

# 時間反転対称な位相的場の理論 (Topological Quantum Field Theory with Time-Reversal Symmetry)

折井 一步

カブリ数物連携宇宙研究機構

## 概要

位相的場の理論 (topological quantum field theory; TQFT) は赤外固定点における場の理論であり, 時空の計量によらない物理を記述する枠組みを与える. TQFT は数学的定式化に成功したクラスの場の理論であるという点もその特徴の一つである. その中でも  $2+1$  次元の TQFT は, 低次元重力理論のモデルや分数量子ホール効果を記述する理論として, 素粒子理論・物性物理の分野で広く研究されているだけでなく, 低次元トポロジーの文脈でも大きな関心を持たれている. ところが, 時間反転対称性のある TQFT は, 向き付け不可能な多様体上で理論を考えることと等価であり, 豊かな構造が知られている一方, 未解決な問題も多く残されている. 本修士論文では TQFT の基礎的事項から始まり, 時間反転対称な TQFT の理解の現状を外観した後, 未だ成されていない向き付け不可能な多様体上の TQFT の構成への筆者の考える展望を述べる. なお, 特に断りがなければ  $2+1$  次元の Bosonic な TQFT を考えているものとする.

# 目次

<b>0 導入</b>	<b>5</b>
0.1 物理屋にとっての位相的場の理論	5
0.2 数学屋にとっての位相的場の理論	7
0.3 時間反転対称な位相的場の理論	9
0.4 本修士論文の目的と構成	11
<b>第 I 部 時間反転対称な位相的場の理論のこれまで</b>	<b>13</b>
<b>1 位相的場の理論の基礎</b>	<b>13</b>
1.1 位相的場の理論の定義	13
1.1.1 Atiyah の公理系	13
1.1.2 基本的操作	14
1.2 エニオンの導入	17
1.2.1 エニオンとは	17
1.2.2 モジュラーテンソル圏の気持ち	18
1.3 エニオンデータの構成	21
1.3.1 フュージョン	22
1.3.2 ブレイディング	27
1.3.3 Verlinde 公式	29
1.4 ベクトル空間の構成	31
1.4.1 トーラス上のベクトル空間	31
1.4.2 種数 $g$ の曲面上のベクトル空間	32
<b>2 Chern–Simons 理論</b>	<b>35</b>
2.1 有効作用としての Chern–Simons 理論	36
2.1.1 整数量子ホール効果	37
2.1.2 分数量子ホール効果	39
2.2 境界と Chern–Simons 理論	41
2.2.1 境界上の Chern–Simons 理論	42
2.2.2 境界付きの Chern–Simons 理論	43

2.3	エニオンと Chern–Simons 理論	45
2.3.1	Chern–Simons 理論の正準量子化	45
2.3.2	Chern–Simons 理論とモジュラーテンソル圏	46
<b>3</b>	<b>時間反転対称性に伴う数理構造</b>	<b>48</b>
3.1	時間反転対称性と時空の向き付け不可能性	48
3.2	エニオンに対する時間反転作用	52
3.2.1	有限群の作用と $H^3$ 障害	52
3.2.2	対称性の分数化	54
3.2.3	時間反転作用	56
3.2.4	$GL(2, \mathbb{Z})$ とトーラス	62
3.3	Chern–Simons 理論に対する時間反転作用	65
3.3.1	Classical な時間反転対称性	65
3.3.2	Quantum な時間反転対称性	65
3.3.3	位相欠陥面の具体的構成	66
3.4	クロスキャップ状態の考察	69
3.4.1	$\mathbb{RP}^2$ 上のベクトル空間の次元	69
3.4.2	局所クラマース縮退と対称性の分数化	70
3.4.3	アノマリー流入とアノマリー公式	73
	<b>第 II 部 時間反転対称な位相的場の理論のこれから</b>	<b>77</b>
<b>4</b>	<b>アノマリー公式の拡張</b>	<b>77</b>
4.1	ラグランジアン部分群	77
4.1.1	トポロジカル境界条件	77
4.1.2	カイラル中心電荷と高次中心電荷	80
4.2	アノマリー公式の一般化	82
4.2.1	公式の主張	82
4.2.2	公式の導出	83
4.2.3	$M^n$ の構造	89
4.2.4	アノマリー公式と高次中心電荷	91
<b>5</b>	<b>関手の実現に向けて</b>	<b>94</b>

5.1	Reshetikhin–Turaev 不変量 . . . . .	94
5.1.1	不変量の構成 . . . . .	94
5.1.2	具体例 . . . . .	95
5.2	関手の構成 . . . . .	97
5.2.1	量子化関手と普遍構成 . . . . .	98
5.2.2	クロスキャップ状態からの示唆 . . . . .	100
<b>A</b>	<b>TQFT と RCFT のバルク境界対応</b>	<b>103</b>
A.1	基本データの対応 . . . . .	103
A.2	Wess–Zumino–Witten 模型 . . . . .	105
<b>B</b>	<b>第一 Stiefel–Whitney 類</b>	<b>106</b>
<b>C</b>	<b>可換エニオン系における <math>H^3</math> 障害の自明性の証明</b>	<b>107</b>
C.1	可換エニオン系のデータ . . . . .	107
C.2	$\text{Ker}(1 - T)$ と $\text{Im}(1 + T)$ の直交性 . . . . .	108
C.3	$F, R$ -シンボルに対する時間反転作用 . . . . .	109
C.4	$H^3$ 障害の定義 . . . . .	111
C.5	$H^3$ 障害の自明性の証明 . . . . .	113
<b>D</b>	<b><math>S^1</math> 上の捩れ <math>S^2</math> 束の考察</b>	<b>114</b>

## 0 導入

位相的場の理論 (TQFT) は物理屋/数学屋の両者から興味を持たれる対象となっている。そこで、ここでは筆者の考える TQFT の概要とその応用を物理屋/数学屋の観点からそれぞれ述べることにする。

### 0.1 物理屋にとっての位相的場の理論

我々物理屋にとっての TQFT とは一体どういった理論であるだろうか。まず物理的にどのような TQFT が現れるか説明した後、いくつか応用に触れる。

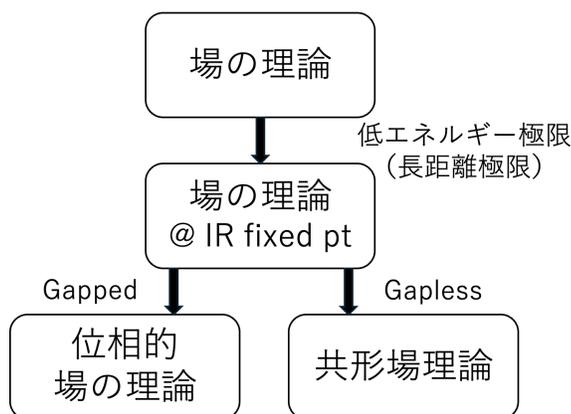


Figure 1: 低エネルギー極限における理論の分類

**低エネルギー有効理論としての位相的場の理論** 物理屋にとって、TQFT とは記述する物理が時空の計量によらない場の量子論 (QFT) のことと言える。理論が時空のトポロジーのみに依存する QFT と言っても良い。そんな理論は制限が強すぎてつまらないと感じる読者もいるかもしれないが、TQFT は低エネルギーにおける物理を記述する枠組みとして自然に現れる。

TQFT は低エネルギー極限をとった先の赤外固定点 (IR fixed point) における物理を記述する場の理論の一種である (図 1)。理論を一つ指定してその低エネルギー極限 (長距離極限) を取り、その元で赤外固定点があったとする。すでに極限をとっているのだから、そこで理論のエネルギースケール (距離スケール) を多少変えたところで理論は不変である事が期待される。実際、一般論として、そうした赤外固定点における場の理論は基底状態における質量ギャップの有無で TQFT と共形場理論 (Conformal field theory; CFT) のいずれかに分類できる事が知られている。本修士論文では CFT について深く扱わないが、大まかにいうと計量には依存する (トポロジカルではない) が形を変えない変換 (共形変換) に対して不変な理論と言え、TQFT と深い関係がある (2.2.2, A 等を見よ。 )。

以下では、TQFT の応用先をいくつか列挙していく。

**量子重力理論** 量子重力に TQFT が応用できる場合がある。古くから知られる例の一つ挙げておこう [BBG98]。三次元の負の宇宙項をもつ重力理論は、三脚場  $e^a = e^a{}_\mu dx^\mu$  とスピン接続  $\omega^a = \omega^a{}_\mu dx^\mu$  を用いて

$$S_{\text{grav}} = \frac{1}{8\pi G_3} \int d^3x e (R + 2/\ell^2) \quad (0.1)$$

と書ける。ここで  $e = \det(e^a{}_\mu)$ ,  $R$  はスピン接続から定まる曲率,  $\ell$  は AdS 半径である。一方, Lie 代数  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  の生成子  $T_a$  を用いて

$$A = \left( \omega^a + \frac{1}{\ell} e^a \right) T_a, \quad \bar{A} = \left( \omega^a - \frac{1}{\ell} e^a \right) T_a \quad (0.2)$$

という 2 つのゲージ場を定義する。すると、これらを用いた Chern–Simons 作用

$$S_{\text{CS}} = \frac{k}{4\pi} \int \text{Tr} \left( AdA + \frac{2}{3} A^3 \right) - \frac{k}{4\pi} \int \text{Tr} \left( \bar{A}d\bar{A} + \frac{2}{3} \bar{A}^3 \right) \quad (0.3)$$

に、ねじれがない条件  $de^a + \varepsilon^a{}_{bc} \omega^b e^c = 0$  を課して整理し,  $k = \frac{\ell}{4G_3}$  とすることで上の重力作用と一致する。ここで上で定義した Chern–Simons 理論は物理における TQFT の代表例である。ここで時空に境界を考えると境界には Wess–Zumino–Witten 模型と呼ばれる CFT が現れ, Ads/CFT 対応の例の一つとなっている。Chern–Simons 理論と Wess–Zumino–Witten 模型の対応については 2.2.2 を見よ<sup>1</sup>。

**分数量子ホール効果** TQFT は物性理論分野にも広く現れる。TQFT で記述できる最も広く知られる現象は分数量子ホール効果である。まずホール効果とは低温, 強磁場の二次元電子系において電流の垂直方向に電場が生じる現象であり, その伝導度をホール伝導度という。さらにこの系の基底状態にギャップがある時, この伝導度は量子化され量子ホール効果と呼ばれる。その際, その量子化はある定数の整数倍となるが, 実験系の試料の純度が特に高い場合, 電子間の相関が無視できなくなり, 結果的に量子化がその分数倍となる。この現象を分数量子ホール効果といい, その有効理論は Chern–Simons 理論となる [ZHK88]。そうした分数量子ホール効果にはボソンともフェルミオンとも異なるスピン統計性を持つエニオン (anyon) が現れる。その詳細については 2.1.1 及び 2.1.2 を見よ。

**アノマリー流入** 現在,  $d$  次元時空におけるアノマリーは  $d+1$  次元の対称性に守られたトポロジカル相 (Symmetry-Protected topological phase; SPT 相) により記述できると考えられて

<sup>1</sup>本修士論文では  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  は扱わないが本質的な議論に大差はないと考える。

おり、その機構をアノマリー流入 (anomaly inflow) と言う。ここで SPT 相とは基底状態が一つだけ存在する、自明な質量ギャップを持つ TQFT のことである。SPT 相は何らかの対称性  $G$  に関係した位相不変量で特徴付けられ、ギャップを閉じない限り異なる SPT 相には移る事ができない。そこで  $d+1$  次元の境界付き時空の上で対称性  $G$  で守られた SPT 相を考えよう。すると境界の外側の真空は自明な SPT 相と見做せるため、間にある境界の上にはギャップを閉じた  $d$  次元系が現れる事が分かる<sup>2</sup>。ここで  $G$  の背景場を導入すると一般には境界上の理論はゲージ不変にならずアノマリーを持つが、バルクの SPT 相も境界の存在によりアノマリーを持ち、それらが相殺しあうことで全体として整合的な理論を得る。これがアノマリー流入の直感的説明である。従ってアノマリーについて知りたければ、SPT 相について調べればよく、さまざまな代数的手法を用いてその分類が研究されている。詳しくは 3.4.3 を見よ。

**一般化対称性** 近年対称性の概念が大幅に拡張されつつある。これは従来の対称性演算子が余次元 1 の位相的欠陥演算子 (topological defect operator) となることから、より一般に余次元  $p$  の位相的欠陥演算子を含むように対称性の概念を拡張しようという試みである。そうした対称性を一般に高次対称性 (higher form symmetry) と呼び、余次元  $p$  の位相的欠陥演算子に対応する対称性を  $p$ -form 対称性と呼ぶ。その考えに立つと群演算は位相的欠陥演算子の融合で記述する方が自然に感じてくるだろう。そうして対称性の概念は必ずしも群としての逆元を持たない非可逆対称性 (noninvertible symmetry) に拡張する。そうした拡張された対称性たちを総称して一般化対称性 (generalized symmetry) と呼ぶ。こうした拡張された対称性を統一的に扱う方法として Sym TFT という手法がある。Sym TFT とはざっくり言えば  $d$  次元系の一般化対称性は、 $d+1$  次元の TQFT とそのトポロジカル境界条件上の演算子の組により実現できるという概念である (e.g. [ABGE<sup>+</sup>21, FMT22]). ここでトポロジカル境界条件とは、トポロジーを変えない範囲で自由に動かす事ができる境界のことである。詳しくは 4.1.1 を見よ。

実際、2 次元系の Wess–Zumino–Witten 模型における非可逆対称性演算子の一種である Verlinde line は、3 次元系の Chern–Simons 理論の Wilson line として実現できる [Wit89]. 本修士論文ではこの概念について詳細は追わないが、TQFT の理解がこうした近年進展している一般化対称性の理解につながることは言うまでもないだろう。

## 0.2 数学屋にとっての位相的場の理論

それでは数学屋にとっての TQFT とは一体なんなのだろう。筆者は物理屋であるため語弊を生む恐れもあるが、その知識の範囲で数学屋にとっての TQFT がどういったものであるかとその応用に触れよう。

<sup>2</sup>物体内部が絶縁体だが境界上には電気を通すトポロジカル絶縁体を思い出すと良い。

**対称モノイダル関手としての位相的場の理論**  $d$ 次元の TQFT は次のように定義することができる (詳細は 1.1.1 を見よ):

$$Z : \text{Bord}_{d-1,d}^H \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{C}}. \quad (0.4)$$

すなわち, TQFT とは何か, と聞かれればボルディズム圏からベクトル空間の圏への対称モノイダル関手である, と答えれば良い. 本修士論文で扱う Reshetikhin–Turaev TQFT であったり, そのアノマリーを記述すると考えられている Crane–Yetter TQFT であったり, 格子模型と相性の良い Turaev–Viro TQFT であったりと, そうした TQFT の定義を満たす関手にもいろいろな構成が知られている. と言ってもこの定義は実は完全ではなく, どういった TQFT を記述したいかによって定義を拡張する必要がある. 例えば, 我々の議論したいエニオンを含むような  $2+1$ 次元の TQFT を記述するにはモジュラーテンソル圏の情報も加えて定義する必要がある (脚注 6 を見よ).

さらに観察すると, その定義からこの枠組みでは境界付きの空間の時間発展は考える事ができない事が分かる (ボルディズム圏の対象は空間を表す閉  $d-1$ 次元多様体であり, 射は時間発展を表す  $d$ 次元のボルディズムである.). 現在, 最も完全と考えられている記述は充満に拡張された位相的場の理論 (fully extended TQFT) である. この枠組みでは  $\infty$ -圏と呼ばれる道具を用いて, 境界付きの空間や  $d-2, d-3, \dots$ 次元多様体のみならず, そうした部分多様体にサポートを持つ作用素も自然に記述できる [Lur09]. 本修士論文ではそうしたトピックは扱わないが, いずれにせよ TQFT は多様体の不変量といったトポロジー的分野と, 圏論といった代数的分野に大きくまたがり, それそのものがリッチな研究分野と言える. それでは TQFT の応用先をいくつか見ていこう.

**量子トポロジー** 量子トポロジーと言ったとき何を指しているか曖昧である事が多いが, 筆者には結び目理論や低次元トポロジーの中で量子群と関係したもののことを指している事が多いように感じる. 量子群とは Lie 代数のある意味での量子化のことである (すなわち群ではない. 具体例は脚注 19 を見よ.). さて, 量子トポロジーにおける古くから知られる結び目不変量としては Jones 多項式が挙げられる. Jones 多項式は  $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$  の表現論を用いて構成できる不変量であるが, Witten はこの量を Chern–Simons 理論の Wilson loop の期待値として再現することに成功した [Wit89]. ここで物理的には Chern–Simons 理論は結び目の不変量だけでなく時空多様体に対する不変量も与えるため, 対応して三次元多様体の不変量の存在が示唆された. 実際その 2 年後にはそうした量子不変量の構成, さらにその TQFT への拡張<sup>3</sup>にも成功しており, 数学と物理の相互作用の最たるものとも言える [RT91]. ここで定義されたものを Reshetikhin–Turaev 不変量, 及び Reshetikhin–Turaev TQFT と呼び, 本修士論文で扱うものである. その具体的構成のスケッチについては 5 を見よ.

<sup>3</sup>この TQFT は Chern–Simons 理論の数学的定式化であると理解されているが, この不変量は組み合わせ論的に構成したものであり, 経路積分を用いて厳密に定義したものではないことに注意.

**ゲージ理論** TQFT はゲージ理論にも応用されている。ここでゲージ理論と言ったときは、物理に由来する偏微分方程式から四次元多様体の不変量を構成してエキゾチック構造を判定する類の分野を指すこととする。四次元多様体には同相であるが微分同相ではないような組が多く存在し、そうしたものの同士をエキゾチックであると表現する。そうした違いを判定するのに例えば物理に由来する Seiberg–Witten 不変量が使われるが、数学的には四次元多様体に対して定義された偏微分方程式の解の個数を数えることに他ならず、非常な困難が伴う。一方で、この不変量は TQFT への拡張が部分的<sup>4</sup>に成功している (e.g. [Don02] を見よ。). すると四次元多様体の不変量を、より計算しやすい二つの境界付き多様体に分解してその内積として計算できる事が示唆される (内積は共通の境界における貼り合わせとして定義される 1.1.2.). このように TQFT を利用することで、複雑な計算を簡略化できる場合がある。

**関手的場の理論** この話は数学屋にとっての応用先の一つとは呼べないかもしれないが、深く関連する話題としてここで触れておこう。上で見たように位相的場の理論は(どの程度の構造を要求するかにも依存するが) 数学的に関手として定義を与えることに成功している。このような定式化ができる場の理論のクラスを広げたいと考えるのは自然であろう。例えば位相的であるという条件を緩めて共形構造を要求すれば、共形場理論を記述できるある種の関手が与えられることが期待され、ある程度まで成功していると言える [Seg88]. このように経路積分形式の場の理論を関手として実現しようとするアプローチを関手的場の理論 (functorial quantum field theory) と呼び、その代表例が TQFT という事ができる。そうした意味で TQFT から広がりを見せる研究分野であるため応用先の一つとしてここに記した。

### 0.3 時間反転対称な位相的場の理論

さて、本修士論文で特に扱うのは時間反転対称な TQFT である。これは向き付け不可能な多様体上における TQFT と言っても良い。その主張の意味と根拠については 3.1 を見よ。ここでは時間反転対称な TQFT を物理屋/数学屋のそれぞれの視点から簡潔に導入する。

**物理屋視点** 二つのゲージ場  $A_1, A_2$  を持つ  $U(1)^2$  Chern–Simons 理論を具体例に、時間反転対称な位相的場の理論がどういった理論であるかを解説しよう (詳細は 3.3.3).  $U(1)^2$  Chern–Simons 理論の作用は次式で与えられる:

$$S = \frac{1}{4\pi} \int_{M^3} K^{IJ} A_I \wedge dA_J = \frac{1}{4\pi} \int_{M^3} \begin{pmatrix} A_1, A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dA_1 \\ dA_2 \end{pmatrix}. \quad (0.5)$$

<sup>4</sup>全ての多様体を含むような構成にはなっていない。

ここで時間反転を考えると時空の向きが反転するため

$$S = \frac{1}{4\pi} \int_{-M^3} (A_1, A_2) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dA_1 \\ dA_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi} \int_{M^3} - (A_1, A_2) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dA_1 \\ dA_2 \end{pmatrix} \quad (0.6)$$

となる。ただし、多様体の向きの反転を  $-M^3$  と書いた。ここで  $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  とすると

$$T^T K T = -K \quad (0.7)$$

が成り立ち、作用は次のように書き直せる:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4\pi} \int_{M^3} - (A_1, A_2) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dA_1 \\ dA_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{M^3} (A_1, A_2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dA_1 \\ dA_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{M^3} (A_2, -A_1) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dA_2 \\ -dA_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (0.8)$$

これは、時間反転に伴ってゲージ場の組に  $(A_1, A_2) \mapsto (A_2, -A_1)$  という作用が入ったことを意味し、この理論の持つ物理量である Wilson loop 演算子を次のように取り替える  $\mathbb{Z}_2$  作用が入ったことに対応する:

$$T : \exp(\pi i \oint_{\gamma} A_1) \mapsto \exp(\pi i \oint_{\gamma} A_2). \quad (0.9)$$

こうした Wilson loop 演算子たちはそれぞれエニオンに対応するため、これはエニオンに対して何らかの時間反転に対応する  $\mathbb{Z}_2$  作用が入ったことになる。このように、我々の議論する時間反転対称な位相的場の理論は  $\mathbb{Z}_2$  作用という構造付きのエニオン系であると言える。

**数学屋視点** 時間反転対称な位相的場の理論は次のような対称モノイダル関手として定義できる:

$$Z : \text{Bord}_{2,3}^O \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{C}}. \quad (0.10)$$

あるいは、次の図式を可換にするような  $Z$  の持ち上げ  $\tilde{Z}$  が存在することと言っても良いだろう:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Bord}_{2,3}^{SO} & \xrightarrow{\kappa} & \text{Bord}_{2,3}^O \\
 & \searrow Z & \swarrow \tilde{Z} \\
 & \text{Vect}_{\mathbb{C}} &
 \end{array}
 \quad (0.11)$$

ただし、 $\kappa: \text{Bord}_{2,3}^{SO} \rightarrow \text{Bord}_{2,3}^O$  は向き付けを忘れる忘却関手である。このように我々は向き付け不可能な位相的場の理論の定義を有しているが、(少なくとも筆者の知見の中では)その具体的構成は未だ知られていない。実際、我々の扱う Reshetikhin–Turaev TQFT は Reshetikhin–Turaev 不変量から構成される TQFT であるが、その不変量自体が向き付け可能なものしか扱えないため、こうした関手に素直には拡張できない事がわかる。そうした中、物理屋はそうした未だ知られていない TQFT の存在を仮定して議論しているのだ。というより向き付け可能な場合に不変量を用いた具体的構成が知られている方が特殊であると言った方がよかろう。例えば、上述の extended TQFT は具体的構成が知られているものは少ないが<sup>5</sup>、それでも代数的に議論できるため盛んに研究されているし、そもそも一般の場の量子論自体は定義すらなくとも、その正しさ(何らかの枠組みの存在)を実験との整合性を根拠に仮定して研究している。

## 0.4 本修士論文の目的と構成

本修士論文の目的は  $2 + 1$  次元 TQFT について入門することから始まり、筆者の最近の結果 [Ori25b, Ori25c, Ori25d] を交えながら時間反転対称な TQFT における分野理解の現状を外観することである。読者の圏論の知識は仮定しない。

本修士論文は次のように構成されている:

- 1 章: TQFT の定義やエニオンの概念等, TQFT を議論する上で必要最小限の知識をまとめる.
- 2 章:  $2 + 1$  次元 TQFT の代表例である Chern–Simons 理論について幾つかの観点から解説する.
- 3 章: 時間反転対称性について議論する中で現れる様々な数理構造について解説する.
- 4 章: 時間反転対称性に関するアノマリーに制限をかける公式が知られていたが、筆者によるその公式の一般化についてレビューする [Ori25c].

<sup>5</sup>例えば [FHLT09, KJB10] が知られている。

- 5章: 向き付け可能三次元多様体の不変量である Reshetikhin–Turaev 不変量の構成と, そこから関手としての TQFT が定まることを解説する. また, その向き付け不可能多様体への拡張への筆者の考える展望を述べる.

ここで2章はそれ以降の章とは独立しているため飛ばして読み進めることもできるが, 他の章の理解の助けとなるはずである. また4章と5章もそれぞれ独立した内容となっているため好きな順で読むことができる (図 2). 特に1,3,5章の内容に関しては, かなりパラレルな内容のオンライン講演の録画もあるためそちらも参照されたい [Ori25a].

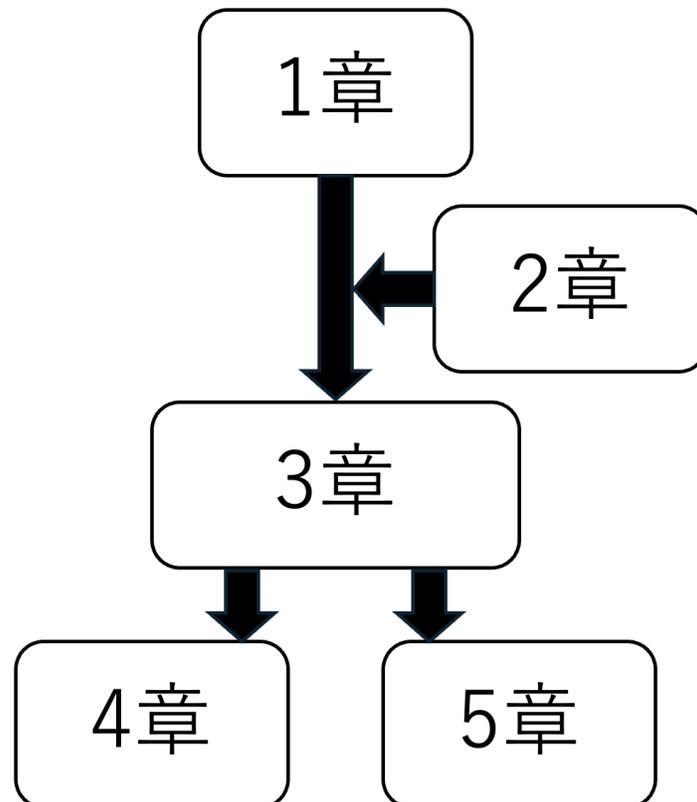


Figure 2: 本修士論文の構成

# 第I部 時間反転対称な位相的場の理論のこれまで

## 1 位相的場の理論の基礎

この章ではTQFTの基礎的概念を説明する. 物理屋向けの教科書的文献は [Sim23, BBCW14], 数学屋向けの教科書的文献は [Tur94] を挙げておく.

### 1.1 位相的場の理論の定義

#### 1.1.1 Atiyah の公理系

まず位相的場の理論の定義を述べた後, 直観的説明を与える:

位相的場の理論とは, ボルディズム圏からベクトル空間の圏への対称モノイダル関手である<sup>a</sup>:

$$Z : \mathbf{Bord}_{d-1,d}^H \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}. \quad (1.1)$$

<sup>a</sup>多くの場合ここにユニタリー性が課されている. すなわち,  $(d-1)$ 次元閉多様体の向きの反転にベクトル空間の複素共役が対応する:

$$Z(-\Sigma) = \overline{Z(\Sigma)}.$$

これによりベクトル空間に正定値な Hermite 内積が入りヒルベルト空間となる [FH16].

ここでボルディズム圏は

- 対象が  $(d-1)$ 次元の閉多様体
- 射がそれらを境界に持つ  $d$ 次元の多様体を微分同相で割ったボルディズム

であるような圏であり, ベクトル空間の圏は

- 対象が複素ベクトル空間
- 射がそれらの間の線型写像

であるような圏である.  $H$ と書いているのは tangential structure であり, 多様体が向き付け可能なら  $SO$ , 向き付け不可能なら  $O$ , スピン構造付きなら  $Spin$  といったように時空の持つ構造を表している<sup>6</sup>. ここでは, まだ圏の定義やボルディズムの概念も導入していないため, 上の定義を次の四つの公理に言い換えよう [Ati89, Sim23]:

<sup>6</sup>実際にはこの定義では我々の記述したい物理は定義しきれていない. 例えば  $2+1$ 次元の位相的場の理論

- I:  $(d-1)$  次元閉多様体  $\Sigma$  に有限次元複素ベクトル空間  $V(\Sigma)$  をアサインする.
- II: 二つの閉多様体の非交和の上のベクトル空間は次式で与える

$$V(\Sigma_1 \sqcup \Sigma_2) = V(\Sigma_1) \otimes V(\Sigma_2). \quad (1.2)$$

- III:  $d$  次元多様体  $M$  にその境界  $\Sigma$  上のベクトル空間の元をアサインする

$$Z(M) \in V(\partial M). \quad (1.3)$$

- IV: 多様体の向き付けの反転にはベクトル空間の双対を対応させる

$$V(-\Sigma) = V(\Sigma)^*. \quad (1.4)$$

ここで  $Z$  は数学的には関手、物理的には分配関数である。各公理は次の物理的期待を反映したものとなっている:

- I: 各タイムスライスにおける  $d-1$  次元空間  $\Sigma$  にはベクトル空間  $V(\Sigma)$  をアサインする.
- II: あるタイムスライスにおいて空間的に離れた  $\Sigma_1, \Sigma_2$  がある時、全体のベクトル空間はテンソル積  $V(\Sigma_1 \sqcup \Sigma_2) = V(\Sigma_1) \otimes V(\Sigma_2)$  で与える.
- 時空  $M$  全体にわたる経路積分によりタイムスライス  $\partial M$  上にはそのベクトル空間上の状態  $Z(M) \in V(\partial M)$  が定まる.
- incoming 状態と outgoing 状態に対して内積が定まる<sup>7</sup>.

### 1.1.2 基本的操作

これらの公理からいくつかの基本的な操作を定義しよう。以降、 $\Sigma$  は閉曲面、 $M$  は三次元多様体とする。

**Gluing** 向きが互いに異なる境界  $\Sigma$  を持つ三次元多様体  $M, M'$  を考える (図 3):

$$\partial M = \Sigma, \quad \partial M' = -\Sigma. \quad (1.5)$$

の定義をする際には、この後導入するエニオンを記述するデータであるモジュラーテンソル圏も指定しておく必要がある。それだけでなく、ボルディズム圏の対象は閉曲面に対して  $[0, 1] \hookrightarrow \Sigma$  でいくつかのインターバルを埋め込んでおき、そこにモジュラーテンソル圏の単純対象のデータをラベル (decoration) しておく。すると自然に射のボルディズムにラベル付きのリボングラフが入り、分配関数が結び目の不変量として計算される (decorated bordism)。詳しくは [Tur94] を見よ。

<sup>7</sup>本修士論文では物理の文献の慣習に従い Hermite 内積の存在の仮定の元、向きの反転に双対ベクトル空間を対応させる流儀をとる [Sim23]。

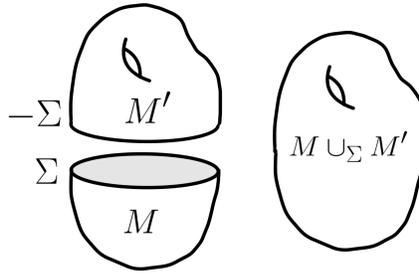


Figure 3: 内積

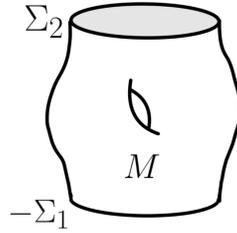


Figure 4: ボルディズム

すると公理から

$$Z(M) \in V(\Sigma), \quad Z(M') \in V(-\Sigma) = V(\Sigma)^* \quad (1.6)$$

より次のように書ける:

$$|\psi\rangle := Z(M), \quad \langle\psi'| := Z(M'). \quad (1.7)$$

これらの内積を取ることは  $M$  と  $M'$  を共通の境界  $\Sigma$  で貼り合わせることに対応している. すなわち

$$\langle\psi'|\psi\rangle = Z(M \cup_{\Sigma} M') \in V(\emptyset) = \mathbb{C}. \quad (1.8)$$

ここで  $M$  と  $M'$  を共通の境界  $\Sigma$  で貼り合わせて得られる多様体を  $M \cup_{\Sigma} M'$  と書いた. この時  $M \cup_{\Sigma} M'$  は境界がないため  $Z(M \cup_{\Sigma} M') \in V(\emptyset)$  は複素数となり, 内積で複素数が得られることと整合的となっている<sup>8</sup>.

**Bordism** それでは多様体が二つの境界を持つ場合はどうだろうか. 三次元多様体  $M$  が境界  $\partial M = -\Sigma_1 \sqcup \Sigma_2$  を持つとする (図 4). こうした多様体を  $\Sigma_1$  と  $\Sigma_2$  の間のボルディズム (bordism) といい, そうしたボルディズムが存在する時,  $\Sigma_1$  と  $\Sigma_2$  はボルダント (bordant) で

<sup>8</sup>ここでこの内積がエルミート内積で正定値であることは仮定している. これは関手  $Z : \text{Bord}_{d-1,d}^H \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{C}}$  に equivariance data として reflection 構造を付加していることに他ならない. 詳しくは [FH16] を見よ.

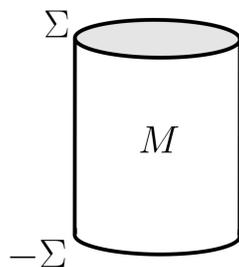


Figure 5: 自明なボルディズム

あるという<sup>9</sup>. このとき公理から

$$Z(M) \in V(-\Sigma_1 \sqcup \Sigma_2) = V(\Sigma_1)^* \otimes V(\Sigma_2) \quad (1.9)$$

となる. これは  $Z(M)$  が次のような写像を定めていることを意味する:

$$Z(M) : V(\Sigma_1) \rightarrow V(\Sigma_2). \quad (1.10)$$

つまり  $Z(M)$  は適当な係数  $U_{ab} \in \mathbb{C}$  を用いて次のように書ける:

$$Z(M) = \sum_{a,b} U_{ab} |\psi_{\Sigma_2,a}\rangle \langle \psi_{\Sigma_1,b}|. \quad (1.11)$$

ここで  $a, b$  はそれぞれ  $V(\Sigma_1), V(\Sigma_2)$  の基底のラベルである. 基底については  $V(T^2)$  の場合に限って具体的構成を 1.4.1 で述べる. ここでこの写像の詳細  $U_{ab}$  は  $M$  のトポロジーによって決まる. それではトポロジーが自明なものを選ぶとどうなるだろうか.

**Identity Bordism** 三次元多様体  $M$  が  $M = \Sigma \times [0, 1]$  のように与えられているとする (図 5). すると公理から

$$Z(M) \in V(-\Sigma \sqcup \Sigma) = V(\Sigma)^* \otimes V(\Sigma) \quad (1.12)$$

となる. これは  $[0, 1]$  が可縮であることから  $V(\Sigma)$  に対する恒等写像となる:

$$Z(M) = \sum_a |\psi_{\Sigma,a}\rangle \langle \psi_{\Sigma,a}|. \quad (1.13)$$

$[0, 1]$  の端点を同一視することで  $S^1$  が得られることに注意すると次式が得られる:

<sup>9</sup>用語についてコメントしておく, 古い数学の文献だとコボルディズムという言葉が主流であったが, 後からこのボルディズム群が一般化ホモロジーの例であることが分かり, コボルディズムよりボルディズムという言葉が使われることが増えてきているようである.

