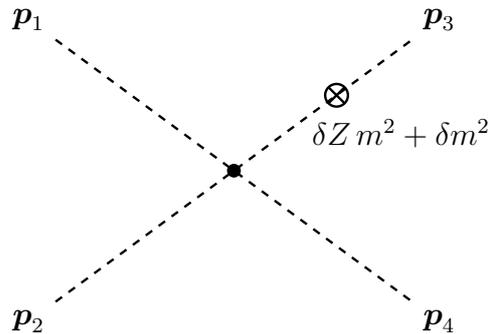


図 8

これらは、外線（あるいは伝播関数）への補正が含む発散項を打ち消す働きをする。また、微分を含む項の場合は、 ϕ や伝播関数の運動量展開に微分が作用するため少し複雑になるが、やはり外線・伝播関数の発散項を取り除く役目を担う。しかしながら、相互作用を全て正規積の形で表している本講義の枠組みでは、摂動の第 3 次近似まで進まないと、そのような補正項は現れない。従って、

$$\delta Z = \delta m^2 = 0$$

であり、相殺項は

$$\mathcal{L}_C(x) = -\frac{1}{4!} \delta\lambda : \phi^4(x) : \quad (\text{II.34})$$

ということになる．これにより，不変散乱振幅がどのように決まるかは既に見た通りである．

補足 1

もしも相互作用が正規積ではなかったら，ウィックの定理の展開項の中に $\langle 0|\phi(x)\phi(x)|0\rangle$ という伝播関数が現れ，それは図 9 のような輻射補正（+他の 3 本の外線に同様の補正を施したもの）で表されることになる．但し，図 9 のファインマン図が生み出すのは運動量依存性を持たない定数項なので，先に見たような全運動量 = 0 での繰り込み条件を要請すれば結局は消えてしまう．

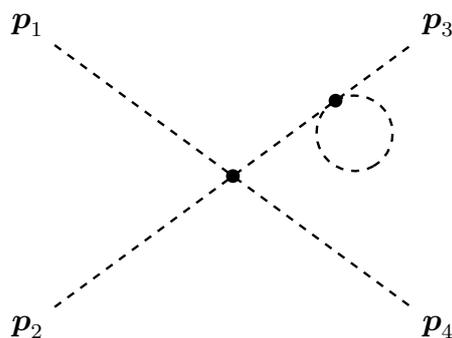


図 9

補足 2

なぜ摂動計算の中にループ積分が出現するのか，その理由を，詳しい計算には頼らずに考えてみよう．量子力学では，ある変化の始状態と終状態が不定性なく指定されても，その中間過程には様々な異なる状態が許されることは珍しくない．そして，そのような場合には，反応確率を計算するために振幅の絶対値 2 乗を求める前に，可能な全ての中間状態を足し上げなければならない．例えば，有名な 2 重スリットの電子線干渉実験においては，図 10 のスリット a および b から出て来る波の波動関数をそれぞれ $\psi_a(\mathbf{r}, t)$, $\psi_b(\mathbf{r}, t)$ と表せば，終状態の波動関数は

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_a(\mathbf{r}, t) + \psi_b(\mathbf{r}, t)$$

であり，これを n 重スリットへと拡張すれば

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^n \psi_i(\mathbf{r}, t)$$

と与えられる．これを用いて $\psi(\mathbf{r}, t)$ の絶対値 2 乗を計算すれば，各項の絶対値 2 乗 $|\psi_i(\mathbf{r}, t)|^2$ に加え異なる項同士の積 $\psi_i(\mathbf{r}, t)\psi_j^*(\mathbf{r}, t)$ ($i \neq j$) も現れて，それらが電子線の干渉現象を記述してくれることとなる．

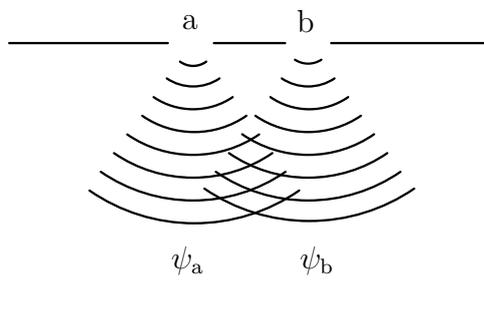
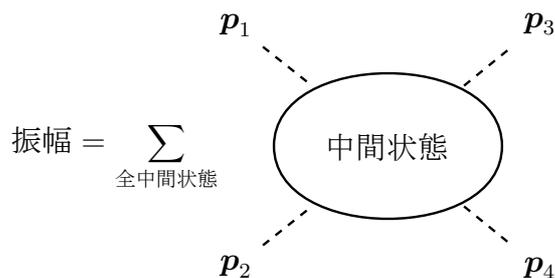


図 10

同様に，この節で考えてきたスカラー粒子散乱の場合なら



ファインマン則に従えば，そのような中間状態の「一つ」として 図 11 のような 2 本の伝播関数からなる状態も存在する：

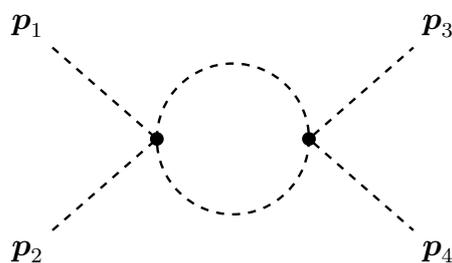


図 11

4 元運動量は保存されるから，中間状態の 2 本の伝播関数が運ぶ運動量の合計は当然 $p_1 + p_2$ に等しくなければならない。しかし，この制限があっても各伝播関数の運動量は確定しない。

例えば、上側の伝播関数の運動量を k とすれば下側の伝播関数の運動量は $p_1 + p_2 - k$ と決まるが k 自体は任意であり、その一つ一つの値に対して独立な中間状態が一つずつ定まる。この k (の各成分) は $-\infty$ から $+\infty$ まで連続的に変化できるので、図 11 は「一つの間状態」どころか「無限個の間状態」を表すことになる。そして、その k の全ての値に互る (連続的な) 足し上げが「ループ積分」になるという訳である。

II-6. 量子電磁力学の繰り込み

より現実的な理論である量子電磁力学 (Quantum electrodynamics 略して QED) の繰り込みへ進もう。とは言っても、共変摂動論的な繰り込みの本質部分は、ここまでに説明した通りである。

ここでは簡単のためゲージ固定項は省略し、

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + \bar{\psi}(x)(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi(x) - e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x) \quad (\text{II.35})$$

