

高階微分系に含まれる負振動子の量子論とその古典論対応

九後 汰一郎

京都大学 基礎物理学研究所 重力量子情報研究センター

*E-mail: kugo@yukawa.kyoto-u.ac.jp

要 旨

高階微分の運動方程式に従う場がいくつかの2乗質量の Klein-Gordon 場の和に分解できる場合、それらの成分場は2乗質量の大きさ順に、通常为正符号の Klein-Gordon Lagrangian を持つ正振動子の場と、運動項、質量項共に逆符号の負振動子の場とが交互に現れる。これまで、負振動子場の量子化には、その量子のノルムを正、エネルギー固有値を負定値、 $-(n+1/2)\hbar\omega$ 、と採る「負エネルギー量子化」と、ノルムを負、エネルギー固有値を正定値、と採る「負ノルム量子化」の二つがあり得るとされてきた。しかし、この稿では、前者の負エネルギー量子化では、そもそも基底状態が存在せず量子論が構成できないこと、したがって負ノルム量子化が唯一可能な量子論を与えることを示す。それゆえ、負振動子に対して負エネルギー量子化を前提とした Woodard の「高階微分の理論はすべて『Ostrogradsky 不安定性』を持つ（ので排除すべき）」という主張は全く根拠を持たないことが明らかになる。

この負ノルムの量子論が、古典論極限で負振動子の古典論に如何に移行するのかを詳しく議論する。一つは、負ノルムの振動子の Schrödinger 波動関数の引数や経路積分表式での積分変数は純虚数（ないしは虚数的複素数）に取らねばならないという 1980 年の有末達の仕事を紹介し、にもかかわらず、その経路積分表式の古典極限で効く〈停留位相点〉がどうして実数の古典軌道を与えるのか、を明らかにする。また、正定値のエネルギー固有値（と負ノルム）を持つ量子論において、如何にして、古典的状态が負定値表式のエネルギーを実現するのか？古典的状态の具体例として、大きな場および運動量の期待値を実現する coherent 状態を用いて、その機構を明らかにする。この（過剰）完全系をなす coherent 状態が全て正のノルムを持つ、という事実はミクロな負ノルム状態の問題解決に向けて重要な示唆を与えるかもしれないことを指摘する。

| 目次 | ページ |
|------------------------------------|-----|
| 1 はじめに | 2 |
| 2 高階微分系と正・負振動子 | 5 |
| 3 正・負振動子の量子化 | 6 |
| 4 負エネルギー量子化は存在しない | 9 |
| 5 古典論において負振動子は不安定か？ | 12 |
| 6 負ノルム量子化での調和振動子の Schrödinger 波動関数 | 13 |
| 7 負ノルム量子系の古典論との対応 | 18 |
| 7.1 負振動子の経路積分表示 | 18 |
| 7.2 古典論における場と運動方程式とは？ | 19 |
| 7.3 負振動子の負定値古典エネルギーの起源 | 20 |
| 7.4 有効作用の古典極限 | 22 |
| 8 結び | 25 |

1 はじめに

いわゆる Quadratic Gravity (レビューは e.g. [1, 2]) や Lee-Wick の Finite QED [3–5] などの高階微分の場の理論は、一般に、通常の 2 階微分の振動子の場に分解することが出来、(運動項とポテンシャル項の両方が正の) 通常の振動子と (両方が負の) 負振動子の両方を含む。後者の場合は、従来より、**負エネルギー場**または**負ノルム場**と二通りの呼び方をされてきたが、この稿では**負振動子**と呼ぶことにする。負振動子の存在は理論の深刻な困難ではあるが、この二つの呼び方は、困難の捉え方が全く異なる。

この稿では、そもそも**負振動子の正しい量子論は、負ノルムの場として扱う以外にはない**、すなわち、負エネルギー場とする量子論は存在しない、ということを明らかにしたい。近年では、素粒子論分野の研究者は殆ど全てが負ノルム派だと思うが、宇宙分野には未だ負エネルギー派の研究者も散見する (例えば、Woodard [6])。この傾向には、多分次のような事情があると思う。先ず素粒子論の分野では、負振動子は高階微分の理論ばかりではなく、標準模型の (Lorentz 共変なゲージにおいて) ゲージ場の時間成分にも現れ、それが負ノルム場として量子化されていること、あるいは古く Pauli-Villars 正則化における regulator が負ノルム場と認識されていたこと、がきいている。一方、宇宙分野では Einstein の古典重力理論が大成功を収めたという事情がきいている (と思う)。そもそも**古典論においては負ノルムという概念がない**ので、負定値の Hamiltonian を持つ負振動子は負エネルギーの場と呼ぶ以外にない。そういう負振動子の古典系に対応する「素直な」量子系は、エネルギー固有値が負定値 (でノルムが正) の量子論だろうと思われるからである。