次元公式

$$\begin{aligned}
Z(\Sigma \times S^1) &= \text{Tr}_{V(\Sigma)} Z(\Sigma \times [0, 1]) \\
&= \text{Tr}_{V(\Sigma)} \sum_a |\psi_{\Sigma, a}\rangle \langle \psi_{\Sigma, a}| \\
&= \dim V(\Sigma).
\end{aligned} \tag{1.14}$$

これは物理的には基底状態の縮退度を計算していることになる。

## 1.2 エニオンの導入

この節では、まずエニオンとその性質について簡単に説明した後、その性質を持つデータとしてモジュラーテンソル圏を導入する。

### 1.2.1 エニオンとは

エニオン (anyon) とは、同一粒子の入れ替えに伴い、 $\pm 1$  だけでなく  $e^{2\pi i/m}$  のような位相を取りうる準粒子であり、ボソンやフェルミオンの概念の一般化と言える。ここで、エニオンの重要な特徴のいくつかを挙げる。

- エニオンは  $2 + 1$  次元系特有の概念である。
- エニオンの融合/分裂はフュージョン則 (fusion rule) に従う。

まず一つ目に、エニオンは  $2 + 1$  次元系に特有の概念であることに驚く前に、そもそもなぜ他の次元ではボソンとフェルミオンしか考えないのだろうか。その背景には次の事実がある。

$$\pi_1(SO(d)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & d = 2, \\ \mathbb{Z}_2 & d \geq 3. \end{cases} \tag{1.15}$$

上式は  $3 + 1$  次元以上だと二周で必ず元の状態に戻って来れることを意味している。そのため  $3 + 1$  次元以上では統計性の種類はボソンとフェルミオンの二種類であったが、 $2 + 1$  次元では上式から、より一般の統計性を持つ事が分かり、そのような粒子をエニオンと呼ぶのである。

次に二つ目について、フュージョン則とは、二つのエニオンが融合した時にどういったエニオンになるかを定める規則である。より正確には、次のように述べることができる。TQFT を議論している以上、物理はスケールに依存しない。そこで二つのエニオンを遠くから見ることにしよう。するとそれらは一つのエニオンとみなせることが期待されるが、その時、ど

ういったエニオンに見えるかを定める規則がフュージョン則である<sup>10</sup>。物理の文脈では次のように書かれることが多い。

$$a \times b = \sum_c N_{ab}^c c, \quad N_{ab}^c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad (1.16)$$

ここで  $a, b, c$  はエニオンを表しており、 $N_{ab}^c$  は  $a$  と  $b$  の融合から  $c$  が得られる場合の多重度を表す非負整数である。以下、エニオン全体のなす集合を  $\mathcal{C}$  とかく。フュージョン則に関連してエニオンが満たすべき性質として次が挙げられる。

- 真空に対応するエニオンが一意に存在する。
- 全てのエニオンに対して反エニオンが一意に存在する。

ここで真空は以下を満たすような  $1$  のことである

$$a \times 1 = a \quad \text{が全ての } a \in \mathcal{C} \text{ に対して成り立つ。}$$

一方、 $a \in \mathcal{C}$  に対する反エニオン  $\bar{a} \in \mathcal{C}$  は次式で定義される。

$$a \times \bar{a} = 1 + \dots. \quad (1.17)$$

つまり、融合して真空のセクターが出るようなエニオンのことである。さて、ここまで見たエニオンの性質を記述する数学の言語としてモジュラーテンソル圏 (modular tensor category) を導入しよう。その詳細な定義は [Tur94, Row05] に譲るとして、ここではモジュラーテンソル圏がどういったデータで、なぜエニオンの記述に使えるかに焦点を合わせて説明する。

## 1.2.2 モジュラーテンソル圏の気持ち

まず圏の定義を復習しよう：

圏 (category)  $\mathcal{C}$  とは、次のデータからなる：

- 対象 (object) と呼ばれる要素の集まり  $\text{Ob}(\mathcal{C})$ 。
- 任意の対象  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に対して定まる射 (morphism) の集合  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 。
- 任意の  $X \xrightarrow{f} Y, Y \xrightarrow{g} Z$  に対して定まる射の合成

$$g \circ f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z). \quad (1.18)$$

<sup>10</sup>中性水素原子だって陽子と電子というスピン  $1/2$  を持つ粒子からなるが、遠くから見るとスピン  $0, 1$  の状態のいずれかに見えるだろう。それが妥当であることは、その二状態間の禁制遷移に伴って現れるスペクトルである  $21\text{cm}$  線を観測することで確かめる事ができる。

- 各対象  $X$  に対して定まる恒等射  $\text{id}_X \in \text{Hom}_C(X, X)$ .

これらは次の公理を満たす：

1. (結合律)  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .
2. (恒等律) 各対象  $X$  に対して恒等射  $\text{id}_X \in \text{Hom}_C(X, X)$  が、任意の  $f: X \rightarrow Y$  について

$$\text{id}_Y \circ f = f, \quad f \circ \text{id}_X = f. \quad (1.19)$$

この節では、上で確認した圏の定義のみ仮定し、モジュラーテンソル圏の持つ性質のいくつかを導入したのち、それらがなぜエニオンの記述に使えるのかを見ていく。詳しくは [Tur94, Row05] を見よ。モジュラーテンソル圏の代表的性質として次が挙げられる：

- 組紐付きモノイダル圏 (braided monoidal category) である。
- 有限個の単純対象の同型類を持つ半単純圏 (semisimple category) である。
- モノイダル圏として rigid 構造を持つ。
- リボン構造 (ribbon structure) を持つ。
- Hom 空間が有限次元ベクトル空間である。

これらの性質を物理語に翻訳していこう。

**組紐付きモノイダル性** まず、モノイダル性から説明する。

モノイダル性とは、圏の対象（及び射）の間にテンソル積構造  $(a, b) \mapsto a \otimes b$  が入ることをいう。具体例は表 1.1 を見よ。

	$\text{Vect}_C$	$\text{Bord}_{d-1,d}$
モノイダル構造	ベクトル空間のテンソル積	多様体の非交和

Table 1.1: 圏のモノイダル構造の例

この構造は物理的にはフュージョンの構造を入れることに相当し、この言語の元ではフュージョン則の左辺は次のように書かれる：

$$a \times b \mapsto a \otimes b. \quad (1.20)$$

ここで、テンソル積に対して単位対象  $1$  が同型を除いて一意に定まり、これは物理語では真空が一意に定まることに対応する。

さらに、組紐構造はそうした各対象のテンソル積  $a \otimes b$  に次のような構造が射が定まることをいう：

$$R^{ab} : a \otimes b \mapsto b \otimes a. \quad (1.21)$$

この構造により、エニオン間に braiding が定まり、この後見るようにエニオン同士のリンクに非自明な位相を与えることが可能になる。

**半単純性** 圏が半単純性を持つ時、そこには対象同士の直和の概念と単純対象の概念が定義されており、全ての対象が、単純対象の直和でかける。例えば、表 1.2 を見よ。

	$\text{Vect}_{\mathbb{C}}$	$\text{Rep}(\mathfrak{g})$
単純対象	$\mathbb{C}$	既約表現
直和構造	ベクトル空間の直和	表現の直和

Table 1.2: 圏の直和構造の例

ここで一般に  $\text{Rep}(\mathfrak{g})$  は、 $\mathfrak{su}(2)$  の既約表現が  $j = 0, 1/2, 1, \dots$  と無限にあるように無限個の単純対象を持つことに注意<sup>11</sup>。本修士論文では [BBCW14] 等に合わせて、圏  $\mathcal{C}$  の単純対象の全体  $\text{Simp}(\mathcal{C})$  を単に  $\mathcal{C}$  と書く。さて、そうした単純対象の種類が有限個の時、我々はここにフュージョン則を定義できる<sup>12</sup>：

$$a \otimes b = \bigoplus_{c \in \mathcal{C}} c^{\oplus N_{ab}^c}. \quad (1.24)$$

つまりエニオンとは単純対象で、フュージョン則とはテンソル積の直和分解だったわけであ

<sup>11</sup>モジュラーテンソル圏を得るには、例えば  $\mathfrak{su}(2)$  の量子群  $U_q(\mathfrak{su}(2))$  を考え、 $q$  を 1 の冪根にとるとその表現圏には単純対象の有限性が従い、 $\text{Rep}(U_q(\mathfrak{su}(2)))$  はモジュラーテンソル圏をなす。あるいはレベル  $k$  の  $\mathfrak{su}(2)$  のアフィンリー代数を考えると、クレプシュ–ゴルダン条件に制限がかかり、既約表現の個数が有限個になる。そうして、その表現圏はモジュラーテンソル圏をなし、これは TQFT におけるエニオンが RCFT におけるプライマリー場として解釈できることの根拠の一つと言える。

<sup>12</sup>厳密には両辺は  $=$  ではなく  $\cong$  で繋ぐべきであるが、本修士論文ではあまり区別しない。正確に書きたければ  $\text{Simp}(\mathcal{C})$  の生成する  $\mathbb{Z}$  加群  $\mathbb{Z}^{\oplus \text{Simp}(\mathcal{C})}$  を考え、積を

$$a \times b := [a \otimes b] \quad (1.22)$$

のように入れる。すると半単純性から非負整数の族  $\{N_{ab}^c\}_{c \in \text{Simp}(\mathcal{C})}$  が存在し、このもとでフュージョン則は次のように書ける：

$$a \times b = \sum_c N_{ab}^c c. \quad (1.23)$$

る. 量子力学でスピン  $1/2$  の合成:

$$2 \otimes 2 = 1 \oplus 3 \quad (1.25)$$

のように2次元既約表現のテンソル積を1次元と3次元の既約表現に直和分解したのと同じであることは変わらない.

**rigid 構造** rigid 構造は対象や射に入る双対構造のことであり, 例えば,  $a \in \mathcal{C}$  に対して, 次のような  $\bar{a} \in \mathcal{C}$  がただ一つ存在する:

$$a \otimes \bar{a} = 1 \oplus \dots \quad (1.26)$$

これは物理語ではエニオンに対して, 必ず反エニオンが一意に存在することを意味する.

**リボン構造** リボン構造は, エニオンにトポロジカルスピンの概念を与えてくれる. トポロジカルスピンとは, エニオンのスピンのことで

$$\theta : \mathcal{C} \rightarrow U(1) \quad (1.27)$$

なる写像でいくつかの制限を満たすものを意味し, 同一粒子の入れ替えに伴って現れる位相のことである.

**Hom 空間** モジュラーテンソル圏は, 全ての射の集合  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b)$  が有限次元ベクトル空間をなし, これを Hom 空間と呼ぶ. この構造は, 技術的に重要な構造で, 例えば, 圏論的データから実際の数  $\mathbb{C}$  を取り出すのに必要な構造である. 実際, 上に見たリボン構造はそもそも

$$\theta_a \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, a) : a \mapsto a \quad (1.28)$$

というデータだが, これは Hom 空間をなすため,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, a) \cong \mathbb{C}$  のようにも書け, ここから  $\theta(a)$  のような物理量を取り出すことができる<sup>13</sup>.

さて, これらの知識をもとに, より具体的にエニオンの代数的データを定義していこう.

### 1.3 エニオンデータの構成

圏の定義と前節で学んだ程度のモジュラーテンソル圏の性質を仮定し, 実際に TQFT を議論するのに必要最低限なエニオンのデータを定義していく. この節の詳細は [BBCW14] を

<sup>13</sup>ここで  $a$  が単純であることを使った.

見よ.

### 1.3.1 フュージョン

**融合/分裂空間** フュージョン則は, エニオン  $a, b \in \mathcal{C}$  に対して, 次で与えられる:

$$a \otimes b = \bigoplus_{c \in \mathcal{C}} c^{\oplus N_{ab}^c}. \quad (1.29)$$

ここで  $N_{ab}^c$  の性質として次が挙げられる<sup>14</sup>:

- フュージョンの可換性:

$$N_{ab}^c = N_{ba}^c. \quad (1.31)$$

- 時間反転における多重度の不変性:

$$N_{ab}^c = N_{a\bar{b}}^{\bar{c}}. \quad (1.32)$$

- 真空とのフュージョンの一意性:

$$N_{a1}^b = \delta_{ab}. \quad (1.33)$$

- 反エニオンの一意性:

$$N_{ab}^1 = \delta_{\bar{b}a}. \quad (1.34)$$

また, 次のような表記もしばしばなされる:

$$N_{ab\bar{c}} = N_{ab}^c. \quad (1.35)$$

さて圏  $\mathcal{C}$  の (単純) 対象はエニオンであった. では, 射は何に対応するだろうか. モジュラーテンソル圏における射は  $\text{Hom}$  空間として有限次元複素ベクトル空間をなす事実を思い出すと, 次のように, 融合空間とその双対である分裂空間を定義することができる:

$$V_{ab}^c := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a \otimes b, c) \cong \mathbb{C}^{N_{ab}^c}, \quad V_c^{ab} := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, a \otimes b) \cong \mathbb{C}^{N_{ab}^c}. \quad (1.36)$$

これらのベクトル空間  $V_{ab}^c, V_c^{ab}$  の正規直交基底は次のようにダイアグラムで書くことがで

<sup>14</sup>ここでは物理的意味と関連させて性質を列挙したがもちろんこれらは

$$N_{ab}^1 = \dim \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a \otimes b, 1) = \dim \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, \bar{b}) = \delta_{a\bar{b}} \quad (1.30)$$

のように定義から導けるものであることに注意.

きる:

$$(d_c/d_a d_b)^{1/4} \begin{array}{c} c \\ \uparrow \\ \mu \\ \swarrow \quad \searrow \\ a \quad b \end{array} = \langle a, b; c, \mu | \in V_{ab}^c, \quad (1.37)$$

$$(d_c/d_a d_b)^{1/4} \begin{array}{c} a \quad b \\ \swarrow \quad \searrow \\ \mu \\ \uparrow \\ c \end{array} = |a, b; c, \mu \rangle \in V_c^{ab}. \quad (1.38)$$

ここで,  $\mu = 1, \dots, N_{ab}^c$  である<sup>15</sup>. 規格化因子  $(d_c/d_a d_b)^{1/4}$  については, このダイアグラムがイソトピー不変になるように入れてある実数であり, あとで詳細を述べる.

内積はこれらの頂点が繋がるように次式で定義する:

$$\langle a, b; c, \mu | a, b; c', \mu' \rangle = \begin{array}{c} c \\ \uparrow \\ \mu \\ \swarrow \quad \searrow \\ a \quad b \\ \swarrow \quad \searrow \\ c' \\ \uparrow \\ \mu' \end{array} = \delta_{cc'} \delta_{\mu\mu'} \sqrt{\frac{d_a d_b}{d_c}} \begin{array}{c} c \\ \uparrow \end{array}. \quad (1.39)$$

この式は物理的には, チャージの保存を表していることに注意.

また,  $a \otimes b$  に対する恒等演算子は次のように定義できる:

$$\text{id}_{a \otimes b} = \sum_{c, \mu} |a, b; c, \mu \rangle \langle a, b; c, \mu| = \begin{array}{c} a \\ \uparrow \\ b \\ \uparrow \end{array} = \sum_{c, \mu} \sqrt{\frac{d_c}{d_a d_b}} \begin{array}{c} a \quad b \\ \swarrow \quad \searrow \\ \mu \\ \uparrow \\ c \\ \swarrow \quad \searrow \\ a \quad b \end{array}. \quad (1.40)$$

**F-シンボル**  $a, b, c \in \mathcal{C}$  の三つのエニオンのフュージョンを考えてみよう. その時, 分裂空間は次のようにかける:

$$V_d^{abc} \cong \bigoplus_e V_e^{ab} \otimes V_d^{ec} \cong \bigoplus_f V_f^{bc} \otimes V_d^{af}. \quad (1.41)$$

そして, この同型を与えるのが  $F$ -シンボルと呼ばれる行列であり, 次式を満たす:

$$\begin{array}{c} a \quad b \quad c \\ \swarrow \quad \searrow \\ \alpha \quad \beta \\ \downarrow \\ e \end{array} = \sum_{f, \mu, \nu} [F_d^{abc}]_{(e, \alpha, \beta)(f, \mu, \nu)} \begin{array}{c} a \quad b \quad c \\ \swarrow \quad \searrow \\ \nu \\ \downarrow \\ f \end{array}. \quad (1.42)$$

ここで  $e, f$  は中間状態に対応するエニオンのラベルであり,  $\alpha, \beta, \mu, \nu$  はそれぞれのセクターを選ぶかのラベルで, 例えば  $\alpha \in \{1, \dots, N_{ab}^e\}$  である. この変換は, 基底の取り替えに

<sup>15</sup>多くの例では  $N_{ab}^c = 0, 1$  である.

対応するものであり，ユニタリー性が課される：

$$\begin{aligned} \left[ (F_d^{abc})^{-1} \right]_{(f,\mu,\nu)(e,\alpha,\beta)} &= \left[ (F_d^{abc})^\dagger \right]_{(f,\mu,\nu)(e,\alpha,\beta)} \\ &= \left[ F_d^{abc} \right]_{(e,\alpha,\beta)(f,\mu,\nu)}^* . \end{aligned} \quad (1.43)$$

ここで  $a, b, c, d \in \mathcal{C}$  の四つのエニオンについて，どの順番にフュージョンしたダイアグラムについても  $F$ -シンボルで移り合えるためには次の五角関係式を課す必要がある：

$$\begin{aligned} \sum_{\delta} \left[ F_e^{fcd} \right]_{(g,\beta,\gamma)(l,\nu,\delta)} \left[ F_e^{abl} \right]_{(f,\alpha,\delta)(k,\mu,\lambda)} \\ = \sum_{h,\sigma,\psi,\rho} \left[ F_g^{abc} \right]_{(f,\alpha,\beta)(h,\psi,\sigma)} \left[ F_e^{ahd} \right]_{(g,\sigma,\gamma)(k,\rho,\lambda)} \left[ F_k^{bcd} \right]_{(h,\psi,\rho)(l,\nu,\mu)} \end{aligned} \quad (1.44)$$

さらに，

$$N_{a1}^c = N_{1a}^c = \delta_{ac}, \quad (1.45)$$

から  $F$ -シンボルについても次の制限が課される：

$$a, b, c \text{ のいずれかが } 1 \text{ であるならば } [F_d^{abc}] = I. \quad (1.46)$$

ここで  $I$  は単位行列．さて，上に見たように各エニオン  $a$  に対し反エニオン  $\bar{a}$  が一意に存在するのであった．これを次の条件を課すことで導入する．

$$[F_a^{a\bar{a}a}]_{(1,\alpha)(1,\mu)} \neq 0. \quad (1.47)$$

この条件から次が従う：

$$N_{ab}^1 = \delta_{b\bar{a}}, \quad (1.48)$$

$$\bar{\bar{1}} = 1, \quad (1.49)$$

$$\bar{\bar{a}} = a. \quad (1.50)$$

また  $\dim V_{a\bar{a}}^1 = 1$  も従うため， $\alpha, \mu \in \{1\}$  となり  $[F_a^{a\bar{a}a}]_{(1,\alpha)(1,\mu)} = [F_a^{a\bar{a}a}]_{11}$  と書ける．ダイアグラムで書くとき反エニオンは向きを反転させる：

$$\uparrow_a = \downarrow_{\bar{a}}. \quad (1.51)$$

$F$ -シンボルを用いて次式を得る:

$$a \begin{array}{c} \nearrow \\ \bar{a} \\ \searrow \\ 0 \end{array} a = [F_a^{a\bar{a}a}]_{11} d_a \begin{array}{c} | \\ \uparrow \\ a \end{array} \quad (1.52)$$

ここで,  $d_a$  を次式で定義した:

$$d_a = d_{\bar{a}} = a \begin{array}{c} \circlearrowright \end{array} \quad (1.53)$$

この  $d_a$  は量子次元 (quantum dimension) と呼ばれる. 次元と呼ばれる由来については後ほど紹介する. さらに後のために  $\mathcal{C}$  の総量子次元 (total quantum dimension) を次式で定義しておく.

$$\mathcal{D} := \sqrt{\sum_a d_a^2}. \quad (1.54)$$

この量は規格化因子として度々現れる<sup>16</sup>. ここでイソトピーは位相のみに影響を与える事実<sup>17</sup>より  $[F_a^{a\bar{a}a}]_{11}$  は次のようにかける:

$$[F_a^{a\bar{a}a}]_{11} = \frac{\kappa_a}{d_a}. \quad (1.56)$$

ただし,  $\kappa_a \in U(1)$  である. この  $\kappa_a$  は  $a \neq \bar{a}$  に対してはゲージ冗長性を用いて 1 に取ることができるが,  $a = \bar{a}$  に対してはゲージ不変量となることが知られており, Frobenius–Shchur indicator と呼ばれている. これは有限群の表現論における Frobenius–Shchur indicator の圏論における対応物であり, モジュラーテンソル圏として  $\text{Rep}(G)$  を選ぶと両者が一致することも確かめることができる.

**量子トレース** また,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n, a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)$  のような射, すなわち  $a_1, \dots, a_n$  が並んで入っていき,  $X$  で適当に絡まって, また  $a_1, \dots, a_n$  と並んで出ていくようなダイアグラムには, 次式のように量子トレース (quantum trace) と呼ばれる操作を定義することが

<sup>16</sup>量子多体系の文脈ではトポロジカルエンタングルメントエントロピーは  $\log \mathcal{D}$  と計算される [KP05, LW06]. そういった意味で系のトポロジカルな自由度の指標の一つということもできる.

<sup>17</sup>これはモジュラーテンソル圏  $\mathcal{C}$  にユニタリー性を課すと単純対象  $a \in \mathcal{C}$  に対して

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, a) \cong U(1) \quad (1.55)$$

となることに対応する.

できる:

$$\tilde{\text{Tr}}X = \tilde{\text{Tr}} \left[ \begin{array}{c} \uparrow \cdots \uparrow \\ \boxed{X} \\ \downarrow \cdots \downarrow \end{array} \right] = \begin{array}{c} a_1 \cdots a_n \\ \circlearrowleft \\ \boxed{X} \\ \circlearrowright \\ \cdots \end{array}. \quad (1.57)$$

こうして得られる閉じた図式は，上述の量子次元  $d_a$  や，この後導入する braiding 等のデータから計算することができる. また，この図では右側を回ってループを作ったが，これは左側を回ってループを作っても  $d_a = d_{\bar{a}}$  から同じ結果が得られる<sup>18</sup>. ここで  $\text{id}_{a \otimes b}$  についてこの量子トレースを取ることで次式を得る:

$$d_a d_b = \sum_{c, \mu} d_c = \sum_c N_{ab}^c d_c. \quad (1.58)$$

さて， $a$  に関するフュージョン行列  $N_a$  を次式で定義しよう:

$$[N_a]_{bc} := N_{ab}^c. \quad (1.59)$$

すると  $c$  成分が  $d_c/D$  であるようなベクトル  $\mathbf{v}$  を考えると，

$$\begin{aligned} [N_a \mathbf{v}]_b &= \sum_c N_{ab}^c d_c / \mathcal{D} \\ &= d_a d_b / \mathcal{D} \\ &= d_a v_b, \end{aligned} \quad (1.60)$$

すなわち

$$N_a \mathbf{v} = d_a \mathbf{v} \quad (1.61)$$

となることから  $\mathbf{v}$  が各フュージョン行列  $N_a$  に対する固有値  $d_a$  の固有ベクトルであることがわかる. ここで Perron–Frobenius の定理から  $\mathbf{v}$  が唯一の固有ベクトルであり， $d_a$  は  $N_a$  の最も大きい固有値であることがわかる (例えば [Sim23, Sec. 17] を見よ. ).

これを認めると量子次元  $d_a$  を実際のベクトル空間の次元と結びつけることができる.  $n$  個のエニオン  $a$  がフュージョンする時の融合空間の次元は次式のように計算できる:

$$\begin{aligned} \sum_c \dim V_c^{a \cdots a} &= \sum_{c, b_1, \dots, b_{n-1}} N_{aa}^{b_1} N_{ab_1}^{b_2} \cdots N_{ab_{n-1}}^c \\ &= \sum_c [N_a^n]_{ac} \sim d_a^n \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (1.62)$$

すなわち  $a$  の量子次元  $d_a$  は融合空間の次元が漸近的に近づいていく値として特徴つけるこ

<sup>18</sup>これはモジュラーテンソル圏が spherical であることの帰結である.

とが出来る<sup>19</sup>.

### 1.3.2 ブレイディング

この節では組紐構造, すなわち braiding の構造について見ていこう.

$R$ -シンボル Braiding は二つのエニオンの位置を入れ替える操作であり, 次のダイアグラムで表現される:

$$R^{ab} = \begin{array}{c} a \nearrow \\ \times \\ b \searrow \end{array} = \sum_{c, \mu, \nu} \sqrt{\frac{d_c}{d_a d_b}} [R_c^{ab}]_{\mu\nu} \begin{array}{c} a \nearrow \\ \times \\ b \searrow \\ \begin{array}{c} c \nearrow \\ \times \\ \mu \nearrow \\ \times \\ \nu \searrow \\ \times \\ b \searrow \end{array} \end{array}, \quad (1.66)$$

ここで  $R$ -シンボルは  $R_c^{ab} : V_c^{ba} \rightarrow V_c^{ab}$  なる写像であり次のダイアグラムで表現される:

$$\begin{array}{c} a \nearrow \\ \times \\ b \searrow \\ \begin{array}{c} \mu \nearrow \\ \times \\ c \searrow \end{array} \end{array} = \sum_{\nu} [R_c^{ab}]_{\mu\nu} \begin{array}{c} a \nearrow \\ \times \\ b \searrow \\ \begin{array}{c} \nu \nearrow \\ \times \\ c \searrow \end{array} \end{array}. \quad (1.67)$$

同様に,  $(R^{ab})^{-1}$  は次のように定義される:

$$(R^{ab})^{-1} = \begin{array}{c} b \nearrow \\ \times \\ a \searrow \end{array}. \quad (1.68)$$

ただしこのように定義した  $R$ -シンボルが前節で定義した  $F$ -シンボルと整合的である

<sup>19</sup>あるいは量子群の観点からも自然に次元と結びつけることができる.  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  は次を満たす Lie 代数であった:

$$[H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F, \quad [E, F] = H. \quad (1.63)$$

ここで複素数  $q \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm 1\}$  を固定して代数  $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$  を生成元  $E, F, K, K^{-1}$  と次の関係式で定める:

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1, \quad KEK^{-1} = q^2E, \quad KFK^{-1} = q^{-2}F, \quad [E, F] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}. \quad (1.64)$$

この代数は形式的に  $q \rightarrow 1$  とすると  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  を回復し, 量子群と呼ばれる. この時, 量子群の表現圏は適切な条件のもとでモジュラーテンソル圏をなし, もとの  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  での  $2j + 1$  次元既約表現と対応する単純対象の量子次元は

$$d_{2j+1} = \frac{q^{2j+1} - q^{-(2j+1)}}{q - q^{-1}} \quad (1.65)$$

と与えられ,  $q \rightarrow 1$  のもとで  $2j + 1$  となり, 既約表現の次元に一致する. その意味で量子次元は既約表現の次元の量子化と言える.

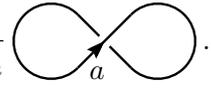
ためには次の五角関係式・六角関係式を満たす必要がある。

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda, \gamma} [R_e^{ac}]_{\alpha\lambda} [F_d^{acb}]_{(e, \lambda, \beta)(g, \gamma, \nu)} [R_g^{bc}]_{\gamma\mu} \\ = \sum_{f, \sigma, \delta, \psi} [F_d^{cab}]_{(e, \alpha, \beta)(f, \delta, \sigma)} [R_d^{fc}]_{\sigma\psi} [F_d^{abc}]_{(f, \delta, \psi)(g, \mu, \nu)}, \end{aligned} \quad (1.69)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda, \gamma} [(R_e^{ca})^{-1}]_{\alpha\lambda} [F_d^{acb}]_{(e, \lambda, \beta)(g, \gamma, \nu)} [(R_g^{cb})^{-1}]_{\gamma\mu} \\ = \sum_{f, \sigma, \delta, \psi} [F_d^{cab}]_{(e, \alpha, \beta)(f, \delta, \sigma)} \left[ (R_d^{cf})^{-1} \right]_{\sigma\psi} [F_d^{abc}]_{(f, \delta, \psi)(g, \mu, \nu)}. \end{aligned} \quad (1.70)$$

MacLane's coherence 定理によると,  $F, R$  がこれらの関係式を満たすならば, 同じ状態空間から始まり同じ状態空間で終わるようなダイアグラムは, いかなる順序の  $F, R$  を施しても同値である。

この  $R$ -シンボルから TQFT における基本的な物理量であるトポロジカルスピンや  $S$  行列を取り出すことができる. 式 (1.66) において量子トレースを取ることで  $a \in \mathcal{C}$  のトポロジカルスピンを定める:

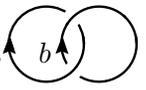
$$\theta(a) = \theta(\bar{a}) = \sum_{c, \mu} \frac{d_c}{d_a} [R_c^{aa}]_{\mu\mu} = \frac{1}{d_a} \text{Diagram} \quad (1.71)$$


このトポロジカルスピンは 1 の冪根であることが知られている [Vaf88].

すると上式から次式を導ける:

$$\sum_{\lambda} [R_c^{ab}]_{\mu\lambda} [R_c^{ba}]_{\lambda\nu} = \frac{\theta(c)}{\theta(a)\theta(b)} \delta_{\mu\nu}. \quad (1.72)$$

さらに  $R_{ba}R_{ab}$  の量子トレースを取ることで得られる式を  $S$  行列と定義する:

$$S_{ab} = \mathcal{D}^{-1} \sum_c N_{\bar{a}b}^c \frac{\theta_c}{\theta_a \theta_b} d_c = \frac{1}{\mathcal{D}} \text{Diagram} \quad (1.73)$$


この  $S$  行列は次の性質を持つことがすぐに確かめられる:

$$S_{ab} = S_{ba} = S_{\bar{a}\bar{b}} = S_{\bar{a}\bar{b}}^*, \quad (1.74)$$

$$S_{1a} = S_{a1} = \frac{d_a}{\mathcal{D}}. \quad (1.75)$$

さらに上で定めたトポロジカルスピンから重要なデータであるカイラル中心電荷 (chiral

central charge)  $c_-$  を抽出できる:

$$\frac{1}{\mathcal{D}} \sum_{a \in \mathcal{C}} d_a^2 \theta(a) = e^{2\pi i c_- / 8} \quad (1.76)$$

定義から  $c_-$  は mod 8 で定まる<sup>20</sup>.

### 1.3.3 Verlinde 公式

**Verlinde 公式** 前節で定義した  $S$  行列に関して次式が従う:

$$\begin{array}{c} \uparrow b \\ \circlearrowleft \\ \downarrow a \end{array} = \frac{S_{ab}}{S_{1b}} \begin{array}{c} \uparrow b \\ | \\ \downarrow a \end{array} \quad (1.77)$$

上式のダイアグラムを量子トレースで閉じることで  $S$  行列の定義式を復元することが容易に確かめることができる. さらに, このダイアグラムについて, 二つのループ  $a, b$  を  $x$  が貫いているとする. この関係式を 2 回連続して使う場合と  $a, b$  を融合させてから 1 回使う場合が等号で結ばれることから次式が成り立つ:

$$\frac{S_{ax}}{S_{1x}} \frac{S_{bx}}{S_{1x}} = \sum_{c \in \mathcal{C}} N_{ab}^c \frac{S_{cx}}{S_{1x}}. \quad (1.78)$$

この式から  $S$  行列がユニタリーであるとき, 両辺に  $S_{cx}^*/S_{1x}$  をかけて  $x \in \mathcal{C}$  で和をとることで次式が導かれる:

#### Verlinde 公式

$$N_{ab}^c = \sum_{x \in \mathcal{C}} \frac{S_{ax} S_{bx} S_{cx}^*}{S_{1x}} \quad (1.79)$$

$S$  行列,  $N_{ab}^c$  の性質を用いることで次のように書き換えることもでき, こちらの表式もしばしば用いられる:

$$N_{abc} = \sum_{x \in \mathcal{C}} \frac{S_{ax} S_{bx} S_{cx}}{S_{1x}}. \quad (1.80)$$

**モノドロミーカラー成分** 前節で定義した  $S$  行列を用いてモノドロミーカラー成分を次式で定義する:

<sup>20</sup>物理的には, カイラル中心電荷 8 を持つ自明な TQFT である  $E_8$  Chern–Simons 理論を自由に stack できることから説明できる. 脚注 27 も見よ.

$$M_{ab} := \frac{S_{ab}^* S_{11}}{S_{1a} S_{1b}}. \quad (1.81)$$

$M_{ab} = e^{i\phi(a,b)}$  が位相である時,  $M_{ab}$  は次のように現れる位相として解釈される:

$$\begin{array}{c} a \quad b \\ \diagdown \quad / \\ \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ a \quad b \end{array} = e^{i\phi(a,b)} \begin{array}{c} a \quad b \\ | \quad | \\ \text{---} \\ | \quad | \end{array}. \quad (1.82)$$

さらに, 次が従う:

$M_{ab} \in U(1)$  ならば,  $N_{bc}^d \neq 0$  であるような  $b, c, d \in \mathcal{C}$  に対して次式を満たす:

$$M_{ab} M_{ac} = M_{ad}. \quad (1.83)$$

これは  $a$  と  $b, c$  が絡んでいる時, それぞれ解く場合と,  $b, c$  の  $d$  へのフュージョンを考えてから解く場合とを比べることで分かる. この後の議論で頻繁に現れるモノドロミーカラー成分に関する補題として次がある:

$\phi: \mathcal{C} \rightarrow U(1)$  が  $N_{ab}^c \neq 0$  なる  $a, b, c \in \mathcal{C}$  に対して  $\phi(a)\phi(b) = \phi(c)$  が成り立つ時, ある可換エニオン  $e \in \mathcal{A}$  が存在して次式を満たす:

$$\phi(a) = M_{ae}^* \text{ が全ての } a \in \mathcal{C} \text{ に対して成り立つ.} \quad (1.84)$$

これを確かめよう [BBCW14]. まず

$$\lambda^{(a)} := d_a \phi(a) \left( = \frac{S_{1a}}{S_{11}} \phi(a) \right) \quad (1.85)$$

について式 (1.78) を用いることで

$$\lambda^{(a)} \lambda^{(b)} = \sum_c N_{ab}^c \lambda^{(c)} \quad (1.86)$$

が従う. するとこれはフュージョン代数の指標となっているからある  $e \in \mathcal{A}$  が存在して

$$\lambda^{(a)} = \frac{S_{ae}}{S_{1e}} \quad (1.87)$$

と書ける. 従って

$$\phi(a) = \frac{S_{ae} S_{11}}{S_{1e} S_{1a}} = M_{ae}^* \quad (1.88)$$

が導かれる.

## 1.4 ベクトル空間の構成

### 1.4.1 トーラス上のベクトル空間

向き付け可能閉曲面について次の事実がある:

任意の連結な向き付け可能閉曲面は  $S^2$  と適当な数の  $T^2$  との連結和と同相である.

この事実から  $T^2$  の解析が一般の曲面の解析の基本と言える. そこで, ここでは TQFT が  $T^2$  にアサインするベクトル空間の構成を確認する.

$T^2$  上のベクトル空間の元が欲しければ, もちろん  $T^2$  を境界に持つような 3 次元多様体を TQFT で評価すれば良い. すなわち

$$Z(N) \in V(\partial N) = V(T^2) \quad (1.89)$$

となるような  $N$  を取ってくれば良い.  $N$  として次の多様体を考えるのが妥当であろう:

$$N = D^2 \times S^1, \quad N = S^1 \times D^2. \quad (1.90)$$

実際, これらの境界を考えると共に  $\partial(D^2 \times S^1) = \partial(S^1 \times D^2) = S^1 \times S^1 = T^2$  であるから  $Z(N)$  は  $V(T^2)$  の元を定める. ここでエニオンでラベルされた Line operator を挿入することを考える<sup>21</sup>.  $a \in \mathcal{C}$  として, 中央にエニオン  $a$  のラベルを持つ puncture がある  $D^2$  を  $D^2(a)$  と書くこととする. すると  $D^2(a) \times S^1$  は非可縮な  $S^1$  方向にエニオン  $a$  でラベルされた Line operator が挿入されたソリッドトーラスであると見ることができる. この多様体を評価した  $Z(D^2(a) \times S^1)$  も  $V(T^2)$  の元を定め, これを  $|a\rangle$  とかく:

$$|a\rangle := Z(D^2(a) \times S^1) \in V(T^2). \quad (1.91)$$

この時, 次の事実が知られている:

$$V(T^2) = \text{span}_{\mathbb{C}}\{|a\rangle \mid a \in \mathcal{C}\}. \quad (1.92)$$

一方,  $S^1 \times D^2(a)$  は次のように評価される:

$$S|a\rangle := Z(S^1 \times D^2(a)) \in V(T^2). \quad (1.93)$$

<sup>21</sup>節 1.1.1 でも述べたが, これは decorated bordism を考えれば自然に encode される.