というラグランジアンから出発する。この理論においても、輻射補正により場、結合定数 (電荷) および質量がずれることを念頭に、裸の電子場・電磁場・電荷・電子質量をそれぞれ $\psi_0 \cdot A_0^\mu \cdot e_0 \cdot m_0$, 対応する繰り込まれた電子場・電磁場・電荷・電子質量を $\psi \cdot A^\mu \cdot e \cdot m$ と表し

$$\psi_0(x) = \sqrt{Z_\psi}\psi(x), \quad A_0^\mu(x) = \sqrt{Z_A}A^\mu(x), \quad (\text{II.36})$$

$$e_0 = Z_e e / (Z_\psi \sqrt{Z_A}), \quad m_0 = m + \delta m \quad (\text{II.37})$$

のように繰り込み定数を導入する (電荷の繰り込み定数は $e_0 = Z_e e$ と導入する方が自然に思えるが、上記のように Z_e を定義すれば次の \mathcal{L} の $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu$ 項が簡単になる)。すると、上記のラグランジアンは

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & -\frac{1}{4}Z_A F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + Z_\psi\bar{\psi}(x)(i\gamma_\mu\partial^\mu - m - \delta m)\psi(x) \\ & - Z_e e \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x) \end{aligned} \quad (\text{II.38})$$

となるので、これを、 $e = 0$, $Z_{\psi,A,e} = 1$, $\delta m = 0$ と置いて得られる自由部分 (\mathcal{L}_0) とそれ以外の相互作用部分 (\mathcal{L}_I) に分離する:

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_I(x) \quad (\text{II.39})$$

$$\mathcal{L}_0(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + \bar{\psi}(x)(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi(x) \quad (\text{II.40})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1(x) = & -e : \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) : A^\mu(x) \\
& - \frac{1}{4} (Z_A - 1) : F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) : \\
& + (Z_\psi - 1) : \bar{\psi}(x) (i \gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi(x) : - Z_\psi \delta m : \bar{\psi}(x) \psi(x) : \\
& - (Z_e - 1) e : \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) : A^\mu(x)
\end{aligned} \tag{II.41}$$

この $\mathcal{L}_1(x)$ の中の 2 ~ 4 行目が相殺項であり、各繰り込み定数は、

$$Z = 1 + Z^{(1)} + Z^{(2)} + \dots, \quad \delta m = \delta m^{(1)} + \delta m^{(2)} + \dots \tag{II.42}$$

と級数展開の形で表しておく。ここで、 $Z^{(n)}$ 、 $\delta m^{(n)}$ は $O(e^{2n})$ の量である。

1. 電子伝播関数への補正

摂動の第 2 次近似（1 ループ近似）では、電子伝播関数は図 12 のような補正を受ける：

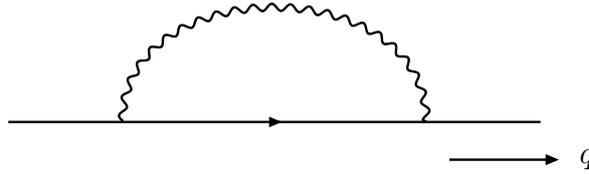


図 12

この図の両側の伝播関数を除くループ部分 – これを電子の自己エネルギー（Self-energy）と呼ぶ – の寄与を $\Sigma^{(1)}(q)$ と表せば、これは

$$\Sigma^{(1)}(q) = e^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D_i}} \gamma_\alpha S_F(q-k) \gamma_\beta D_F^{\alpha\beta}(k) \tag{II.43}$$

と与えられる。ここに、電子伝播関数 S_F および 光子伝播関数 $D_F^{\alpha\beta}$ の具体形

$$S_F(q) = 1/(m - q), \quad D_F^{\alpha\beta}(k) = g^{\alpha\beta}/k^2$$

($q \equiv \gamma_\mu q^\mu$) を代入すれば、補正された伝播関数は、相殺項も含め

$$\begin{aligned}
S_F(q) & \rightarrow S_F(q) + S_F(q) \Sigma^{(1)}(q) S_F(q) \\
& \quad + S_F(q) \left[Z_\psi^{(1)}(q - m) - \delta m^{(1)} \right] S_F(q) \\
& = \frac{1}{m - q} + \frac{1}{m - q} \left[\Sigma^{(1)}(q) + Z_\psi^{(1)}(q - m) - \delta m^{(1)} \right] \frac{1}{m - q}
\end{aligned} \tag{II.44}$$

とまとめられる。これは、この近似の範囲において

$$S_F(q) \rightarrow \frac{1}{m - q + \Sigma^{(1)}(q) + Z_\psi^{(1)}(q - m) - \delta m^{(1)}} \tag{II.45}$$

とも書ける．容易に確かめられるように， $\Sigma^{(1)}(q)$ を任意の運動量 q_0 の周りで

$$\Sigma^{(1)}(q) = \Sigma^{(1)}(q_0) + \Sigma^{(1)'}(q_0)(q - q_0) + \dots$$

のように展開した時，発散する項は $\Sigma^{(1)}(q_0)$ および $\Sigma^{(1)'}(q_0)$ だけに現れるので，その二つを打ち消すように $\delta m^{(1)}$ と $Z_\psi^{(1)}$ を決めれば補正された伝播関数は有限な量になる．^{#23}

2. 光子伝播関数への補正

全く同様に，光子伝播関数への補正も下図に従って求められる：

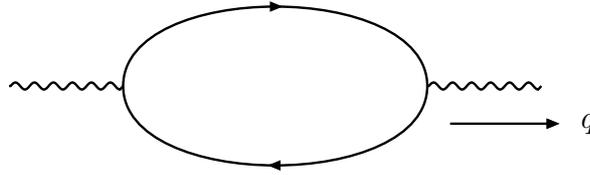


図 13

このループ部分の寄与（光子自己エネルギー）を $\Pi^{(1)\mu\nu}(q)$ と書けば，それは

$$\Pi^{(1)\mu\nu}(q) = -e^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D i} \text{Tr} \left[\gamma^\mu S_F(k) \gamma^\nu S_F(k - q) \right] \quad (\text{II.46})$$

（右辺に現れたマイナス符号は，フェルミオンのループに必要なループ符号因子）と与えられ，これは，ゲージ不変性（電荷保存則）から $q_\mu \Pi^{(1)\mu\nu}(q) = 0$ を満たす．^{#24} 従って，この関数は $(g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu)$ という因子を含むはずである：

$$\Pi^{(1)\mu\nu}(q) = (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \Pi^{(1)}(q) \quad (\text{II.47})$$