この負定値のエネルギー固有値というのは、通常の正振動子の正のエネルギー固有値 $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ の符号を完全に反転した $E_n = -(n + 1/2)\hbar\omega$ であるが、これは古典論における Hamiltonian の表式が正・負振動子で符号が完全に反転していたことにピッタリ対応している。しかし、エネルギー固有値が負定値で下に非有界である、というのは量子論としてはあり得ない。それは量子論が、そもそもエネルギーの一番低い基底状態=真空の上に場の演算子の表現空間を構成するものだからである。負エネルギー固有値の状態を許容する“真空”は、(完全に相互作用の無い自由場の理論でない限り) 必然的に不安定であり、その上にまともな理論は構成できない。

Woodard [6] は、このような負エネルギー量子化の困難を正しく認識しながらも、負ノルム量子化の方をより厳しく排除した。その主たる理由は、「古典論との対応原理が成り立つのは負エネルギー量子化の方であり、負ノルム量子化では対応原理が成り立たない」というものである。この稿では、彼のこの排斥理由がすべて根拠のない主張であることを以下で順次明らかにする。

とにかく、彼は負エネルギー量子化の方を負振動子の唯一の可能な量子論と見なし、従って量子論も、対応する古典論も、エネルギーが下に非有界であって、根本的に不安定性を持つとした。そして、18世紀に高階微分の力学系に対して一般的な正準理論を与えた Ostrogradsky [7] の方法において、ある正準運動量変数 (の絶対値) が無限に大きくなる場合に、Hamiltonian が下に非有界になっている [6, 8] ことに着目し、それが高階微分系の含む負振動子による非有界性と同じ起源を持つことを指摘した。したがって、高階微分系は必然的に古典論および量子論共に不安定性を持つと主張し、それを **Ostrogradsky 不安定性** と呼んだ。しかし、そもそも負エネルギー量子化自体があり得ないものであることからして、Ostrogradsky 不安定性なるものは、量子論においても、対応する古典論においても、もともと存在しないのである。

この稿では、先ず第2節で、簡単のため一個のスカラー場 Φ のいわゆる Pais-Uhlenbeck の multi-mass 高階微分系 [9] を例にとり、元の場合 Φ が通常の2階微分の場合 ϕ_j の和に分解できること、そして成分場 ϕ_j には、正振動子と負振動子が mass の大きさ順に交互に現れる事を示す。第3節では、現れる正・負振動子の場の正準交換関係およびその生成・消滅演算子への展開を与え、負振動子に対しては“真空”状態の取り方が二通り考えられることを説明する。一方では、Hamiltonian の固有値が正定値で1粒子状態のノルムが負になり他方では Hamiltonian の固有値が負定値で1粒子状態のノルムが正になる。便宜上、前者を負ノルム量子化、後者を負エネルギー量子化、と呼ぶが、正確にはこれは量子化の問題ではなく、(場の演算子の) **表現の問題** である。

第4節では、負エネルギー量子化では、まず、エネルギーが負定値で下に非有界なので、真空が根本的に不安定であって、正しい量子論を与えられないこと、さらに、元の高階微分の場の理論の Feynman propagator を正しく再現しないことを示す。この事は、暗には古く Pauli-Villars [10] に、あらわには Stelle [11] によって知られていた。

負振動子は Hamiltonian が負定値で下に非有界の表式を持つので、古典論においては“負エネルギー”と呼ばれていた。しかし、第5節では、そもそも古典論において、負振動子の運動が何ら**不安定性**を持たないことを指摘する。これは、負振動子の量子論が、負エネルギー量子化が言うような根本的不安定性を持たないとすれば、その古典論極限として当然期待されることである。

次に、負振動子の負ノルム量子化に対して Woodard が最も強力に反対した論拠の「真空の Schrödinger 波動関数が規格化可能でない」という点に関して、第6節で議論する。これには、そもそも負ノルム状態を許す不定計量の量子論においては、振動子の座標 \hat{x} (場の演算子 $\hat{\phi}$) が、エルミートではあるが、その**固有値としては一般の複素数値を取り得る**という認識が本質的である。実際、有末-藤原-井上-小川 (AFIO)[12] は、すでに1980年に複素平面上の「虚数的経路 I 」上の複素固有値 $\phi \in I$ を引数とする Schrödinger 波動 (汎) 関数を導入することによって、負振動子の不定計量の (場の) 量子論の正しい Schrödinger 表示が与えられることを示した。第6節はその紹介である。