ここで  $S$  は式 (1.73) で定義した  $S$  行列である. こちらについても同様に次が成り立つ:

$$V(T^2) = \text{span}_{\mathbb{C}}\{S|a\rangle \mid a \in \mathcal{C}\}. \quad (1.94)$$

ここで次の事実を述べておく:

$$V(T^2) \text{ は } SL(2, \mathbb{Z}) \text{ の表現となる; } \langle S, T \rangle \curvearrowright V(T^2).$$

具体的に, 表現行列は次式で与えられる [EGNO15]:

$$S_{ab} = \frac{1}{\mathcal{D}} \sum_c N_{ab}^c \frac{\theta(c)}{\theta(a)\theta(b)} d_c, \quad (1.95)$$

$$T_{ab} = \delta_{ab} \theta(a) e^{-2\pi i c_- / 24}. \quad (1.96)$$

以上の議論から  $T^2$  上のベクトル空間の次元はエニオンの種類の数と一致することがわかる. それではより一般の曲面に対してはどう計算すれば良いのだろうか.

#### 1.4.2 種数 $g$ の曲面上のベクトル空間

一般の向き付け可能曲面  $\Sigma_g$  上にアサインされるベクトル空間の次元は次式で与えられる:

$$\dim V(\Sigma_g) = \sum_{x \in \mathcal{C}} \left( \frac{1}{S_{1x}} \right)^{2g-2}. \quad (1.97)$$

この節ではこの式を導き, 具体例の計算を見ていく. 導出にあたり次の事実を使う:

$$\dim V(S^2(a, b, \bar{c})) = N_{ab}^c. \quad (1.98)$$

ここで  $S^2(a, b, \bar{c})$  は,  $a, b, \bar{c}$  によりラベルされた puncture を持つ球面である. これはチャージ保存則と呼ぶべき事実であり, 球面が非自明なトポロジーを持たないことと,  $a \otimes b = N_{ab}^c c$  から従う.

**パンツ分解** 閉曲面について成り立つ次の事実がある:

全ての向き付けられた種数 2 以上の連結な曲面は, 各連結成分がパンツと同相になるように分解できる. ここでパンツとは  $S^2 \setminus (D^2 \sqcup D^2 \sqcup D^2)$  のことである.

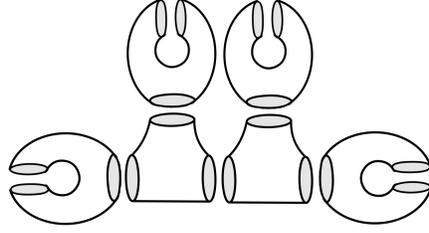
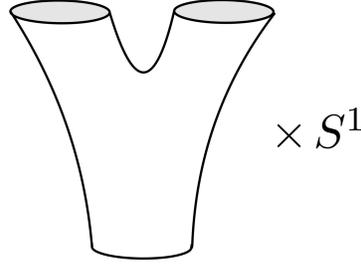


Figure 6: 種数 2 の閉曲面のパンツ分解

Figure 7:  $(S^2 \setminus (D^2 \sqcup D^2 \sqcup -D^2)) \times S^1$ 

例えば、種数 2 の時は図 6 のようになる.

さて、ここで次の式について考えよう:

$$Z((S^2 \setminus (D^2 \sqcup D^2 \sqcup -D^2)) \times S^1). \quad (1.99)$$

ここで  $(S^2 \setminus (D^2 \sqcup D^2 \sqcup -D^2)) \times S^1$  は適当に境界に向きを付けたパンツと  $S^1$  の直積で与えられる多様体である (図 7).  $Z(M) \in V(\partial M)$ ,  $V(\Sigma_1 \sqcup \Sigma_2) = V(\Sigma_1) \otimes V(\Sigma_2)$ ,  $V(-\Sigma) = V(\Sigma)^*$  に注意すると

$$\begin{aligned} Z((S^2 \setminus (D^2 \sqcup D^2 \sqcup -D^2)) \times S^1) &\in V(\partial((S^2 \setminus (D^2 \sqcup D^2 \sqcup -D^2)) \times S^1)) \\ &= V(T^2 \sqcup T^2 \sqcup -T^2) \\ &= V(T^2) \otimes V(T^2) \otimes V(T^2)^*. \end{aligned} \quad (1.100)$$

したがって、 $Z((S^2 \setminus (D^2 \sqcup D^2 \sqcup -D^2)) \times S^1)$  は前節で導入したトーラス上のベクトル空間の基底で次のように展開できる:

$$Z((S^2 \setminus (D^2 \sqcup D^2 \sqcup -D^2)) \times S^1) = \sum_{a,b,c \in \mathcal{C}} \tilde{N}_{ab}^c |a\rangle |b\rangle \langle \bar{c}|. \quad (1.101)$$

ここで三つの境界を  $D^2(a) \times S^1$  で貼り合わせることを考える:

$$\begin{aligned} (S^2 \setminus (D^2 \sqcup D^2 \sqcup -D^2)) \times S^1 \cup_{\sqcup^3 T^2} ((-D^2(a) \times S^1) \sqcup (-D^2(b) \times S^1) \sqcup (D^2(\bar{c}) \times S^1)) \\ = S^2(a, b, \bar{c}) \end{aligned} \quad (1.102)$$

一方, これは内積を取ることに相当し, 次のように計算される:

$$\sum_{d,e,f \in \mathcal{C}} \tilde{N}_{de}^f \langle a|d \rangle \langle b|e \rangle \langle \bar{f}|\bar{c} \rangle = \sum_{d,e,f \in \mathcal{C}} \tilde{N}_{de}^f \delta_{ad} \delta_{be} \delta_{cf} = \tilde{N}_{ab}^c. \quad (1.103)$$

したがって, 次式を得る:

$$Z(S^2(a, b, \bar{c}) \times S^1) = \tilde{N}_{ab}^c. \quad (1.104)$$

一方, 次元公式を思い出すと

$$Z(S^2(a, b, \bar{c}) \times S^1) = \dim V(S^2(a, b, \bar{c})) = N_{ab}^c \quad (1.105)$$

であるから

$$\tilde{N}_{ab}^c = N_{ab}^c \quad (1.106)$$

と分かる. よって次の結論を得る:

$$Z((S^2 \setminus (D^2 \sqcup D^2 \sqcup -D^2)) \times S^1) = \sum_{a,b,c \in \mathcal{C}} N_{ab}^c |a \rangle |b \rangle \langle \bar{c}|. \quad (1.107)$$

ここで,  $N_{ab}^c$  はフュージョン則  $a \otimes b = \bigoplus_c c^{\oplus N_{ab}^c}$  に現れる多重度.

分かってしまえば自明な結果かもしれないが, パンツ分解に関するこの事実を用いると, 一般の曲面にアサインされるベクトル空間の次元

$$\dim V(\Sigma_g) = \sum_{x \in \mathcal{C}} \left( \frac{1}{S_{1x}} \right)^{2g-2} \quad (1.108)$$

を求めることができる.

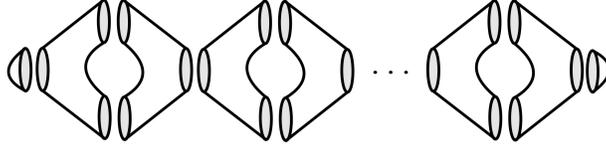
Figure 8: 種数  $g$  の閉曲面の分解

図 8 より種数  $g$  の閉曲面は  $2g$  個のパンツと二つの  $D^2$  に分解できるから

$$\begin{aligned} V(\Sigma_g) &= \sum_{c_0=1, c_{2g}=1} N_{c_0}^{a_1 b_1} N_{a_1 b_1}^{c_2} N_{c_2}^{a_3 b_3} \cdots N_{a_{2g-1} b_{2g-1}}^{c_{2g}} \\ &= \sum_{c_0=1, c_{2g}=1} N_{c_0 \bar{a}_1 \bar{b}_1} N_{a_1 b_1 \bar{c}_2} N_{c_2 \bar{a}_3 \bar{b}_3} \cdots N_{a_{2g-1} b_{2g-1} \bar{c}_{2g}}. \end{aligned} \quad (1.109)$$

ここで Verlinde 公式

$$N_{abc} = \sum_x \frac{S_{ax} S_{bx} S_{cx}}{S_{1x}} \quad (1.110)$$

より

$$V(\Sigma_g) = \sum \frac{S_{1x_1} S_{\bar{a}_1 x_1} S_{\bar{b}_1 x_1}}{S_{1x_1}} \frac{S_{a_1 x_2} S_{b_1 x_2} S_{\bar{c}_2 x_2}}{S_{1x_2}} \frac{S_{c_2 x_3} S_{\bar{a}_3 x_3} S_{\bar{b}_3 x_3}}{S_{1x_3}} \cdots \frac{S_{a_{2g-1} x_{2g}} S_{b_{2g-1} x_{2g}} S_{1x_{2g}}}{S_{1x_{2g}}}. \quad (1.111)$$

さらに

$$\sum_{a_1} S_{\bar{a}_1 x_1} S_{a_1 x_2} = \sum_{a_1} S_{x_1 a_1}^\dagger S_{a_1 x_2} = \delta_{x_1 x_2} \quad (1.112)$$

等<sup>22</sup>に注意すると

$$V(\Sigma_g) = \sum \left( \frac{1}{S_{1x}} \right)^{2g-2} \quad (1.113)$$

となることが分かる.

## 2 Chern–Simons 理論

ここでは  $(2+1)$ d TQFT の代表例として Chern–Simons 理論について見ていく. ゲージ群が  $U(1)$  の時, Chern–Simons 作用は次式で与えられる:

$$S_{\text{CS}}[A] = \frac{k}{4\pi} \int_{M^3} A \wedge dA. \quad (2.1)$$

<sup>22</sup> $S$  のユニタリー性については [EGNO15] を見よ.

ここで  $A$  は  $U(1)$  に対するゲージ場であり,  $k$  はレベルと呼ばれる整数である. まず, 2.1.1 では,  $U(1)$  Chern–Simons 理論が整数量子ホール効果の有効理論として現れることを見る. ただ, この場合は基底状態は一意的で TQFT としては面白いものとは言えない. そこで 2.1.2 では分数量子ホール効果の有効作用としても  $U(1)$  Chern–Simons 理論が現れることを確認する. こちらが我々の議論する Chern–Simons 理論である. 一方, コンパクトで単連結な Lie 群  $G$  (e.g.  $SU(2)$ ) に対する Chern–Simons 理論の作用は, その接続  $A$  を用いて次のように書ける:

$$S_{CS} = \frac{k}{4\pi} \int_{M^3} \text{Tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A). \quad (2.2)$$

ここで  $\text{Tr}$  は,  $G$  の Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の基本表現についてのトレースである. まず, 2.2.1 で, レベルの整数性が, 次元高い  $(3+1)d$  理論からの制限で決まることを確認する. 次に 2.2.2 では, Chern–Simons 理論/Wess–Zumino–Witten 模型対応の一部に触れる (Wess–Zumino–Witten 模型については App. A を参照せよ). これは, 3d TQFT と 2d RCFT の対応の代表例であり, Chern–Simons 理論を単なるトポロジカルな作用ではなく, TQFT たらしめる事実と言っても良いだろう. 2.3.1 では,  $U(1)$  Chern–Simons 理論を例に, その量子化を通して Wilson ループが非自明な Braiding を持つことを確認する. 最後に 2.3.2 では  $U(1)^N$  Chern–Simons 理論からエニオンのデータ, すなわちモジュラーテンソル圏のデータを取り出す.

## 2.1 有効作用としての Chern–Simons 理論

この節では  $U(1)$  Chern–Simons 理論

$$S_{CS} = \frac{k}{4\pi} \int A \wedge dA \quad (2.3)$$

が整数/分数量子ホール効果の有効作用であることを解説する [ZHK88](レクチャーノートとしては [Ton16] などが挙げられる. ). この節の中では時空は閉三次元多様体で境界がないことを仮定する. まず以下で, 整数/分数量子ホール効果と伝導度の関係の最低限の知識のみまとめおく.

**量子ホール効果と伝導度** 外部電場  $\mathbf{E}$  を加えたときに流れる電流密度  $\mathbf{J}$  との線形応答は

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.4)$$

で定義される. ここで  $\sigma$  は電気伝導度テンソルである.

強磁場下の二次元電子系では, 電子の運動が Landau 準位と呼ばれる離散的なエネルギー

準位に量子化される。このとき電気伝導度テンソルは

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

で与えられる。

**整数量子ホール効果** ある Landau 準位がちょうど満たされると、横方向伝導度は

$$\sigma_{xy} = \nu \frac{e^2}{2\pi\hbar}, \quad \nu \in \mathbb{Z}, \quad (2.6)$$

と量子化される。一方で縦方向伝導度は

$$\sigma_{xx} \approx 0, \quad (2.7)$$

となり、散乱が抑制されていることを意味する。

**分数量子ホール効果** より強い磁場・低温で電子相互作用が支配的になると、電子は強相関状態を形成し、伝導度は

$$\sigma_{xy} = \nu \frac{e^2}{2\pi\hbar}, \quad \nu = \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \dots \quad (2.8)$$

のような分数化を示す。

### 2.1.1 整数量子ホール効果

**セットアップ** 整数量子ホール効果の有効作用について解説しよう。まず  $A^{\text{em}} = A_\mu^{\text{em}} dx^\mu$  を背景場電磁場としてのゲージ場として導入する。つまりこのゲージ場はダイナミカルなゲージ場ではない。その意味するところは、すでに与えられた状態に対して手で電磁場  $A^{\text{em}}$  を加えることで摂動を与え、それに対する系の応答を調べるという立場をとるということである。また、こうして加えられた外場は適当なカレント  $J$  を通してダイナミカルな自由度とカップルする必要がある。すなわち、次のような項を作用に仮定する:

$$S_{A^{\text{em}}} = \int A^{\text{em}} \wedge *J. \quad (2.9)$$

ここでカレントの保存則  $d*J = 0$  から、 $S_{A^{\text{em}}}$  はゲージ変換  $A^{\text{em}} \mapsto A^{\text{em}} + d\omega$  のもとでゲージ不変であることに注意。

**有効作用** 外場に対する系の応答を調べるためにまず次の量を計算したい:

$$Z[A^{\text{em}}] = \int D(\text{fields}) \exp(iS[(\text{fields}), A^{\text{em}}]). \quad (2.10)$$

ここで,  $A^{\text{em}}$  は電磁場を記述する  $U(1)$  ゲージ場であり,  $\text{fields}$  はその他の全ての場を表している. そして最終的に知りたい有効作用は次式を与えるような  $S_{\text{eff}}[A^{\text{em}}]$  である:

$$Z[A^{\text{em}}] = e^{iS_{\text{eff}}[A^{\text{em}}]/\hbar}. \quad (2.11)$$

この有効作用は次式より系の電磁場に対する応答の情報を持っていると言える:

$$\frac{\delta S_{\text{eff}}[A^{\text{em}}]}{\delta A_{\mu}^{\text{em}}(x)} = \langle J^{\mu}(x) \rangle. \quad (2.12)$$

さて, ここでは一般的な状況を考えておりマイクロスコピックなラグランジアン of the form を知らないため, 経路積分の実行は出来ない. そこで有効作用に現れ得る全ての項を列挙することを旨とする. そのために更なる仮定を加える.

- 回転不変・ゲージ不変である.
- 局所的である. すなわち  $S_{\text{eff}}[A^{\text{em}}] = \int d^3x \dots$  と書ける.
- 最も冪の低い項と一階の微分を含む項のみからなる.

一つ目の仮定は特別コメントすることもないだろう. 二つ目について, 我々は低エネルギー (長距離) 有効理論を考えているため作用は局所的な汎関数であれという要請である. 三つ目については, 我々は小さな外場に対する系の応答を調べているため  $A^{\text{em}}$  の低次の項のみ気にすれば良いということである.

すると有効作用に現れ得る妥当な項として次の二つが挙げられる:

$$A^{\text{em}} \wedge dA^{\text{em}}, \quad dA^{\text{em}} \wedge *dA^{\text{em}}. \quad (2.13)$$

ここで後者はストークスの定理から落ちるため, 考えるべきは  $A^{\text{em}} \wedge dA^{\text{em}}$  ということになる.

**伝導度** 上での議論から有効作用が次のように与えられていると仮定する:

$$S_{\text{eff}}[A^{\text{em}}] = S_{\text{CS}}[A^{\text{em}}] := \frac{k}{4\pi} \int A^{\text{em}} \wedge dA^{\text{em}}. \quad (2.14)$$

すると空間成分  $i$  に対して  $A_i^{\text{em}}$  で変分を考えることで次式を得る:

$$\frac{\delta S_{\text{CS}}[A^{\text{em}}]}{\delta A_i^{\text{em}}} = -\frac{k}{2\pi} \varepsilon_{ij} E_i^{\text{em}}. \quad (2.15)$$

この式は Chern–Simons 理論がホール伝導度

$$\sigma_{xy} = \frac{k}{2\pi} \quad (2.16)$$

のホール効果を記述していることを示唆している. 実際,  $k = e^2\nu/\hbar$  と同定することで整数ホール効果で知られている結果と一致する. 理論的には,  $k$  の量子化は時間方向が周期的な  $S^1 \times S^2$  なる時空における (大域) ゲージ変換により  $S_{\text{eff}}[A^{\text{em}}]$  が変わらないことを要請すると得ることが出来, その同定の妥当性を担保する.

### 2.1.2 分数量子ホール効果

さて, この節ではさらに進んで Chern–Simons 理論と分数量子ホール効果の関係について見ていこう. 再度思い出すと, 我々は次の量を計算したい:

$$Z[A^{\text{em}}] = \int D(\text{fields}) \exp(iS[(\text{fields}), A^{\text{em}}]). \quad (2.17)$$

ここで,  $A^{\text{em}}$  は電磁場を記述する  $U(1)$  ゲージ場であり,  $\text{fields}$  はその他の全ての場を表している. 先ほどと同じ仮定の元ではもちろん, 先ほどと同じく整数量子ホール効果の有効作用が出てきてしまう. そこで仮定を緩めよう. 我々はこの経路積分をここでは実行できるという仮定を捨て, トポロジカルな自由度の発現を許すのである.

**emergent なゲージ場** さて, トポロジカルな自由度の発現を許すと言ったが, 一般にはそうした自由度は元の外場と複雑に結合し, 予め特定することは困難である. そこで, ここでもまず許される項から考えるという立場をとる. emergent な  $U(1)$  ゲージ場  $A$  を導入する. 我々はゲージ場を自然に massless な自由度と考える. 実際, そのダイナミクスは次の作用で与えられる:

$$S_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{4g^2} \int F \wedge *F, \quad (2.18)$$

ここで  $F = dA$  で,  $g^2$  は結合定数である. この作用は明らかにゲージ不変であり, 運動方程式は

$$d * F = 0 \quad (2.19)$$

と与えられ, 我々の知る電磁気学における結果と一致している. ここで注意すべきなのは, 時空が  $(2+1)$  次元であるため, 単一偏波であるということである. ところがゲージ不変性

からはゲージ場  $A$  を用いた項として次のような項も許される:

$$S_{CS} = \frac{k}{4\pi} \int A \wedge dA. \quad (2.20)$$

そこで作用を次のように定義して、この Chern–Simons 項がダイナミクスにどう影響を与えるかを確認しよう:

$$S = S_{\text{Maxwell}} + S_{CS}. \quad (2.21)$$

するとこの作用から導かれる運動方程式は次式となる:

$$d * F + \frac{kg^2}{\pi} F = 0. \quad (2.22)$$

これはゲージ場  $A$  が質量を獲得したことを意味しており、エネルギーギャップ  $E = \frac{kg^2}{\pi}$  が生じたことが分かる。したがって低エネルギー極限を取ることで物理的励起は消え、Chern–Simons 項  $S_{CS}$  のみが残る。これが我々が議論する Chern–Simons 理論である。

ここで次の事実を再度注意しておこう:

$S_{CS}$  に現れる  $U(1)$  ゲージ場  $A$  は、電磁気学を記述するゲージ場ではなく、電子の集合的振る舞いから現れる emergent なゲージ場である。

**伝導度** 上で導入したゲージ場  $A$  を用いて分配関数が次のように書けることを仮定する:

$$Z[A^{\text{em}}] = \int DA e^{iS_{\text{eff}}[A, A^{\text{em}}]/\hbar}. \quad (2.23)$$

ここで経路積分はゲージ場  $A$  の配位全体の空間をゲージ変換で割ったモジュライ空間上でなされていることに注意。さて、我々の次の目標は  $S_{\text{eff}}[A, A^{\text{em}}]$  を特定することであるが、新しく導入したゲージ場  $A$  を物理に影響させるには  $A$  と  $A^{\text{em}}$  を関係付ければよく、 $A^{\text{em}}$  はカレント  $J$  と関係付いているため、 $A$  を含むような  $J$  を考えるのが妥当である。ここまでで与えられたデータから保存カレントを作るには次式で与えられるような  $J$  くらいしかないので分かる:

$$*J = \frac{1}{2\pi} dA. \quad (2.24)$$

この時カレントの保存は明らかに従う:

$$d * J = \frac{1}{2\pi} d^2 A = 0. \quad (2.25)$$

そうすると  $S_{\text{eff}}[A, A^{\text{em}}]$  は次式のように与えられる:

$$S_{\text{eff}}[A, A^{\text{em}}] = \frac{1}{2\pi} \int A^{\text{em}} \wedge dA - \frac{m}{4\pi} \int A \wedge dA + \dots \quad (2.26)$$

ここで前節と同じ議論から  $m \in \mathbb{Z}$  である. また,  $\dots$  にはより非支配的な項が現れる. さて, ここで  $A$  についての運動方程式を考えると

$$dA = \frac{1}{m} dA^{\text{em}}. \quad (2.27)$$

すなわちその解は(ゲージ変換をのぞいて)

$$A = \frac{1}{m} A^{\text{em}} \quad (2.28)$$

となる. この解を代入することで次式を得る:

$$S_{\text{eff}}[A^{\text{em}}] = \frac{1}{4\pi m} \int A^{\text{em}} \wedge dA^{\text{em}}. \quad (2.29)$$

これはホール伝導度

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{2\pi m} \quad (2.30)$$

なるホール効果を記述していることを示唆している. 実際,  $1/m = e^2\nu/\hbar$  と同定することで量子ホール効果で知られている結果と一致する<sup>23</sup>.

## 2.2 境界と Chern–Simons 理論

この節では  $G = SU(2)$  として考える.

---

<sup>23</sup>ここでは説明のために形式的に運動方程式を用いたが, この方法は一般には通用しない. 本来  $A$  もディラックの量子化条件を満たすべきだが, 運動方程式はそれを考慮していない. 球面上で議論しているときのよなモノポールがある場合には式 (2.26) の作用を用いて議論する必要がある.

### 2.2.1 境界上の Chern–Simons 理論

考えている時空  $M^3$  がある次元高い時空  $N^4$  の境界になっている状況を考えよう, i.e.  $\partial N^4 = M^3$ . すると作用は次のように書き直せる:

$$\begin{aligned}
S_{\text{CS}}[A] &= \frac{k}{4\pi} \int_{\partial N^4} \text{Tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A) \\
&= \frac{k}{4\pi} \int_{N^4} d \left( \text{Tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A) \right) \\
&= \frac{k}{4\pi} \int_{N^4} \text{Tr}(dA \wedge dA + 2dA \wedge A \wedge A) \\
&= \frac{k}{4\pi} \int_{N^4} \text{Tr}(F \wedge F).
\end{aligned} \tag{2.31}$$

ここで

$$F = dA + A \wedge A \tag{2.32}$$

である. 我々の考えている  $S_{\text{CS}}$  が  $(2+1)$  次元で well-defined であるためには,  $N^4$  の拡張によってはならない. 一方で, 任意の閉三次元多様体はある四次元多様体の境界であるという事実もあるため, この状況は深刻である. 新たに  $\partial \tilde{N}^4 = M^3$  なる  $\tilde{N}^4$  を考えると, その作用の差は次のようになる:

$$\begin{aligned}
S_{\text{CS}}[A, N^4] - S_{\text{CS}}[A, \tilde{N}^4] &= \frac{k}{4\pi} \int_{N^4 - \tilde{N}^4} \text{Tr}(F \wedge F) \\
&= \frac{k}{4\pi} \int_{N^4 \cup_{M^3} -\tilde{N}^4} \text{Tr}(F \wedge F).
\end{aligned} \tag{2.33}$$

ここで,  $N^4 \cup_{M^3} -\tilde{N}^4$  は  $N^4$  と  $\tilde{N}^4$  を境界の  $M^3$  で貼り合わせて得られる閉 4 次元多様体である. ここで特性類の知識から

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_{N^4 \cup_{M^3} -\tilde{N}^4} \text{Tr}(F \wedge F) \in \mathbb{Z} \tag{2.34}$$

が従う. よって  $k \in \mathbb{Z}$  ならば

$$e^{iS_{\text{CS}}[A, N^4]} = e^{iS_{\text{CS}}[A, \tilde{N}^4]} \tag{2.35}$$

が従い, 分配関数は  $M^3$  を境界にもつ多様体の選び方に依らなくなる.

これは数学的にも厄介な問題であり, Chern–Simons 理論に対応すると考えられている節 5.3 で導入する Reshetikhin–Turaev 不変量から構成する TQFT は閉三次元多様体  $M^3$  に加え, 2–framing という構造を指定する必要がある, これは  $M^3$  を境界にもつ四次元多様体  $N^4$  も

指定する必要があるということである。物理的にはこの状況はアノマリー流入の観点から理解されるべきものであり、数学側でも Reshetikhin–Turaev TQFT を 1 次元高い Crane–Yetter TQFT の境界条件として解釈できると理解されているようである [Hai25]。まとめると、次のようになる:

Chern–Simons 理論の作用は次のように書き直せる:

$$\begin{aligned} S_{\text{CS}}[A] &= \frac{k}{4\pi} \int_{M^3=\partial N^4} \text{Tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A) \\ &= \frac{k}{4\pi} \int_{N^4} \text{Tr}(F \wedge F). \end{aligned} \quad (2.36)$$

すなわち、理論を指定するには、 $N^4$  まで指定することが必要であるが、 $k \in \mathbb{Z}$  ならば、

$$S_{\text{CS}}[A, N^4] - S_{\text{CS}}[A, \tilde{N}^4] \in 2\pi\mathbb{Z} \quad (2.37)$$

となり、バルクの拡張によらない分配関数の表示が得られる。

## 2.2.2 境界付きの Chern–Simons 理論

では、逆に  $M^3$  が境界  $\Sigma^2$  を持っていたらどうだろうか。Chern–Simons 理論は境界があるとき、本来なかった局所的自由度が境界上に現れ、その自由度は Wess–Zumino–Witten 模型という有理共形場理論 (rational conformal field theory; RCFT) の一種として解釈できるものとなる [Wit89]。これは現在の量子重力へのアプローチとして主流な Ads/CFT 対応の古くから知られる例である。その妥当性はよく調べられており、FRS 構成では Wess–Zumino–Witten 模型の TQFT からの構成を、かなりの厳密性を持って成功している [FRS02, FRS03, FRS04a, FRS04b, FFRS05, FFRS06]。ここでは Chern–Simons 理論の作用から出発して Wess–Zumino–Witten 作用を導出しよう。Wess–Zumino–Witten 模型そのものについては App. A にまとめておく。

まず、

$$\begin{aligned} d &= \partial_0 dx^0 + \partial_i dx^i = \partial_0 dx^0 + \tilde{d}, \\ A &= A_0 dx^0 + A_i dx^i = \tilde{A}_0 + \tilde{A} \end{aligned} \quad (2.38)$$

として、作用を書き直すと次式を得る:

$$S_{\text{CS}}[A] = -\frac{k}{4\pi} \int_{M^3} \text{Tr}(\tilde{A} \wedge \partial_0 \tilde{A}) \wedge dx^0 + \frac{k}{2\pi} \int_{M^3} \text{Tr}(\tilde{A}_0 \wedge \tilde{F}). \quad (2.39)$$

ただし、

$$\tilde{F} = \tilde{d}\tilde{A} + \tilde{A} \wedge \tilde{A}. \quad (2.40)$$

ここで、 $A_0$  はラグランジュ乗数として働き、積分することで次の作用と拘束条件を得る：

$$\begin{aligned} S_{\text{CS}}[A, \tilde{A}_0 = 0] &= -\frac{k}{4\pi} \int_{M^3} \text{Tr}(\tilde{A} \wedge \partial_0 \tilde{A}) \wedge dx^0, \\ \tilde{F} &= \tilde{d}\tilde{A} + \tilde{A} \wedge \tilde{A} = 0. \end{aligned} \quad (2.41)$$

すなわち、経路積分は平坦接続のモジュライ空間についてなされることを意味する。

さて、ここで空間は  $D^2$ 、時間方向はコンパクト化された  $S^1$  であるような時空、 $M^3 = D^2 \times S^1$  の場合を考えてみよう。この時、境界はトーラス  $T^2 = S^1 \times S^1$  となっている。さて、ここで平坦接続となるようにゲージ固定することを考えよう。G 値関数として  $f : T^2 \rightarrow G$  を用いて

$$\tilde{A} = f \tilde{d}f^{-1} \quad (2.42)$$

とすると、

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= \tilde{d}\tilde{A} + \tilde{A} \wedge \tilde{A} \\ &= \tilde{d}(f \tilde{d}f^{-1}) + f \tilde{d}f^{-1} \wedge f \tilde{d}f^{-1} \\ &= \tilde{d}f \wedge \tilde{d}f^{-1} - \tilde{d}f \wedge \tilde{d}f^{-1} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

となり、拘束条件は満たされる。そこで座標を  $(t, r, \theta)$  として代入すると、

$$\begin{aligned} S_{\text{CS}}[f] &= -\frac{k}{4\pi} \int_{M^3} \text{Tr}(f \tilde{d}f^{-1} \wedge \partial_0 f \tilde{d}f^{-1}) \wedge dx^0 \\ &= -\frac{k}{4\pi} \int_{T^2} \text{Tr}(f \partial_t f^{-1} \cdot f \partial_\theta f^{-1}) d^2x - \frac{k}{12\pi} \int_{M^3} \text{Tr}((f \tilde{d}f^{-1})^3). \end{aligned} \quad (2.44)$$

これは典型的な Wess–Zumino–Witten 模型の形をとっている。このように、TQFT の境界には RCFT が現れることがある。バルクの中にあるエニオンは Wilson ラインとして一次元的広がりを持つ一方、境界上では零次元的にサポートを持ち、これは境界の曲面上に挿入されたプライマリ場として捉えられる。数学的には、RCFT は有理頂点作用素代数で記述されるがその表現圏は、モジュラーテンソル圏をなす事実があり、その単純対象はプライマリ場である。まとめると次のようになる<sup>24</sup>：

TQFT と RCFT にはバルク・エッジ対応が知られており、Chern–Simons 理論の境界には (適切なゲージ固定の元)Wess–Zumino–Witten 模型が現れる。

Wess–Zumino–Witten 模型及び TQFT と RCFT の対応について重要な事実については App. A にまとめておく。

<sup>24</sup>この関係はより正確には relative QFT の枠組みで自然に捉える事ができる。その一部はアノマリーの節で扱うため、そちらも参照せよ 3.4.3.

## 2.3 エニオンと Chern–Simons 理論

### 2.3.1 Chern–Simons 理論の正準量子化

ここでは、 $G = U(1)$  として次の作用を考える:

$$S_{\text{CS}} = \frac{k}{4\pi} \int_{M^3} A \wedge dA. \quad (2.45)$$

ここで  $A_0 = 0$  とゲージ固定すると,

$$\begin{aligned} A &= A_1 dx^1 + A_2 dx^2, \\ dA &= \partial_0 A_1 dx^0 \wedge dx^1 - \partial_0 A_2 dx^2 \wedge dx^0 + (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) dx^1 \wedge dx^2 \end{aligned} \quad (2.46)$$

より

$$S_{\text{CS}} = \frac{k}{4\pi} \int_{M^3} (A_2 \partial_0 A_1 - A_1 \partial_0 A_2) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \quad (2.47)$$

と計算される. これは  $A_1$  の共役運動量が  $A_2$  であることを意味するため, 次の正準交換関係を課す:

$$[A_1(x), A_2(y)] = \frac{2\pi i}{k} \delta(x - y). \quad (2.48)$$

ループ  $L_i$  ( $i = 1, 2$ ) に対して Wilson ループを次のように定義する<sup>25</sup>:

$$W_i := \exp \left[ i \oint_{L_i} A \right]. \quad (2.50)$$

ここで

$$\left[ \oint_{L_1} A, \oint_{L_2} A \right] = \frac{2\pi i}{k} \quad (2.51)$$

に注意して  $[A, B]$  が  $c$  数である時の BCH 公式

$$e^A e^B = e^B e^A e^{[A, B]} \quad (2.52)$$

を用いると

$$W_1 W_2 = \exp \left( 2\pi i \frac{1}{k} \right) W_2 W_1 \quad (2.53)$$

が従う. ここにボゾンやフェルミオンとは異なるエニオンの特異な統計性が現れている.

<sup>25</sup>この模型は次節における  $K$  行列が  $1 \times 1$  行列  $k$  である場合に対応する. よって一般に次のような Wilson loop を考えることができる:

$$W_q = \exp \left[ i q \oint_L A \right] \quad (2.49)$$

ただし  $q \in \{1, \dots, k\}$ .

### 2.3.2 Chern–Simons 理論とモジュラーテンソル圏

前節で扱った  $U(1)$  Chern–Simons 理論のゲージ場を  $A^I$  ( $I = 1, 2, \dots, N$ ) として直接的に拡張することができる。この時、ゲージ群は  $U(1)^N$  で  $\mathbb{R}^N$  をランク  $N$  の格子  $\Lambda \cong \mathbb{Z}^N$  で割った商空間とみなす事ができる。さらにこの時、ゲージ場  $A^I$  は  $\Lambda \otimes \mathbb{R}$  に値を取る。レベル  $k \in \mathbb{Z}$  は  $N \times N$  行列  $K_{IJ}$  に置き換わり、作用は次のようになる:

$$S_{\text{CS}} = \frac{1}{4\pi} \int_{M^3} K_{IJ} A^I \wedge dA^J. \quad (2.54)$$

この  $K_{IJ}$  は  $e_I = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T \in \Lambda$  と書く時、次のような双線形形式  $B : \Lambda \times \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}$  とみなす事ができる:

$$K_{IJ} = B(e_I, e_J). \quad (2.55)$$

すなわち,

$U(1)^N$  Chern–Simons 理論のインプットデータは  $(\Lambda, B)$  である。

ここで次の事実を述べておく:

任意の可換エニオン系のなす TQFT は、適当な  $K$  行列を用いた  $U(1)^N$  Chern–Simons 理論として書き下すことができる。

本修士論文ではモジュラーテンソル圏のデータを用いた、抽象的な議論が多いが、少なくとも可換エニオン系についてはこうして作用を明示的に書き下すことができる。この事実が物理を専門とする読者をいくらか安心させることを期待している。

ここでは  $U(1)^N$  Chern–Simons 理論からどのようにエニオンのデータ、すなわちモジュラーテンソル圏の情報が取り出せるのかを見ていく。より具体的には、作用から

- フュージョン則
- トポロジカルスピン
- Gauss 和公式

等の情報を取り出していく。

まず  $K$  行列は対称で、整数成分を持ち、 $K$  の対各成分は偶数であるような行列である<sup>26</sup>。

<sup>26</sup>三つ目の対角成分についての条件は理論がボゾニックであるために必要な条件である。

この時、エニオンは整数成分のベクトル空間に値を取る:

$$a \in \mathbb{Z}^N / K\mathbb{Z}^N. \quad (2.56)$$

ここで、エニオンのラベルの個数は  $K$  の行列式で与えられることに注意<sup>27</sup>:

$$|\mathbb{Z}^N / K\mathbb{Z}^N| = |\det K|. \quad (2.57)$$

フュージョンはベクトルの和で定義される:

$$a + b \in \mathbb{Z}^N / K\mathbb{Z}^N. \quad (2.58)$$

トポロジカルスピン、および braiding は次式で与えられる:

$$\begin{aligned} \theta(a) &= \exp(\pi i a^T K^{-1} a), \\ B(a, b) &= \exp(2\pi i a^T K^{-1} b). \end{aligned} \quad (2.59)$$

ここで次の二つの事実について確認しておこう:

- 全ての  $a, b \in \mathbb{Z}^N / K\mathbb{Z}^N$  に対して次式が成り立つ:

$$B(a, b) = \frac{\theta(a+b)}{\theta(a)\theta(b)}.$$

- これらの写像は  $\mathbb{Z}^N / K\mathbb{Z}^N$  上で well-defined である. すなわち,  $\lambda \in \mathbb{Z}^N$  として次の置換  $a \mapsto a + K\lambda$  に対して値を変えない.