一方，相殺項 $-Z_A^{(1)} : F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} : / 4$ は $Z_A^{(1)} : A_\mu (g^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu : / 2$ と書き直せるので，光子伝播関数を受ける補正は

$$\begin{aligned} D_F^{\alpha\beta}(q) &\rightarrow D_F^{\alpha\beta}(q) + D_F^{\alpha\mu}(q) \Pi_{\mu\nu}^{(1)}(q) D_F^{\nu\beta}(q) \\ &\quad - D_F^{\alpha\mu}(q) \left[Z_A^{(1)} (g_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu) \right] D_F^{\nu\beta}(q) \\ &= \frac{g^{\alpha\beta}}{q^2} + \frac{g^{\alpha\mu}}{q^2} \left[(g_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu) (\Pi^{(1)}(q) - Z_A^{(1)}) \right] \frac{g^{\nu\beta}}{q^2} \end{aligned} \quad (\text{II.48})$$

従って， $\Pi^{(1)}(q)$ に対して $Z_A^{(1)}$ が相殺項として働くことになる．

^{#23} 4次元時空では $\Sigma^{(1)}(q) \sim \int d^4 k (q - k)^{-1} k^{-2}$ なので $\Sigma^{(1)''}(q) \sim \int d^4 k (q - k)^{-3} k^{-2}$ は発散しない．

^{#24} $\Pi^{(1)\mu\nu}(q)$ は，保存則 $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$ を満たす電流密度 $j^\mu(x)$ から $\langle 0 | T j^\mu(x) j^\nu(y) | 0 \rangle$ という形で構成されることに注意しよう．

3. 電子・光子結合部への補正

運動量 p の電子が運動量 q の光子を吸収して運動量 $p+q$ の電子になる過程に含まれる電子・光子結合を $e\Gamma_\mu(p+q, p)$ と表せば、この Γ_μ は、摂動の第1次近似では簡単に

$$\Gamma_\mu(p+q, p) = \gamma_\mu$$

となるが、第2次近似に進むと図14のような補正が現れる：

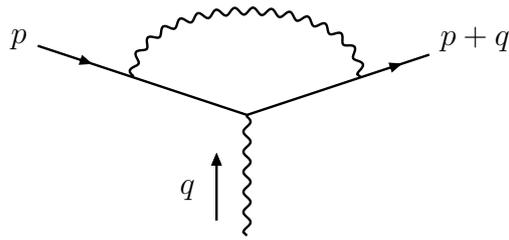


図 14

この図のループ部分を $\Lambda_\mu^{(1)}(p+q, p)$ と表せば、それは

$$\Lambda_\mu^{(1)}(p+q, p) = e^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D_i}} \gamma_\alpha S_F(p+q-k) \gamma_\mu S_F(p-k) \gamma_\beta D_F^{\alpha\beta}(k) \quad (\text{II.49})$$

で与えられ、これによって補正された結合は

$$\Gamma_\alpha(p+q, p) = \gamma_\alpha + \Lambda_\alpha^{(1)}(p+q, p) + Z_e^{(1)} \gamma_\alpha \quad (\text{II.50})$$

となるので、 $\Lambda_\alpha^{(1)}$ の発散部分は $Z_e^{(1)}$ で打ち消されることになる。

繰り込み条件

既に述べたように、繰り込みの最大の目的は「紫外発散の除去」であるが、それだけで満足するなら、どの繰り込み定数にも有限な定数を足したり引いたりする自由度が残ってしまう。この不定性を避けるためにも、量子電磁力学では、通常 四つの繰り込み定数を次のような条件で決定している：

$$\delta m^{(1)} = \Sigma^{(1)}(q = m) \quad (\text{II.51})$$

$$Z_\psi^{(1)} = -\Sigma^{(1)'}(q = m) \quad (\text{II.52})$$

$$Z_A^{(1)} = \Pi^{(1)}(0) \quad (\text{II.53})$$

$$Z_e^{(1)} \gamma_\alpha = -\Lambda_\alpha^{(1)}(p, p) \quad (\text{II.54})$$

このように決めれば、補正された電子および光子伝播関数は

$$q \rightarrow m \quad \Longrightarrow \quad S_F(q) \rightarrow 1/(m - q) \quad (\text{II.55})$$

$$q^2 \rightarrow 0 \quad \Longrightarrow \quad D_F^{\mu\nu}(q) \rightarrow g^{\mu\nu}/q^2 \quad (\text{II.56})$$

という条件を、また、補正された電子・光子結合は

$$q \rightarrow 0 \quad \Longrightarrow \quad e\Gamma^\mu \rightarrow e\gamma^\mu \quad (\text{II.57})$$

という条件を満たす。つまり、繰り込まれた m および e は、それぞれ実際に観測される電子質量 m^{obs} と電荷 e^{obs} に一致し、また、繰り込まれた電子場・電磁場は、どちらも正準交換関係に従い規格化された演算子となる。 このような条件下での繰り込みを質量殻上の繰り込み (On-shell または On-mass-shell renormalization) と呼ぶ。

このとき、電荷は、前述の通り $e_0 = Z_e e / (Z_\psi \sqrt{Z_A})$ と繰り込まれるが、実は $Z_e = Z_\psi$ という関係 [ウォード (Ward) の関係式] が成立するため、これは $e_0 = e / \sqrt{Z_A}$ と簡単になり、この結果「電子電荷もミュオン電荷も同じ値」という「電荷の普遍性 (Universality)」も保障されることになる。^{#25}

ウォードの関係式の証明

まず、 $\Sigma^{(1)}$ と $\Lambda_\mu^{(1)}$ の間には、

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} \Sigma^{(1)}(p) = \Lambda^{(1)\mu}(p, p) \quad (\text{II.58})$$

という関係があることを示そう (この式もウォードの関係式と呼ばれる)。これは、 $S_F(p) = 1/(m - p)$ と $S_F^{-1}(p) = m - p$ の積

$$S_F(p)S_F^{-1}(p) = 1$$

の両辺を p_μ で微分して得られる関係

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} [S_F(p)S_F^{-1}(p)] = 0$$

および

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_\mu} [S_F(p)S_F^{-1}(p)] &= \left[\frac{\partial}{\partial p_\mu} S_F(p) \right] S_F^{-1}(p) + S_F(p) \frac{\partial}{\partial p_\mu} (m - p) \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial p_\mu} S_F(p) \right] S_F^{-1}(p) - S_F(p) \gamma^\mu \\ \rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial p_\mu} S_F(p) \right] S_F^{-1}(p) &= S_F(p) \gamma^\mu \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial p_\mu} S_F(p) = S_F(p) \gamma^\mu S_F(p) \end{aligned} \quad (\text{II.59})$$