AFIO は、虚数的経路上の複素固有値 ϕ は負振動子の座標 ϕ の完全系をなすので、負振動子に対する経路積分表式でも、同様に各時刻の座標 ϕ の積分として現れることを示した。すると、量子論の古典極限 $\hbar \rightarrow 0$ を議論する際に、経路積分表式の被積分関数の位相=作用 $S[\phi]$ の停留点が古典論の運動方程式を与える、という通常の議論を適用すると、古典論の場の値 ϕ が虚数的経路上の複素数値になるのではないか? という疑念が生ずる。第7節ではこの疑問に答える。経路積分の積分経路は、複素平面上で極にぶつからないかぎり自由に変形できるので、その<停留位相点>は元の積分経路 I 上に限る必要はなく、いわゆる「鞍点法」(ないしは「最急降下法」) としても良く知られているように複素平面上で探すべきである。そうすると、鞍点として見つかるのは結局実数値の場の Euler-Lagange 方程式の解になるという議論を与える。この古典論との対応原理が成り立つということは、1) 演算子方程式の期待値の計算や 2) 有効作用の計算の古典極限の議論でも示すことができる。迫田 [13] は、有効作用の直接計算でこのことを初めて明示的に示している。

古典論との対応でもう一つの疑問は、エネルギー固有値が正定値なのに、その期待値が古典論で何故負定値の表式が得られるのか? である。このエネルギーが負になる原因はもちろん負ノルム状態の負号が効いているためであるが、ノルムが正の状態でもエネルギー期待値が負になるのは、一見不思議である。この点に関して、座標と運動量の最小不確定状態として知られている coherent state が、古典論に近い場合、まさにこれを実現する例を与えていることを示す。この事例は、負振動子の高励起レベルが密集していると見なせる高エネルギー (古典論領域) の場合にエネルギーの測定誤差内の有限幅の重ね合わせ状態が (正負ノルムのエネルギーレベルを数多く含むが) 全体としては正のノルムを持つことを示しており、負振動子のユニタリティの破れの問題に対する解決のヒントを与えるかもしれない面白い例である。

2 高階微分系と正・負振動子

この問題を考えるため、簡単な Pais-Uhlenbeck[9] の multi-mass 高階微分系¹、すなわち一個のスカラー場 $\Phi(x)$ の Lagrangian の自由場部分が

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \Phi F(-\square) \Phi, \quad F(s) = (-1)^n \prod_{j=0}^n (s - m_j^2) \quad (1)$$

の形に与えられる系で、 $2(n+1)$ 階微分演算子 $F(-\square)$ が相異なる $n+1$ 個の実 2 乗質量 m_j^2 ($j = 0, 1, 2, \dots, n$) の Klein-Gordon 演算子 $-\square - m_j^2$ に因数分解できる場合、を考察しよう。²ここでは、後の議論の都合上、time-favored metric $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, \dots, -1)$ を採っていて $\square \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial_0^2 - \nabla^2$ であり、また $F(s)$ の roots m_j^2 のラベルを $j = 0, 1, 2, \dots$ と最初を 0 と呼んでいることにも注意。

部分分数 (partial fraction) の一般公式

$$\frac{1}{F(s)} = \sum_{j=0}^n \frac{1}{F'(m_j^2)} \frac{1}{s - m_j^2}, \quad F'(s) \equiv \frac{dF(s)}{ds} \quad (2)$$

から従う恒等式

$$1 = \sum_{j=0}^n \eta_j (-1)^n \prod_{k \neq j} (s - m_k^2), \quad \eta_j = \frac{1}{F'(m_j^2)} \quad (3)$$

を用いれば、一般の n の場合でも元の場合 Φ は、 $n+1$ 個の成分場

$$\tilde{\phi}_j \equiv (-1)^n \prod_{k \neq j} (-\square - m_k^2) \Phi \quad (4)$$

の和に分解できて、

$$\Phi = \sum_{j=0}^n \eta_j \tilde{\phi}_j, \quad (5)$$

と書ける。

元の Lagrangian もそれらの場の Klein-Gordon Lagrangian の和の形に書ける：

$$L_0 = \sum_{j=0}^n \frac{1}{2} \eta_j \tilde{\phi}_j F(-\square) \Phi = \sum_{j=0}^n \frac{1}{2} \eta_j \tilde{\phi}_j (-\square - m_j^2) \tilde{\phi}_j. \quad (6)$$