まず一つ目について. 右辺を変形していくと

$$\begin{aligned} \frac{\theta(a+b)}{\theta(a)\theta(b)} &= \exp(\pi i ((a+b)^T K^{-1} (a+b) - a^T K^{-1} a - b^T K^{-1} b)) \\ &= \exp(\pi i (a^T K^{-1} b + b^T K^{-1} a)) \\ &= \exp(\pi i (a^T K^{-1} b + a^T (K^T)^{-1} b)) \\ &= \exp(\pi i (a^T K^{-1} b + a^T K^{-1} b)) \\ &= B(a, b). \end{aligned} \quad (2.60)$$

<sup>27</sup> $E_8$  Chern-Simons 理論とは  $K$  行列が  $E_8$  のカルタン行列であるような可換エニオン系であり  $c_- = 8$  である一方,  $|\det K| = 1$  から真空のみを持つ自明な TQFT である.

次に二つ目について.

$$\begin{aligned}\theta(a + K\lambda)/\theta(a) &= \exp(\pi i (a + K\lambda)^T K^{-1}(a + K\lambda) - a^T K^{-1}a) \\ &= \exp(\pi i (2a^T K^{-1}K\lambda + (K\lambda)^T K^{-1}K\lambda)).\end{aligned}\quad (2.61)$$

ここで  $2a^T K^{-1}K\lambda = 2a^T \lambda$  は明らかに偶数であり,  $(K\lambda)^T K^{-1}K\lambda = \lambda^T K\lambda$  は, 対角成分  $K_{ii}$  を含む項は偶数であり, 非対角成分  $K_{ij}$  を含む項,  $\lambda_i K_{ij} \lambda_j$  に対しては必ず  $\lambda_j K_{ji} \lambda_i = \lambda_i K_{ij} \lambda_j$  が存在するため,  $\lambda^T K\lambda$  も偶数. よって

$$\theta(a + K\lambda)/\theta(a) \exp(\pi i (2a^T K^{-1}K\lambda + (K\lambda)^T K^{-1}K\lambda)) = 1 \quad (2.62)$$

となり,  $\theta$  が  $\mathbb{Z}^N/K\mathbb{Z}^N$  上で well-defined であることが言えた. 当然, 定義より  $B$  も well-defined である.

このように,  $K$  行列はエニオンのフュージョン則, トポロジカルスピン, braiding といったデータを持っている.

最後に重要な関係式に言及しておこう. トポロジカルスピンと  $K$  行列の符号数, すなわち行列の正の固有値と負の固有値の差について次の関係式が成り立つ: [BM05]:

$$\frac{1}{|\det K|^{1/2}} \sum_{a \in \mathbb{Z}^N/K\mathbb{Z}^N} \exp(\pi i a^T K^{-1}a) = \exp\left(\frac{2\pi i}{8} \text{sgn}(K)\right). \quad (2.63)$$

この関係式はエニオンのデータを指定するのに必要なデータのの一つであるカイラル中心電荷の情報を含んでいるという点で重要である.

### 3 時間反転対称性に伴う数理構造

#### 3.1 時間反転対称性と時空の向き付け不可能性

理論に時間反転対称性があることと, 理論が向き付け不可能多様体上で定義できることは等価であると理解されている<sup>28</sup>. そうした時間反転対称な (向き付け不可能多様体上の) 理論における基本的な事実をいくつか確認しておく.

<sup>28</sup>Witten による, より正確な言葉の定義は次のようである [Wit16]: 理論に大域対称性がある時, その対称性をゲージ化できるか問うことは自然なことである. そしてゲージ化ができない状況のことを我々は't Hooft アノマリーがあると表現する. 大域対称性として時間反転対称性が与えられた時にそれがゲージ化できると, 理論が向き付け不可能多様体上で定義できることは等価とみなす.

**対称性と場** まず、なぜ時間反転対称であることと、時空が向き付け不可能であることに対応がつくのかについて見ていこう<sup>29</sup>。ここで時間反転対称性と時空が向き付け不可能性の対応は、理論が位相的であるかには依らないことに注意。

対称性  $G$  を持つ場の理論における場  $\phi$  の定義を復習しよう: 時空多様体を  $M$  としその上の主  $G$  束  $P$  と、 $G$  の表現  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  が与えられたとする。その時、同伴ベクトル束  $E = P \times_{\rho} V$  を構成できる。場とはこの同伴ベクトル束の切断として与えられるのであった:

$$\phi \in \Gamma(E). \quad (3.1)$$

この時、射影  $\pi_E: E \rightarrow M$  は  $\pi_E(u, v) = \pi(u)$  と、局所自明化は  $\psi_i: U_i \times V \rightarrow \pi_E^{-1}(U_i)$  と定義されている。ここで  $\pi$  は主  $G$  束の射影である。さらに変換関数は  $P$  の変換関数  $g_{ij}(p) \in G$  を用いて  $\rho(g_{ij}(p))$  と与えられる。より物理のノーテーションに近づけるのなら、まず、パッチ  $U_i, U_j$  に対して座標を  $x, y$  とする。そこで点  $p \in U_i \cap U_j (\neq \emptyset)$  における場の変換性は次のようになる:

$$\tilde{\phi}_i(x) = \rho(g_{ij}(p))(\phi_j(y)). \quad (3.2)$$

例えば  $P$  が  $U(1)$  束で  $V = \mathbb{C}$ ,  $\rho$  は一次元表現とすると,

$$\tilde{\phi}_i(x) = e^{i\alpha_{ij}(p)}\phi_j(y), \quad (3.3)$$

すなわち  $U(1)$  対称性を持つ複素スカラー場である。そのもとの、理論に時間反転対称性(鏡映対称性)がある場合は

$$\tilde{\phi}_i(x_0, x_1, x_2, x_3) = \rho(g_{ij}(p))\phi_j(-x_0, x_1, x_2, x_3) \quad (3.4)$$

のような変換のもとで相関関数が不変であるということになる。それは、向き付けの反転するパッチの張り替えに対する場の変換束が整合的に定まったこととなり、向き付け不可能な多様体において理論が定義できる。

**ゲージ場としての Stiefel–Whitney 類** 時間反転対称性の背景ゲージ場は一次 Stiefel–Whitney 類であると理解されている [Kap14, Tho14]:

$$w_1 \in H^1(M^d, \mathbb{Z}_2). \quad (3.5)$$

この  $w_1$  が多様体  $M^d$  の向き付け可能性の障害類であることに注意。Stiefel–Whitney 類の定義については App. B を見よ。この Stiefel–Whitney 類  $w_1$  についてより直感的に理解するに

<sup>29</sup>なお、位相的場の理論を考える多くの場合では Wick 回転によりユークリッド化した場の理論を考えており、時間と空間の区別がない。よって鏡映対称性があること時空が向き付け不可能であることに対応がつくと言っても良い。

はその Poincaré 双対である  $w_1^\vee$  を考えれば良い:

$$w_1^\vee \in H_{d-1}(M^d, \mathbb{Z}_2). \quad (3.6)$$

こうすると  $w_1^\vee$  は時空の向き付けを反転させる障壁と捉えることが出来る<sup>30</sup>.

**向き付け不可能曲面の分類** 節 1.4.1 にて任意の向き付け可能曲面が適当な個数の  $T^2$  の連結和と同相であることを見た. 向き付け不可能な場合には次が成り立つ:

任意の連結な向き付け不可能閉曲面は適当な数の  $\mathbb{RP}^2$  の連結和と同相である.

例えば有名な向き付け不可能閉曲面であるクラインの壺は  $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$  である. したがって,  $\mathbb{RP}^2$  の解析が向き付け不可能曲面の解析の基本となる. さらに, 有用かもしれない定理として Dyke の定理がある [Fa99]. Dyke の定理によると, 向き付け不可能性を保つ範囲で, 二つのクロスキャップは一つのハンドルに置き換えることができる. 例えば,

$$\begin{aligned} \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 &\cong \mathbb{RP}^2 \# T^2, \\ \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 &\cong \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# T^2 \cong \mathbb{KB} \# T^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

ここで  $\mathbb{KB}$  はクラインボトルである.

**向き付け不可能多様体上での積分** 本修士論文中で問題になることはないが, 向き付け可能でない場合の積分について不安になる読者もいるかもしれない. 確かに向き付け不可能な多様体では微分形式の積分は定義できない. ところが体積要素の概念を適切に修正することで, 同様の積分を定義できる [BT82].

まず, 多様体  $M$  の開集合系  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  を取ってくる. 変換関数  $g_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta$  のヤコビアン  $J(g_{\alpha\beta})$  を考え, ファイバーの変換関数とその符号  $\text{sgn} J(g_{\alpha\beta}) \in \{0, \pm 1\}$  で与えられるような線束を考えることができる. これを,  $M$  の orientation 束と呼び,  $L$  と書く. すると,  $\wedge^n T^*M \otimes L$  が well-defined であり, その切断を密度 (density) と呼ぶ.  $M$  が向き付け可能な時, orientation 束が自明になり, 密度は体積要素に一致することに注意. この時,  $\wedge^n T^*M$  の変換関数は  $1/J(g_{\alpha\beta})$  より密度の変換関数は

$$1/J(g_{\alpha\beta}) \cdot \text{sgn} J(g_{\alpha\beta}) = 1/|J(g_{\alpha\beta})| \quad (3.8)$$

<sup>30</sup>同様にスピン構造の存在の障害類である  $w_2 \in H^2(M^d, \mathbb{Z}_2)$  について  $w_2^\vee \in H_{d-2}(M^d, \mathbb{Z}_2)$  等も考えることができる [Tho14].

となる.  $e_\alpha$  を  $L$  の自明化の元で 1 に対応する局所切断として  $|dx_1 \cdots dx_n|$  を次式で定める:

$$|dx_1 \cdots dx_n| := e_\alpha dx_1 \cdots dx_n. \quad (3.9)$$

すると密度は局所的に滑らかな関数  $g$  を用いて

$$g(x_1, \dots, x_n) |dx_1 \cdots dx_n| \quad (3.10)$$

のように書ける. すると  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; (x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1, \dots, y_n)$  なる (向きを保たなくても良い) 微分同相写像とし, 密度を  $\omega = g|dy_1 \cdots dy_n|$  とすれば

$$\int_{\mathbb{R}^n} T^* \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \omega \quad (3.11)$$

となって  $\mathbb{R}^n$  上の密度の積分が微分同相で不変である事がわかり, 向き付け不可能な多様体上でも積分できることが分かる.

**主束の構造** より詳細に主束の構造について触れておこう [Kap14]<sup>31</sup>. 一般の群  $G$  に対する主  $G$  束が与えられたとする. これは分類写像  $f: M \rightarrow BG$  が与えられたと言っても良い. この  $G$  が時間反転の  $\mathbb{Z}_2$  を含んでいる場合に課される条件について考える. この状況は次の準同型で記述できる:

$$\rho: G \rightarrow \mathbb{Z}_2 \cong \{1, -1\} \quad (3.12)$$

ただし,  $G_0 := \text{Ker} \rho$  は内的対称性 (internal symmetry) であるとする. すなわち接続のループ  $\gamma$  周りのホロノミー  $g(\gamma) \in G$  を考えた時,

$$\rho(g(\gamma)) = \begin{cases} 1 & \gamma \text{ が向きを保つ} \\ -1 & \gamma \text{ が向きを保たない} \end{cases} \quad (3.13)$$

となる. ここで  $\rho$  は  $BG \rightarrow B\mathbb{Z}_2$  なる写像を引き起こし, この写像で  $B\mathbb{Z}_2$  上の普遍束を  $BG$  上に引き戻す事ができる. その引き戻し束  $\tilde{\rho}$  と書くと, この  $G$  が時間反転の  $\mathbb{Z}_2$  と整合的であるための条件は次式で与えられる:

$$f^* \tilde{\rho} \cong L. \quad (3.14)$$

ここで  $L$  は  $M$  から定まる orientation bundle である.

<sup>31</sup> 気にしなければ飛ばしてかまわない.

## 3.2 エニオンに対する時間反転作用

### 3.2.1 有限群の作用と $H^3$ 障害

**群作用の導入** 時間反転対称性があるとは考えているエニオン系に反ユニタリーな  $\mathbb{Z}_2$  が作用しているということである。そこでまずエニオン系に対する有限群の作用の一般論の概要を解説する。

エニオン系  $\mathcal{C}$  と有限群  $G$  が与えられたとする。そこに次のような群準同型を考える：

$$[\rho] : G \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}). \quad (3.15)$$

ここで  $\text{Aut}(\mathcal{C})$  は braided auto-equivalence のことで  $\mathcal{C}$  から  $\mathcal{C}$  への組紐構造等のデータを整合的に保つ関手のことである。ざっくりいうと、この準同型は各群元  $\mathbf{g} \in G$  に対し関手  $[\rho_{\mathbf{g}}] \in \text{Aut}(\mathcal{C})$  を定め、 $F, R$  行列等のデータの整合性を保ちながらエニオンをエニオンに送る： $a \mapsto \rho_{\mathbf{g}}(a)$ 。この時、成り立つ性質として次が挙げられる：

$$N_{\rho_{\mathbf{g}}(a) \rho_{\mathbf{g}}(a)}^{\rho_{\mathbf{g}}(c)} = N_{ab}^c, \quad (3.16)$$

$$d_{\rho_{\mathbf{g}}(a)} = d_a, \quad (3.17)$$

$$\theta(\rho_{\mathbf{g}}(a)) = \begin{cases} \theta(a), & \rho : \text{ユニタリー}, \\ \overline{\theta(a)}, & \rho : \text{反ユニタリー}, \end{cases} \quad (3.18)$$

$$S_{\rho_{\mathbf{g}}(a) \rho_{\mathbf{g}}(b)} = \begin{cases} S_{ab}, & \rho : \text{ユニタリー}, \\ \overline{S_{ab}}, & \rho : \text{反ユニタリー}. \end{cases} \quad (3.19)$$

**凝縮欠陥と  $G$ -crossed モジュラーテンソル圏** ここでは、 $\rho$  がユニタリーであることを仮定する<sup>32</sup>。そうしたエニオンに対する群の作用は群作用を encode する余次元 1 の位相欠陥 (topological defect) をを用いて記述することができる。すなわち  $\mathbf{g} \in G$  でラベルされた余次元 1 のエニオン  $a$  が通過すると  $\rho_{\mathbf{g}}(a)$  のような作用を受けるということである。そうした位相欠陥はエニオン凝縮 (anyon condensation) によって構成することができ、そうした位相欠陥を凝縮欠陥 (condensation defect) という (図 9)。詳しくは節 3.3.3 にて簡単な具体例を用いて説明する。

<sup>32</sup>ここで述べる  $G$ -crossed extension のような議論が時間反転のような反ユニタリーな群作用にどこまで適用できるのかは定かではない。そうした状況でもこの後導入される  $H^3$  障害は対称性の分数化に対する障害類として定義することはでき、議論する価値は残っている。詳しくは [BBJ+16] を見よ。

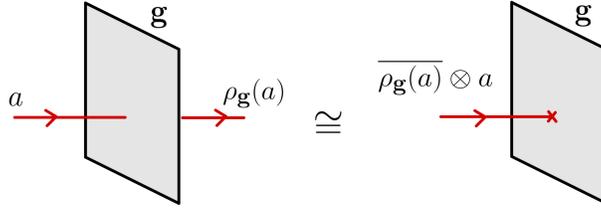
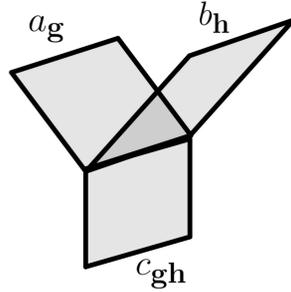
Figure 9:  $\mathbf{g} \in G$  作用を encode する凝縮欠陥

Figure 10: 位相欠陥面のフュージョン

そうした  $[\rho]$  を固定すると次のような群元による次数付けを持つ  $G$ -crossed モジュラーテンソル圏を考えることができる:

$$\mathcal{C}_G^\times := \bigoplus_{\mathbf{g} \in G} \mathcal{C}_{\mathbf{g}}. \quad (3.20)$$

この圏論的構成の詳細はここでは追わない (詳細な議論は [CGPW15, BBCW14] を見よ). 大まかにいうと  $a_{\mathbf{g}} \in \mathcal{C}_{\mathbf{g}}$  が  $\mathbf{g} \in G$  作用を encode する余次元 1 の位相欠陥壁の境界に住む non-genuine line operator のラベルとなっており, この壁を通り過ぎたエニオンは  $\mathbf{g}$  作用を受ける. このラベルはフュージョンについて群のように振る舞う (図 10):

$$a_{\mathbf{g}} \otimes b_{\mathbf{h}} \cong \bigoplus_{c_{\mathbf{gh}} \in \mathcal{C}_{\mathbf{gh}}} N_{a_{\mathbf{g}} b_{\mathbf{h}}}^{c_{\mathbf{gh}}} c_{\mathbf{gh}} \quad (3.21)$$

さらに次のような結合則に対応する制限もかかる:

$$a_{\mathbf{g}} \otimes (b_{\mathbf{h}} \otimes c_{\mathbf{k}}) \cong (a_{\mathbf{g}} \otimes b_{\mathbf{h}}) \otimes c_{\mathbf{k}}. \quad (3.22)$$

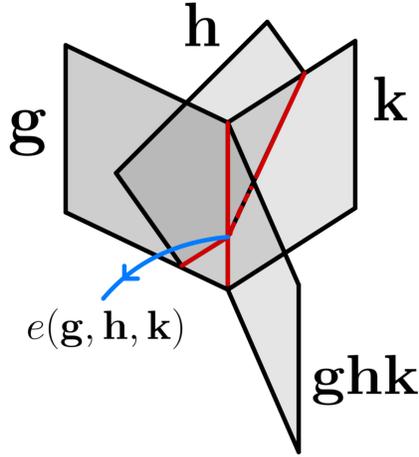


Figure 11: 三つの面の junction に端点を持つ 1-form 対称性演算子

$H^3$  障害と 2 群 しかし, こうした結合則が成り立つような  $C_G^\times$  をいつでも構成できるとは限らない. 次のように結合則を崩すような  $e(\mathbf{g}, \mathbf{h}, \mathbf{k}) \in \mathcal{A}$  が現れる場合がある:

$$a_{\mathbf{g}} \otimes (b_{\mathbf{h}} \otimes c_{\mathbf{k}}) \cong ((a_{\mathbf{g}} \otimes b_{\mathbf{h}}) \otimes c_{\mathbf{k}}) \otimes e(\mathbf{g}, \mathbf{h}, \mathbf{k}). \quad (3.23)$$

ただし  $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$  は可換エニオン全体である. これがまさしく上述の障害である. ここで  $e$  は次の捩れ群コホモロジーの元である

$$e \in H_{[\rho]}^3(G, \mathcal{A}). \quad (3.24)$$

これは物理の文脈で  $H^3$  障害 ( $H^3$  obstruction)/対称性の分数化障害 (symmetry fractionalization obstruction) 等と呼ばれ, 一方, 数学の文脈ではポストニコフ類 (Postnikov class) と呼ばれる対象である. この障害類があると群の結合則が成り立たなくなる. そうした状況での対称性は 2 群と呼ばれる構造を持っており, 物理的には 0-form と 1-form 対称性の混ざった対称性となっている. 直感的には, 0 form 対称性の余次元 1 の面演算子が三つ交わるとその junction は点状となるが, そこから障害類から定まる 1 form 対称性の余次元 2 の線演算子である可換エニオンが飛び出してくると理解されている (図 11).  $H^3$  障害のより具体的な詳細は時間反転作用については節 3.2.3 にて議論する. 一般の群については [Tac17, BCH18] を見よ.

### 3.2.2 対称性の分数化

**対称性の分数化の導入** まずモジュラーテンソル圏  $\mathcal{C}$  と有限群  $G$  及び  $[\rho]$  を指定した上で, 前節で導入した  $H^3$  障害が消えていると仮定する. 実はこれだけではまだ理論を指定されていない.  $H^3$  障害が消えている時に定義できる概念として対称性の分数化 (symmetry fractionalization) がある. 対称性の分数化はエニオンでラベルされた線演算子に対する射影

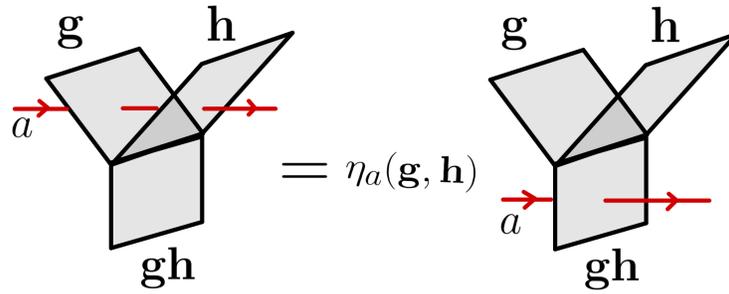


Figure 12: 対称性の分数化

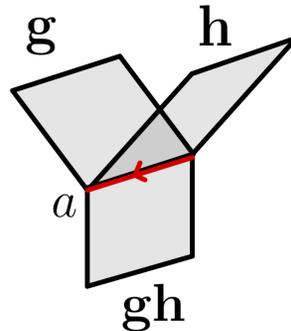


Figure 13: 余次元2のjunctionに住む可換エニオン

表現のような概念であり、その選び方は  $H^2_{[\rho]}(G, \mathcal{A})$  上のトーサーを成している。すなわち二つの選び方の違いが  $H^2_{[\rho]}(G, \mathcal{A})$  に値を取るといふことである<sup>33</sup>。

一つ対称性の分数化  $\eta$  を指定したとする。すると、エニオン  $a \in \mathcal{C}$  が  $\rho_g, \rho_h$  と順に作用を受ける場合と  $\rho_{gh}$  と一度に作用を受ける場合で位相だけ結果が異なる場合があり、その位相は  $\eta_a(\mathbf{g}, \mathbf{h}) \in U(1)$  と特徴付けられる (図 12)。この対称性の分数化は TQFT に限らず様々なセットアップで議論されている e.g. [DGHK22]。

**現れる位相の解釈** この対称性の分数化により現れる位相の解釈にはいくつか知られているがその一つを紹介する。有限群  $G$  作用を encode する位相欠陥面は 0 form 対称性の対称性演算子であり余次元1である。そうした余次元1の演算子の交わる junction は余次元2となり、1 form 対称性があるような理論だとこの junction に 1 form 対称性の対称性演算子が乗ることがある (図 13)。そうすると対称性の分数化による位相はエニオンがその junction を通る時に 1 form 対称性の影響を受け獲得するものだと解釈できる [DGHK22]<sup>34</sup>。

<sup>33</sup>例えば  $T^2$  上にスピンの構造は四つ入るがその選び方にカノニカルな基点はなく、その選び方は  $H^1(T^2, \mathbb{Z}_2)$ -トーサーとなっている。

<sup>34</sup>この junction に住む 1 form 対称性は invertible であることが知られている。

**選び方の違いの解釈** 上述のように対称性の分数化の選び方の違いは  $H_{[\rho]}^2(G, \mathcal{A})$  に値を取る．例えば,  $\mathcal{C}$  および  $[\rho]$  を固定した上で, 異なる二つの対称性の分数化  $\eta, \eta'$  を考えよう．この時, 対称性の分数化の位相の違いは

$$\eta_a(\mathbf{g}, \mathbf{h})\eta'_a(\mathbf{g}, \mathbf{h})^{-1} \quad (3.25)$$

と与えられる．ここで  $[\rho]$  を固定しているため, 後ほど導入する式 (3.57) に注意すると  $f(a) := \eta_a(\mathbf{g}, \mathbf{h})\eta'_a(\mathbf{g}, \mathbf{h})^{-1}$  とした時に  $N_{ab}^c \neq 0$  なる  $a, b, c \in \mathcal{C}$  に対して  $f(a)f(b) = f(c)$  が成り立つ事が分かる<sup>35</sup>．すなわち, 上で定義した  $f$  に対して次式のような  $\mathbf{f}(\mathbf{g}, \mathbf{h}) \in \mathcal{A}$  が存在する:

$$f(a) = M_a^* \mathbf{f}(\mathbf{g}, \mathbf{h}). \quad (3.26)$$

この  $\mathbf{f}$  がまさしく対称性の分数化の違いを与える  $\mathbf{f} \in H_{[\rho]}^2(G, \mathcal{A})$  である．

**欠陥化障害** 本修士論文では詳細は述べないが, 実は  $H^3$  障害が消えている状況で対称性の分数化を指定してもまだ整合的な  $G$ -crossed extension が存在しない場合がある．そうした障害類は欠陥化障害 (defectification obstruction) と呼ばれており  $H^4(G, U(1))$  に値を取る．その障害が消えている時, 理論の選び方は  $H^3(G, U(1))$  に値を取り, そこまで指定して初めて理論を指定したことになる．

すなわち,  $(\mathcal{C}, G, [\rho])$  が与えられた時,  $H_{[\rho]}^3(G, \mathcal{A})$  と  $H^4(G, U(1))$  が消えているかを確認, そのもとで  $H_{[\rho]}^2(G, \mathcal{A})$ -トーサーと  $H^3(G, U(1))$ -トーサーの元を指定することでやっとな  $\mathcal{C}_G^\times = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{C}_g$  が定まる．詳しくは [ENO09, BBCW14]

### 3.2.3 時間反転作用

前節までで解説した  $H^3$  障害, 対称性の分数化について時間反転作用に限って詳細に見ていく．一般の場合については [BBCW14] を参照せよ．

**時間反転対称性の  $H^3$  障害** モジュラーテンソル圏  $\mathcal{C}$ , 群  $\mathbb{Z}_2^T = \{1, \mathbf{T}\}$ , および群準同型  $[\rho]$  を固定する:

$$[\rho] : \mathbb{Z}_2^T = \{1, \mathbf{T}\} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}), \quad (3.27)$$

i.e., 全ての  $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in \mathbb{Z}_2^T$  に対して,

$$[\rho_{\mathbf{g}}][\rho_{\mathbf{h}}] = [\rho_{\mathbf{gh}}] \quad (3.28)$$

<sup>35</sup>式 (3.57) は時間反転の場合を議論しているが, 一般の有限群に対しても同様の議論ができる．

である. 自然同型の違いを除くと群準同型である, ということである. 従って適当な代表元  $\rho_{\mathbf{g}}$  等に対して  $\rho_{\mathbf{g}}\rho_{\mathbf{h}}$  と  $\rho_{\mathbf{gh}}$  を繋ぐ自然同型  $\kappa_{\mathbf{g},\mathbf{h}}$  が存在する:

$$\kappa_{\mathbf{g},\mathbf{h}}\rho_{\mathbf{g}}\rho_{\mathbf{h}} = \rho_{\mathbf{gh}}. \quad (3.29)$$

$\rho_{\mathbf{T}}$  のエニオン及び  $F$  and  $R$  への作用は次式で定義される:

$$\rho_{\mathbf{T}}(a) = \mathbb{T}a, \quad (3.30)$$

$$\rho_{\mathbf{T}}(|a, b; c, \mu\rangle) = \sum_{\mu'} [U_{\mathbf{T}}(\mathbb{T}a, \mathbb{T}b, \mathbb{T}c)]_{\mu\mu'} |\mathbb{T}a, \mathbb{T}b; \mathbb{T}c, \mu'\rangle, \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbf{T}}([F_d^{abc}]_{(e,\alpha,\beta)(f,\mu,\nu)}) &= \sum_{\alpha',\beta',\mu',\nu'} [U_{\mathbf{T}}(\mathbb{T}a, \mathbb{T}b; \mathbb{T}c)]_{\alpha\alpha'} [U_{\mathbf{T}}(\mathbb{T}e, \mathbb{T}c; \mathbb{T}d)]_{\beta\beta'} \\ &\quad \times [F_{\mathbb{T}d}^{\mathbb{T}a\mathbb{T}b\mathbb{T}c}]_{(\mathbb{T}e,\alpha',\beta')(\mathbb{T}f,\mu',\nu')} [U_{\mathbf{T}}(\mathbb{T}b, \mathbb{T}c; \mathbb{T}f)^{-1}]_{\mu'\mu} [U_{\mathbf{T}}(\mathbb{T}a, \mathbb{T}b; \mathbb{T}c)^{-1}]_{\nu'\nu} \\ &= [F_d^{abc}]_{(e,\alpha,\beta)(f,\mu,\nu)}^*, \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbf{T}}([R_c^{ab}]_{\mu\nu}) &= \sum_{\mu',\nu'} [U_{\mathbf{T}}(\mathbb{T}b, \mathbb{T}a; \mathbb{T}c)]_{\mu\mu'} [R_{\mathbb{T}c}^{\mathbb{T}a\mathbb{T}b}]_{\mu'\nu'} [U_{\mathbf{T}}(\mathbb{T}a, \mathbb{T}b; \mathbb{T}c)^{-1}]_{\nu'\nu} \\ &= [R_c^{ab}]_{\mu\nu}^*. \end{aligned} \quad (3.33)$$

これらより次式を得る:

$$\kappa_{\mathbf{T},\mathbf{T}}(|a, b; c, \mu\rangle) = \sum_{\nu} [\kappa_{\mathbf{T},\mathbf{T}}(a, b; c)]_{\mu\nu} |a, b; c, \nu\rangle, \quad (3.34)$$

$$[\kappa_{\mathbf{T},\mathbf{T}}(a, b; c)]_{\mu\nu} = \sum_{\alpha} [U_{\mathbf{T}}(a, b; c)^{-1}]_{\mu\alpha} [U_{\mathbf{T}}(\mathbb{T}a, \mathbb{T}b, \mathbb{T}c)^{-1}]_{\alpha\nu}^*. \quad (3.35)$$

$\kappa$  は自然同型であり状態空間を変えないため, その作用は位相のズレとしてのみ現れる. 従って, 次のような表式を持つ:

$$[\kappa_{\mathbf{T},\mathbf{T}}(a, b; c)]_{\mu\nu} = \frac{\beta_a(\mathbf{T}, \mathbf{T})\beta_b(\mathbf{T}, \mathbf{T})}{\beta_c(\mathbf{T}, \mathbf{T})} \delta_{\mu\nu}. \quad (3.36)$$

ここで  $\beta_a(\mathbf{T}, 1) = \beta_a(1, \mathbf{T}) = \beta(1, 1) = 1$  としても一般性を失わないため<sup>36</sup>,  $\beta_a(\mathbf{T}, \mathbf{T})$  のみが非自明な位相を持ちうる. さらにそこから  $\kappa$  についても同様に非自明なのは  $\kappa_{\mathbf{T},\mathbf{T}}$  のみであることが従う. 本修士論文ではこれ以降  $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{T}}$  のみ扱うため以下

$$[\kappa(a, b; c)]_{\mu\nu} := [\kappa_{\mathbf{T},\mathbf{T}}(a, b; c)]_{\mu\nu}, \quad \beta(a) := \beta_a(\mathbf{T}, \mathbf{T}) \quad (3.37)$$

<sup>36</sup>ゲージ冗長性を用いてそのように固定できる.

と書く. ここには  $\beta$  の選び方に冗長性が残っている. 次のような  $\tilde{\beta}$  を考える:

$$\tilde{\beta}(a) = \nu(a)\beta(a), \quad (3.38)$$

すると  $\tilde{\kappa}(a, b; c)$  は  $\nu(a)$  が次式を満たすとき不変である:

$$\nu(a)\nu(b) = \nu(c). \quad (3.39)$$

この冗長性は理論から取り除かれるべきゲージ自由度とみなされる. さらに,  $\mathbf{g}, \mathbf{h}, \mathbf{k}$  の作用を考えると

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbf{g}\mathbf{h}\mathbf{k}} &= \kappa_{\mathbf{g},\mathbf{h}\mathbf{k}}\rho_{\mathbf{g}}\rho_{\mathbf{h}\mathbf{k}} \\ &= \kappa_{\mathbf{g},\mathbf{h}\mathbf{k}}\rho_{\mathbf{g}}\kappa_{\mathbf{h},\mathbf{k}}\rho_{\mathbf{h}}\rho_{\mathbf{k}} \\ &= \kappa_{\mathbf{g},\mathbf{h}\mathbf{k}}\rho_{\mathbf{g}}\kappa_{\mathbf{h},\mathbf{k}}\rho_{\mathbf{g}}^{-1}\rho_{\mathbf{g}}\rho_{\mathbf{h}}\rho_{\mathbf{k}} \\ &= \kappa_{\mathbf{g}\mathbf{h},\mathbf{k}}\rho_{\mathbf{g}\mathbf{h}}\rho_{\mathbf{k}} \\ &= \kappa_{\mathbf{g}\mathbf{h},\mathbf{k}}\kappa_{\mathbf{g},\mathbf{h}}\rho_{\mathbf{g}}\rho_{\mathbf{h}}\rho_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

となるため, 次式が従う:

$$\kappa_{\mathbf{g},\mathbf{h}\mathbf{k}}\rho_{\mathbf{g}}\kappa_{\mathbf{h},\mathbf{k}}\rho_{\mathbf{g}}^{-1} = \kappa_{\mathbf{g}\mathbf{h},\mathbf{k}}\kappa_{\mathbf{g},\mathbf{h}}. \quad (3.41)$$

$\Omega(a)$  を次式で定義する:

$$\Omega(a) = \frac{1}{\beta(\mathbb{T}a)\beta(a)} \in U(1).$$

すると次式が従うことがわかる:

$$\frac{\Omega(a)}{\Omega(\mathbb{T}a)} = 1. \quad (3.42)$$

さらに式 (3.36) と式 (3.41) を用いると次式が得られる:

$N_{ab}^c \neq 0$  なる  $a, b, c \in \mathcal{C}$  に対して

$$\Omega(a)\Omega(b) = \Omega(c). \quad (3.43)$$

ここで式 (3.42) は次に対応する<sup>37</sup>:

<sup>37</sup>以下, 可換エニオンのフュージョンは加法のノーテーションを使う.  $a \otimes b =: a + b \in \mathcal{A}$ .

可換エニオン  $\Omega$  を次式で定義する:

$$\Omega(a) = M_a^* \Omega. \quad (3.44)$$

すると次式が成り立つ:

$$\Omega \in \text{Ker}(1 + T). \quad (3.45)$$

上式は、式 (1.83) より、

$$\begin{aligned} \frac{\Omega(a)}{\Omega(Ta)} &= \frac{M_a^* \Omega}{M_{Ta}^* \Omega} \\ &= M_a^* \Omega M_a^* T \Omega \\ &= M_a^* (1+T) \Omega \\ &= 1. \end{aligned} \quad (3.46)$$

これが全ての  $a \in \mathcal{C}$  に対して成り立つため、 $M$  の非退化性から、

$$(1 + T)\Omega = 0 \quad (3.47)$$

すなわち

$$\Omega \in \text{Ker}(1 + T) \quad (3.48)$$

である。一方、式 (3.38) なる冗長性があったことを思い出そう。この冗長性から  $\Omega$  は次のように変わる:

$$\tilde{\Omega}(a) = \frac{1}{\nu(Ta)\nu(a)} \Omega(a), \quad (3.49)$$

$$\begin{cases} \tilde{\Omega}(a) &= M_a^* \tilde{\Omega}, \\ \nu(a) &= M_a^* \nu, \end{cases} \quad (3.50)$$

すなわち

$$\tilde{\Omega} - \Omega = -(1 - T)\nu. \quad (3.51)$$

よって、式 (3.48), 式 (3.51) からゲージ不変なデータが取り出すには、 $\text{Im}(1 + T)$  分の違いを無視する必要がある。よってゲージ不変に定まるエニオンとして  $[\Omega]$  を定義する:

$$[\Omega] \in \frac{\text{Ker}(1 + T)}{\text{Im}(1 - T)}. \quad (3.52)$$

ここまで、我々は  $\rho$  を一つ固定して議論してきたが、まだ自然同型に対応する冗長性が残っている。自然同型  $\Upsilon$  は auto-equivalence であってエニオンに対する作用が自明なもので

ある. すなわち,  $\Upsilon(a) = a$  が全ての  $a \in \mathcal{C}$  に対して成り立つ. フュージョン空間には次のように作用する:

$$\Upsilon(|a, b; c, \mu\rangle) = \frac{\gamma_a \gamma_b}{\gamma_c} |a, b; c, \mu\rangle, \quad (3.53)$$

ここで  $\gamma_a \in U(1)$  はそれぞれのエニオンに付随する位相である.  $\Upsilon_{\mathfrak{g}}$  を対応する自然同型で次式を満たすものと定義する:  $\hat{\rho}_{\mathbf{T}} = \Upsilon_{\mathbf{T}} \circ \rho_{\mathbf{T}}$ . それに対応して次式を得る

$$\hat{\beta}(a) = \beta(a) \overline{\gamma(\mathbf{T}a)} \gamma(a). \quad (3.54)$$

この修正に対して  $\Omega$  が不変であることがわかる:

$$\hat{\Omega}(a) = \Omega(a), \quad (3.55)$$

すなわち,  $\Omega$  は  $\rho$  ではなく  $[\rho]$  に対して定まることがわかる.