^{#25}つまり、電荷の繰り込みが、全てのフェルミオンに共通な Z_A だけで決まるということ。

を $\Sigma^{(1)}$ に代入し、それを $\Lambda^{(1)}$ の式と比較することで導かれる。実際、(II.43) 式の $\Sigma^{(1)}(q)$ に対し (q を p と書き直した上で) p_μ 微分を施せば

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p_\mu} \Sigma^{(1)}(p) &= e^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D_i}} \gamma_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial p_\mu} S_F(p-k) \right] \gamma_\beta D_F^{\alpha\beta}(k) \\ &= e^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D_i}} \gamma_\alpha S_F(p-k) \gamma^\mu S_F(p-k) \gamma_\beta D_F^{\alpha\beta}(k)\end{aligned}\quad (\text{II.60})$$

となるが、これは $\Lambda^{(1)\mu}(p+q, p)$ を与える (II.49) 式において $q=0$ と置いた式に他ならない。従って、確かに (II.58) は成り立っている。ここまで来れば、証明完了は目前、すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} \Sigma^{(1)}(p) = \left[\frac{\partial}{\partial p} \Sigma^{(1)}(p) \right] \frac{\partial p}{\partial p_\mu} = \Sigma^{(1)'}(p) \gamma^\mu$$

だから

$$\Sigma^{(1)'}(p=m) \gamma^\mu = -Z_\psi^{(1)} \gamma^\mu = \Lambda^{(1)\mu}(p, p) = -Z_e^{(1)} \gamma^\mu$$

これより $Z_e^{(1)} = Z_\psi^{(1)}$ が得られる。^{#26}

なお、上述の質量殻上の繰り込みは、明快かつ便利であり代表的・標準的な繰り込み処方になってはいるが、絶対的に必要な条件という訳ではない。例えば、 $\lambda\phi^4$ 模型のところでも述べたように、発散項 $1/\epsilon$ だけを取り除くような条件を課せば、電子・光子結合は

$$q \rightarrow 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{結合定数} \rightarrow e + \text{補正項} \quad (\text{II.61})$$

となるので

$$e \neq e^{\text{obs}}$$

つまり、繰り込まれた電荷と観測される電荷は一致しないが、全ての輻射補正計算をこの繰り込み条件の枠内で進めるなら正しい答えに到達できる。^{#27}

II-7. 重い粒子の寄与：脱結合定理

光子自己エネルギーとして 図 13 では電子ループのみ考えたが、実際には、電子のみならず光子と結合する全ての粒子が関与する。例えば、質量 M のフェルミオンの $\Pi(q)$ への寄与は

$$\Pi(q) = \text{定数} \times \int_0^1 dx x(1-x) \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln \pi - \ln [M^2 - x(1-x)q^2] \right] \quad (\text{II.62})$$

^{#26} この証明は 1 ループの式に基づいているが、もっと高次項においても (II.59) を必要な部分に適用していけば同じ式が得られるので、 $Z_e = Z_\psi$ と書いてよい。

^{#27} 異なる繰り込み条件に従って求められた量の間には一般に有限の差が生じるが、それは摂動の次の近似の一部と解釈される。

となることがループ積分計算で示せるが、これが未知の極めて重いフェルミオンの効果なら、それが $\ln M^2$ を通じて低エネルギーでの反応にも無視できない影響を与えるようにも思われる。しかし、そのような心配は実際には不要：繰り込まれた $\Pi(q)$ は

$$\Pi(q) = \text{定数} \times \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left[\frac{M^2}{M^2 - x(1-x)q^2} \right] \quad (\text{II.63})$$

となり、これは $M \rightarrow +\infty$ で 0 になる。つまり、未知の超重粒子があったとしても、低エネルギー反応では、その寄与は無視できるのである [脱結合定理 (Decoupling theorem)] .

補足

但し、この講義では範囲外だが、素粒子の電弱標準理論のように、対称性の自発的破れがある場合には要注意：そのような理論では、粒子質量は、結合定数とヒッグス場の真空期待値の積で与えられる。従って、大きな質量は「大きな結合定数」か「大きな真空期待値」のどちらか（または両方）により生まれるが、結合定数が大きくなる場合には、ここでの定理は成立しない。例えば、電弱標準理論では、輻射補正の中にトップクォーク質量の 2 乗に比例する項が現れ、それが無視できない効果を生み出している。事実、そのお蔭で、実際にトップクォークが発見される前に、既にその質量につきある程度まで定量的な予測が可能になっていた。

II-8. 赤外発散・質量発散

ここまで解説してきた通り、繰り込み可能な理論においては、ループ計算を通じて現れる紫外発散は、摂動の各次数における繰り込み処方によって完全に除去される。しかしながら、光子のように質量を持たない粒子が関与する反応には、別の種類の発散も出現する。

例えば、図 15 のような反応過程を考えてみよう：

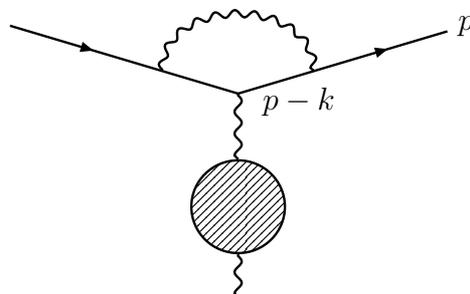


図 15

この場合には,

$$\int d^D k \frac{1}{k^2} \gamma_\alpha \frac{m + (p - k)}{m^2 - (p - k)^2} \gamma_\mu \frac{m + (p + q - k)}{m^2 - (p + q - k)^2} \gamma^\alpha$$

という形のループ積分を計算しなければならない。このとき、 p はオンシェル運動量つまり $p^2 = m^2$ を満たすので、全ての伝播関数の分母から m が消えてしまい、その結果、(k の積分範囲は $-\infty$ から $+\infty$ なので) $k = 0$ で発散が起こる。これは、運動量が 0 となる極限での発散なので ($k \rightarrow \pm\infty$ での発散を紫外発散と呼ぶのに対して) **赤外発散** (Infrared divergence) と呼ばれる。

この発散は如何に処理されるのだろうか。これは、断面積を求める段階において、図 16 のような、光子が一つ余分に放出される過程の断面積を含める (不変散乱振幅の和ではない) ことにより除去できることが知られている。この過程には

$$\frac{m + (p + k)}{m^2 - (p + k)^2}$$

という伝播関数が含まれるが、その分母からも同様に m が消えるため $k \rightarrow 0$ で発散する。その寄与が、上記のループ積分から現れる発散を上手い具合に打ち消してくれるのである。