ここで重要な点は、squared mass を $m_0^2 < m_1^2 < \dots < m_n^2$ の順に取っておけば、 $F(s=0) < 0$ に注意して、運動項の係数 η_j の符号は、 $\eta_0 > 0$ 、 $\eta_1 < 0$ 、 $\eta_2 > 0$ 、 \dots 、と正負が交互に現れる

¹ ここでは multi-mass 高階微分系を、中西の不定計量の場の理論一般にわたる優れたレビュー論文 [14] での扱いに従って紹介する。

² 一般的には多項式高階微分演算子 $F(-\square)$ の因数分解では多重根や複素根が現れるが、そういう場合の量子論は、必然的に不定計量の場の理論になることが示される。

ことである。で、 η_j を大きさと符号に分けて

$$\eta_j = (-1)^j |\eta_j| \quad (7)$$

と書き、成分場の規格化を変えて

$$\phi_j := (-1)^j c_j \tilde{\phi}_j \quad \text{with } c_j \equiv \sqrt{|\eta_j|} = \frac{1}{\sqrt{|F'(m_j^2)|}} \quad (8)$$

と定義すれば、上の Lagrangian は、(部分積分して全微分項を捨てれば) 符号因子を除き通常の Klein-Gordon 場の運動項の和となる：

$$L_0 = \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_j \partial^\mu \phi_j - m_j^2 \phi_j^2) . \quad (9)$$

元の場合 Φ も

$$\Phi = \sum_{j=0}^n c_j \phi_j \quad (10)$$

となるので、 Φ の微分を含まない相互作用項 $L_{\text{int}}(\Phi)$ がある場合は常に成分場のこの特定の線形結合での相互作用となる：

$$L_{\text{int}}(\Phi) = L_{\text{int}}\left(\sum_{j=0}^n c_j \phi_j\right) . \quad (11)$$

3 正・負振動子の量子化

さて問題は、奇数の j の負号 $(-1)^j = -1$ の運動項を持つ成分場 ϕ_j をどのように扱うか？である。問題の本質を見やすくするため、これ以降は最も簡単な 1 次元 (時間 1 次元、空間 0 次元) の場の理論 (すなわち量子力学系) のみを考える。また、偶数の j の成分場 $\phi_j (j = 0, 2, \dots)$ を正振動子 (normal oscillator)、奇数の j の成分場 $\phi_j (j = 1, 3, \dots)$ を負振動子 (negative oscillator) と呼ぼう。以下では一般の j に対する表式を与えるので、 j の偶奇によって、正・負の振動子に対してどこが違って来るのかを明示的にみることができる。

この場合、系の Lagrangian は

$$L = \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{1}{2} (\dot{\phi}_j^2 - m_j^2 \phi_j^2) + L_{\text{int}}\left(\sum_{j=0}^n c_j \phi_j\right) . \quad (12)$$

ϕ_j に共役な運動量変数は

$$\pi_j := \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (-1)^j \dot{\phi}_j \quad (13)$$

で、Hamiltonian は

$$\begin{aligned} H &= \sum_{j=0}^n \pi_j \dot{\phi}_j - L \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{1}{2} (\pi_j^2 + m_j^2 \phi_j^2) - L_{\text{int}} \left(\sum_{j=0}^n c_j \phi_j \right). \end{aligned} \quad (14)$$

正準交換関係は

$$[\phi_j, \pi_k] = i\delta_{jk} \quad \rightarrow \quad [\phi_j, \dot{\phi}_k] = i(-1)^j \delta_{jk}. \quad (15)$$

Euler-Lagrange (ないし正準) 運動方程式は、

$$\ddot{\phi}_j + m_j^2 \phi_j = (-1)^j c_j L'_{\text{int}}(\Phi) \quad (16)$$

$L'_{\text{int}}(\Phi) \equiv \partial L_{\text{int}}(\Phi)/\partial \Phi$ で Φ は Eq. (10) を代入するものとする。相互作用項が無い場合は、この運動方程式は、 j に依らず、通常の振動子の方程式になっていることに注意したい。

これよりしばらく、自由場の場合、ないしは相互作用表示の自由場部分、の議論を行うことにする。1+3次元の自由場が

$$\phi_j(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \left(a_j(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a_j^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx} \right), \quad \omega_k = k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_j^2} \quad (17)$$

と展開されることを思い起こせば、今の1+0次元振動子は、 j の偶奇に依らず

$$\begin{aligned} \phi_j(t) &= \frac{1}{\sqrt{2m_j}} \left(a_j e^{-im_j t} + a_j^\dagger e^{im_j t} \right), \\ \dot{\phi}_j(t) &= -i\sqrt{\frac{m_j}{2}} \left(a_j e^{-im_j t} - a_j^\dagger e^{im_j t} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