つまり, まとめるとモジュラーテンソル圏  $\mathcal{C}$ , 群  $\mathbb{Z}_2^{\mathbf{T}}$ , その自然同型の違いを除いた作用  $[\rho]$  に対して, ゲージ不変なエニオン

$$[\Omega] \in \frac{\text{Ker}(1 + \mathbf{T})}{\text{Im}(1 - \mathbf{T})} \quad (3.56)$$

が定まったというわけである.

これがまさしく前節で解説した  $H^3$  障害である. 簡単のためノーテーションを省略しているが  $e \in H_{[\rho]}^3(\mathbb{Z}_2^{\mathbf{T}}, \mathcal{A})$  に対し,  $e(\mathbf{T}, \mathbf{T}, \mathbf{T}) \in \mathcal{A}$  であり, これを  $\Omega$  と書いている. ここで理解の現状としては次のようになっている:

- $H^3$  障害は対称性の分数化の障害類として働く<sup>a</sup>.
- $H^3$  障害が自明となるための必要条件は知られている [BC17]<sup>b</sup>.
- 非可換エニオン系については  $H^3$  障害が非自明になる例が知られている [BC17].
- 可換エニオン系については  $H^3$  障害が自明になることが証明されている [Ori25d]. App. C を見よ.

<sup>a</sup>ユニタリーな場合と異なり, 時間反転に対する  $G$ -crossed extension のような構成はまだ理解されていないことに注意.

<sup>b</sup>しかし, その議論には非自明な仮定がある事に注意. 詳しくは, 3.4.1 を見よ.

**時間反転対称性の分数化** 以下, 前節で定義した  $H^3$  障害が消えているとする. その時  $\Omega = 0$  となるような  $\beta$  の選び方が存在する. そうした  $\beta$  を特に  $\eta$  と書くことにする. すなわち

$\eta : \mathcal{C} \rightarrow U(1)$  は次式を満たす:

$$\sum_{\alpha} [U_{\mathbf{T}}(a, b; c)^{-1}]_{\mu\alpha} [U_{\mathbf{T}}(\mathbf{T}a, \mathbf{T}b, \mathbf{T}c)^{-1}]_{\alpha\nu}^* = \frac{\eta(a)\eta(b)}{\eta(c)} \delta_{\mu\nu}, \quad \eta(a)\eta(\mathbf{T}a) = 1. \quad (3.57)$$

ここで  $a = \mathbf{T}a$  であるような  $a$  に対しては

$$\eta(a) \in \{\pm 1\} \quad (3.58)$$

であることがすぐ分かる. これはゲージ不変な量になることが知られており, 局所クラマース縮退 (local Kramers degeneracy) と呼ばれる.  $\eta$  の選び方は一意ではなく, 式 (3.38) のような再定義により

$$\tilde{\eta}(a) := \eta(a)\nu(a) = \eta(a)M_{a\nu}^* \quad (3.59)$$

とすると, これが式 (3.57) を満たすことと

$$\nu = \mathbf{T}\nu \quad \text{i.e.,} \quad \nu \in \text{Ker}(1 - \mathbf{T}) \quad (3.60)$$

とは同値である.

さらに冗長性 (3.54) に対応して

$$\hat{\eta}(a) := \eta(a)\overline{\gamma(\mathbf{T}a)}\gamma(a) \quad (3.61)$$

が定まり, これは自明に式 (3.57) を満たす.

$$\gamma(a) = M_{a\gamma}^* \quad (3.62)$$

と実現できるような冗長性  $\gamma$  は  $\nu$  を使うと

$$\nu = (1 + \mathbf{T})\gamma \quad (3.63)$$

と書けるが, 我々はこのようにかける選び方の違いを無視する. すなわち  $\text{Im}(1 + \mathbf{T}) \subset \text{Ker}(1 - \mathbf{T})$  に注意した上で, 物理的に異なる  $\eta$  の選び方は次で分類される:

$$[\nu] \in \frac{\text{Ker}(1 - \mathbf{T})}{\text{Im}(1 + \mathbf{T})}. \quad (3.64)$$

これについても前節の言葉を借りれば  $t \in H_{[\rho]}^2(\mathbb{Z}_2^{\mathbf{T}}, \mathcal{A})$  に対して  $t(\mathbf{T}, \mathbf{T}) \in \mathcal{A}$  であり, 我々はこれを  $\nu$  と書いている.

**整合条件** 対称性の分数化に関連して、可換エニオン系において次が成り立つ: [LT18]:

$$\eta(a + \mathbb{T}a)B(a, \mathbb{T}a) = 1 \text{ が全ての } a \in \mathcal{A} \text{ に対して成り立つ.} \quad (3.65)$$

非可換エニオン系についても類似の式が成り立つがここでは省略する [BBCW14]. 可換エニオン系の場合, 式 (1.72), 式 (3.33), 式 (3.57) は次のように簡潔に書く事ができる (詳しくは App. C):

$$B(a, b) = \frac{\theta(a+b)}{\theta(a)\theta(b)} = R(b, a)R(a, b), \quad (3.66)$$

$$\overline{R(\mathbb{T}a, \mathbb{T}b)} = U(a, b)^{-1}U(b, a)R(a, b), \quad (3.67)$$

$$\overline{U(\mathbb{T}a, \mathbb{T}b)}U(a, b) = \eta(a)\eta(b)/\eta(a+b), \quad (3.68)$$

$$\eta(a)\eta(\mathbb{T}a) = 1. \quad (3.69)$$

上式から

$$\begin{aligned} \eta(a + \mathbb{T}a) &= \eta(a)\eta(\mathbb{T}a)U(a, \mathbb{T}a)^{-1}U(\mathbb{T}a, a) \\ &= \overline{R(\mathbb{T}a, a)R(a, \mathbb{T}a)} \\ &= B(a, \mathbb{T}a)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

すなわち

$$\eta(a + \mathbb{T}a)B(a, \mathbb{T}a) = 1 \quad (3.71)$$

を得る.

### 3.2.4 $GL(2, \mathbb{Z})$ とトーラス

ここまでエニオンに対する時間反転作用を見てきたがこれをベクトル空間に対する  $\mathbb{Z}_2$  作用と結びつけることはできるだろうか. 多様体の向きの取り替えに伴ってエニオンが受ける作用を  $a \mapsto Pa$  と導入する [TY16b]. ここではまだ  $P: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  は  $\mathbb{Z}_2$  作用であることしか課していない. CPT 定理から  $Pa = \overline{\mathbb{T}a}$  となることが期待できる. もしそうであれば  $\theta(Pa) = \theta(\overline{\mathbb{T}a})$  となるが, この時,

$$\theta(Pa)\theta(a) = 1 \quad (3.72)$$

が必要である.

$T^2$  の写像類群  $SL(2, \mathbb{Z})$  に対して反転作用を許すと,  $GL(2, \mathbb{Z})$  と拡張されることから,  $V(T^2)$  は  $GL(2, \mathbb{Z})$  の表現空間となるように拡張されることが期待される. そこで我々は次の仮定から出発して  $GL(2, \mathbb{Z})$  の表現を構成できるかを調べる [Ori25b].

$P: V(T^2) \rightarrow V(T^2)$  を次式で定義する:

$$P|a\rangle = \phi(a)|Pa\rangle, \quad P^2 = 1. \quad (3.73)$$

すなわち, すでに分かっている  $SL(2, \mathbb{Z})$  の表現行列

$$S_{ab} = \frac{1}{\mathcal{D}} \sum_c N_{ab}^c \frac{\theta(c)}{\theta(a)\theta(b)} d_c, \quad T_{ab} = e^{-2\pi ic/24} \delta_{ab}, \quad C_{ab} = \delta_{a\bar{b}} \quad (3.74)$$

に加え

$$P_{ab} = \phi(a)\delta_{aPb} \quad (3.75)$$

なる  $P$  を導入することで  $GL(2, \mathbb{Z})$  の表現を構成できるのかを調べる. より正確には写像類群の表現は一般的には射影表現になるため,  $S, T, C, P$  たちが  $GL(2, \mathbb{Z})$  の射影表現になるための条件式を模索していく<sup>38</sup>.

$GL(2, \mathbb{Z})$  を表示する行列を  $S, T, C, P$  と書く<sup>39</sup>. そこで, 我々が考える問いは,

- $S, T, C, P$  たちが  $GL(2, \mathbb{Z})$  の射影表現となるような適切な条件が見つけれられるのか.
- あるならば射影表現の位相は自明にできるのか, i.e., 表現を構成できるのか.

ここでは [Ori25b] に従って可換エニオン系に限って議論する. 可換エニオン系の場合, 表現行列は次のようになる:

$$S_{ab} = \frac{1}{|\mathcal{A}|^{1/2}} B(-a, b), \quad C_{ab} = \delta_{a-b}, \quad T_{ab} = e^{-2\pi ic-/24} \theta(a) \delta_{ab}, \quad P_{ab} = \phi(a) \delta_{aPb}. \quad (3.76)$$

また  $GL(2, \mathbb{Z})$  について次式が成り立つことに注意する:

$$TPT = P, \quad (3.77)$$

$$SPS = P. \quad (3.78)$$

従って我々は,  $A = \varphi B$  なる  $\varphi \in U(1)$  が存在するとき  $A \sim B$  と書くことにすると,  $TPT \sim P$ ,  $SPS \sim P$  となるような適切な条件を見つけたい. 一つ目の式について

$$(TPT)_{ab} = e^{-2\pi ic-/12} \theta(a) \theta(Pa) \delta_{aPb} \quad (3.79)$$

<sup>38</sup>種数 1 の  $T^2$  の場合に表現 (not 射影表現) となっているのが特殊なのである.

<sup>39</sup>つまり表現を  $\rho$  と書くなら  $\rho(S) = S$  である.

より  $TPT \sim P$  となるためには

$$\theta(a)\theta(Pa) = 1$$

が成り立てば良い。これは我々の期待と一致している。一方、二つ目の式について

$$\begin{aligned} (SPS)_{ab} &= \frac{1}{|\mathcal{A}|} \sum_{m,l} B(-a, m)\phi(m)\delta_{m,Pl}B(-l, b) \\ &= \frac{1}{|\mathcal{A}|} \sum_l B(-a, Pl)\phi(Pl)B(-l, b) \\ &= \frac{1}{|\mathcal{A}|} \sum_l B(Pa - b, l)\phi(Pl). \end{aligned} \quad (3.80)$$

ここで  $b = Pa$  とすると

$$\frac{1}{|\mathcal{A}|} \sum_l \phi(Pl) \quad (3.81)$$

となるが,

$$\left| \frac{1}{|\mathcal{A}|} \sum_l \phi(Pl) \right| \leq 1 \quad (3.82)$$

で等号は  $\phi(Pl)$  が  $l$  によらず一定な場合のみであることに気づくと  $SPS \sim P$  のためには

$$\varphi(a) = \text{const.} \quad (3.83)$$

である事がわかる。よって  $P$  の再定義により  $P_{ab} = \delta_{aPb}$  として良い。

ここまでの議論から

$$S_{ab} = \frac{1}{|\mathcal{A}|^{1/2}} B(-a, b), \quad C_{ab} = \delta_{a-b}, \quad T_{ab} = e^{-2\pi ic_-/24} \theta(a) \delta_{ab}, \quad P_{ab} = \delta_{aPb}. \quad (3.84)$$

の組は少なくとも  $GL(2, \mathbb{Z})$  の射影表現となる事が分かるが、表現とはならないのだろうか。すなわち、我々は式 (3.79) に現れた位相  $e^{-2\pi ic_-/12}$  を取り除くことはできないのだろうか。実は次の事実が知られている [GM22]:

時間反転対称性の元では次が成り立つ:

$$c_- \equiv 0, 12 \pmod{24}. \quad (3.85)$$

すなわち我々の考えているセットアップでは  $e^{-2\pi ic_-/12} = 1$  となり位相は自明になる事がわかる。こうして我々は  $GL(2, \mathbb{Z})$  の表現を構成する事ができた。

### 3.3 Chern–Simons 理論に対する時間反転作用

#### 3.3.1 Classical な時間反転対称性

可換 Chern–Simons 理論を指定するには  $(\Lambda, B)$  を指定すればいいのであった:

$$S_{\text{CS}} = \frac{1}{4\pi} \int_{M^3} K_{IJ} A^I \wedge dA^J. \quad (3.86)$$

このセットアップではエニオンは次の商空間に住んでいる:

$$a \in \mathbb{Z}_N / K\mathbb{Z}_N \cong \Lambda^* / \Lambda \quad (3.87)$$

ここで時間反転作用は行列  $T : \mathbb{Z}_N / K\mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{Z}_N / K\mathbb{Z}_N$  であって  $T^2 = 1$  となるようなものとして定義できる. この変換において古典的に  $S_{\text{CS}}$  が不変になることと, 次式が成り立つことは同値である:

$$T^T K T = -K. \quad (3.88)$$

この変換によってトポロジカルスピンは次のようになる:

$$\begin{aligned} \theta(Ta) &= \exp(\pi i (Ta)^T K^{-1} (Ta)) \\ &= \exp(\pi i a^T (T^T K T)^{-1} a) \\ &= \exp(-\pi i a^T K^{-1} a) \\ &= \overline{\theta(a)}, \end{aligned} \quad (3.89)$$

となり, 確かに反ユニタリーな  $\mathbb{Z}_2$  作用であることが確かめられる.

しかし, 量子論的にはこのデータはまだ冗長性を持つことが知られている.  $(\Lambda, B)$  から  $(\mathcal{D}, q, c \bmod 24)$  なる三つ組のデータを取り出すことができ,  $(\Lambda, B) \mapsto (\mathcal{D}, q, c \bmod 24)$  は全射である.

#### 3.3.2 Quantum な時間反転対称性

$R$  を  $\mathbb{Z}$  加群として非退化な双線形形式  $B : \Lambda \times \Lambda \rightarrow R$  が与えられたとする. その時,  $B$  の quadratic refinement とは, 写像  $Q : \Lambda \rightarrow R$  で次式を満たすものである:

$$B(x, y) = Q(x + y) - Q(x) - Q(y) + Q(0). \quad (3.90)$$

また,  $Q$  が次式を満たすとき, pure という:

$$Q(nx) = n^2 Q(x). \quad (3.91)$$

この時,  $Q(0) = 0$  に注意. さらに, 全ての even lattice に対して pure quadratic form を次のように定めることができる:

$$Q(x) = \frac{1}{2} B(x, x). \quad (3.92)$$

さらに, ここから discriminant group<sup>40</sup> と呼ばれる可換群を次式で定めることができる:

$$\mathcal{D} := \Lambda^* / \Lambda \cong \mathbb{Z}^N / K\mathbb{Z}^N. \quad (3.93)$$

それに伴い,  $B$  から  $b: \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  が定まり, even lattice については quadratic refinement から  $q: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  も定まる. するとこの quadratic refinement に対してカイラル中心電荷は,  $c_- \equiv 0, 12 \pmod{24}$  となる事が知られている. 以上の議論について詳しくは [GMMS04, GM22] を見よ.

### 3.3.3 位相欠陥面の具体的構成

**$K$  行列と時間反転** 簡単な例を用いて時間反転作用を encode する位相欠陥を構成しよう. 作用としては次の  $U(1)_2$  Chern–Simons 理論を考える:

$$S = \frac{1}{4\pi} \int_{M^3} K^{IJ} A_I \wedge dA_J = \frac{1}{4\pi} \int_{M^3} \begin{pmatrix} A_1, A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dA_1 \\ dA_2 \end{pmatrix}. \quad (3.94)$$

この理論にエニオンは  $\det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 4$  種類あり, それぞれ

$$1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad m := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.95)$$

<sup>40</sup>ここでは total dimension の意味で書いていないことに注意.

と書ける.  $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  とすれば

$$T^T K T = -K \quad (3.96)$$

となり時間反転作用を encode する行列になる. この作用でエニオンは

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.97)$$

となりこの作用は  $e \leftrightarrow m$  を取り替える  $\mathbb{Z}_2$  変換となっている. こうした群作用は凝縮欠陥として実現できることを確認する.

**凝縮欠陥面の構成** ここでは実際にエニオン凝縮により時間反転作用を encode する面演算子 (surface operator) を構成する [KOZ22]. まずエニオン  $\{1, e, m, f\}$  に対応する線演算子が次のように与えられているとする.

$$L_{(e,m)}(\gamma) := \exp(\pi i \oint_{\gamma} A_1) \exp(\pi i \oint_{\gamma} A_2). \quad (3.98)$$

ここで  $(e, m) = (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1) \pmod 2$  が  $1, e, m, f$  に対応する. またここでは次のフュージョン則と交換関係を認める:

$$L_{(e,m)}(\gamma) \times L_{(e',m')}(\gamma) = L_{(e+e',m+m')}(\gamma), \quad (3.99)$$

$$L_{(e,m)}(\gamma) L_{(e',m')}(\gamma') = (-1)^{(em'+me')\langle \gamma, \gamma' \rangle} L_{(e',m')}(\gamma') L_{(e,m)}(\gamma). \quad (3.100)$$

上の二式から次式が導ける:

$$L_{(e,m)}(\gamma) L_{(e,m)}(\gamma') = (-1)^{em\langle \gamma, \gamma' \rangle} L_{(e,m)}(\gamma + \gamma'). \quad (3.101)$$

今から目指すのは  $e \leftrightarrow m$  を施す面演算子  $D_{EM}(\Sigma)$  を構成すること, すなわち

$$L_{(e,m)}(\gamma) \times D_{EM}(\Sigma) = D_{EM}(\Sigma) \times L_{(m,e)}(\gamma) \quad (3.102)$$

を満たすような  $D_{EM}(\Sigma)$  を構成することである. 一般にエニオン系に有限群  $G$  が作用しているとき  $\mathbf{g} \in G$  に対応するドメインウォールの作り方は  $\overline{\rho_{\mathbf{g}}(a)} \otimes a$  のような形のエニオン

を二次元面で凝縮させることである (図 9). これは気持ちとしては

$$a \otimes D_{\mathbf{g}} \cong D_{\mathbf{g}} \otimes \rho_{\mathbf{g}}(a) \quad (3.103)$$

から

$$\left(\overline{\rho_{\mathbf{g}}(a)} \otimes a\right) \otimes D_{\mathbf{g}} \cong D_{\mathbf{g}} \quad (3.104)$$

となるが, これは  $\overline{\rho_{\mathbf{g}}(a)} \otimes a$  なるエニオンがドメインウォールに端点を持つてることを示唆している<sup>41</sup>. 従ってこうして端点を持つてるタイプのエニオンを面  $\Sigma$  全体に張り巡らせることで  $\Sigma$  上に面演算子を定義しようというわけである. 今回の例ではそうしたエニオンは

$$e \otimes \bar{m} = e \otimes m = f \quad (3.105)$$

である. 二次元面  $\Sigma$  上でエニオン凝縮してできる位相欠陥面は  $f$  の線演算子  $L_{(1,1)}(\gamma)$  を用いて次のように定義できる.

$$D_{EM}(\Sigma) := \frac{1}{|H^0(\Sigma, \mathbb{Z}_2)|} \sum_{\gamma' \in H^1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)} L_{(1,1)}(\gamma'). \quad (3.106)$$

すると

$$\begin{aligned} L_{(e,m)}(\gamma) \times D_{EM}(\Sigma) &= \frac{1}{|H^0(\Sigma, \mathbb{Z}_2)|} \sum_{\gamma' \in H^1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)} L_{(e,m)}(\gamma) L_{(1,1)}(\gamma') \\ &= \frac{1}{|H^0(\Sigma, \mathbb{Z}_2)|} \sum_{\gamma' \in H^1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)} (-1)^{(e+m)\langle \gamma, \gamma' \rangle} L_{(1,1)}(\gamma') L_{(e,m)}(\gamma). \end{aligned} \quad (3.107)$$

ここで

$$\begin{aligned} L_{(e,m)}(\gamma) &= L_{(e+m, e+m)}(\gamma) L_{(e+m, e+m)}(\gamma) L_{(e,m)}(\gamma) \\ &= L_{(e+m, e+m)}(\gamma) L_{(m, e)}(\gamma) \end{aligned} \quad (3.108)$$

であることと

$$L_{(1,1)}(\gamma') L_{(e+m, e+m)}(\gamma) = L_{(1,1)}(\gamma') \times L_{(1,1)}(\gamma)^{\otimes (e+m)} = (-1)^{(e+m)\langle \gamma, \gamma' \rangle} L_{(1,1)}(\gamma' + (e+m)\gamma) \quad (3.109)$$

<sup>41</sup> 群作用を encode する位相欠陥面は両側  $\mathcal{C}$ - 加群圏である.

より

$$\begin{aligned} L_{(e,m)}(\gamma) \times D_{EM}(\Sigma) &= \frac{1}{|H^0(\Sigma, \mathbb{Z}_2)|} \sum_{\gamma' \in H^1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)} L_{(1,1)}(\gamma' + (e+m)\gamma) \times L_{(m,e)}(\gamma) \\ &= D_{EM}(\Sigma) \times L_{(m,e)}(\gamma) \end{aligned} \quad (3.110)$$

が得られる. こうして式 (3.106) のように定義された面演算子が確かに  $e \leftrightarrow m$  を施す  $\mathbb{Z}_2$  作用を encode していることが分かった.

### 3.4 クロスキャップ状態の考察

時間反転対称な TQFT における最も重要な考察対象としてクロスキャップ状態がある.

$$|\mathbb{C}\mathbb{C}\rangle := Z(\mathbb{M}\mathbb{O} \times S^1). \quad (3.111)$$

ここで  $\mathbb{M}\mathbb{O}$  は

$$\mathbb{M}\mathbb{O} := \{(x, \theta) \in [-1, 1] \times \mathbb{R} \mid (x, \theta) \sim (-x, \theta + \pi)\}. \quad (3.112)$$

ここで注目すべきは,  $\partial\mathbb{M}\mathbb{O} = S^1$  ゆえ,  $\partial(\mathbb{M}\mathbb{O} \times S^1) = T^2$  となることから,  $|\mathbb{C}\mathbb{C}\rangle$  は 1.4.1 で構成した基底できるということである. すなわち, クロスキャップ状態は次のようにかける:

$$\begin{aligned} |\mathbb{C}\mathbb{C}\rangle &= \sum_{a \in \mathcal{C}} M_a |a\rangle \\ &= \sum_{a \in \mathcal{C}} \tilde{\eta}(a) S |a\rangle. \end{aligned} \quad (3.113)$$

ここで  $M_a, \tilde{\eta}(a)$  はそれぞれの基底に対する係数として導入した量であるが, それぞれ重要な意味を持っていることをこれから見ていく.

#### 3.4.1 $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ 上のベクトル空間の次元

まず  $M_a$  に注目しよう.  $M_a$  は次のように得られる:

$$M_a = \langle a | \mathbb{C}\mathbb{C} \rangle = \sum_b \tilde{\eta}(a) S_{ab}. \quad (3.114)$$

ここで

$$\begin{aligned} \langle a | &= Z(-D^2(a) \times S^1), \\ |\mathbb{C}\mathbb{C}\rangle &= Z(\mathbb{M}\mathbb{O} \times S^1) \end{aligned} \quad (3.115)$$

であるからその内積は

$$\begin{aligned} \langle a | \text{CC} \rangle &= Z(\text{MIO} \times S^1 \cup_{T^2} -D^2(a) \times S^1) \\ &= Z(\mathbb{RP}^2(a) \times S^1) \end{aligned} \quad (3.116)$$

と計算される．ここで  $\mathbb{RP}^2(a)$  は  $a$  でラベルされた **puncture** 付きの  $\mathbb{RP}^2$  を表しており， $\text{MIO}$  と  $D^2(a)$  の境界  $S^1$  にそって貼り合わせて得られた．またここでベクトル空間の次元公式を思い出すと， $M_a$  は次のように解釈できる：

$$M_a = \dim V(\mathbb{RP}^2(a)). \quad (3.117)$$

ここで注意が必要である．もし与えられたモジュラーテンソル圏に対して向き付け不可能な TQFT が存在するならば上の式は成り立ち，当然  $M_a \in \mathbb{Z}$  が従う．ところが向き付け不可能な TQFT の厳密な構成は未だ知られておらず， $M_a$  を  $\dim V(\mathbb{RP}^2(a))$  として解釈できるかすら非自明なわけである．そこで，この  $M_a$  の整数性は TQFT の存在の必要条件として解釈される．より正確には  $M_a$  の整数性は時間反転対称性の  $H^3$  障害が消えるならば従う事が期待されている． $H^3$  障害が消えているならばアノマリー流入の仮定<sup>42</sup>の元では  $M_a$  の整数性が従う事が示されている．

それに関する現状としては，[BC17] では非可換エニオン系で  $M_a$  が非整数となる例を計算している．ところがここで現れる時間反転作用は  $\mathbb{Z}_4^T$  のゲージングから得られたものなどであり，ある意味で **intrinsic** な時間反転対称性のある系で  $H^3$  障害が非自明な例は筆者の知見にはない．一方，可換エニオン系については [Ori25b] にて， $H^3$  障害が消えるならば  $M_a \in \mathbb{Z}$  が成り立つことが示されている．ここではアノマリー流入の仮定は用いておらず表現論的に証明されている．さらに，[Ori25d] にて可換エニオン系の  $H^3$  障害が消えることも示されているため， $M_a \in \mathbb{Z}$  は一般に従う．

### 3.4.2 局所クラマース縮退と対称性の分数化

**クラマース縮退** TQFT に限らず，一般の量子系において時間反転対称性がある時にフェルミオニックな状態は必ず縮退する事が知られており，そうした現象をクラマース縮退 (Kramers degeneracy) という．まず次が与えられたとする：

- ヒルベルト空間  $\mathcal{H}$
- ハミルトニアン  $H \in \text{End} \mathcal{H}$

<sup>42</sup>これが数学的には確立されていない立場であることには注意が必要である．というのも，Reshetikhin–Turaev TQFT がまだ向き付け不可能な場合に構成されていないのに，さらにそのアノマリーは Crane–Yetter でかけるというのは非常に強い仮定と言える．もちろんこれはこの主張が誤りであると言いたいのではないが，まだ数学的証明とは言えないことに注意いただきたい．

- 反ユニタリーな  $\mathbb{Z}_2$  作用素  $T_{\mathcal{H}} \in \text{End}\mathcal{H}$
- ハミルトニアン  $H$  の固有状態  $\psi \in \mathcal{H}$ , i.e.  $H\psi = E\psi$

ここで系が時間反転対称で  $T_{\mathcal{H}}^2\psi = -\psi$  であることを仮定する<sup>43</sup>. この時,

$$\begin{aligned} H(T_{\mathcal{H}}\psi) &= T_{\mathcal{H}}H\psi \\ &= E(T_{\mathcal{H}}\psi) \end{aligned} \quad (3.118)$$

より  $T_{\mathcal{H}}\psi$  も  $H$  の固有状態である. 縮退がないとすると, ある  $\xi \in U(1)$  が存在して

$$T_{\mathcal{H}}\psi = \xi\psi \quad (3.119)$$

と書けるが,

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{H}}^2\psi &= T_{\mathcal{H}}\xi\psi \\ &= \xi^*T_{\mathcal{H}}\psi \\ &= \xi^*\xi\psi \\ &= \psi \end{aligned} \quad (3.120)$$

となり矛盾. 従って  $T_{\mathcal{H}}\psi$  と  $\psi$  が縮退している事がわかる.

このクラマース縮退の TQFT における類似物として局所クラマース縮退という概念が知られている [WL16]:

$$\mathcal{T}_a^2 = \begin{cases} \pm 1 & a = \mathbb{T}a, \\ 0 & a \neq \mathbb{T}a \end{cases} \quad (3.121)$$

さて, 式 (3.57) で導入された時間反転作用の対称性の分数化を思い出すと  $a = \mathbb{T}a$  なる  $a \in \mathcal{C}$  に対して  $\eta(a) \in \{\pm 1\}$  で, これはゲージ不変な量なのであった. このクラマース縮退は  $a = \mathbb{T}a$  を満たす  $a \in \mathcal{C}$  の対称性の分数化の位相  $\eta(a) = \eta_a(\mathbf{T}, \mathbf{T})$  として理解されている. その両者が  $\mathbb{T}^2$  に対する射影位相の一種と解釈できることから自然に感じられるだろう.

**$\tilde{\eta}(a)$  の考察** 同様にして  $\tilde{\eta}(a)$  は次のようにして得られる:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(a) &= \langle a | S^{-1} | \mathbb{C}\mathbb{C} \rangle \\ &= Z(X(a)). \end{aligned} \quad (3.122)$$

<sup>43</sup>  $H^2(\mathbb{Z}_2, U(1)) \cong \mathbb{Z}_2$  より, 時間反転作用には射影表現が存在することに注意.

ここで

$$X(a) = \frac{S^2(a, \overline{Ta}) \times [0, 1]}{(x, 0) \sim (-x, 1)} \quad (3.123)$$

である [TY16b](導出は App. D を参照).

よって  $\tilde{\eta}(a)$  は次のように書ける:

$$\tilde{\eta}(a) = \text{Tr}_{V(S^2(a, \overline{Ta}))} P_{S^2}. \quad (3.124)$$

ここで  $V(S^2(a, a'))$  は, 二つのエニオン  $a, a' \in \mathcal{C}$  をそれぞれ  $(1, 0, 0)$  と  $(-1, 0, 0)$  に挿入した  $S^2$  上のベクトル空間を表し,

$$P_{S^2}: V(S^2(a, a')) \rightarrow V(S^2(Pa', Pa)) = V(S^2(\overline{Ta'}, \overline{Ta})) \quad (3.125)$$

は,  $S^2$  における反転作用  $(n_x, n_y, n_z) \mapsto (-n_x, n_y, n_z)$  に伴う作用素である. ただし  $S^2 = \{\vec{n} = (n_x, n_y, n_z) \mid |\vec{n}| = 1\}$  としている.

ここで  $a' = \overline{Ta}$  と置くと,  $P_{S^2}$  は

$$P_{S^2}: V(S^2(a, \overline{Ta})) \rightarrow V(S^2(a, \overline{Ta})) \quad (3.126)$$

となる. ここで

$$\dim V(S^2(a, \overline{Ta})) = \begin{cases} 1 & a = Ta, \\ 0 & a \neq Ta \end{cases} \quad (3.127)$$

に注意すると  $a = Ta$  なる  $a \in \mathcal{C}$  に対して

$$\tilde{\eta}(a) \in U(1) \quad (3.128)$$

となり,  $a \neq Ta$  なる  $a \in \mathcal{C}$  に対して

$$\tilde{\eta}(a) = 0 \quad (3.129)$$

となる事がわかる. さらに [Ori25b] で  $a = Ta$  なる  $a \in \mathcal{C}$  に対して

$$\tilde{\eta}(a) \in \{\pm 1\} \quad (3.130)$$

が示された<sup>44</sup>.

まとめると, クロスキャップ状態の係数について次のことがわかった:

<sup>44</sup> $\pm 1$  に値を取るのは自明なようであるが, それは, 反転という  $\mathbb{Z}_2$  の  $V(S^2(a, \overline{Ta}))$  への作用が射影表現にはならないという非自明な仮定を置いていることになる.

$$\tilde{\eta}(a) = \begin{cases} \pm 1 & a = Ta \\ 0 & a \neq Ta \end{cases} \quad (3.131)$$

現在,  $a = Ta$  なる  $a \in \mathcal{C}$  に対して, このクロスキャップ状態の係数  $\tilde{\eta}(a)$  と対称性の分数化  $\eta(a)$  は同じものであると理解されている [BBCW14, TY16b, WL16]. そこで, この先は断りのない限りクロスキャップ状態の係数  $\tilde{\eta}(a)$  も  $\eta(a)$  と書く. すなわち

$$\begin{aligned} a = Ta \text{ である } a \in \mathcal{C} \text{ に対して} \\ \text{局所クラマース縮退 } \mathcal{T}_a^2 \\ = \text{クロスキャップ状態の係数 } \tilde{\eta}(a) \\ = \text{対称性の分数化 } \eta(a) = \eta_a(\mathbf{T}, \mathbf{T}) \end{aligned} \quad (3.132)$$

### 3.4.3 アノマリー流入とアノマリー公式

**アノマリー流入** アノマリーの分類に関して, 広く信じられている次の予想がある:

$$\{d \text{ 次元時空のアノマリー}\} = \{d+1 \text{ 次元時空の SPT 相}\}. \quad (3.133)$$

ここで SPT 相とは, Symmetry Protected Topological Phase のことであり, 全ての空間にアサインするベクトル空間の次元が 1 であるような TQFT のことである. 上式の主張は,  $d$  次元時空  $M$  上の理論のアノマリーは,  $M$  を境界に持つような  $d+1$  次元時空  $N$  の SPT 相で打ち消すことができるということである.

そうした TQFT には非自明なエニオンは存在せず, その情報を指定するのは時空構造や対称性という構造付きの多様体である. それゆえ  $d$  次元の  $H$  構造付き  $G$  対称 SPT 相の分類は

$$\Omega_d^H(BG)$$

を参照すれば良い<sup>45</sup>. 例えば 4 次元フェルミオニックな  $SU(2)$  ゲージ理論のアノマリーが知りたければ

$$\Omega_5^{Spin}(BSU(2)) \cong \mathbb{Z}_2$$

を見ればよく, 実際このボルディズムに対応する SPT 相は Witten アノマリーを相殺することが知られている.

<sup>45</sup>非摂動アノマリーについてはこの主張は正しいが, より正確には, そのアンダーソン双対を参照しないと摂動アノマリーの情報は見ることができない. 詳しくは e.g. [川 24]

**Relative QFT** 実は上で述べた概念はより一般的な Relative QFT という概念の一部であると言える [FT12]<sup>46</sup>.  $d+1$ 次元 TQFT の定義を思い出すと  $d$ 次元の空間にはベクトル空間をアサインするのであった. 特に  $d+1$ 次元の SPT 相に対応する TQFT(すなわち可逆場の理論)を考えると  $M^d$ には  $V(M^d)$ をアサインする. アノマリー流入の主張は時空全体で評価したと思っていた分配関数  $Z(M^d)$ は実はさらに次元高い TQFT が  $M^d$ にアサインする次元ベクトル空間の元である, ということである. すなわち

$$Z(M^d) \in V(M^d) = Z^{\text{Bulk}}(M^d). \quad (3.134)$$

我々はそのベクトル空間に住む物理的状態について位相の不定性は許すことを思い出すと, アノマリーを持つ  $M^d$ 上の理論は, さらに次元高い TQFT が  $M^d$ にアサインする次元ベクトル空間に住む状態であり, その立場に立つと位相の不定性は自然に感じる. このように次元高いバルクの理論と境界の理論を合わせて well-defined であるような場の理論を一般に Relative QFT と呼び, 2.2.2 で扱った Chern–Simons, Wess–Zumino–Witten 対応もその一例と言える. 逆に Relative でない QFT を Absolute QFT と呼ぶ.