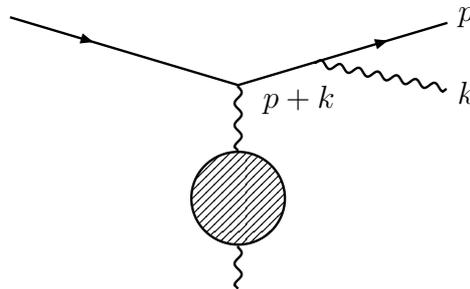


図 16

しかしながら、図 15 と図 16 は異なる反応なのに、そんな勝手なことをして許されるのだろうか。これについては、エネルギーが非常に小さな光子 (**軟光子** : Soft photon) の放出に関する次のような事実がある:

“軟光子は粒子性に乏しく、たくさんとび出せば電磁波としては観測されるだろうが、その量子的性格をとらえることはできない。すなわち、一般に素粒子の反応において軟光子が何個とび出したかを知ることはできない。” 【中西襄「場の量子論」(培風館)】

つまりは、二つの反応が区別できないのなら、実験データと比較すべき量は両方の断面積の和であり、その足し算の中で赤外発散が除かれてしまうという訳である。

なお、具体的に計算を進める際には、紫外発散の場合と同様に発散項を一時的に正則化しなければならない。これについても次元正則化の手法が用いられることもあるが、光子部分に微小な質量項を加える方法が代表的な処方だろう。

質量発散

実は、もう少し詳しく図 15 の反応を調べると、そこには異なる 2 種類の発散が含まれていることが明らかになってくるが（但し、以下で見るように一方は近似的な発散）、それを簡潔に説明するには、むしろ同過程と対を組むことになる図 16 の過程を用いる方が適切だろう。そこにおいて、終状態の 2 粒子の運動量を

$$p^\mu = (E, \mathbf{p}), \quad k^\mu = (E_\gamma, \mathbf{k})$$

$(E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, E_\gamma = |\mathbf{k}|)$ と表せば、これら二つの粒子に直結する伝播関数の分母は、両粒子の空間運動量 \mathbf{p} と \mathbf{k} のなす角を θ として

$$E_\gamma(\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} - |\mathbf{p}| \cos \theta)$$

となる。これは、 $E_\gamma \rightarrow 0$ で 0 に近づくが、それは既に述べた赤外発散である。これに加え、この分母は、質量 m を無視する近似では $\theta \rightarrow 0$ という極限でも 0 に近づくと近づく。この場合は E_γ の大きさは無関係で、低エネルギー光子（軟光子）だけでなく高エネルギー光子（硬光子：Hard photon）にも当てはまる。この結果として出現する項は、質量を有限に保つ限りは発散はしないが $\ln m$ のように $m \rightarrow 0$ の極限では発散する不自然に大きな補正を生み出してしまう [質量発散 (Mass divergence/singularity) または 共線発散 (Collinear divergence/singularity)]。

それでは、こちらの（近似的な）無限大項は如何に処理すればいいのだろうか。実は、これに関しても、赤外発散と同じく図 15 の過程にも同じ種類の項が含まれており両者を合わせて扱えばよいことが知られている。実験的には、軟光子と同様、電子から平行に近い角度で放出された光子も観測するのは極めて難しいので、それも含めて断面積を求めるのが理に適っており、両者を合算した結果、赤外発散と同じく大きな対数項も相殺されるのである。但し、軟光子放出過程の断面積導出に関しては計算を簡単にしてくれる有効な近似式があるものの、硬光子放出については近道はなく、図 16 に基づいて粘り強く断面積計算を進めなければならない。

補遺

A-1. ループ積分の虚数項

第 II-4 節において、ループ積分の結果として得られた (II.23) 式で対数項の中の $i\varepsilon$ 項は不要ということで落としたが、ここでその理由も含め、ループ積分に現れる虚数項の扱いについて解説しておこう。

1 ループ輻射補正項の実部と虚部

スカラー場の理論における $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ の散乱振幅は (II.25) で与えられた：

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^{(0)} + \mathcal{M}^{(1)} \quad (\text{A.1})$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(0)} &= -\lambda \\ \mathcal{M}^{(1)} &= -\frac{3}{32\pi^2}\lambda^2 \left[\gamma + \ln \pi + \frac{1}{3} \sum_{\ell^2=s,t,u} \int_0^1 dx \ln [m^2 - x(1-x)\ell^2] \right] \end{aligned}$$

この反応の断面積 $\sigma(\phi\phi \rightarrow \phi\phi)$ は $|\mathcal{M}|^2$ に比例する：

$$\sigma \propto |\mathcal{M}^{(0)} + \mathcal{M}^{(1)}|^2 = |\mathcal{M}^{(0)}|^2 + 2 \operatorname{Re}(\mathcal{M}^{(0)} \mathcal{M}^{(1)*}) + |\mathcal{M}^{(1)}|^2 \quad (\text{A.2})$$

この中で第2項 $2 \operatorname{Re}(\mathcal{M}^{(0)} \mathcal{M}^{(1)*})$ が第1次近似での輻射補正となる（第3項 $|\mathcal{M}^{(1)}|^2$ も1ループのファインマン図から生まれてはいるが、しかし、この項も輻射補正に加えようとするなら2ループの散乱振幅 $\mathcal{M}^{(2)}$ も計算して $\operatorname{Re}(\mathcal{M}^{(0)} \mathcal{M}^{(2)*})$ という干渉項も加えなければならない）。

上式から明らかなように $\mathcal{M}^{(0)}$ は実数だから輻射補正項は $2 \mathcal{M}^{(0)} \operatorname{Re}(\mathcal{M}^{(1)*})$ となる。つまり、1ループ項の虚部 $\operatorname{Im}(\mathcal{M}^{(1)})$ は考慮しなくてよいのである。しかしながら、例えば、重い粒子に関してその崩壊幅と自己エネルギーの関係を調べる場合などには1ループ項の虚部も必要となってくる。以下では、それについても調べていく。

複素数の基本事項

まずは、複素数の基本事項を復習しておこう。複素数 z の実部、虚部、絶対値、偏角をそれぞれ a , b , r , θ とすれば、虚数単位を i として

$$z = a + bi = re^{i\theta}, \quad a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta, \quad \theta = \arctan(b/a) \quad (\text{A.3})$$

である。偏角の範囲については $-\pi < \theta \leq \pi$ としても $0 \leq \theta < 2\pi$ としてもよい。更に、任意の整数 n に対して $e^{2n\pi i} = 1$ が成り立つので、一般の偏角は $\theta + 2n\pi$ と書ける。^{#28} しかしなが