と展開される。しかし、(13) 式は、共役運動量変数 π_j が $\dot{\phi}_j$ と符号 $(-1)^j$ だけ異なることを示しているので、正準交換関係 (15) は、展開係数演算子に対し

$$[a_j, a_k^\dagger] = (-1)^j \delta_{jk}, \quad [a_j, a_k] = [a_j^\dagger, a_k^\dagger] = 0 \quad (19)$$

の交換関係を与える。もし通常のように、正振動 $e^{-im_j t}$ の係数 a_j を消滅演算子、負振動 $e^{im_j t}$ の係数 a_j^\dagger を生成演算子と定義すれば、すなわち、系の真空状態を

$$a_j |0\rangle = 0 \quad \text{for } \forall j \quad (20)$$

と採れば、 j 振動子の規格化された n 粒子励起状態は

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a_j^\dagger)^n |0\rangle \quad (21)$$

で与えられ、そのノルムは

$$\| |n\rangle \|^2 = \langle n|n\rangle = ((-1)^j)^n = (-1)^{jn} \quad (22)$$

と計算され、奇数の j の負振動子の場合、 n 励起状態は $(-1)^n$ のノルムを持ち、奇数の n の時 **負ノルム**を持つことがわかる。しかしながら、(14) 式の Hamiltonian は、自由場の時、 a_j, a_j^\dagger で書けば

$$H = \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{1}{2} (a_j a_j^\dagger + a_j^\dagger a_j) m_j = \sum_{j=0}^n \left((-1)^j a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2} \right) m_j \quad (23)$$

となって、 $(-1)^j$ 因子のため、エネルギーが一見負になるように見えるが、実は交換関係も $[a_j, a_j^\dagger] = (-1)^j$ となっているので、符号付きの $(-1)^j a_j^\dagger a_j$ が実際の励起状態の数を勘定する個数演算子 N_j になっていることに注意すべきである：

$$N_j := (-1)^j a_j^\dagger a_j \quad \rightarrow \quad [N_j, (a_j^\dagger)^n] = n(a_j^\dagger)^n. \quad (24)$$

したがって、Hamiltonian の表式は個数演算子で書けば、符号因子は消えて

$$H = \sum_{j=0}^n \left(N_j + \frac{1}{2} \right) m_j \quad (25)$$

となり、通常の調和振動子のスペクトルと同じ正定値の固有値 $\sum_j (n_j + 1/2) m_j$ を与える。

以上の負振動子の扱い方が、素粒子論研究者の多くが採用する **負ノルム量子化** と呼ばれるもので、エネルギー固有値は正定値であるが、その代償として、奇数の n 粒子励起状態が負ノルムを持つことになった。

これに対して、**負エネルギー量子化**とも呼ぶべきやり方を採用する人達が、最初の Pais-Uhlenbeck から現在に至るまで、居る。それは、負振動子の場合の交換関係 (19) の右辺の負号 $(-1)^j = -1$ を通常の $+1$ にするよう、生成・消滅演算子の役割をひっくり返すのである。すなわち、

$$a_j =: \alpha_j^\dagger, \quad a_j^\dagger =: \alpha_j, \quad \text{for odd } j \quad (26)$$

を、それぞれ、新たな生成・消滅演算子 $\alpha_j^\dagger, \alpha_j$ と呼んで、交換関係 (19) を通常 of 形

$$[\alpha_j, \alpha_j^\dagger] = +1 \quad (27)$$

と見なして、真空と励起状態を

$$\alpha_j |0\rangle_{\text{NE}} = 0, \quad |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\alpha_j^\dagger)^n |0\rangle_{\text{NE}} \quad (28)$$

と定義する。そうすると、Hamiltonian (23) の負振動子部分は

$$H_{\text{負振動子}} = \sum_{j:\text{odd}} -\frac{1}{2} (\alpha_j^\dagger \alpha_j + \alpha_j \alpha_j^\dagger) m_j = \sum_{j:\text{odd}} -\left(\alpha_j^\dagger \alpha_j + \frac{1}{2} \right) m_j \quad (29)$$

となる。この場合、通常通り $\alpha_j^\dagger \alpha_j$ が個数演算子 N_j だから、その固有値は負定値の $\sum_{j:\text{odd}} -(n_j + 1/2)m_j$ となる。全体の負号は最初の符号 $(-1)^j = -1$ がそのまま残ったものである。