**時間反転対称性のアノマリー** 我々の扱う時間反転対称性のある 3次元理論に現れるアノマリーは 4次元の SPT 相を見ればよい. 我々が調べるべきは 3次元ボゾニックな時間反転対称な理論であるから, 次のボルディズムを参照すれば良い.<sup>47</sup>

$$\Omega_4^O(\text{pt}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2. \quad (3.135)$$

すなわち, time-reversal に対応する SPT 相 (に対応する 4次元多様体)は二種類ある. その多様体は  $\mathbb{RP}^4, \mathbb{CP}^2$ であり, 対応する SPT 相の分配関数は次式で与えられることが知られている:

$$Z_{\text{CY}}(\mathbb{CP}^2) = \frac{1}{D} \sum_a d_a^2 \theta(a), \quad Z_{\text{CY}}(\mathbb{RP}^4) = \frac{1}{D} \sum_a d_a \eta(a) \theta(a). \quad (3.136)$$

ここで CY と書いているのは Crane–Yetter の意味である. 本修士論文で扱う TQFT は 3次元の Reshetikhin–Turaev TQFT であるが, それに対応するバルクの TQFT は 4次元の Crane–Yetter TQFT であることが知られている. その意味で他のところに出てきている  $Z$ とは関手として異なるため, それらを区別するためのものである. また,  $\Omega_4^O(\text{pt}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . から分かるようにこれらは  $\{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}_2$  に値を取る.<sup>48</sup>

これらの分配関数が我々の扱う理論のアノマリーの分類を与えるわけであるが, さらに

<sup>46</sup>Relativistic とは大きく異なる概念であることに注意.

<sup>47</sup> $\Omega_4^O(\text{pt}) \cong \Omega_4^{SO}(B\mathbb{Z}_2, \rho)$  という事実が背後にある. ここで  $\rho$  は時間反転作用を表すための twist を encode している. 詳しくは [Kap14] を見よ.

<sup>48</sup> $Z_{\text{CY}}(\mathbb{RP}^4) \in \mathbb{Z}_2$  はまともな TQFT なら従うが微妙な問題でもあり,  $H^3$  障害が消えるための必要条件の一部としても解釈される [BC17].

これらの積には非自明な制限がかかることを説明する.

時間反転対称性に関するアノマリー公式は次式で与えられる:

$$Z_{\text{CY}}(\mathbb{CP}^2) \cdot Z_{\text{CY}}(\mathbb{RP}^4) = \theta_{\mathcal{M}}. \quad (3.137)$$

ここで  $\theta_{\mathcal{M}}$  はクロスキャップ状態

$$|\mathbb{CC}\rangle = \sum_a M_a |a\rangle \quad (3.138)$$

のデーンツイストから出る位相である. クロスキャップ状態にデーンツイストを施すと

$$T|\mathbb{CC}\rangle = \sum_a M_a \theta(a) |a\rangle \quad (3.139)$$

となるが, デーンツイストによりこの多様体のトポロジーは変わらないことからこれは元と同じ状態を定める [BBJ<sup>+</sup>16, TY16a]:

$$\sum_a M_a \theta(a) |a\rangle \propto \sum_a M_a |a\rangle. \quad (3.140)$$

すなわち,  $M_a \neq 0$  なる全ての  $a \in \mathcal{C}$  に対して  $\theta(a) = \text{const.}$  となることがわかる. そこで,

$$\mathcal{M} := \{a \in \mathcal{C} \mid M_a \neq 0\} \quad (3.141)$$

と定め,  $a \in \mathcal{M}$  に対する  $\theta(a)$  を  $\theta_{\mathcal{M}}$  と書いている. 可換エニオン系の時,  $\mathcal{M}$  は次のように言い換える事ができる [Ori25b]:

$$\mathcal{M} := \{a \in \mathcal{A} \mid B(a, b) = \eta(b) \text{ が全ての } b \in \text{Ker}(1 - T) \text{ に対して成り立つ.}\}. \quad (3.142)$$

このアノマリー公式を導こう.

$$\begin{aligned}
Z_{\text{CY}}(\mathbb{C}\mathbb{P}^2) \cdot Z_{\text{CY}}(\mathbb{R}\mathbb{P}^4) &= \frac{1}{\mathcal{D}} \sum_c d_c^2 \theta(c) \cdot \frac{1}{\mathcal{D}} \sum_b d_b \eta(b) \theta(b) \\
&= \frac{1}{\mathcal{D}^2} \sum_{a,b,c} d_c N_{cb}^a d_a \theta(c) \theta(\mathbb{T}b) \eta(b) \\
&= \frac{1}{\mathcal{D}} \sum_{a,b,c} d_a \theta(a) \eta(b) \cdot \frac{1}{\mathcal{D}} N_{ab}^c \frac{\theta(c)}{\theta(a)\theta(b)} d_c \quad (3.143) \\
&= \frac{1}{\mathcal{D}} \sum_c d_a \theta(a) S_{ab} \eta(b) \\
&= \frac{1}{\mathcal{D}} \sum_a d_a \theta(a) M_a.
\end{aligned}$$

ここで  $M_a \neq 0$  なる全ての  $a \in \mathcal{C}$  に対して  $\theta(a) = \text{const.}$  となることからこれは次のようにかける:

$$\frac{1}{\mathcal{D}} \sum_a d_a \theta(a) M_a = \theta_{\mathcal{M}} \frac{\sum_a d_a M_a}{\mathcal{D}}. \quad (3.144)$$

ここでその右辺について

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_a d_a M_a}{\mathcal{D}} &= \sum_{a,b} \frac{d_a}{\mathcal{D}} S_{ab} \eta(b) \\
&= \sum_{a,b} S_{1a} S_{ab} \eta(b) \quad (3.145) \\
&= \sum_b \delta_{1b} \eta(b) \\
&= 1
\end{aligned}$$

より

$$\frac{1}{\mathcal{D}} \sum_a d_a \theta(a) M_a = \theta_{\mathcal{M}}. \quad (3.146)$$

以上より

$$Z_{\text{CY}}(\mathbb{C}\mathbb{P}^2) \cdot Z_{\text{CY}}(\mathbb{R}\mathbb{P}^4) = \theta_{\mathcal{M}} \quad (3.147)$$

を得る.

## 第II部 時間反転対称な位相的場の理論のこれから

### 4 アノマリー公式の拡張

この章では, [Ori25c] で導出されたアノマリー公式の一般化について解説する. また, Sec. 4 では可換エニオン系に焦点を当てて議論する.

#### 4.1 ラグランジアン部分群

##### 4.1.1 トポロジカル境界条件

さて, TQFT の定義を思い出してみよう. するとある時刻のタイムスライスにおいては空間的境界はないものしか考えることができないことに気づく. ところが, 物理的には境界付きの空間を扱う枠組みが欲しい. TQFT の枠組みに対して整合的な, すなわちトポロジーを変えない範囲で自由に動かすことのできる境界をポロジカル境界条件 (topological boundary condition, gapped boundary condition) と呼ぶ<sup>49</sup>. ここで, モジュラーテンソル圏  $\mathcal{C}$  が与えられた時, トポロジカル境界条件が存在するかどうかは非自明な問題であることに注意しよう. ここで可換エニオン系, 非可換エニオン系に対してのトポロジカル境界条件の存在の必要十分条件をリストアップしておく [KKO<sup>+</sup>22](表 4.1).

可換エニオン系	非可換エニオン系
ラグランジアン部分群	ラグランジアン代数
可換 Dijkgraaf–Witten 理論	Turaev–Viro 理論 / Drinfeld 中心
高次中心電荷の自明性	?

Table 4.1: 可換/非可換エニオン系におけるトポロジカル境界条件の存在の必要十分条件

与えられた TQFT がトポロジカル境界条件を持つかどうかの判定は, TQFT における中心的な興味の一つである. 可換エニオン系の場合, この問題に対する必要十分条件に次のようなものが知られている [KS10, FSV12]:

<sup>49</sup>正確にはモジュラーテンソル圏  $\mathcal{C}$  に対するトポロジカル境界条件とは, 左  $\mathcal{C}$ -加群圏のことである.

トポロジカル境界条件の存在の必要十分条件は、ラグランジアン部分群の存在である。

ここで、ラグランジアン部分群 (Lagrangian subgroup) とは次を満たす部分群  $L \subset \mathcal{A}$  のことである：

$L \subset \mathcal{A}$  が以下を満たすときラグランジアン部分群と呼ぶ：

- $\theta(a) = 1 \quad (\forall a \in L)$ ,
- $B(a, b) = 1 \quad (\forall a, b \in L)$ ,
- $|L|^2 = |\mathcal{A}|$ ,
- 任意の  $a \in \mathcal{A} \setminus L$  に対して、ある  $b \in L$  が存在し  $B(a, b) \neq 1$ .

直感的には、トポロジカル境界条件は非自明な TQFT と自明な TQFT との境界とみなすことができる。ラグランジアン部分群とは、エニオン凝縮によって理論が自明になる可換エニオンの部分群のことである。したがって、エニオン系がそのような部分群を持つならば、部分群に含まれるエニオンを時空全体の部分空間で凝縮させることでトポロジカル境界条件を構成できる。

よって、トポロジカル境界条件の存在を確かめる問題はラグランジアン部分群を見つける問題に帰着する。しかし、そのような部分群を見つけることは一般には容易ではない。そのため、次節で紹介するような、計算可能な不変量を用いたトポロジカル境界条件の存在の判定がなされている。

**$|\mathcal{A}|$  が奇数の場合：** [LT18] では、 $|\mathcal{A}|$  が奇数である任意の時間反転対称な可換エニオン系はゲージ理論として実現できることが示された。したがって、そのような系はトポロジカル境界条件を持つ。従って、これから述べることに本質的に新規性はないが将来の応用のためにここでいくつかの事項を示しておく。以下しばらく、 $|\mathcal{A}|$  が奇数であることを仮定する。

我々は次を示す：

$\mathcal{M}$  は  $|\mathcal{A}|$  が奇数であるような可換エニオン系に対するラグランジアン部分群である。

まず、次の命題を証明する：

$$\text{Ker}(1 - T) = \text{Im}(1 + T). \quad (4.1)$$

包含関係

$$\text{Im}(1 + T) \subset \text{Ker}(1 - T) \quad (4.2)$$

は明らかである. 次に  $a \in \text{Ker}(1 - T)$  を取る.  $|A|$  が奇数のとき, 任意の  $a \in A$  はある一意的な  $b \in A$  に対して  $a = 2b$  と書ける. これを  $a/2$  と書き,

$$a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2} + \frac{Ta}{2} = (1 + T)\frac{a}{2} \in \text{Im}(1 + T) \quad (4.3)$$

が成り立つ. よって,

$$\text{Ker}(1 - T) \subset \text{Im}(1 + T) \quad (4.4)$$

が従い, 結論として

$$\text{Ker}(1 - T) = \text{Im}(1 + T) \quad (4.5)$$

を得る.

次に, 以下を示す:

$$\mathcal{M} = \text{Im}(1 + T). \quad (4.6)$$

まず,  $a \in \text{Ker}(1 - T)$  に対して  $\eta(a) = 1$  を示すのは容易である:

$$\eta(a) = \eta\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) = \eta\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 1. \quad (4.7)$$

ここでは,  $a \in \text{Ker}(1 - T)$  なら  $a/2 \in \text{Ker}(1 - T)$  であること,  $\eta$  が準同型であること,  $\eta(a) \in \{\pm 1\}$  であることを用いた. よって  $\mathcal{M}$  の任意の元  $a$  について,

$$B(a, b) = \eta(b) = 1 \quad (\forall b \in \text{Ker}(1 - T)) \quad (4.8)$$

が成り立つ.

直交関係

$$\text{Ker}(1 - T) = [\text{Im}(1 + T)]^\perp \quad (4.9)$$

を用いれば,

$$\mathcal{M} \subset \text{Im}(1 + T) \quad (4.10)$$

を得る. 逆に,  $a \in \text{Im}(1 + T)$  なら直交関係から

$$\text{Im}(1 + T) \subset \mathcal{M} \quad (4.11)$$

が従う. したがって,

$$\mathcal{M} = \text{Im}(1 + T) \quad (4.12)$$

が示された.

次に,

$$\theta_{\mathcal{M}} = 1 \quad (4.13)$$

を示す. 任意の  $a \in \mathcal{A}$  について,

$$\theta_{\mathcal{M}} = \theta((1 + T)a) = B(a, Ta) \theta(a) \theta(Ta) = \eta((1 + T)a)^{-1} = 1, \quad (4.14)$$

ここでは式 (3.65) の整合条件を用いた.

以上より,

$$L := \text{Im}(1 + T) = \text{Ker}(1 - T) = \mathcal{M} \quad (4.15)$$

と定義すれば, 一つ目と二つ目のラグランジアン部分群である条件は  $\theta_{\mathcal{M}} = 1$  および  $\text{Ker}(1 - T) \perp \text{Im}(1 - T)$  から直ちに従う.

三つ目の条件は恒等式

$$|\mathcal{A}| = |\text{Ker}(1 - T)| \cdot |\text{Im}(1 - T)| \quad (4.16)$$

から従う.

四つ目の条件:  $a \in \mathcal{A} \setminus \text{Im}(1 + T) = \mathcal{A} \setminus L$  に対し,  $b \in L = \text{Ker}(1 - T)$  で  $B(a, b) \neq 1$  が存在することについては, もし任意の  $b \in L$  で  $B(a, b) = 1$  ならば,

$$a \in \text{Ker}(1 - T)^\perp = \text{Im}(1 + T) \quad (4.17)$$

となり,  $a \notin \text{Im}(1 + T)$  と矛盾する. 以上より,  $|\mathcal{A}|$  が奇数のとき,  $\mathcal{M}$  がラグランジアン部分群である事が従う.

#### 4.1.2 カイラル中心電荷と高次中心電荷

モジュラーテンソル圏の持つ情報の一つであるカイラル中心電荷はトポロジカル境界条件の存在の必要条件としても知られている:

トポロジカル境界条件が存在するためには  $c_- \equiv 0 \pmod{8}$  が必要である.

時間反転対称性のもとでは,  $c_-$  は

$$c_- \equiv 0, 4 \pmod{8} \quad (4.18)$$

のいずれかに値を取る.: これは次の計算からわかる<sup>50</sup>:

$$\begin{aligned}
 e^{2\pi ic-/8} &= \frac{1}{|\mathcal{A}|^{1/2}} \sum_{a \in \mathcal{A}} \theta(a) \\
 &= \frac{1}{|\mathcal{A}|^{1/2}} \sum_{a \in \mathcal{A}} \theta(\tau a) \\
 &= \frac{1}{|\mathcal{A}|^{1/2}} \sum_{a \in \mathcal{A}} \overline{\theta(a)} \\
 &= e^{-2\pi ic-/8},
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

特に  $|\mathcal{A}|$  が奇数の場合,

$$c_- \equiv 0 \pmod{8} \tag{4.20}$$

である. これはそのような理論がゲージ理論として実現できることから理解できる [LT18]. しかし, 上の条件はあくまで必要条件であり十分条件ではない. カイラル中心電荷を拡張した不変量として高次中心電荷 (Higher central charge) が知られている. この不変量は数学者により定義され [NSW18, NRWZ20], 後に物理的解釈として, 可換エニオン系におけるトポロジカル境界条件の存在の必要十分条件を与えることが示された [KKO<sup>+</sup>22].

その定義は次の通りである:

$$\xi_n := \frac{\sum_{a \in \mathcal{A}} \theta(a)^n}{\left| \sum_{a \in \mathcal{A}} \theta(a)^n \right|}, \tag{4.21}$$

ただし  $n \in \mathbb{N}$  は

$$\gcd\left(n, \frac{2|\mathcal{A}|}{\gcd(n, 2|\mathcal{A}|)}\right) = 1 \tag{4.22}$$

を満たす.

この時, 次の事実がある<sup>51</sup>:

可換エニオン系が境界を持つための必要十分条件は, 上の条件を満たす全ての  $n$  について  $\xi_n = 1$  となることである.

また,

$$\xi_n = \xi_{n+2|\mathcal{A}|} \tag{4.23}$$

<sup>50</sup>非可換エニオン系の場合も同様の計算で示す事ができる.

<sup>51</sup>非可換エニオン系に対しては成り立たないことに注意.

が成り立つので、高次中心電荷の計算は有限個に落ち着く．この不変量は従来のラグランジアン部分群の特定の代替手段となる．本修士論文では以降、

$$\mathbb{N}_c := \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \gcd\left(n, \frac{2|\mathcal{A}|}{\gcd(n, 2|\mathcal{A}|)}\right) = 1 \right\} \quad (4.24)$$

と書く．すなわち、高次中心電荷  $\xi_n$  は  $n \in \mathbb{N}_c$  に対してのみ定義される．

## 4.2 アノマリー公式の一般化

### 4.2.1 公式の主張

時間反転対称性に対するアノマリー公式は次式で与えられる [BBJ<sup>+</sup>16, WL16, Ori25b]:

$$Z(\mathbb{RP}^4) Z(\mathbb{CP}^2) = \theta_{\mathcal{M}}. \quad (4.25)$$

この式は可換エニオン系では次のように書ける:

$$\frac{1}{|\mathcal{A}|^{1/2}} \sum_{a \in \text{Ker}(1-T)} \theta(a)\eta(a) \cdot \frac{1}{|\mathcal{A}|^{1/2}} \sum_{a \in \mathcal{A}} \theta(a) = \theta_{\mathcal{M}}. \quad (4.26)$$

さらに、その左辺は次のように書き直せる:

$$\frac{\sum_{a \in \text{Ker}(1-T)} \theta(a)\eta(a)}{\left| \sum_{a \in \text{Ker}(1-T)} \theta(a)\eta(a) \right|} \cdot \frac{\sum_{a \in \mathcal{A}} \theta(a)}{\left| \sum_{a \in \mathcal{A}} \theta(a) \right|}. \quad (4.27)$$

ここから高次中心電荷

$$\xi_n := \frac{\sum_{a \in \mathcal{A}} \theta(a)^n}{\left| \sum_{a \in \mathcal{A}} \theta(a)^n \right|} \quad (4.28)$$

を含むような一般化を考えたい．そこで次の量

$$\eta_n := \frac{\sum_{a \in \text{Ker}(1-T)} (\theta(a)\eta(a))^n}{\left| \sum_{a \in \text{Ker}(1-T)} (\theta(a)\eta(a))^n \right|} \quad (4.29)$$

を導入し  $\eta_n \cdot \xi_n$  をアノマリー公式の一般化として定義する．この式について次が成り立つことを見ていく:

$$\eta_n \cdot \xi_n = \frac{\sum_{a \in \mathcal{E}^n} \theta(a)^n}{\left| \sum_{a \in \mathcal{E}^n} \theta(a)^n \right|}. \quad (4.30)$$

ただし,  $\mathcal{E}^n$  を次のように定義した.

$$\mathcal{E}^n := \frac{\text{Im}^n(1 + T)}{\text{Im}(1 + T)} \text{ トーサー} \quad (4.31)$$

で次を満たす:

$$B(a, nb) = \eta(nb) \text{ が全ての } a \in \mathcal{E}^n \text{ に対して成り立つ.} \quad (4.32)$$

ここで  $\text{Im}^n(1 + T)$  の定義は次式である:

$$\text{Im}^n(1 + T) := \{a \in \mathcal{A} \mid na \in \text{Im}(1 + T)\}. \quad (4.33)$$

(4.30) を導く前に,  $\mathcal{M}^n$  を次のように導入する:

$$\mathcal{M}^n := \{a \in \mathcal{A} \mid B(a, nb) = \eta(nb) \text{ が全ての } b \in \text{Ker}(1 - T) \text{ に対して成り立つ}\}. \quad (4.34)$$

まず  $\mathcal{M}^n$  を含む形で公式を導き, そこから  $\mathcal{E}^n$  を含む形に変形する.

ここで  $n$  は集合  $\mathbb{N}_c$  からとっていることに注意しよう. このアノマリー公式は,  $\xi_n$  同様,  $n \in \mathbb{N}_c$  なる  $n$  に対してのみ定義される.

## 4.2.2 公式の導出

導出の準備として, 次の三つの事実を示す:

- $\eta_n$  は次の形を取る:

$$\eta_n = \begin{cases} 1 & n \text{ が偶数,} \\ Z(\mathbb{RP}^4) & n \text{ が奇数.} \end{cases} \quad (4.35)$$

- 次式が成り立つ:

$$\left| \sum_{a \in \text{Ker}(1 - T)} (\theta(a) \eta(a))^n \right| = \begin{cases} |\text{Ker}(1 - T)| & n \text{ が偶数} \\ |\mathcal{A}|^{1/2} & n \text{ が奇数} \end{cases}. \quad (4.36)$$

•  $\widetilde{M}_{n,a}$  を次のように定義する:

$$\widetilde{M}_{n,a} := \sum_{b \in \text{Ker}(1-T)} B(-a, nb) \eta(nb). \quad (4.37)$$

その時,  $\widetilde{M}_{n,a}$  は次を満たす:

$$\widetilde{M}_{n,a} = \begin{cases} |\text{Ker}(1-T)| & a \in \mathcal{M}^n, \\ 0 & a \notin \mathcal{M}^n. \end{cases} \quad (4.38)$$

(4.35):  $n$  が偶数の時,  $n = 2n'$  とすると:

$$(\theta(a)\eta(a))^{2n'} = (\theta(a)^2\eta(a)^2)^{n'} = (\theta(a)\theta(Ta))^{n'} = 1. \quad (4.39)$$

$n$  が奇数の時,  $n = 2n' + 1$  とすると:

$$(\theta(a)\eta(a))^{2n'+1} = (\theta(a)\eta(a))^{2n'} \theta(a)\eta(a) = \theta(a)\eta(a). \quad (4.40)$$

それゆえ, 4.35 が従う.

(4.36):  $n$  が偶数の時, 与式は次のようになる:

$$\left| \sum_{a \in \text{Ker}(1-T)} (\theta(a)\eta(a))^n \right| = \sum_{a \in \text{Ker}(1-T)} 1 = |\text{Ker}(1-T)|. \quad (4.41)$$

$n$  が奇数の時, 与式は次のようになる:

$$\left| \sum_{a \in \text{Ker}(1-T)} (\theta(a)\eta(a))^n \right| = \left| \sum_{a \in \text{Ker}(1-T)} \theta(a)\eta(a) \right| = |\mathcal{A}|^{1/2} \cdot |Z(\mathbb{RP}^4)| = |\mathcal{A}|^{1/2}. \quad (4.42)$$

(4.38): 次の事実を使う:

写像  $\rho_{B,a}^n: \text{Ker}(1-T) \rightarrow U(1)$ ,  $\rho_\eta^n: \text{Ker}(1-T) \rightarrow \{\pm 1\}$  を次で定義する:

$$\rho_{B,a}^n(b) := B(a, nb), \quad (4.43)$$

$$\rho_\eta^n(b) := \eta(nb). \quad (4.44)$$

するとこれらは準同型であるから、有限可換群  $\text{Ker}(1 - T)$  の一次元表現 (指標) を定める.

$\widetilde{M}_{n,a}$  は次のように書ける:

$$\widetilde{M}_{n,a} = \sum_{b \in \text{Ker}(1-T)} \overline{\rho_{B,a}^n(b)} \rho_{\eta}^n(b). \quad (4.45)$$

すると指標の直交性より, 次が従う:

$$\widetilde{M}_{n,a} = \begin{cases} |\text{Ker}(1 - T)| & \rho_{B,a}^n = \rho_{\eta}^n, \\ 0 & \rho_{B,a}^n \neq \rho_{\eta}^n. \end{cases} \quad (4.46)$$

定義より

$$\rho_{B,a}^n(b) = B(a, nb), \quad \rho_{\eta}^n(b) = \eta(nb). \quad (4.47)$$

すると  $\rho_{B,a}^n = \rho_{\eta}^n$  と次が同値であることが分かる:

$$B(a, nb) = \eta(nb) \text{ が全ての } b \in \text{Ker}(1 - T) \text{ に対して成り立つ,} \quad (4.48)$$

すなわち,  $a \in \mathcal{M}^n$ . それゆえ, 次の結論を得る:

$$\widetilde{M}_{n,a} = \begin{cases} |\text{Ker}(1 - T)| & a \in \mathcal{M}^n, \\ 0 & a \notin \mathcal{M}^n. \end{cases} \quad (4.49)$$

さて, ここから次の式を導く:

$$\eta_n \cdot \xi_n = \frac{\sum_{a \in \mathcal{M}^n} \theta(a)^n}{\left| \sum_{a \in \mathcal{M}^n} \theta(a)^n \right|}. \quad (4.50)$$

そこで, 上で導いた二つの事実を使う:

$$\bullet \quad \left| \sum_{a \in \text{Ker}(1-T)} (\theta(a) \eta(a))^n \right| = \begin{cases} |\text{Ker}(1 - T)| & n \text{ が偶数,} \\ |\mathcal{A}|^{1/2} & n \text{ が奇数.} \end{cases} \quad (4.51)$$

$$\widetilde{M}_{n,a} = \begin{cases} |\text{Ker}(1 - \mathbb{T})| & a \in \mathcal{M}^n, \\ 0 & a \notin \mathcal{M}^n. \end{cases} \quad (4.52)$$

左辺を変形すると

$$\begin{aligned} \eta_n \cdot \xi_n &= \frac{\sum_{a \in \text{Ker}(1-\mathbb{T})} (\theta(a) \eta(a))^n}{\left| \sum_{a \in \text{Ker}(1-\mathbb{T})} (\theta(a) \eta(a))^n \right|} \cdot \frac{\sum_{b \in \mathcal{A}} \theta(b)^n}{\left| \sum_{b \in \mathcal{A}} \theta(b)^n \right|} \\ &= \frac{1}{\left| \sum_{a \in \text{Ker}(1-\mathbb{T})} (\theta(a) \eta(a))^n \right| \cdot \left| \sum_{b \in \mathcal{A}} \theta(b)^n \right|} \sum_{a \in \text{Ker}(1-\mathbb{T})} \sum_{b \in \mathcal{A}} (\theta(a) \eta(a) \theta(b))^n. \end{aligned} \quad (4.53)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \sum_{a,b \in \mathcal{A}} (\theta(a) \eta(a) \theta(b))^n &= \sum_{a,b \in \mathcal{A}} (\theta(a+b) B(-a, b) \eta(a))^n \\ &= \sum_{a,c \in \mathcal{A}} (\theta(c) B(-a, c-a) \eta(a))^n \\ &= \sum_{a,c \in \mathcal{A}} (\theta(c) B(a, a) B(-c, a) \eta(a))^n \end{aligned} \quad (4.54)$$

であるが,  $a \in \text{Ker}(1 - \mathbb{T})$ , すなわち  $\mathbb{T}na = na$  に注意すると

$$\begin{aligned} B(a, a)^n &= B(a, na) \\ &= B(a, \mathbb{T}na) \\ &= B(a, \mathbb{T}a)^n \\ &= \eta(-(1 + \mathbb{T})a)^n \\ &= \eta(-n(1 + \mathbb{T})a). \end{aligned} \quad (4.55)$$

以上より，次式を得る：

$$\begin{aligned}
\sum_{a,b \in \mathcal{A}} (\theta(a) \eta(a) \theta(b))^n &= \sum_{a,b \in \mathcal{A}} (\theta(a+b) B(-a, b) \eta(a))^n \\
&= \sum_{a,c \in \mathcal{A}} \theta(c)^n B(-c, na) \eta(na) \eta(-n(1+\mathbb{T})a) \\
&= \sum_{a,c \in \mathcal{A}} \theta(c)^n B(-c, na) \eta(-\mathbb{T}na) \\
&= \sum_{c \in \mathcal{A}} \theta(c)^n \sum_{a \in \text{Ker}(1-\mathbb{T})} B(-c, na) \eta(na) \\
&= \sum_{c \in \mathcal{A}} \theta(c)^n \cdot \widetilde{M}_{n,c} \\
&= |\text{Ker}(1-\mathbb{T})| \sum_{c \in \mathcal{M}^n} \theta(c)^n.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

ここで  $\widetilde{M}_{n,c}$  の表式 (4.49) を使った。

これを (4.53) に代入して，次式を得る：

$$\eta_n \cdot \xi_n = \frac{|\text{Ker}(1-\mathbb{T})|}{\left| \sum_{a \in \text{Ker}(1-\mathbb{T})} (\theta(a) \eta(a))^n \right| \cdot \left| \sum_{b \in \mathcal{A}} \theta(b)^n \right|} \cdot \sum_{c \in \mathcal{M}^n} \theta(c)^n. \tag{4.57}$$

ここで

$$\left| \sum_{a \in \text{Ker}(1-\mathbb{T})} (\theta(a) \eta(a))^n \right| = \begin{cases} |\text{Ker}(1-\mathbb{T})| & n \text{ が偶数,} \\ |\mathcal{A}|^{1/2} & n \text{ が奇数} \end{cases} \tag{4.58}$$

に注意して，次式を得る：

$$\eta_n \cdot \xi_n = \begin{cases} \frac{1}{\left| \sum_{a \in \mathcal{A}} \theta(a)^n \right|} \cdot \sum_{a \in \mathcal{M}^n} \theta(a)^n & n \text{ が偶数,} \\ \frac{|\text{Ker}(1-\mathbb{T})|}{|\mathcal{A}|^{1/2} \cdot \left| \sum_{a \in \mathcal{A}} \theta(a)^n \right|} \cdot \sum_{a \in \mathcal{M}^n} \theta(a)^n & n \text{ が奇数.} \end{cases} \tag{4.59}$$

$|\eta_n \cdot \xi_n| = 1$  に注意すると

$$\left| \sum_{a \in \mathcal{M}^n} \theta(a)^n \right| = \begin{cases} \left| \sum_{a \in \mathcal{A}} \theta(a)^n \right| & n \text{ が偶数,} \\ \frac{|\mathcal{A}|^{1/2} \cdot \left| \sum_{a \in \mathcal{A}} \theta(a)^n \right|}{|\text{Ker}(1-\mathbb{T})|} & n \text{ が奇数.} \end{cases} \tag{4.60}$$

すなわち

$$\eta_n \cdot \xi_n = \frac{\sum_{a \in \mathcal{M}^n} \theta(a)^n}{\left| \sum_{a \in \mathcal{M}^n} \theta(a)^n \right|} \quad (4.61)$$

となり, 示すべき式が得られた.

### 次元からの洞察

$\mathcal{M}^n$  の構造の詳細に立ち入る前に, その意味をベクトル空間の次元の観点からコメントしておこう. [BBJ<sup>+</sup>16] の式 (143) で示されているように,  $\Sigma_n(a_1, \dots, a_k)$  にアサインされるベクトル空間の次元は次式で与えられる:

$$\dim(V(\Sigma_n(a_1, \dots, a_k))) = \frac{1}{|\mathcal{A}|^{\frac{2-k}{2}}} \sum_{b \in \text{Ker}(1-T)} B(-(a_1 + \dots + a_k), b) \eta(nb). \quad (4.62)$$

ここで  $\Sigma_n(a_1, \dots, a_k)$  は  $n$  個のクロスキャップとエニオン  $a_1, \dots, a_k$  でラベルされた  $k$  個の puncture のある向き付け不可能曲面を表している.

ここで次の制限をかける:

$$a_1 + \dots + a_k = na. \quad (4.63)$$

すると次元の表式は次のようになる:

$$\dim(V(\Sigma_n(a_1, \dots, a_k))) = \frac{1}{|\mathcal{A}|^{\frac{2-k}{2}}} \sum_{b \in \text{Ker}(1-T)} B(-a, nb) \eta(nb) = \frac{1}{|\mathcal{A}|^{\frac{2-k}{2}}} \widetilde{M}_{n,a}. \quad (4.64)$$

この観点からすると  $\mathcal{M}^n$  のような集合と同定できる:

$$\mathcal{M}^n = \{a \in \mathcal{A} \mid \dim(V(\Sigma_n(na))) \neq 0\}. \quad (4.65)$$

この議論は少し一般化することができる.  $\Sigma_{n,m}(a_1, \dots, a_k)$  を  $m$  個のクロスキャップとエニオン  $a_1, \dots, a_k$  でラベルされた  $k$  個の puncture に次のような制限がかかった向き付け不可能曲面とする:

$$\begin{aligned} a_1 + \dots + a_k &= na, \\ n &\equiv m \pmod{2}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

すると  $\eta(a) \in \{\pm 1\}$  である事実から次が従う:

$$\{a \in \mathcal{A} \mid \dim(V(\Sigma_n(a_1, \dots, a_k))) \neq 0\} = \{a \in \mathcal{A} \mid \dim(V(\Sigma_{n,m}(a_1, \dots, a_k))) \neq 0\}. \quad (4.67)$$

$n = 1$  の場合 [Ori25b] の主結果の一つは次式である:

$$\dim(V(\Sigma_1(a))) = \dim(V(\mathbb{RP}^2(a))) \in \mathbb{N} \text{ が全ての } a \in \mathcal{M} \text{ に対して成り立つ.} \quad (4.68)$$

この意味で、ベクトル空間の次元の観点からしても  $\mathcal{M}^n$  は  $\mathcal{M}$  の自然な一般化と言える。

**Dyck の定理** 上で見た事実 (4.67) には幾何学的解釈が与えられる。Dyke の定理 [Fa99] によると、向き付け不可能性を保つ範囲で、二つのクロスキャップは一つのハンドルに置き換えることができる。例えば、

$$\begin{aligned} \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 &\cong \mathbb{RP}^2 \# T^2, \\ \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 &\cong \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# T^2 \cong \mathbb{KB} \# T^2. \end{aligned} \quad (4.69)$$

ここで  $\mathbb{KB}$  はクラインボトルである。それゆえ、ベクトル空間の次元に関する結果がクロスキャップの個数の偶奇によるのは結果と言える。

### 4.2.3 $\mathcal{M}^n$ の構造

$\mathcal{M}^n$  の表式: ここで  $\text{Im}^n(1 + T)$  を次のように定義する:

$$\text{Im}^n(1 + T) := \{a \in \mathcal{A} \mid na \in \text{Im}(1 + T)\}. \quad (4.70)$$

この定義から次が従う:

$\mathcal{M}^n$  の表式は次式で与えられる:

$$\mathcal{M}^n := \text{Im}^n(1 + T) - \text{トーサー}. \quad (4.71)$$

であって、次が満たされる:

$$B(a, nb) = \eta(nb) \text{ が全ての } b \in \text{Ker}(1 - T) \text{ に対して成り立つ.} \quad (4.72)$$

この構造を示すために、次の事実を確かめる:

- $a \in \mathcal{M}^n$ ,  $b \in \text{Im}^n(1 + T)$  が  $b + a = a$  を満たすならば、 $b = 0$  が成り立つ。

- 全ての  $a, b \in \mathcal{M}^n$  に対して, ある  $c \in \text{Im}^n(1+T)$  が存在し,  $a = b+c$ , すなわち  $c = a-b$  が成り立つ.

一つ目は自明である.

二つ目について見ていこう.  $a, b \in \mathcal{M}^n$  に対して次が成り立つ:

$$\begin{cases} B(a, nd) = \eta(nd) \\ B(b, nd) = \eta(nd) \end{cases} \quad \text{が全ての } d \in \text{Ker}(1-T) \text{ に対して成り立つ.} \quad (4.73)$$

上二式を辺々割って次を得る:

$$B(a-b, nd) = B(n(a-b), d) = 1 \text{ が全ての } d \in \text{Ker}(1-T) \text{ に対して成り立つ.}$$

$B$  の非退化性から次が従う:

$$n(a-b) \in \text{Ker}(1-T)^\perp = \text{Im}(1+T). \quad (4.74)$$

そこで  $c := a-b \in \text{Im}^n(1+T)$  と定めることで結論を得る.

**和に関する制限**  $\mathcal{M}^n$  が  $\text{Im}^n(1+T)$  上のトーサーであるという事実から, 次の制限を導出することが出来る:

$$a+b \in \text{Im}^n(1+T) \text{ が全ての } a, b \in \mathcal{M}^n \text{ に対して成り立つ.} \quad (4.75)$$

トーサー構造から  $a-b \in \text{Im}^n(1+T)$  が従い, そこから  $2a \in \text{Im}^n(1+T)$  ならば  $a+b = 2a + (b-a) \in \text{Im}^n(1+T)$  が成り立つ. それゆえ  $2a \in \text{Im}^n(1+T)$  を示せば十分である.