^{#28} 数学的により厳密な話をするなら、偏角の範囲指定はリーマン面 (Riemann surface) とそこへの入口である切断 (Cut) の設定の問題だが、ここではそこまでは踏み込まない。

ら，ループ積分に現れる複素対数関数などを扱うときには

$$-\pi < \theta \leq +\pi \quad (\text{A.4})$$

とするのが標準である．実際，これが以下で示す通り合理的であり，本講義でも採用する．

複素対数関数

複素数 z を引数とする対数 $\ln z$ は

$$\ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + \ln e^{i\theta} = \ln r + i\theta \quad (\text{A.5})$$

のように実部と虚部に分けられる．

ここで， x を実数として $\ln(x + i\varepsilon)$ という対数関数について考えてみよう．

(1) $x > 0$ の場合

このときは複素数 $z = x + i\varepsilon$ の偏角 θ は微小なので $\tan \theta (\simeq \theta) = \varepsilon/x$ より $\theta = \varepsilon/x$ で， ε は無限小定数なので結局 $\theta = \varepsilon$ となり

$$\ln(x + i\varepsilon) = \ln x + i\varepsilon$$

従って， $\varepsilon \rightarrow 0$ という極限をとっても何ら問題が生じることはなく，複素対数関数 $\ln(x + i\varepsilon)$ は滑らかに実対数関数 $\ln x$ につながる．

それでは $\ln(x - i\varepsilon)$ はどうか．偏角が $-\pi$ から $+\pi$ までなら，同様の対処で

$$\ln(x - i\varepsilon) = \ln x - i\varepsilon$$

となってやはり滑らかに $\ln x$ と結びつくが，仮に $0 \leq \text{偏角} < 2\pi$ とするなら $\ln(x - i\varepsilon) = \ln x + i(2\pi - \varepsilon)$ なので余計な因子が顔を出す．さらに，偏角に $2n\pi$ も含めればこれも最終結果に残ってしまう．

従って，上述のように，偏角は $-\pi$ から $+\pi$ の範囲と選ぶのが理に適っており，そのとき

$$\ln(x \pm i\varepsilon) = \ln x \pm i\varepsilon \quad \rightarrow \quad \ln x \quad (\text{A.6})$$

が成り立つ．

(2) $x < 0$ の場合

同じように $-\pi < \text{偏角} \leq +\pi$ の範囲で考えれば $x + i\varepsilon$ の偏角は $\pi - \varepsilon$ ，つまり

$$\ln(x + i\varepsilon) = \ln|x| + i(\pi - \varepsilon) \quad \rightarrow \quad \ln|x| + i\pi \quad (\text{A.7})$$

また, $x - i\varepsilon$ の偏角は $-\pi + \varepsilon$ であつて,

$$\ln(x - i\varepsilon) = \ln|x| - i(\pi - \varepsilon) \quad \rightarrow \quad \ln|x| - i\pi \quad (\text{A.8})$$

従つて, 式 (II.23) の中の対数項は, $i\varepsilon$ も残せば $D(x) = m^2 - x(1-x)\ell^2$ と置いたとき

- $D(x) > 0$ の場合

$$\ln[D(x) - i\varepsilon] = \ln[D(x)] - i\varepsilon \quad \rightarrow \quad \ln[D(x)] \quad (\text{A.9})$$

- $D(x) < 0$ の場合

$$\ln[D(x) - i\varepsilon] = \ln|D(x)| - i(\pi - \varepsilon) \quad \rightarrow \quad \ln|D(x)| - i\pi \quad (\text{A.10})$$

となるので, 実数部なら両者まとめて $\ln|D(x)|$ と表せ, 虚数部が必要なら $D(x) < 0$ の領域において $-\pi$ とすればよい.

自己エネルギーと崩壊幅の関係

1 ループ計算において対数関数の虚部を求めることが必要となる例として, 重いスカラー粒子の自己エネルギーと崩壊幅の関係を調べてみよう. 具体的な計算を進める枠組みとして, 質量 M のスカラー粒子と質量 m のフェルミ粒子から成る系を考え, 両粒子は

$$\mathcal{L}_I(x) = g : \bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(x) : \quad (\text{A.11})$$

という相互作用ラグランジアンを通じて作用し合うものとする.

(1) 自己エネルギー

1 ループ近似でのスカラー粒子の自己エネルギーは, 次のように与えられる: #29

$$\begin{aligned} \Pi(q^2) &= -g^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D_i}} \text{Tr} [S_F(k)S_F(k-q)] \\ &= -\frac{g^2}{4\pi^2} \int_0^1 dx [m^2 - x(1-x)q^2 - i\varepsilon] \\ &\quad \times [3(1/\varepsilon - \gamma + \ln 4\pi) + 1 - 3\ln[m^2 - x(1-x)q^2 - i\varepsilon]] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

これは $q^2 > 4m^2$ のとき積分区間内で $m^2 - x(1-x)q^2 < 0$ となり, 対数項が虚部を生む.

(2) 伝播関数

上記の自己エネルギー $\Pi(q^2)$ により, この粒子の伝播関数は, 次のような補正を受ける:

$$\frac{1}{M^2 - q^2 - i\varepsilon} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{M^2 - q^2 - i\varepsilon} + \frac{1}{M^2 - q^2 - i\varepsilon} \Pi(q^2) \frac{1}{M^2 - q^2 - i\varepsilon}$$

#29 例えば K-I. Aoki et al. *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **73** (1982), No.1: 194 頁 (B・18) 式. なお, 本文中の記法に合わせるなら, これも 1 ループの量なので $\Pi^{(1)}(q^2)$ と書くべきだが, ここでは簡単のため $\Pi(q^2)$ と表す.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{M^2 - q^2 - i\varepsilon} \left[1 + \frac{\Pi(q^2)}{M^2 - q^2 - i\varepsilon} \right] \\
&\simeq \frac{1}{M^2 - q^2 - i\varepsilon} \left[\frac{1}{1 - \Pi(q^2)/(M^2 - q^2 - i\varepsilon)} \right] \\
&= \frac{1}{M^2 - q^2 - \Pi(q^2) - i\varepsilon} \tag{A.13}
\end{aligned}$$

(3) 補正された質量と崩壊幅

上記の自己エネルギーが質量殻上で繰り込まれた量であるなら、その実部 $\text{Re } \Pi(q^2)$ は $q^2 = M^2$ で繰り込み条件に従って 0 となる。よって、 $q^2 = M^2$ の近傍では、 $M^2 - i \text{Im } \Pi(M^2)$ が補正された質量項になる。