この負エネルギー量子化では、 α_j の交換関係 (27) が通常の形なので状態のノルムは正定値 $\| |n\rangle \|^2 = +1$ であるが、その代償としてエネルギー固有値が負定値となったわけである。

4 負エネルギー量子化は存在しない

以上で、負振動子に対して二つの可能な量子化法が対等に存在するかのように説明したが、実はそうではない。

先ず最初に注意しなければならないのは、上の二つのやり方は「量子化法」の違いではなく、単にその「表現」の違いである、という点。すなわち、「量子化」というのは、与えられた古典論に対して、その物理量を演算子に置き換え、その演算子の交換関係、および演算子の、運動方程式、Lagrangian, Hamiltonian を与えることである。その点では、上の二つの「量子化」は全く同じものを与えており、異なるのは、生成演算子および消滅演算子の名前の付与の違いだけだからである。すなわち、「負ノルム量子化」では

$$a_j|0\rangle = 0 \quad \text{for } \forall j \quad (30)$$

を満たす真空 $|0\rangle$ の上に場の演算子代数の表現を構成しているのに対し、「負エネルギー量子化」では、

$$\alpha_j(= a_j^\dagger)|0\rangle_{\text{NE}} = 0 \quad \text{for odd } j, \quad a_j|0\rangle_{\text{NE}} = 0 \quad \text{for even } j \quad (31)$$

を満たす真空 $|0\rangle_{\text{NE}}$ の上に表現を構成しているのである。

しかしながら、自発的対称性の破れの場合に良く知られているように、不安定な真空上に表現を構成しようとするときタキオンモードが現れるなどの不都合が生じ、まともな理論を作る事ができない。この稿では負振動子に対する量子論は、「負ノルム量子化」が唯一可能な表現であって、「負エネルギー量子化」はまともな理論を作る事のできない(間違った真空上の)表現だということを示したいのである。

もちろん、負ノルム量子化の場合でも、負ノルム粒子が生成される高エネルギーになればユニタリ性が成立しなくなって物理的には矛盾するのだが、それには**明確な threshold energy**があり、それより低エネルギーでは**全く無矛盾なまっとうな理論**である [15]。それにゲージ理論のような場合には、負ノルム粒子は、例え生成される場合でも、BRST 不変な物理的部分空間においてはゼロノルムの組み合わせでしか生成されない、ということが保証され、問題が無くなる。高階微分理論でも負ノルム粒子が何らかの機構で制御されていれば、問題が無くなる可能性もある。

一方、以下に直ぐ述べるように、負エネルギー表現をとれば、真空 $|0\rangle_{\text{NE}}$ そのものが threshold energy なしに不安定になり、すぐさま壊れてしまうので、如何なる対称性や機構が働こ

うが、まっとうな理論は構成できない。(これは昔、Schrödinger 方程式の相対論化に際して直面した問題とまさに同じである。)

その理由は Woodard 自身が述べているように、この負振動子 ϕ_1 が通常の正エネルギーの振動子 ϕ_0 と相互作用していると、真空 $|0\rangle_{\text{NE}}$ は、エネルギー 0 を保ったまま、負エネルギー粒子 ϕ_1 を、正エネルギー粒子 ϕ_0 (をいくつか) と同時に生成すれば、無尽蔵に生成することができ、すぐさま崩壊してしまうからである。(1) そもそも量子論は(基底状態たる)真空 $|0\rangle$ の上に場の演算子 Φ の表現空間 $\{\Phi_i\Phi_j\cdots\Phi_k|0\rangle\}$ を構成して作られるものであるが、そのことと根本的に矛盾している。しかもこの量子化は高階微分理論の propagator を正しく再現しない。

この事を一番簡単な (12) の Lagrangian の系で $n = 1$ の場合を例にとって説明する。この場合、高階微分の元の場合 Φ の propagator は、単純に k^2 の 2 次式の kinetic term $F(k^2) = -(k^2 - m_0^2)(k^2 - m_1^2)$ の逆数(のマイナス)

$$\frac{1}{(k^2 - m_0^2)(k^2 - m_1^2)} = \frac{1}{\Delta m^2} \left(\frac{1}{-k^2 + m_0^2 - i\epsilon} - \frac{1}{-k^2 + m_1^2 - i\epsilon} \right) \quad (32)$$

($\Delta m^2 \equiv m_1^2 - m_0^2$) で与えられる。ここで、右辺で m_0^2 、 m_1^2 ともに $m_0^2 - i\epsilon$ 、 $m_1^2 - i\epsilon$ だけずらした(通常の Feynman 処方にしたがった pole の避け方) 点が重要。こうすれば Wick 回転ができて、propagator が紫外領域で $\sim 1/k^4$ で小さくなる。