$a \in \mathcal{M}^n$  とすると全ての  $b \in \text{Ker}(1-T)$  に対して次が成り立つ:

$$B(a, nb)^2 = \eta(nb)^2 = 1. \quad (4.76)$$

ここで  $\eta(nb) \in \{\pm 1\}$  を使った. 一方,  $B$  の双線形性より, 左辺は次のように変形できる:

$$B(a, nb)^2 = B(2a, nb) = B(2na, b). \quad (4.77)$$

従って,

$$B(2na, b) = 1 \text{ が全ての } b \in \text{Ker}(1-T) \text{ に対して成り立つ.} \quad (4.78)$$

ここで  $B$  の非退化性から

$$2na \in \text{Ker}(1-T)^\perp = \text{Im}(1+T), \quad (4.79)$$

すなわち,

$$2a \in \text{Im}^n(1 + T) \quad (4.80)$$

となり, 和に関する制限が導かれた.

**$Ta$ に関する制限** さらに次のような事実を導くことができる:

$$Ta \in \mathcal{M}^n \text{ が全ての } a \in \mathcal{M}^n \text{ に対して成り立つ.} \quad (4.81)$$

これは次のように示すことができる:

$$\begin{aligned} B(Ta, nb) &= B(a, -Tnb) \\ &= \eta(-Tnb) \\ &= \eta(nb) \text{ が全ての } b \in \text{Ker}(1 - T) \text{ に対して成り立つ.} \end{aligned} \quad (4.82)$$

#### 4.2.4 アノマリー公式と高次中心電荷

より  $\mathcal{M}^n$  の構造について理解するために, 次を定義する:

$\mathcal{E}^n$  を次のように定義する.

$$\mathcal{E}^n := \frac{\text{Im}^n(1 + T)}{\text{Im}(1 + T)}\text{-トーサー} \quad (4.83)$$

で次を満たす:

$$B(a, nb) = \eta(nb) \text{ が全ての } a \in \mathcal{E}^n \text{ に対して成り立つ.} \quad (4.84)$$

すると次が従う:

$$\theta(a)^n \text{ は } \mathcal{E}^n \text{ 上 well-defined である.} \quad (4.85)$$

ここでは次の事実を使う:

- $B$  と  $\eta$  に関する制限式 3.65:

$$B(a, Ta)\eta((1 + T)a) = 1 \text{ が全ての } a \in \mathcal{A} \text{ に対して成り立つ.} \quad (4.86)$$

- $T$  の反ユニタリー性:

$$\theta(a)\theta(Ta) = 1 \text{ が全ての } a \in \mathcal{A} \text{ に対して成り立つ.} \quad (4.87)$$

•  $a \in \mathcal{M}^n$  より, 次式が成り立つ:

$$\eta(-n(1+\mathbb{T})c) B(a, n(1+\mathbb{T})c) = 1 \text{ が全ての } c \in \mathcal{A} \text{ に対して成り立つ.} \quad (4.88)$$

上記の事実より

$$\begin{aligned} \frac{\theta(b)^n}{\theta(a)^n} &= \left( \frac{\theta(a + (1+\mathbb{T})c)}{\theta(a)} \right)^n \\ &= \left( \frac{\theta(a) \theta((1+\mathbb{T})c) B(a, (1+\mathbb{T})c)}{\theta(a)} \right)^n \\ &= (\theta((1+\mathbb{T})c) B(a, (1+\mathbb{T})c))^n \\ &= (\theta(c) \theta(\mathbb{T}c) B(c, \mathbb{T}c) B(a, (1+\mathbb{T})c))^n \\ &= (\eta(-(1+\mathbb{T})c) B(a, (1+\mathbb{T})c))^n \\ &= \eta(-n(1+\mathbb{T})c) B(a, n(1+\mathbb{T})c) \\ &= 1 \end{aligned} \quad (4.89)$$

と変形できるため, トポロジカルスピンの well-definedness が示された.

さらに, トポロジカルスピンに値について  $\theta(a)^n$  は次のように制限がかかる:

$$\theta(a)^n \in \{\pm 1\} \text{ が全ての } a \in \mathcal{E}^n \text{ に対して成り立つ.} \quad (4.90)$$

式 (4.81) より, 次式を得る:

$$\theta(a)^n = \theta(a - (1+\mathbb{T})a)^n = \theta(-\mathbb{T}a)^n = \theta(\mathbb{T}a)^n = \overline{\theta(a)^n}, \quad (4.91)$$

すなわち

$$(\theta(a)^n)^2 = 1. \quad (4.92)$$

よって上の主張が成り立つ. アノマリー公式の表式と  $\theta(a)^n$  の well-definedness を思い出すと,

$$\sum_{a \in \mathcal{M}^n} \theta(a)^n = |\text{Im}(1+\mathbb{T})| \cdot \sum_{a \in \mathcal{E}^n} \theta(a)^n \quad (4.93)$$

であるから, 次式が従う:

$$\eta_n \cdot \xi_n = \frac{\sum_{a \in \mathcal{E}^n} \theta(a)^n}{\left| \sum_{a \in \mathcal{E}^n} \theta(a)^n \right|}. \quad (4.94)$$

上の式と式 (4.35) から, 次式を得る:

$$\xi_n = \begin{cases} \frac{\sum_{a \in \mathcal{E}^n} \theta(a)^n}{\left| \sum_{a \in \mathcal{E}^n} \theta(a)^n \right|} & n \text{が偶数,} \\ Z(\mathbb{RP}^4) \cdot \frac{\sum_{a \in \mathcal{E}^n} \theta(a)^n}{\left| \sum_{a \in \mathcal{E}^n} \theta(a)^n \right|} & n \text{が奇数.} \end{cases} \quad (4.95)$$

元のアノマリー公式とその一般化の比較は表 4.2 を見よ.

	$n = 1$	$n \in \mathbb{N}_c$
定義	$\left\{ \begin{array}{l} a \in \mathcal{A} \text{ s.t. } B(a, b) = \eta(b) \\ \forall b \in \text{Ker}(1 - T) \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} a \in \mathcal{A} \text{ s.t. } B(a, nb) = \eta(nb) \\ \forall b \in \text{Ker}(1 - T) \end{array} \right\}$
構造	$\text{Im}(1 + T)$ - トーサー	$\text{Im}^n(1 + T)$ - トーサー
トポロジカル ルスピ	$\theta(a) \in \{\pm 1\} \quad \forall a \in \mathcal{M}$	$\theta(a)^n \in \{\pm 1\} \quad \forall a \in \mathcal{M}^n$
次元	$\dim(V(\Sigma_1(a))) \neq 0 \quad \forall a \in \mathcal{M}$	$\dim(V(\Sigma_n(na))) \neq 0 \quad \forall a \in \mathcal{M}^n$
和	$2a \in \text{Im}(1 + T) \quad \forall a \in \mathcal{M}$	$2a \in \text{Im}^n(1 + T) \quad \forall a \in \mathcal{M}^n$
公式	$Z(\mathbb{RP}^4) \cdot Z(\mathbb{CP}^2) = \theta_{\mathcal{M}}$	$\eta_n \cdot \xi_n = \frac{\sum_{a \in \mathcal{E}^n} \theta(a)^n}{\left  \sum_{a \in \mathcal{E}^n} \theta(a)^n \right }$
公式の意味	アノマリーへの制限	<b>?</b>

Table 4.2:  $\mathcal{M}$  と  $\mathcal{M}^n$  の比較

## 5 関手の実現に向けて

この章では TQFT, 特に Reshetikhin–Turaev TQFT の構成について解説する. 元となるのは向き付け可能三次元多様体に対する不変量の Reshetikhin–Turaev 不変量である. まず節 5.1.1 で不変量構成の大まかな流れとその具体形を与える. 節 5.1.2 ではいくつかの具体例を計算してみて, その妥当性を確認する. 最後に節 5.2 では未だ成功していない上述の構成の向き付け不可能な場合への拡張の展望を述べる.

### 5.1 Reshetikhin–Turaev 不変量

#### 5.1.1 不変量の構成

まずこの節では Reshetikhin–Turaev 不変量の大まかな構成を解説する. 我々は向き付け可能な閉三次元多様体  $M$  に対して  $\langle \rangle : M \rightarrow \mathbb{C}$  なる写像を構成したい. そこで最も重要な次の定理を紹介する:

#### Lickorish–Wallece の定理

任意の連結な向き付け可能閉三次元多様体  $M$  に対して, ある枠付き絡み目  $L$  が存在し,  $L$  に沿った手術によって得られる多様体  $S_L^3$  は  $M$  と同相である:  $S_L^3 \cong M$ .

ここで

- 絡み目とは  $\tilde{L} : \bigsqcup_{i=1}^m S_i^1 \hookrightarrow S^3$  のことであり,  $m$  を成分数という. 成分数が 1 の絡み目を結び目という. ここではその像のことを次のように書くことにする:

$$\tilde{L} := \bigsqcup_i^m L_i. \quad (5.1)$$

- 枠付き絡み目とはおおよそ整数のラベル付きの絡み目のことであり, 各絡み目の成分に framing 数と呼ばれる整数  $n_i \in \mathbb{Z}$  が与えられているものを考える<sup>52</sup>:

$$L := \bigsqcup_i^m L_i^{n_i}. \quad (5.2)$$

- 手術は三次元多様体から新たな三次元多様体を得る操作であり, 以下で解説する.

**デー手術** デー手術は三次元多様体  $M$  と  $M$  に埋め込まれた枠付き絡み目  $L$  から新たな三次元多様体  $M_L$  を得る操作である. その手順は次の通りである:

<sup>52</sup>この整数の選び方と normal bundle の自明化の選び方が対応している.

- 1: 埋め込まれた絡み目を太らせる, すなわち管状近傍  $N(L)$  を考える.
- 2: 管状近傍を考えると, ソリッドトーラスが得られる. このソリッドトーラスの可縮方向/非可縮方向をそれぞれ緯線/経線と呼ぶ. また, 境界のトーラスに framing 数に応じて経線方向にも巻き付いた閉曲線を考える.
- 3:  $S^3$  から  $N(L)$  を取り除いた  $S^3 \setminus N(L)$  を考える. この時, その境界  $\partial(S^3 \setminus N(L))$  は  $T^2$  (の非交和) であることに注意.
- 4: 新たに経線方向のみに一周巻き付いた閉曲線があるソリッドトーラスを考え, 手順 2 の閉曲線と貼り合わさるように埋め込む.
- 5: 結果的に元の三次元多様体  $M$  と異なる三次元多様体  $M_L$  が得られる.

図 14 を元に具体的に手順を確認する. まず  $S^3$  に framing 数 2 の unknot (i.e.,  $S^1$ ) が埋め込まれているとする. この unknot をソリッドトーラスのように太らせて管状近傍  $N(L)$  を得るが, その時に framing 数に応じた閉曲線 (赤線) を境界に書き込んでおく.  $S^3$  から  $N(L)$  を除くと境界は  $T^2$  となるが, そこに新たにソリッドトーラスを埋め戻すが, この時, 図の赤線同士が張り合わさるように埋め戻す. そうすると  $L$  に応じて新しい三次元多様体を得られ, これを  $S_L^3$  と書く.

ここまでで我々は三次元多様体を絡み目で表示する方法を獲得した. それでは三次元多様体の不変量を得るには, 絡み目の不変量を経由すれば良いことに気づく. そして絡み目の不変量の評価の手段は節 1.3 で導入したモジュラーテンソル圏のデータを用いれば良い. 実際, 三次元多様体  $M \cong S_L^3$  に対する Reshetikhin–Turaev 不変量はモジュラーテンソル圏  $\mathcal{C}$  を用いて次のように評価される [Tur94]:

$$RT(\mathcal{C}, M) = \frac{e^{-2\pi i \sigma(L)c_-/8}}{\mathcal{D}^{m+1}} \sum_{a_1, \dots, a_m \in \mathcal{C}} d_{a_1} d_{a_2} \cdots d_{a_m} \langle L(a_1, \dots, a_m) \rangle. \quad (5.3)$$

ただし  $L := \bigsqcup_i^m L_i^{n_i}$  とし,  $\langle L(a_1, \dots, a_m) \rangle$  は成分数  $m$  の絡み目  $L$  をエニオン  $a_1, \dots, a_m$  を用いて評価した不変量, さらに  $\sigma(L)$  は  $L$  の絡み目行列の符号数とする.

### 5.1.2 具体例

この節では式 (5.3) をいくつかの例で実際に求める.

$S^2 \times S^1$ : まず  $S^2 \times S^1$  に対する Reshetikhin–Turaev 不変量を計算してみよう.  $S^2 \times S^1$  は framing 数 0 の unknot で表示されることが知られているため, Reshetikhin–Turaev 不変量は次

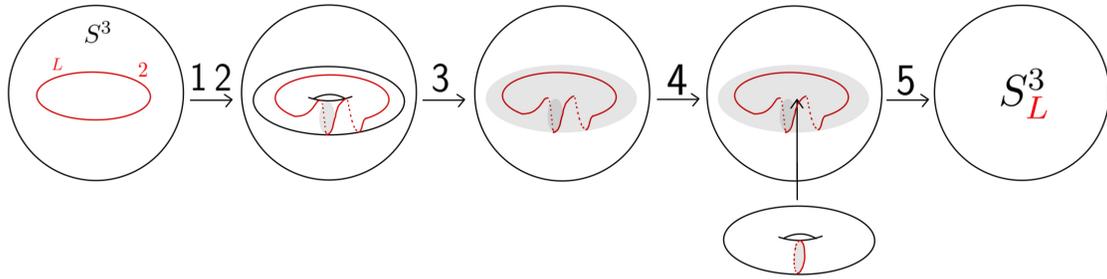


Figure 14: 手術の手順

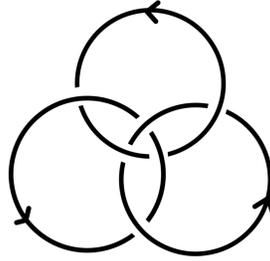


Figure 15: ボロミアン環

のように計算される:

$$\begin{aligned}
 RT(\mathcal{C}, M) &= \frac{e^{-2\pi i \sigma(L)c_-/8}}{\mathcal{D}^2} \sum_{a \in \mathcal{C}} d_a \langle L(a) \rangle \\
 &= \frac{e^{-2\pi i \cdot 0 \cdot c_-/8}}{\mathcal{D}^2} \sum_{a \in \mathcal{C}} d_a^2 \\
 &= \frac{\mathcal{D}^2}{\mathcal{D}^2} \\
 &= 1.
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

これは  $\dim V(S^2) = 1$  である事実と整合的である.

$T^3$ : それでは  $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$  の場合どうだろうか. もちろんこちらも  $T^2 \times S^1$  と書けるため  $\dim V(T^2) = |\mathcal{C}|$  が計算されることが分かる. それを具体的に確かめよう.  $T^3$  は framing 数 0 のボロミアン環 (図 15) で表示されることが知られている. 図より絡み目行列は 0 とな

り,  $\sigma(L) = 0$  はすぐに分かる. そこでボロミアン環をユニオンで評価することで次式を得る:

$$\begin{aligned}
 RT(\mathcal{C}, M) &= \frac{1}{\mathcal{D}^4} \sum_{a,b,c \in \mathcal{C}} d_a d_b d_c \langle L(a, b, c) \rangle \\
 &= \frac{1}{\mathcal{D}^4} \sum_{a,b,c \in \mathcal{C}} d_a d_b d_c \cdot \frac{d_a d_b d_c}{d_a^2} \\
 &= \frac{1}{\mathcal{D}^4} \sum_a 1 \sum_b d_b^2 \sum_c d_c^2 \\
 &= \sum_a 1 \\
 &= |\mathcal{C}|.
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

ただし,  $\langle L(a, b, c) \rangle$  の計算は図 16 を見よ. このように  $T^3$  の場合も期待通りの結果を得ることができた.

まとめると次のようになる:

- I: 多様体  $M^3$  を表示する絡み目  $L$  を特定する.
- II: 絡み目を評価するデータであるモジュラーテンソル圏  $\mathcal{C}$  を選択する.
- III: 多様体  $M^3$  の不変量を絡み目の不変量を通じて評価する. この際絡み目をモジュラーテンソル圏で評価するが, そのデータのアサインの仕方全体でも足し合わせることで, アサインの仕方によらない不変量が計算される.

以上が Reshetikhin–Turaev 不変量の具体的な構成方法である. 次節ではこの不変量から関手としての TQFT が構成できるという事実に触れる. また Reshetikhin–Turaev 不変量はその構成から向き付け可能な多様体にしか適用できない. しかし, 筆者はその向き付け不可能多様体への拡張への可能性も感じている. 次節ではそのアイデアを今後の展望として述べることで本修士論文を締めくくる.

## 5.2 関手の構成

さて我々が本修士論文全体にわたって考えていたのは TQFT の中でも特に Reshetikhin–Turaev 型の TQFT であった. この TQFT は 3 次元の向き付け可能な多様体に対する位相不変量である Reshetikhin–Turaev 不変量から構成できる関手である. したがって向き付け不可能多様体に対する Reshetikhin–Turaev 型の TQFT は未だ構成されていない. それでも我々はそうした関手の存在を仮定して, 節 3.4 でクロスキャップ状態について考察したように向き付け可能な場合の知識をうまく組み合わせて問題に挑んできたのである. ところが, 筆者はこのクロスキャップ状態から向き付け不可能多様体に対する Reshetikhin–Turaev 型の不変量の構成の実

$$\begin{aligned}
 &= [F_a^{a\bar{a}a}]_{11} \\
 &= [F_a^{a\bar{a}a}]_{11} \\
 &= [F_a^{a\bar{a}a}]_{11} [F_{\bar{a}}^{\bar{a}a\bar{a}}]_{11} \\
 &= \frac{1}{d_a^2}
 \end{aligned}$$

Figure 16:  $L(a, b, c)$  の計算

現の可能性を強く感じている [Ori25a]. そこでこの節では Reshetikhin–Turaev 不変量の構成とその拡張への展望について論じる.

### 5.2.1 量子化関手と普遍構成

一般に三次元多様体に対する不変量  $Z(M) \in \mathbb{C}$  が与えられた時, この不変量が

$$(m) : Z(M \sqcup M') = Z(M)Z(M'), \quad (i) : Z(-M) = \overline{Z(M)} \quad (5.6)$$

の二つの条件を満たす時, 量子化関手と呼ばれる関手が一意的に定まり, 特に Reshetikhin–Turaev 不変量に関してはこれが TQFT を与える関手となっている. この事実について解説する [BHMV95]. ただし, ここではしばらく  $Z(M)$  と書いた時は一般の不変量を表すこととし, 必ずしも Reshetikhin–Turaev 不変量とは限らないことに注意. まず量子化関手とは次のように定義される:

ボルディズム圏からベクトル空間の圏への関手  $V : \text{Bord}_{2,3} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{C}}$  が次を満たすとき, 量子化関手 (quantization functor) であるという<sup>a</sup>:

- I:  $V(\emptyset) = \mathbb{C}$ .

$V$  が I を満たす時,  $M \in \text{Hom}(\emptyset, \Sigma)$  に対して

$$Z(M) := V(M)(1) \in V(\Sigma) \quad (5.7)$$

と書く,  $\Sigma = \emptyset$ , i.e.  $\partial M = \emptyset$  の時は,  $Z(M) \in \mathbb{C}$  となることに注意.

- II: 任意の閉曲面  $\Sigma$  に対し, 非退化なエルミート形式  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Sigma} : V(\Sigma) \times V(\Sigma) \rightarrow \mathbb{C}$  が存在し,  $M, M' \in \text{Hom}(\emptyset, \Sigma)$  に対して

$$\langle Z(M), Z(M') \rangle_{\Sigma} = Z(M \cup_{\Sigma} -M'). \quad (5.8)$$

“ここでの議論は  $\mathbb{C}$  から, 単位元と共役作用を持つ環  $k$  に対して一般化できるが, ここでは簡単のため  $\mathbb{C}$  に限って議論する.

この時, 量子化関手  $V$  から定まる不変量  $Z(M)$  が (m), (i) を満たすことは容易にわかる. ところが, 実はその逆も成り立つ:

(m), (i) を満たす閉三次元多様体の不変量から量子化関手が一意的に定まる.

これは非常に強い主張である. 適当な三次元多様体に対する不変量が (m), (i) という (少なくとも筆者にとっては) 自然な性質を満たしているだけで TQFT の芽とも言える量子化関手が一意的に定まるのである. さらに (m), (i) を満たすような不変量  $\tau$  が与えられた時, それをもとに量子化関手を一つ与える普遍構成 (universal construction) という構成法が知られている:

閉曲面  $\Sigma$  に対して  $\mathcal{V}(\Sigma) = \text{span}_{\mathbb{C}}\{M \mid \partial M = \Sigma\}$  とし,  $\mathcal{V}(\Sigma)$  上のエルミート形式を  $\langle M, M' \rangle_{\Sigma} = \tau(M \cup_{\Sigma} -M')$  で定める. ここで

$$V(\Sigma) = \mathcal{V}(\Sigma) / \{x \mid \forall y \in \mathcal{V}(\Sigma), \langle x, y \rangle_{\Sigma} = 0\} \quad (5.9)$$

と置くことで, 非退化なエルミート形式

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Sigma} : V(\Sigma) \times V(\Sigma) \rightarrow \mathbb{C} \quad (5.10)$$

が誘導される.  $M \in \text{Hom}(\Sigma, \Sigma')$  に対して  $V(M) : V(\Sigma) \rightarrow V(\Sigma')$  を  $W \mapsto W \cup_{\Sigma} M$  と定めて線形に拡張することで,  $V$  は量子化関手となる.

上の事実より, 普遍構成で定めた量子化関手を考えれば十分である. さらにこの関手のうち次を満たすものを TQFT と呼ぶ:

量子化関手  $V$  が次を満たす時、その量子化関手を TQFT という:

- $V(\Sigma_1) \otimes V(\Sigma_2) \rightarrow V(\Sigma_1 \sqcup \Sigma_2)$ ,  $M \otimes M' \mapsto M \sqcup M'$  が同型.
- $V(\Sigma)$  が有限次元で,  $V(\Sigma) \rightarrow V(\Sigma)^*$ ,  $x \mapsto (\langle x, \cdot \rangle_\Sigma \mapsto \langle x, y \rangle_\Sigma)$  が同型.

上までの議論はリボングラフを含む場合 (エニオンを含む場合) に一般化できることも知られている.

そこで, 我々のセットアップに戻ると Reshetikhin-Turaev 不変量が (m), (i) を満たすことは容易に確かめられ, 量子化関手が定まることが分かり, さらにこれが TQFT となることも確かめる事ができる.

## 5.2.2 クロスキャップ状態からの示唆

さて, 前節までで Reshetikhin-Turaev 不変量の構成とそこから TQFT を定義する関手を構成する流れを説明した. ところがこの不変量は構成から分かるように向き付け可能な三次元多様体にしか適用できず, 向き付け不可能な多様体への拡張は未だ知られていない. しかし, 現状の物理側での知見を用いれば向き付け不可能な多様体に適用できる不変量の構成も夢ではないと考えている. この節ではその構成のアイデアに触れることで本修士論文の幕を閉じることとする [Ori25a].

クロスキャップ状態は次式で与えられるのであった:

$$|\text{CC}\rangle := Z(\text{MO} \times S^1) = \sum_{a \in \mathcal{C}} \eta(a) S|a\rangle. \quad (5.11)$$

よってその係数は

$$\eta(a) = \langle a | S^{-1} | \text{CC} \rangle = Z(X(a)) \quad (5.12)$$

と計算された D. ここで  $X(a)$  は次式で与えられる:

$$X(a) = \frac{S^2(a, \overline{a}) \times [0, 1]}{(x, 0) \sim (-x, 1)}. \quad (5.13)$$

以下,  $a$  が挿入されていないものを  $X$  と書く.

ここで注意すべきはクロスキャップ状態は向き付け不可能三次元多様体  $\text{MO} \times S^1$  を評価して得られるベクトルであるが, その境界は  $T^2$  である. 従って, このベクトルは  $V(T^2)$  の元であり, そこからなんとかして物理量を取り出そうという立場にいるということである. 決して我々は任意の向き付け不可能多様体を評価する術を知っているわけではなく, 向き付け可能な場合のアナロジーを駆使して計算できる量のみを計算している. そうした現状の中, 物理の文脈で自然に多様体  $X$  が現れたわけであるが, 驚くべきことに次の定理が 60

$$\begin{array}{l}
 S^3 \rightarrow M \xrightarrow{\mathcal{C}} \langle M \rangle \rightarrow \text{TQFT} \\
 X \rightarrow N \xrightarrow{\mathcal{C}} \langle N \rangle \rightarrow \text{TQFT?}
 \end{array}$$

Figure 17: 向き付け不可能な多様体上の TQFT の構成に向けて

年も昔から知られていた [Lic63]:

任意の連結な向き付け不可能閉三次元多様体  $N$  に対して、ある枠付き絡み目  $L$  が存在し、 $L$  に沿った手術によって得られる多様体  $X_L$  は  $N$  と同相である:  $X_L \cong M$

すなわち向き付け可能な場合の  $S^3$  に対応する向き付け不可能な場合のビルディングブロックとなる多様体が古くから知られており、それが最近になって物理から自然に現れたのである。

ところが未だ対応する不変量や TQFT は知られていない。それに対する筆者の考える理由は、次のようなものであると推察している。まず向き付け可能な場合は適当なモジュラーテンソル圏を使ってダイアグラムを評価することで不変量が計算できた。ところが向き付け不可能な場合は、向きの反転に伴ってモジュラーテンソル圏にも自然に群作用が誘導された。そうした群構造付きのモジュラーテンソル圏がよく調べられ始めたのはより最近の話であるため、当時はその自然な拡張ができなかったのではないだろうか。そうした意味で、向き付け不可能な多様体の手術という幾何的側面の理解にモジュラーテンソル圏に対する群作用という代数的側面の理解が追いついた現在なら、向き付け不可能な多様体に対する Reshetikhin–Turaev 不変量の構成もできるのではないかというのが筆者の所感であり、今後取り組むつもり課題の一つである (図 17)。

## 謝辞

多くの方々の温かいご支援のおかげで、この二年間、幸せで充実した研究生生活を送ることができました。まず、まだ右も左も分からない私を位相的場の理論という魅力的な分野へと導き、丁寧かつ的確にご指導くださった立川裕二教授に、心より深く感謝申し上げます。また、まるで指導学生のように親身にご指導くださり、現在に至るまで継続して議論してくださっている東京科学大学の鈴木咲枝教授にも、厚く御礼申し上げます。さらに、基礎物理学研究所の安藤貴政さんには、度重なる議論に快く付き合ってください、深く感謝いたします。また、私が数理物理の道に進む契機を与えてくれた高間俊至君にも、ここに大きな感謝の意を表します。学部四年次に彼が語ってくれたこの分野の面白さが、現在の私を形作る原点となりました。同大学の古川裕貴さん、八木春樹君とは、ゼミ等を通して多くの議論を交わし、多くの刺激をいただきました。心より感謝いたします。また、この研究生生活を支えてくれた生活面での支援に関しては、両親の存在を抜きに語ることはできません。日頃より支えてくれた両親に、この場を借りて深く感謝いたします。加えて、研究に没頭するあまり浮世離れしがちな私を現実世界に引き戻してくれた恋人や友人たちにも、心からの感謝の気持ちを伝えたいと思います。最後に、病める時も健やかなる時も、胃袋を通して私の研究生生活を力強く支えてくれた直系ラーメン二郎各店舗の皆さまにも、心より感謝申し上げます。皆様の支えがあってこそ、今日まで幸せに研究を続けることができました。本当にありがとうございました。

## A TQFT と RCFT のバルク境界対応

### A.1 基本データの対応

TQFT と RCFT にはバルク境界対応が知られている。その肝となる事実は、TQFT を指定するデータと (chiral な)RCFT を指定するデータが共にモジュラーテンソル圏であるということにある。ここではいくつかの観点からその対応を確認する。

**エニオンとプライマリー場** TQFT の基礎概念であるエニオン、トポロジカルスピン等と RCFT の基礎概念であるプライマリー場、共形ウェイト等は表 A.1 のように対応がある。

MTC	TQFT	RCFT
単純対象	エニオン $\{a, b, \dots\}$	プライマリー場 $\{\phi_i \mid i = 1, 2, \dots\}$
フュージョン則	$a \times b = \sum_c N_{ab}^c c$	$\phi_i \times \phi_j = \sum_k N_{ij}^k \phi_k$
twist	トポロジカルスピン $\theta(a)$	共形ウェイト $e^{2\pi i h_k}$
量子次元	量子次元 $d_a$	Verlinde loop の VEV

Table A.1: データの対応の例

大まかにいうとエニオンは三次元多様体の中で一次元的の広がりを持っているが、それは二次元の境界上では零次元的な対象でありこれは曲面にプライマリー場が挿入されている状況と解釈できる (図 18)。

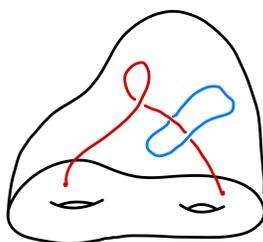


Figure 18: バルク境界対応

**共形ブロック** TQFT が閉曲面  $\Sigma$  にアサインするベクトル空間  $V(\Sigma)$  は対応する RCFT の共形ブロックの空間と同型であることが知られている。思い出すとトーラス上のベクトル空間/共形ブロックの空間の次元はそれぞれエニオン/プライマリー場の個数であることからも領ける。

例えば、Level  $k$   $\mathfrak{su}(2)$  アフィン Lie 代数に対して、トーラス上の共形ブロックの空間とその基底は次式で与えられる:

$$\mathcal{H}(T^2) := \bigoplus_{i=0}^k \mathcal{H}_i, \quad \chi_i(\tau) := \text{Tr}_{\mathcal{H}_i} q^{L_0 - \frac{c}{24}}, \quad q = e^{2\pi i \tau}. \quad (\text{A.1})$$

その時、 $\mathcal{H}(T^2)$  と  $V(T^2)$  に対する  $SL(2, \mathbb{Z})$  の作用を見ると確かに対応していることがわかる:

$$\chi_i\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sum_j S_{ij} \chi_j(\tau), \quad \chi_i(\tau + 1) = e^{2\pi i h_i} \cdot e^{-2\pi i \frac{c}{24}} \chi_i(\tau) \quad (\text{A.2})$$

$$S|a\rangle = \sum_b S_{ab} |b\rangle, \quad T|a\rangle = \theta(a) \cdot e^{-2\pi i \frac{c}{24}} |a\rangle \quad (\text{A.3})$$

**ブレイディングとモノドロミー** TQFT(RCFT) における  $S$  行列及び RCFT における OPE は次のように与えられるのであった:

$$S_{ab} = \frac{1}{\sqrt{\sum_a d_a^2}} \sum_c N_{ab}^c \frac{\theta(c)}{\theta(a)\theta(b)} d_c, \quad (\text{A.4})$$

$$\phi_i(z)\phi_j(0) \sim \sum_k C_{ij}^k z^{h_k - h_i - h_j} \phi_k(0) + \dots \quad (\text{A.5})$$

ここで  $z \mapsto z e^{2\pi i}$  なる変換を施すことで、次のようにモノドロミーが生じることがわかる。

$$e^{2\pi i(h_k - h_i - h_j)} = \frac{e^{2\pi i h_k}}{e^{2\pi i h_i} e^{2\pi i h_j}} \sim \frac{\theta(c)}{\theta(a)\theta(b)}. \quad (\text{A.6})$$

すなわち TQFT で計算されるエニオン同士のブレイディングフェーズ (図 19) は CFT ではプライマリー場同士のモノドロミー (図 20) として解釈できることがわかる:

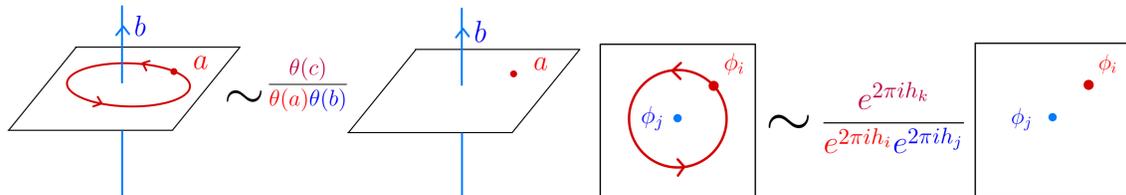


Figure 19: TQFT におけるブレイディング Figure 20: CFT におけるモノドロミー

## A.2 Wess–Zumino–Witten 模型

この節では Wess–Zumino–Witten 模型の定義を述べる． $\Sigma$  を境界のないリーマン面， $G$  をコンパクトで単連結な Lie 群とする．ここでは例として  $G = SU(2)$  を取る．また滑らかな写像  $f : \Sigma \rightarrow G$  を考える． $G = SU(2)$  について次の事実がある：

$X \in SU(2)$  に対して

$$\theta := X^{-1}dX \quad (\text{A.7})$$

を Maurer–Cartan 形式といい， $SU(2)$  上左不変な  $\mathfrak{su}(2)$  値 1 次微分形式を定める．この時

$$\sigma := \frac{1}{24\pi^2} \text{Tr}(\theta \wedge \theta \wedge \theta) \quad (\text{A.8})$$

は  $SU(2)$  上左不変な体積形式を定め，de Rham コホモロジー類は  $H^3(SU(2), \mathbb{Z})$  の生成元となる．

さて，滑らかな写像  $f : \Sigma \rightarrow G$  に対して次式を考える：

$$E_\Sigma(f) := -i \int_\Sigma \text{Tr}(f^{-1}\partial f \wedge f^{-1}\bar{\partial}f). \quad (\text{A.9})$$

さらに整数  $k \in \mathbb{Z}$  を固定する．その時，次式で与えられる作用を Wess–Zumino–Witten 作用という．

$$S_\Sigma(f) = \frac{k}{4\pi} E_\Sigma(f) - \frac{ik}{12\pi} \int_M \text{Tr}(\tilde{f}^{-1}d\tilde{f} \wedge \tilde{f}^{-1}d\tilde{f} \wedge \tilde{f}^{-1}d\tilde{f}) \quad (\text{A.10})$$

ここで  $M$  は  $\partial M = \Sigma$  なる三次元多様体であり， $\tilde{f} : M \rightarrow G$  は  $f$  の滑らかな拡張である．

$$\tilde{f}^*(\theta) = \tilde{f}^{-1}d\tilde{f} \quad (\text{A.11})$$

に注意．

ここで次の事実が成り立つ．

$\exp(-S_\Sigma(f))$  は  $M$  や拡張  $\tilde{f}$  の取り方によらず， $\Sigma$  と  $f : \Sigma \rightarrow G$  のみによって決まる．

別の拡張  $M'$  と  $\tilde{f}'$  を取る．また  $M$  と  $-M'$  を境界  $\Sigma$  で貼り合わせて得られる閉三次元多様体を  $N$  としておく．この時，作用の差は

$$-\frac{ik}{12\pi^2} \left( \int_M \text{Tr}(\tilde{f}^{-1}d\tilde{f} \wedge \tilde{f}^{-1}d\tilde{f} \wedge \tilde{f}^{-1}d\tilde{f}) - \int_{M'} \text{Tr}(\tilde{f}'^{-1}d\tilde{f}' \wedge \tilde{f}'^{-1}d\tilde{f}' \wedge \tilde{f}'^{-1}d\tilde{f}') \right). \quad (\text{A.12})$$

ここで  $F : N \rightarrow G$  を  $F|_M = \tilde{f}, F|_{M'} = \tilde{f}'$  なるものと定める. すると上の差は

$$-\frac{ik}{12\pi^2} \int_N \text{Tr}(F^{-1}dF \wedge F^{-1}dF \wedge F^{-1}dF) = -2\pi ik \int_N F^*\sigma \quad (\text{A.13})$$

とかける.  $F^*\sigma \in H^3(N, \mathbb{Z})$  よりこの差は  $\exp(-S_\Sigma(f))$  には寄与せず, 拡張の取り方によらないことが示された.

こうして定義された Wess–Zumino–Witten 作用は 2.2.2 で見るように自然に Chern–Simons 理論の境界に現れる共形場理論となることが知られている.

## B 第一 Stiefel–Whitney 類

滑らかな多様体  $X$  と、その良い開被覆 (good open cover)  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  を考える. ここで良い開被覆とは、任意の空でない有限交叉

$$U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_k} \quad (\text{B.1})$$

が可縮であることをいう.  $A$  を可換群とする.