では、質量が虚部を持ったら何が起こるのか。これは、エネルギー E の量子状態 $|\Psi\rangle$ の時間発展が e^{-iEt} で決まることを考えれば理解できる：この $|\Psi\rangle$ が質量 M の 1 粒子状態なら、その静止系では $E = M$ だから

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iMt} |\Psi\rangle = e^{-i(\text{Re } M)t} e^{i(\text{Im } M)t} |\Psi\rangle$$

これより、崩壊現象で馴染みのある指数関数的減衰を表す式

$$\langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle = e^{-[-2(\text{Im } M)]t} \langle \Psi | \Psi \rangle \tag{A.14}$$

が得られるのでこの粒子は不安定ということになり、 $-2(\text{Im } M)$ は単位時間当りの崩壊確率、つまり崩壊幅 Γ を与えることがわかる（もしもこれが負になるようなら、それを与える枠組みは確率保存則を破る非現実的なものと判定される）。

一方で、

$$\text{補正された質量} = \sqrt{M^2 - i \text{Im } \Pi(M^2)} = M - \frac{i}{2M} \text{Im } \Pi(M^2)$$

だから

$$\Gamma = -2(\text{Im } M) = \frac{1}{M} \text{Im } \Pi(M^2) \tag{A.15}$$

という関係を得る。

それでは、実際に (A.12) 式に基づき $\text{Im } \Pi(M^2)$ を計算し、これが、崩壊公式から直接求められた摂動最低次の近似式^{#30}

$$\Gamma = \frac{g^2}{8\pi M^2} \sqrt{M^2 - 4m^2} (M^2 - 4m^2) \tag{A.16}$$

に一致するか調べてみよう。式 (A.12) の中の $m^2 - x(1-x)q^2$ で $q^2 = M^2$ と置いた 2 次式は

^{#30}例えば「場の量子論 - 摂動計算の基礎 - 第3版」(日置善郎, 吉岡書店) 第 III.2 節 133-135 頁 参照。

$$m^2 - x(1-x)M^2 = 0$$

という二次方程式の解

$$x = x_{\pm} = [1 \pm \sqrt{1 - 4m^2/M^2}]/2$$

($0 < x_- < x_+ < 1$) において正負の符号が逆転し,

$$x_- < x < x_+$$

という区間で負となる. 故に, 虚部のみを求める際には $x_- < x < x_+$ で積分すればよい:

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi(M^2) &= \frac{3g^2}{4\pi^2} \text{Im} \left[\int_{x_-}^{x_+} dx [m^2 - x(1-x)M^2] \right. \\ &\quad \left. \times [\ln [m^2 - x(1-x)M^2 - i\varepsilon]] \right] \end{aligned}$$

ここで対数項に対して (A.10) 式が適用できて

$$\text{Im} [\ln [m^2 - x(1-x)M^2 - i\varepsilon]] = -\pi \quad (\text{A.17})$$

となるので

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi(M^2) &= -\frac{3g^2}{4\pi} \int_{x_-}^{x_+} dx [m^2 - x(1-x)M^2] \\ &= -\frac{3g^2}{4\pi} \left[m^2(x_+ - x_-) - \frac{1}{2}M^2(x_+^2 - x_-^2) + \frac{1}{3}M^2(x_+^3 - x_-^3) \right] \\ &= \frac{g^2}{8\pi M} \sqrt{M^2 - 4m^2} (M^2 - 4m^2) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

従って, 符号にも問題は無く, 確かに式 (A.15) の関係

$$\Gamma = \frac{1}{M} \text{Im } \Pi(M^2)$$

が成立する.

ブライト-ウィグナーの公式

フェルミ粒子 (ψ)・反粒子 ($\bar{\psi}$) が対消滅し終状態で再び同じ対になるような衝突反応を考えてみよう. この系の全エネルギー E が特に指定されていなければ, そこには幾つもの異なるファインマン図で表される過程が関与するが, もしも E の値が M に近ければ $\psi + \bar{\psi} \rightarrow \phi$ 伝播関数 $\rightarrow \psi + \bar{\psi}$ という過程の寄与が圧倒的に大きくなる. このとき, 補正された伝播関数

$$\frac{1}{M^2 - q^2 - \Pi(q^2) - i\varepsilon}$$

においては, 自己エネルギー項 $\Pi(q^2)$ は $\Pi(M^2)$ ($= i \text{Im } \Pi(M^2)$) で近似でき (繰り込み条件により $\text{Re } \Pi(M^2) = 0$ となることを思い出そう), また, $i\varepsilon$ 項は無視できるので, 反応の断

面積は、上記の Π と Γ の関係も用いて

$$\sigma \propto \left| \frac{1}{M^2 - q^2 - i \operatorname{Im} \Pi(M^2)} \right|^2 = \left| \frac{1}{M^2 - q^2 - i M \Gamma} \right|^2$$

で与えられる．更に、この反応を重心系で考察するなら $q^2 = E^2$ だから、よい近似精度で $M^2 - q^2 = (M - E)(M + E) \simeq 2M(M - E)$ と置くことができ、上式は

$$\sigma \propto \frac{1}{(E - M)^2 + \Gamma^2/4} \quad (\text{A.19})$$

と表せる．この右辺のような形を持つ式は、**ブライト-ウィグナーの公式** (Breit-Wigner formula) という名称で知られており、横軸を E 、縦軸を σ とすれば、図 17 のような $E = M$ で鋭いピークを持つ曲線 (共鳴曲線) を描く．この曲線では、高さが最大値の半分になるところの幅 (半値幅 または 半値全幅: Full width at half maximum) が Γ に一致する．このことが、崩壊の確率を表す Γ が「幅」と呼ばれる理由にもなっている．