実際に負ノルム量子化の場合に、場 ϕ_j の表式 (18) を使って、その propagator を計算しよう。この場合は、通常通り、場 ϕ_j の正振動部分 $e^{-im_j t}$ の係数を消滅演算子 a_j 、負振動部分 $e^{im_j t}$ を生成演算子 a_j^\dagger と定義するので、 $[a_j, a_j^\dagger] = (-1)^j$ を使って、

$$\begin{aligned} \langle 0|T\phi_j(t)\phi_j(0)|0\rangle &= \frac{1}{2m_j} \left(\theta(t)e^{-im_j t} \langle 0|a_j a_j^\dagger|0\rangle + \theta(-t)e^{+im_j t} \langle 0|a_j a_j^\dagger|0\rangle \right) \\ &= (-1)^j \frac{1}{2m_j} (\theta(t)e^{-im_j t} + \theta(-t)e^{+im_j t}) \\ &= (-1)^j \int \frac{dk_0}{2\pi i} \frac{e^{-ik_0 t}}{-k_0^2 + m_j^2 - i\epsilon} \end{aligned} \quad (33)$$

と計算される。ここで、演算子形式で $a_j|0\rangle = 0$ の真空の場合に素直に得られる第 2 行目の表式 ($t > 0$ の時に正振動因子 $e^{-im_j t}$, $t < 0$ の時に負振動因子 $e^{+im_j t}$) を第 3 行目の dk_0 積分が与えるには、被積分関数の $k_0 = \pm m_j$ の pole を、通常 Feynman 処方通り $m_j^2 \rightarrow m_j^2 - i\epsilon$ とシフトせねばならないことに注意すべきである。今の $n = 1$ の場合、(3) 式の η_j および (8) 式の c_j が、 $\eta_0 = -\eta_1 = 1/\Delta m^2 = c_0^2 = c_1^2$ なので、元の場合 Φ は、(10) より簡単に

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{\Delta m^2}} (\phi_0 + \phi_1) \quad (34)$$

で与えられる事に注意すれば、 Φ の propagator が、この負ノルム量子化の場合、正しく高階微分理論の propagator (32) を再現していることがわかる。

ところが一方、負エネルギー「量子化」を採っていたとすれば、生成・消滅演算子の役割が逆転する（よって正・負振動因子が逆転する）ので、 $j = 1$ の場合の propagator は

$$\begin{aligned} {}_{\text{NE}}\langle 0 | T \phi_1(t) \phi_1(0) | 0 \rangle_{\text{NE}} &= \frac{1}{2m_1} \left(\theta(t) e^{+im_1 t} {}_{\text{NE}}\langle 0 | \alpha_1 \alpha_1^\dagger | 0 \rangle_{\text{NE}} + \theta(-t) e^{-im_1 t} {}_{\text{NE}}\langle 0 | \alpha_1 \alpha_1^\dagger | 0 \rangle_{\text{NE}} \right) \\ &= \frac{1}{2m_1} (\theta(t) e^{+im_1 t} + \theta(-t) e^{-im_1 t}) \\ &= (-1) \int \frac{dk_0}{2\pi i} \frac{e^{-ik_0 t}}{-k_0^2 + m_1^2 + i\varepsilon} \end{aligned} \quad (35)$$

と計算される。上の負ノルム量子化の場合と逆の右辺 2 行目の表式 ($t > 0$ の時に負振動因子 $e^{+im_1 t}$ 、 $t < 0$ の時に正振動因子 $e^{-im_1 t}$) を第 3 行目の dk_0 積分が与えるために、被積分関数の $k_0 = \pm m_j$ の pole の位置を通常の Feynman 処方と逆方向へシフトし、 $m_1^2 \rightarrow m_1^2 + i\varepsilon$ とせねばならないことがわかる。また、この式の最後のマイナス符号 $(-1)^j = (-1)$ は、負ノルムから来ているのではなく、 $k_0 = \pm m_1$ の pole を回る方向が通常の場合と逆方向なので留数の符号が逆になることから来ている。したがって、この場合の元の場合 $\Phi = (\phi_0 + \phi_1)/\sqrt{\Delta m^2}$ の propagator は、

$$\begin{aligned} {}_{\text{NE}}\langle 0 | T \Phi \Phi | 0 \rangle_{\text{NE}} &= \frac{1}{\Delta m^2} \sum_{j=0}^1 {}_{\text{NE}}\langle 0 | T \phi_j \phi_j | 0 \rangle_{\text{NE}} \\ &= \frac{1}{\Delta m^2} \left(\frac{1}{-k_0^2 + m_0^2 - i\varepsilon} - \frac{1}{-k_0^2 + m_1^2 + i\varepsilon} \right) \end{aligned} \quad (36)$$