Čech  $k$ -コチェインとは、空でない  $(k+1)$ -重交叉に対応する添字集合に対し、

$$c : \{(i_0, \dots, i_k) \mid i_0 < \cdots < i_k, U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_k} \neq \emptyset\} \rightarrow A \quad (\text{B.2})$$

で与えられる写像のことである. この写像全体の集合を  $C^k(\mathcal{U}; A)$  と書く. ここで微分  $\delta : C^k(\mathcal{U}; A) \rightarrow C^{k+1}(\mathcal{U}; A)$  は次の式で定義される:

$$(\delta c)(i_0, \dots, i_{k+1}) = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j c(i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{k+1}), \quad (\text{B.3})$$

ただし  $\hat{i}_j$  はその添字を省くことを表す.

コチェイン  $c$  がコサイクルであるとは  $\delta c = 0$  が成り立つことであり、 $b$  というコチェインが存在して  $c = \delta b$  が成り立つとき、 $c$  をコバウンダリー (coboundary) と呼ぶ.

Čech コホモロジー群  $\check{H}^k(\mathcal{U}, A)$  は、コサイクル全体をコバウンダリー全体で割った商群として定義される:

$$\check{H}^k(\mathcal{U}, A) = \frac{\ker(\delta : C^k(\mathcal{U}; A) \rightarrow C^{k+1}(\mathcal{U}; A))}{\text{im}(\delta : C^{k-1}(\mathcal{U}; A) \rightarrow C^k(\mathcal{U}; A))}. \quad (\text{B.4})$$

最後に、 $\mathcal{U}$  が良い被覆である場合には、Čech コホモロジーは特異コホモロジーと一致し、

$$\check{H}^k(\mathcal{U}, A) \cong H^k(X; A), \quad (\text{B.5})$$

が成り立つ。

**向き付け可能性**  $P$  を滑らかな多様体  $M$  上の主  $O(n)$  束とし、その変換関数を  $O(n)$  に値をとる族  $\{g_{ij}\}$  とする。このとき、

$$\det(g_{ij}) : U_i \cap U_j \rightarrow \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}_2 \quad (\text{B.6})$$

は  $\mathbb{Z}_2$ -値の Čech 1-コサイクルを定める<sup>53</sup>。

そこで、第一 Stiefel–Whitney 類は、この Čech 1-コサイクルのコホモロジー類として

$$w_1(P) := [\{\det(g_{ij})\}] \in H^1(M, \mathbb{Z}_2) \quad (\text{B.7})$$

と定義される。

この類は、 $P$  の構造群を  $O(n)$  から  $SO(n)$  へ縮約することが可能かどうかの障害となる。 $w_1(P)$  が非自明であることは  $M$  が向き付け不可能であることを意味する。

## C 可換エニオン系における $H^3$ 障害の自明性の証明

### C.1 可換エニオン系のデータ

節 1.3, 3.2 にてモジュラーテンソル圏のデータを用いてエニオン系とエニオン系への時間反転作用の定義をしたが、可換エニオンを扱う場合、 $F, R$ -シンボルやゲージ変換が全て  $U(1)$  値になり、より簡潔に議論できる。そこでこの節では時間反転作用の導入から  $H^3$  障害の導入、自明性の証明を可換エニオン系に限って議論する。

次の写像を定義する：

$F$ -シンボルと  $R$ -シンボル

$$F : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow U(1), \quad (\text{C.1})$$

$$R : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow U(1) \quad (\text{C.2})$$

で次の条件を満たす：

<sup>53</sup> $\det(g_{ij}) \cdot \det(g_{jk}) \cdot \det(g_{ki}) = \det(g_{ij}g_{jk}g_{ki}) = 1$  が成り立つことから分かる。

### 五角関係式

$$F(a, b, c + d)F(a + b, c, d) = F(b, c, d)F(a, b + c, d)F(a, b, c), \quad (\text{C.3})$$

### 六角関係式

$$R(a, b + c) = F(a, b, c)^{-1}R(a, b)F(b, a, c)R(a, c)F(b, c, a)^{-1}, \quad (\text{C.4})$$

$$R(a + b, c) = F(a, b, c)R(b, c)F(a, c, b)^{-1}R(a, c)F(c, a, b). \quad (\text{C.5})$$

$R$ について、トポロジカルスピンの braiding は次式で与えられる:

$$\theta(a) = R(a, a), \quad B(a, b) = R(b, a)R(a, b). \quad (\text{C.6})$$

ただし、ここで  $F$ -,  $R$ - シンボルの選び方は一意ではなく、一種のゲージ冗長性がある。写像  $U : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow U(1)$  を用いて、 $F$ -,  $R$ - シンボルの変換を次式で定義する:

$$(U.F)(a, b, c) := U(b, c)U(a + b, c)^{-1}U(a, b + c)U(a, b)^{-1}F(a, b, c), \quad (\text{C.7})$$

$$(U.R)(a, b) := U(a, b)^{-1}U(b, a)R(a, b). \quad (\text{C.8})$$

こうして定義された  $(U.F, U.R)$  の組も五角関係式、六角関係式を満たす。さらに  $\theta$  と  $B$  が不変であることから、 $(F, R)$  と  $(U.F, U.R)$  が物理的に等価であることが分かる。

ここで自然な問いは、 $(F, R)$  と  $(U.F, U.R)$  が完全に同じ構造を持つのはいつか、すなわち、 $(F, R) = (U.F, U.R)$  となるのはいつかということである。実際に  $(F, R) = (U.F, U.R)$  となることは、 $U$  に対して次のような写像  $\beta : \mathcal{A} \rightarrow U(1)$  が存在することと必要十分であることが知られている<sup>54</sup>:

$$U(a, b) = \frac{\beta(a)\beta(b)}{\beta(a + b)}. \quad (\text{C.9})$$

## C.2 Ker(1 - T) と Im(1 + T) の直交性

可換エニオン系  $\mathcal{A}$  における時間反転作用について思い出そう。可換エニオンに対する時間反転作用は次のように定義されるのであった。

$$T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \text{ であり、 } T^2 = \text{id}_{\mathcal{A}}, \quad \theta(Ta)\theta(a) = 1 \text{ が全ての } a \in \mathcal{A} \text{ に対して成り立つ。} \quad (\text{C.10})$$

<sup>54</sup>これが自然同型である。

条件  $\theta(Ta)\theta(a) = 1$  は反ユニタリー性の定義の一部である ([BBJ<sup>+</sup>16] を見よ). また, 以下  $T^2 = \text{id}_{\mathcal{A}}$  を  $T^2 = 1$  のように書く.

この時,  $B: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow U(1)$  について, 次の関係式が成り立つことを示す.

$$\text{Ker}(1 - T) = [\text{Im}(1 + T)]^\perp, \quad \text{Ker}(1 + T) = [\text{Im}(1 - T)]^\perp. \quad (\text{C.11})$$

まず,  $B$  の定義から次の関係式が従う:

$$B(Ta, b) = B(a, Tb)^{-1}. \quad (\text{C.12})$$

上式から次の式が成り立つことが分かる:

$$B((1 + T)a, b) = B(a, (1 - T)b). \quad (\text{C.13})$$

その結果, 次の包含関係が導かれる:

$$\text{Ker}(1 - T) \subset [\text{Im}(1 + T)]^\perp, \quad \text{Ker}(1 + T) \subset [\text{Im}(1 - T)]^\perp. \quad (\text{C.14})$$

$B$  の非退化性から次の不等式を得る:

$$|\text{Ker}(1 - T)| \leq \frac{|\mathcal{A}|}{|\text{Im}(1 + T)|}, \quad |\text{Ker}(1 + T)| \leq \frac{|\mathcal{A}|}{|\text{Im}(1 - T)|}. \quad (\text{C.15})$$

一方, 明らかに次の関係式が成り立つ:

$$|\mathcal{A}/\text{Ker}(1 + T)| = |\text{Im}(1 + T)|, \quad |\mathcal{A}/\text{Ker}(1 - T)| = |\text{Im}(1 - T)|. \quad (\text{C.16})$$

(C.15) と (C.16) を合わせると, (C.14) の包含関係は等号となることが分かる:

$$\text{Ker}(1 - T) = [\text{Im}(1 + T)]^\perp, \quad \text{Ker}(1 + T) = [\text{Im}(1 - T)]^\perp. \quad (\text{C.17})$$

### C.3 $F, R$ -シンボルに対する時間反転作用

$(F, R)$  に対する時間反転作用  $(\mathcal{A}, \theta)$  を指定し, それに伴って  $(F, R)$  も固定する. そこで  $(F, R)$  に対する時間反転作用  $(F, R) \mapsto (TF, TR)$  を次式で定義する

$$TF(a, b, c) := \overline{F(\overline{Ta}, \overline{Tb}, \overline{Tc})}, \quad TR(a, b) := \overline{R(\overline{Ta}, \overline{Tb})}. \quad (\text{C.18})$$

この組  $(TF, TR)$  も五角・六角関係式を満たし、 $\theta$  や  $B$  の値を変えない。それゆえ、位相  $U(a, b) \in U(1)$  であって次式を満たすものが存在する:

$$(TF, TR) = (U.F, U.R), \quad (\text{C.19})$$

ここで右辺は上で定義したゲージ変換である。

$T^2 = 1$  であるため、時間反転作用を二回することで元のデータに戻ってくる、すなわち  $(F, R) = (TTF, TTR)$  が得られる。このゲージ変換を二回施すことで次式を得る:

$$(F, R) = (\kappa.F, \kappa.R), \quad \text{ただし } \kappa(a, b) := \overline{U(\overline{Ta}, \overline{Tb})} U(a, b). \quad (\text{C.20})$$

すなわち  $\beta: A \rightarrow U(1)$  で次式を満たすものが存在する:

$$\overline{U(\overline{Ta}, \overline{Tb})} U(a, b) = \frac{\beta(a)\beta(b)}{\beta(a+b)}. \quad (\text{C.21})$$

ここで、そうした写像  $\beta$  に対して、次のように  $\Omega(a)$  を定義する:

$$\Omega(a) := \frac{1}{\beta(\overline{Ta})\beta(a)}. \quad (\text{C.22})$$

定義より

$$\Omega(a) = \Omega(\overline{Ta}), \quad \Omega(a+b) = \Omega(a)\Omega(b), \quad (\text{C.23})$$

が全ての  $a, b \in \mathcal{A}$  に対して成り立つことがわかる。

**$U$  の冗長性**  $U$  が式 (C.19) を満たすとき、次式で定める  $\hat{U}$  も同様に式 (C.19) を満たす:

$$\hat{U}(a, b) := U(a, b) \frac{\gamma(a)\gamma(b)}{\gamma(a+b)}, \quad (\text{C.24})$$

ただし、 $\gamma: \mathcal{A} \rightarrow U(1)$  は任意の写像である。この再定義のもとで、 $\beta$  の値は変わるが  $\Omega$  は不変である:

$$\hat{\beta}(a) := \beta(a) \overline{\gamma(\overline{Ta})} \gamma(a), \quad \hat{\Omega}(a) = \Omega(a), \quad \text{が全ての } a \in \mathcal{A} \text{ に対して成り立つ。} \quad (\text{C.25})$$

$\beta$  の冗長性 同様に, もし  $\beta$  が式 (C.21) を満たすとき, 次式で定める  $\tilde{\beta}$  も式 (C.21) を満たす:

$$\tilde{\beta}(a) := \beta(a)\nu(a),$$

ただし  $\nu: \mathcal{A} \rightarrow U(1)$  は準同型, i.e.

$$\nu(a+b) = \nu(a)\nu(b).$$

このとき,  $\Omega$  は次のように変わる:

$$\tilde{\Omega}(a) = \Omega(a) \frac{1}{\nu(\mathbb{T}a)\nu(a)}. \quad (\text{C.26})$$

この余分な位相は式 (C.21) に影響を与えないという観点から, 物理的に自明であると解釈される.

## C.4 $H^3$ 障害の定義

$H^3$  障害とは まず次の事実がある:

$f: \mathcal{A} \rightarrow U(1)$  が次を満たすとする:

$$f(a+b) = f(a)f(b) \text{ が全ての } a, b \in \mathcal{A} \text{ に対して成り立つ.} \quad (\text{C.27})$$

その時  $\mathbf{f} \in \mathcal{A}$  で次を満たすものが存在する:

$$f(a) = B(a, \mathbf{f}) \text{ が全ての } a \in \mathcal{A} \text{ に対して成り立つ.} \quad (\text{C.28})$$

この事実より,  $\Omega$  が式 (C.23) を満たすことから, ある  $\Omega \in \mathcal{A}$  に対して次が従う:

$$\Omega(a) = B(a, \Omega) \text{ が全ての } a \in \mathcal{A} \text{ に対して成り立つ.} \quad (\text{C.29})$$

この表示から次が従う:

$$\Omega \in \text{Ker}(1 + \mathbb{T}). \quad (\text{C.30})$$

式 (C.23) より,

$$\Omega((1 - \mathbb{T})a) = \Omega(a)\Omega(-\mathbb{T}a) = \frac{\Omega(a)}{\Omega(\mathbb{T}a)} = 1 \text{ が全ての } a \in \mathcal{A} \text{ に対して成り立つ.} \quad (\text{C.31})$$

すると  $\Omega$  の定義より,

$$\Omega \in \text{Im}(1 - T)^\perp = \text{Ker}(1 + T). \quad (\text{C.32})$$

ここで最後の等式は式 (C.11) を使った.

一方,  $\tilde{\Omega}$  と  $\nu$  の定義を思い出すと次式を得る:

$$\tilde{\Omega} = \Omega - (1 - T)\nu. \quad (\text{C.33})$$

ただし  $\tilde{\Omega}$  と  $\nu$  は次式で定義される:

$$\tilde{\Omega}(a) = B(a, \tilde{\Omega}), \quad \nu(a) = B(a, \nu) \quad \text{が全ての } a \in \mathcal{A} \text{ に対して成り立つ.} \quad (\text{C.34})$$

ここで  $\tilde{\Omega}$  と  $\Omega$  を物理的に等価であるとみなすため, 取り出すべき物理的データは  $\Omega$  そのものではなく次である:

$$[\Omega] \in \frac{\text{Ker}(1 + T)}{\text{Im}(1 - T)}. \quad (\text{C.35})$$

**時間反転作用の障害類** 我々のセットアップに戻ると  $\Omega$  が上述の障害類となっている. その事実について見ていこう.  $\mathbb{Z}_2 = \{1, \mathbf{T}\}$  とそれに伴う捩れ群コチェイン複体を考える:

$$d^{(p)} : C_{[\rho]}^p(\mathbb{Z}_2, \mathcal{A}) \rightarrow C_{[\rho]}^{p+1}(\mathbb{Z}_2, \mathcal{A}). \quad (\text{C.36})$$

$a \in Z_{[\rho]}^3(\mathbb{Z}_2, \mathcal{A}) := \text{Ker } d^{(3)}$  が 3-サイクルとすると, 次のように計算できる.<sup>55 56</sup>

$$\begin{aligned} d^{(3)}a(\mathbf{T}, \mathbf{T}, \mathbf{T}, \mathbf{T}) &= \mathbf{T}a(\mathbf{T}, \mathbf{T}, \mathbf{T}) - a(1, \mathbf{T}, \mathbf{T}) + a(\mathbf{T}, 1, \mathbf{T}) - a(\mathbf{T}, \mathbf{T}, 1) + a(\mathbf{T}, \mathbf{T}, \mathbf{T}) \\ &= (1 + \mathbf{T})a(\mathbf{T}, \mathbf{T}, \mathbf{T}) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

それゆえ次式が成り立つ:

$$a(\mathbf{T}, \mathbf{T}, \mathbf{T}) \in \text{Ker}(1 + \mathbf{T}). \quad (\text{C.38})$$

同様にして, 2 コチェイン  $b$  に対し,  $d^{(2)}b(\mathbf{T}, \mathbf{T}, \mathbf{T}) \in \text{Im}(1 - \mathbf{T})$  を得る. 結果として  $\omega \in$

<sup>55</sup>ここで  $x \in \mathcal{A}$  に対する時間反転作用を  $\mathbf{T}x := \rho_{\mathbf{T}}(x)$  と定義していることに注意.

<sup>56</sup>ここでノーマリゼーションを次のように固定する: ある  $i \in \{1, 2, 3\}$  に対して  $g_i = 1$  ならば  $a(g_1, g_2, g_3) = 0$ . 例えば次を見よ [ML95, Chapter IV]

$H_{[\rho]}^3(\mathbb{Z}_2, \mathcal{A}) = \text{Ker } d^{(3)} / \text{Im } d^{(2)}$  ならば,

$$\omega(\mathbf{T}, \mathbf{T}, \mathbf{T}) \in \frac{\text{Ker}(1 + \mathbf{T})}{\text{Im}(1 - \mathbf{T})} \quad (\text{C.39})$$

となる.

したがって  $\Omega$  はこのクラスに入る:

$$\Omega \in \frac{\text{Ker}(1 + \mathbf{T})}{\text{Im}(1 - \mathbf{T})}. \quad (\text{C.40})$$

### C.5 $H^3$ 障害の自明性の証明

この節では, 次の事実を証明する:

任意の可換エニオン系における時間反転対称性の  $H^3$  障害は自明である.  
すなわち  $\Omega \in \text{Im}(1 - \mathbf{T})$  が成り立つ.

直交関係  $\text{Im}(1 - \mathbf{T})^\perp = \text{Ker}(1 + \mathbf{T})$  から, 次を示せば十分である:

$$B(a, \Omega) = 1 \text{ が全ての } a \in \text{Ker}(1 + \mathbf{T}) \text{ に対して成り立つ.} \quad (\text{C.41})$$

$\Omega$  と  $\kappa$  の定義から次が従う:

$$\begin{aligned} B(a, \Omega) &= \Omega(a) \\ &= \frac{1}{\beta(\mathbf{T}a)\beta(a)} \\ &= \frac{1}{\beta(-a)\beta(a)} \\ &= \frac{1}{\kappa(a, -a)}. \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

ここで  $a \in \text{Ker}(1 + \mathbf{T})$ , すなわち  $a = -\mathbf{T}a$  であることを使った. さらに  $\beta(0) = 1$  であるため

$$\begin{aligned} \beta(0) &= \frac{\beta(0)\beta(0)}{\beta(0+0)} \\ &= \overline{U(0,0)} U(0,0) \\ &= 1. \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

次に  $\kappa(a, -a)$  は次のように変形できる:

$$\begin{aligned}\kappa(a, -a) &= \overline{U(\mathbb{T}a, -\mathbb{T}a)} U(a, -a) \\ &= \overline{U(-a, a)} U(a, -a) \\ &= U(-a, a)^{-1} U(a, -a).\end{aligned}\tag{C.44}$$

ここで次の関係を思い出す:

$$\mathbb{T}R(a, b) = \overline{R(\mathbb{T}a, \mathbb{T}b)} = U(a, b)^{-1} U(b, a) R(a, b),\tag{C.45}$$

すると次の式を得る:

$$\begin{aligned}U(-a, a)^{-1} U(a, -a) &= R(a, -a) R(\mathbb{T}a, -\mathbb{T}a) \\ &= R(a, -a) R(-a, a) \\ &= B(-a, a).\end{aligned}\tag{C.46}$$

$B$  の定義から, これは次のようになる:

$$\begin{aligned}B(-a, a) &= \frac{\theta(-a + a)}{\theta(-a)\theta(a)} \\ &= \frac{1}{\theta(\mathbb{T}a)\theta(a)} \\ &= 1.\end{aligned}\tag{C.47}$$

以上の結果を組み合わせて, 次を得る:

$$B(a, \Omega) = 1 \text{ が全ての } a \in \text{Ker}(1 + \mathbb{T}) \text{ に対して成り立つ,}\tag{C.48}$$

すなわち

$$\Omega \in \text{Im}(1 - \mathbb{T}).\tag{C.49}$$

以上より,  $H^3$  障害の自明性が従う.

## D $S^1$ 上の振れ $S^2$ 束の考察

ここでは, 次の事実の詳細を説明する [TY16b]:

$$\eta(a) = Z \left( \frac{S^2(a, \overline{\Gamma a}) \times [0, 1]}{(x, 0) \sim (-x, 1)} \right). \quad (\text{D.1})$$

$\eta(a)$  はクロスキャップ状態に現れる係数として次のように導入された。

$$|\text{CC}\rangle := Z(\text{MO}_A \times S_B^1) = \sum_a \eta(a) S|a\rangle \quad \text{i.e. } \eta(a) = \langle a| S^{-1} |\text{CC}\rangle. \quad (\text{D.2})$$

ここで  $\text{MO}_A$  は

$$\text{MO}_A := \{(x, \theta) \in [-1, 1] \times \mathbb{R} \mid (x, \theta) \sim (-x, \theta + \pi)\}. \quad (\text{D.3})$$

ただし、この節では貼り合わせる  $S^1$  等を区別するために添字  $A, B$  を添えている。  $S|a\rangle$  が  $S_A^1 \times D_B^2(a)$  に対応していたことを思い出すと、  $\langle a| S^{-1} |\text{CC}\rangle$  は、  $\text{MO}_A \times S_B^1$  と  $S_A^1 \times D_B^2(a)$  を共通の境界  $T^2 = S_A^1 \times S_B^1$  で貼り合わせて得られる多様体であることが分かる。これを以下、  $X(a)$  と書く。まずエニオンの存在を忘れて、多様体そのものに注目する。まず  $\text{MO}_A$  の有向二重被覆

$$\tilde{\text{MO}}_A := [-1, 1] \times S_A^1 \quad (\text{D.4})$$

を考える。すると、  $X$  の有向二重被覆  $\tilde{X}$  は、  $S_A^1 \times D_B^2$  と  $-S_A^1 \times D_B^2$  を  $\tilde{\text{MO}}_A \times S_B^1 = S_A^1 \times [-1, 1] \times S_B^1$  に貼り合わせることで得られる。結果として次を得る：

$$\tilde{X} = S_A^1 \times S_B^2 \quad (\text{D.5})$$

ここで、  $S_B^2$  は  $D_B^2$  と  $-D_B^2$  を  $[-1, 1] \times S_B^1$  に貼り合わせて得られたことに注意する。

では、  $\tilde{X}$  から  $X$  を取り出すことを考えよう。  $S_A^1$  と  $S_B^2$  を次のように表すこととする：

$$S_A^1 := \{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta \sim \theta + 2\pi\}, \quad S_B^2 := \{(n_x, n_y, n_z) \in \mathbb{R}^3 \mid |(n_x, n_y, n_z)| = 1\}. \quad (\text{D.6})$$

ここで、次のような  $S_A^1 \times S_B^2$  に作用する微分同相写像を考える：

$$\sigma : (\theta, n_x, n_y, n_z) \mapsto (\theta + \pi, -n_x, n_y, n_z). \quad (\text{D.7})$$

すると  $X$  は  $\tilde{X}$  をこの  $\sigma$  の作用で割ることで得られることが分かる：

$$X = S_A^1 \times S_B^2 / \sigma. \quad (\text{D.8})$$

ここでエニオンの存在を思い出すと、二つのエニオンが  $\tilde{X}$  上の  $S_A^1$  にそって巻きついてい

ることが分かる.  $X(a)$  を得る際,  $S_A^1 \times D_B^2(a)$  と, その向きを反転したソリッドトーラスを  $[-1, 1] \times S_B^1$  に貼り合わせる. ところがその時,  $S_A^1 \times D_B^2(a)$  の反転によりエニオンも反転作用を受ける. その反転作用素を

$$P : a \mapsto Pa \quad (\text{D.9})$$

と書くと, 貼り合わせるべきは  $S_A^1 \times D_B^2(a)$  と  $-S_A^1 \times D_B^2(Pa)$  であり, 結果として次を得る:

$$X(a) = S_A^1 \times S_B^2(a, Pa) / \sigma. \quad (\text{D.10})$$

ただし, ここで  $S^2(a, Pa)$  は, エニオン  $a, Pa$  がそれぞれ  $(n_x, n_y, n_z) = (1, 0, 0), (n_x, n_y, n_z) = (-1, 0, 0)$  に挿入されているものとする.  $S_A^1$  と  $\sigma$  の定義を思い出すと, これは次と等価である:

$$X(a) = \frac{S^2(a, Pa) \times [0, 1]}{(x, 0) \sim (-x, 1)}. \quad (\text{D.11})$$

ここで  $Pa = \overline{a}$  の同一視から  $X(a)$  は次のようにも書ける:

$$X(a) = \frac{S^2(a, \overline{a}) \times [0, 1]}{(x, 0) \sim (-x, 1)}. \quad (\text{D.12})$$

## 参考文献

- [ABGE<sup>+</sup>21] F. Apruzzi, F. Bonetti, I. García Etxebarria, S. S. Hosseini, and S. Schafer-Nameki, *Symmetry TFTs from String Theory*, Commun. Math. Phys. **402** (2023) 895–949, arXiv:2112.02092 [hep-th].
- [Ati89] M. Atiyah, *Topological quantum field theories*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **68** (1989) 175–186.
- [BBCW14] M. Barkeshli, P. Bonderson, M. Cheng, and Z. Wang, *Symmetry Fractionalization, Defects, and Gauging of Topological Phases*, Phys. Rev. B **100** (2019) 115147, arXiv:1410.4540 [cond-mat.str-el].
- [BBG98] K. Behrndt, I. Brunner, and I. Gaida, *AdS<sub>3</sub> gravity and conformal field theories*, Nucl. Phys. B **546** (1999) 65–95, arXiv:hep-th/9806195.
- [BBJ<sup>+</sup>16] M. Barkeshli, P. Bonderson, C.-M. Jian, M. Cheng, and K. Walker, *Reflection and time reversal symmetry enriched topological phases of matter: path integrals, non-orientable manifolds, and anomalies*, Commun. Math. Phys. **374** (2019) 1021–1124, arXiv:1612.07792 [cond-mat.str-el].

- [BC17] M. Barkeshli and M. Cheng, *Time-reversal and spatial-reflection symmetry localization anomalies in (2+1)-dimensional topological phases of matter*, Phys. Rev. B **98** (2018) 115129, arXiv:1706.09464 [cond-mat.str-el].
- [BCH18] F. Benini, C. Córdova, and P.-S. Hsin, *On 2-Group Global Symmetries and their Anomalies*, JHEP **03** (2019) 118, arXiv:1803.09336 [hep-th].
- [BHMV95] C. Blanchet, N. Habegger, G. Masbaum, and P. Vogel, *Topological quantum field theories derived from the kauffman bracket*, Topology **34** (1995) 883–927.
- [BM05] D. Belov and G. W. Moore, *Classification of Abelian spin Chern-Simons theories*, arXiv:hep-th/0505235.
- [BT82] R. Bott and L. W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 82, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [CGPW15] S. X. Cui, C. Galindo, J. Y. Plavnik, and Z. Wang, *On Gauging Symmetry of Modular Categories*, Commun. Math. Phys. **348** (2016) 1043–1064, arXiv:1510.03475 [math.QA].
- [DGHK22] D. G. Delmastro, J. Gomis, P.-S. Hsin, and Z. Komargodski, *Anomalies and symmetry fractionalization*, SciPost Phys. **15** (2023) 079, arXiv:2206.15118 [hep-th].
- [Don02] S. K. Donaldson, *“floer homology groups in yang–mills theory”*, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [EGNO15] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych, and V. Ostrik, *Tensor categories*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 205, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
- [ENO09] P. Etingof, D. Nikshych, and V. Ostrik, *Fusion categories and homotopy theory*, 2009. arXiv:0909.3140 [math.QA]. <https://arxiv.org/abs/0909.3140>. with an appendix by Ehud Meir.
- [Fa99] G. K. Francis and J. R. W. and, *Conway’s zip proof*, The American Mathematical Monthly **106** (1999) 393–399.
- [FFRS05] J. Fjelstad, J. Fuchs, I. Runkel, and C. Schweigert, *TFT construction of RCFT correlators. V. Proof of modular invariance and factorisation*, Theor. Appl. Categor. **16** (2006) 342–433, arXiv:hep-th/0503194.
- [FFRS06] ———, *Uniqueness of open / closed rational CFT with given algebra of open states*, Adv. Theor. Math. Phys. **12** (2008) 1283–1375, arXiv:hep-th/0612306.

- [FH16] D. S. Freed and M. J. Hopkins, *Reflection positivity and invertible topological phases*, *Geom. Topol.* **25** (2021) 1165–1330, arXiv:1604.06527 [hep-th].
- [FHLT09] D. S. Freed, M. J. Hopkins, J. Lurie, and C. Teleman, *Topological Quantum Field Theories from Compact Lie Groups*, A Celebration of Raoul Bott’s Legacy in Mathematics, 2009. arXiv:0905.0731 [math.AT].
- [FMT22] D. S. Freed, G. W. Moore, and C. Teleman, *Topological symmetry in quantum field theory*, arXiv:2209.07471 [hep-th].
- [FRS02] J. Fuchs, I. Runkel, and C. Schweigert, *TFT construction of RCFT correlators 1. Partition functions*, *Nucl. Phys. B* **646** (2002) 353–497, arXiv:hep-th/0204148.
- [FRS03] ———, *TFT construction of RCFT correlators. 2. Unoriented world sheets*, *Nucl. Phys. B* **678** (2004) 511–637, arXiv:hep-th/0306164.
- [FRS04a] ———, *TFT construction of RCFT correlators. 3. Simple currents*, *Nucl. Phys. B* **694** (2004) 277–353, arXiv:hep-th/0403157.
- [FRS04b] ———, *TFT construction of RCFT correlators. 4. Structure constants and correlation functions*, *Nucl. Phys. B* **715** (2005) 539–638, arXiv:hep-th/0412290.
- [FSV12] J. Fuchs, C. Schweigert, and A. Valentino, *Bicategories for boundary conditions and for surface defects in 3-d TFT*, *Commun. Math. Phys.* **321** (2013) 543–575, arXiv:1203.4568 [hep-th].
- [FT12] D. S. Freed and C. Teleman, *Relative quantum field theory*, *Commun. Math. Phys.* **326** (2014) 459–476, arXiv:1212.1692 [hep-th].
- [GM22] R. Geiko and G. W. Moore, *When Does a Three-Dimensional Chern–Simons–Witten Theory Have a Time Reversal Symmetry?*, *Annales Henri Poincaré* **25** (2024) 673–714, arXiv:2209.04519 [hep-th].
- [GMMS04] S. Gukov, E. Martinec, G. W. Moore, and A. Strominger, *Chern-Simons gauge theory and the  $AdS_3 / CFT_2$  correspondence*, *From Fields to Strings: Circumnavigating Theoretical Physics: A Conference in Tribute to Ian Kogan*, 2004, pp. 1606–1647. arXiv:hep-th/0403225.
- [Hai25] B. Haioun, *Non-semisimple WRT at the boundary of Crane-Yetter*, arXiv:2503.20905 [math.QA]. <https://arxiv.org/abs/2503.20905>.
- [Kap14] A. Kapustin, *Symmetry protected topological phases, anomalies, and cobordisms: Beyond group cohomology*, arXiv:1403.1467 [cond-mat.str-el].

- [KJB10] A. Kirillov Jr. and B. Balsam, *Turaev-Viro invariants as an extended TQFT*, arXiv:1004.1533 [math.GT].
- [KKO<sup>+</sup>22] J. Kaidi, Z. Komargodski, K. Ohmori, S. Seifnashri, and S.-H. Shao, *Higher central charges and topological boundaries in 2+1-dimensional tqfts*, SciPost Physics **13** (2022) .
- [KOZ22] J. Kaidi, K. Ohmori, and Y. Zheng, *Symmetry TFTs for Non-invertible Defects*, Commun. Math. Phys. **404** (2023) 1021–1124, arXiv:2209.11062 [hep-th].
- [KP05] A. Kitaev and J. Preskill, *Topological entanglement entropy*, Phys. Rev. Lett. **96** (2006) 110404, arXiv:hep-th/0510092.
- [KS10] A. Kapustin and N. Saulina, *Topological boundary conditions in abelian Chern-Simons theory*, Nucl. Phys. B **845** (2011) 393–435, arXiv:1008.0654 [hep-th].
- [Lic63] W. B. R. Lickorish, *Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **59** (1963) 307 – 317.
- [LT18] Y. Lee and Y. Tachikawa, *A study of time reversal symmetry of abelian anyons*, JHEP **07** (2018) 090, arXiv:1805.02738 [hep-th].
- [Lur09] J. Lurie, *On the classification of topological field theories*, 2009. arXiv:0905.0465 [math.CT]. <https://arxiv.org/abs/0905.0465>.
- [LW06] M. Levin and X.-G. Wen, *Detecting topological order in a ground state wave function*, Physical Review Letters **96** (2006) .
- [ML95] S. Mac Lane, *Homology*, 1 ed., Classics in Mathematics, Springer Berlin, Heidelberg, 1995. Originally published as volume 114 in the series: Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.
- [NRWZ20] S.-H. Ng, E. C. Rowell, Y. Wang, and Q. Zhang, *Higher central charges and Witt groups*, Advances in Mathematics **404** (2022) 108388, arXiv:2002.03570 [math.QA].
- [NSW18] S.-H. Ng, A. Schopieray, and Y. Wang, *Higher gauss sums of modular categories*, Selecta Mathematica **25** (2019) , arXiv:1812.11234 [math.QA].
- [Ori25a] I. Orii, *Reshetikhin – Turaev TQFT with time-reversal symmetry*, 2025. <https://www.youtube.com/watch?v=KEdFQPYEugw>.
- [Ori25b] I. Orii, *On dimensions of (2+1)D abelian bosonic topological systems on unoriented manifolds*, PTEP **2025** (2025) 053, arXiv:2502.13532 [hep-th].

- [Ori25c] ———, *Generalization of anomaly formula for time reversal symmetry in  $(2+1)D$  abelian bosonic TQFTs*, PTEP **2025** (2025) 123, arXiv:2508.04990 [hep-th].
- [Ori25d] ———, *Vanishing of the  $H^3$  obstruction for time-reversal symmetry in  $(2+1)D$  abelian bosonic TQFTs*, arXiv:2509.07368 [hep-th].
- [Row05] E. C. Rowell, *From quantum groups to unitary modular tensor categories*, arXiv:math/0503226 [math.QA].
- [RT91] N. Reshetikhin and V. G. Turaev, *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups*, Inventiones Mathematicae **103** (1991) 547–597.
- [Seg88] G. B. Segal, *The definition of conformal field theory*, Differential Geometrical Methods in Theoretical Physics (K. Bleuler and M. Werner, eds.), Springer Netherlands, 1988, pp. 165–171.
- [Sim23] S. H. Simon, *Topological Quantum*, Oxford University Press, 2023.
- [Tac17] Y. Tachikawa, *On gauging finite subgroups*, SciPost Phys. **8** (2020) 015, arXiv:1712.09542 [hep-th].
- [Tho14] R. Thorngren, *Framed Wilson Operators, Fermionic Strings, and Gravitational Anomaly in  $4d$* , JHEP **02** (2015) 152, arXiv:1404.4385 [hep-th].
- [Ton16] D. Tong, *Lectures on the Quantum Hall Effect*, arXiv:1606.06687 [hep-th].
- [Tur94] V. G. Turaev, *Quantum invariants of knots and three manifolds*, De Gruyter Studies in Mathematics, vol. 18, De Gruyter, 1994.
- [TY16a] Y. Tachikawa and K. Yonekura, *On time-reversal anomaly of  $2+1d$  topological phases*, PTEP **2017** (2017) 033B04, arXiv:1610.07010 [hep-th].
- [TY16b] ———, *More on time-reversal anomaly of  $2+1d$  topological phases*, Phys. Rev. Lett. **119** (2017) 111603, arXiv:1611.01601 [hep-th].
- [Vaf88] C. Vafa, *Toward Classification of Conformal Theories*, Phys. Lett. B **206** (1988) 421–426.
- [Wit89] E. Witten, *Quantum Field Theory and the Jones Polynomial*, Commun. Math. Phys. **121** (1989) 351–399.
- [Wit16] ———, *The “Parity” Anomaly On An Unorientable Manifold*, Phys. Rev. B **94** (2016) 195150, arXiv:1605.02391 [hep-th].

- [WL16] C. Wang and M. Levin, *Anomaly indicators for time-reversal symmetric topological orders*, Physical Review Letters **119** (2017) 136801, arXiv:1610.04624 [cond-mat.str-el].
- [ZHK88] S. C. Zhang, T. H. Hansson, and S. Kivelson, *An effective field theory model for the fractional quantum hall effect*, Phys. Rev. Lett. **62** (1988) 82–85.
- [川 24] 川平将司, アノマリーの数学的基礎から現象論的応用まで, 素粒子論研究・電子版 **42** (2024). 修士論文, 2024年4月17日受理.