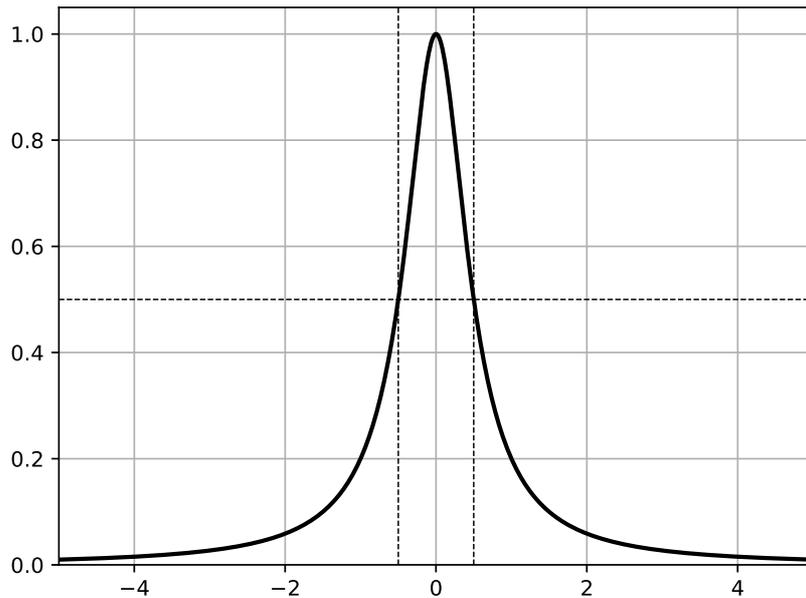


図 17

共鳴曲線：式 (A.19) の E と σ をそれぞれ横軸と縦軸として描いた曲線．但し、横軸はピークの位置を原点とし $\Gamma = 1.0$ となるように、また、縦軸は最大値が 1.0 となるように規格化されている．水平な破線は曲線の最大値 (=1.0) の半分の高さ (=0.5) を示し、これと $E = \pm 0.5$ で直交する 2 本の垂直な破線の間隔 (半値幅または半値全幅) が $\Gamma (= 1.0)$ に等しくなっている．

A-2. ウィックの定理

実際の摂動計算において重要な役割を果たすのが **ウィックの定理** である。これは、複数の場の演算子の時間順序積は〈当該演算子から構成される正規積と伝播関数の積〉により級数の形に展開できる というもので、より正確に n 個の演算子 $\phi(x_i)$ ($i = 1 \sim n$) の場合を式で表せば次のようになる：^{#31}

$$T \left[\prod_{i=1}^n \phi(x_i) \right] = \sum_{E_n} \left[\sum_{\substack{\{\text{pair}\} \\ (\text{in } E_n)}} \prod_{\text{pairs}} \langle 0 | T \phi(x_i) \phi(x_j) | 0 \rangle : \prod_{k \in E_n^c} \phi(x_k) : \right] \quad (\text{A.20})$$

ここで、 E_n は $1, 2, \dots, n$ を元とする集合 $\Omega_n = \{1, 2, \dots, n\}$ の任意の部分集合のうちで偶数個の元を持つもの、 E_n^c はその補集合であり、 \sum_{E_n} は全ての E_n についての和である。例えば、 $E_n = \emptyset$ (空集合) なら $E_n^c = \Omega_n$ であり、 $E_n = \{1, n\}$ なら $E_n^c = \{2, 3, \dots, n-1\}$ である (n が偶数なら $E_n = \Omega_n$ の場合もあるが、 n が奇数なら $E_n = \Omega_n$ は当然ありえない)。また、下部に (in E_n) と記した $\sum_{\{\text{pair}\}}$ は E_n の元を余さず二つずつのペアにする全ての可能な組み合わせに互る和、 \prod_{pairs} は与えられた組み合わせが含む全ペアの積を表す。但し、

$$\begin{aligned} E_n = \emptyset \quad \text{なら} \quad & \sum_{\{\text{pair}\}} \prod_{\text{pairs}} \langle 0 | T \phi(x_i) \phi(x_j) | 0 \rangle = 1 \\ E_n = \Omega_n \quad \text{なら} \quad & : \prod_{k \in E_n^c} \phi(x_k) : = 1 \end{aligned}$$

と約束しておく。例えば、 $E_n = \{1, 2, 3, 4\}$ なら、可能なペアの組み合わせは (1) $\{1, 2\}, \{3, 4\}$, (2) $\{1, 3\}, \{2, 4\}$, (3) $\{1, 4\}, \{2, 3\}$ の3通りある。なお、ここでは簡単のため $\phi(x)$ はボース演算子としているが、フェルミ演算子なら各項の前に (左辺の順序から右辺の順序にするために) 何回 演算子の順序交換をしたかを表す符号因子 [偶数回なら +, 奇数回なら -] が掛かることになる。

但し、第 II-2 節での計算から分かるように、本講義で必要となるのは簡単な場合に限られるので、幾つかの具体例が理解できれば問題はない。そこで、 $n = 2$ および $n = 3$ の場合を書き表してみよう。^{#32}

例 1. $n = 2$ の場合

このときは $\Omega_2 = \{1, 2\}$ だから $E_2 = \emptyset, \{1, 2\}$ であり、

$$T[\phi(x_1)\phi(x_2)] = :\phi(x_1)\phi(x_2): + \langle 0 | T \phi(x_1)\phi(x_2) | 0 \rangle$$

^{#31} 本講義が採用している伝播関数の定義は $i\langle 0 | T \phi(x_i)\phi(x_j) | 0 \rangle$ だが、ここでは簡単のため虚数単位 i を除いた $\langle 0 | T \phi(x_i)\phi(x_j) | 0 \rangle$ も伝播関数と呼ぶことにする。

^{#32} (A.20) 式の証明に興味がある受講者は、「場の量子論 - 摂動計算の基礎 - 第3版」(日置善郎, 吉岡書店) 付録 2 を参照のこと。

となる。両辺の演算子順序を見比べたらわかるように、この場合は $\phi(x)$ がフェルミ演算子であっても、右辺第1項・第2項とも符号は同じままである。

例2. $n = 3$ の場合

こんどは $\Omega_3 = \{1, 2, 3\}$ で $E_3 = \emptyset, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ である。従って

$$\begin{aligned} T[\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)] &= : \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) : + \langle 0 | T\phi(x_1)\phi(x_2) | 0 \rangle \phi(x_3) \\ &\quad + \langle 0 | T\phi(x_1)\phi(x_3) | 0 \rangle \phi(x_2) + \langle 0 | T\phi(x_2)\phi(x_3) | 0 \rangle \phi(x_1) \end{aligned}$$

となり、 $\phi(x)$ がフェルミ演算子なら右辺第3項の符号がマイナスに変わる。

以上、本文中の計算を自力で確認するためには、これくらいの式変形が理解できていれば大丈夫だろう。では、最後に、この定理の実際の利用についての注意をしておこう：S行列要素の計算では $T[\mathcal{L}_I(x_1) \cdots \mathcal{L}_I(x_n)]$ という項が現れ、各 $\mathcal{L}_I(x_i)$ は複数の場の演算子の正規積を含む。そこへ本定理を適用する際には、すでに同じ正規積の中に入っている演算子同士は伝播関数をつくらないということをお忘れないように。これは、「伝播関数は演算子の順序交換で現れること」しかしながら「同一の正規積の中では、演算子同士は単に(反)交換してしまうこと」を考えれば納得できるだろう。