となるが、第 2 項は積分路の Wick 回転で $k_0 = \pm(m_1 + i\varepsilon)$ の pole を引っかけ、そこから余分な寄与を得る。それは公式

$$\frac{1}{-k_0^2 + m_1^2 + i\varepsilon} = \frac{1}{-k_0^2 + m_1^2 - i\varepsilon} - 2\pi i \delta(-k_0^2 + m_1^2) \quad (37)$$

から読み取れる。第 2 項の δ 関数部分が余分な寄与で、この項の寄与分だけ高階微分理論の propagator と異なるのである。実はこの事実は既に Stelle の有名な quadratic gravity のくりこみ可能性を証明した論文 [11] の Appendix に正しく指摘されていた。

これらの決定的な困難にも関わらず Woodard が（彼の論文 [6] の Sects.3 と 4、特に Subsect 4.3 において）「高階微分理論は、エネルギーが下に有界でないという根本的不安定性を持つ」と主張した理由は、

- (1) Ostrogradsky [7] の正準理論を適用すれば、高階微分理論の Hamiltonian H の表式が古典場の理論として見て、一般に下に非有界 (unbounded below) であることが示される。よって真空は不安定である。
- (2) それに対応する量子論は、負定値で下に非有界なエネルギー固有値 $E_n = -(n + 1/2)\hbar\omega$ を与える負エネルギー量子化による理論である。

- (3) もし負エネルギー量子化でなく負ノルム量子化を採用したとすると、そこでは、先ず、基底状態の Schrödinger 波動関数が正指数の Gaussian となり規格化可能でない。よって量子論の状態に対応しない。
- (4) さらに、よしんばその基底状態を形式的に定義したとしても古典論との対応原理が成り立たないだろう。

次の三つの 5, 6, 7 節で順次、これらが「通常の正定値 Hilbert 空間の常識に基づいた単なる思い込み」による根拠のない主張であり、間違っていることを説明しよう。

5 古典論において負振動子は不安定か？

負振動子の Hamiltonian の表式は、(14) の自由場の $j = 1$ 部分を見れば、

$$H_{\text{負振動子}} = -\frac{1}{2}(\pi^2 + m^2\phi^2) \quad (38)$$

であり、確かに座標 ϕ や正準運動量 π の大きさがどちらが大きくなっても Hamiltonian $H_{\text{負振動子}}$ は、いくらでもマイナスで大きくなる。³この事実でもって、「エネルギーが下に非有界であり、真空は不安定」というわけであるが果たしてそうか？ 古典論においては状態のノルムという概念が無いので、この $H_{\text{負振動子}}$ の表式からは負エネルギーと解釈するのも無理は無い。しかし、上で見たように、我々は、正しい量子論では下に非有界なエネルギー（固有値）というのはいり得ず、この負振動子は負ノルムで量子化されるべきこと、そしてエネルギー固有値は正定値であること、したがって、(38) 式のエネルギーの負号は状態の負ノルムから来ていることを知っている。それゆえ、量子論的に考えれば、この系は不安定であるはずがない。

一方、古典論は量子論から基礎付けられるべきものだから、負ノルムという概念の存在しない古典論自体の枠内でもそのような不安定性がない、と言えるはずである。実際、この事は古典論の運動方程式からすぐに言える。

Hamiltonian (38) 式の第一項が運動エネルギー K 、第 2 項がポテンシャルエネルギー V である：

$$K = -\frac{1}{2}\pi^2 = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2, \quad V = -\frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (39)$$

確かに、ポテンシャル V は、下向きの放物線 $-(1/2)\phi^2$ であり、 $\phi = 0$ の振動子原点は、不安定な山の頂点であり、原点においた質点は少しの揺らぎがあれば $|\phi| \rightarrow \infty$ の奈落の底に落ち込むように思える。しかし、それは通常の正定値の世界の常識にとらわれた誤解に過ぎない。

³これが、Woodard が言う一般的な Ostrogradsky 不安定性の、Pais-Uhlenbeck の multi-mass 模型での具体的な起源である。

い。この系の運動エネルギー K も通常と逆符号になっているので、この系の運動方程式は

$$-\frac{d^2}{dt^2}\phi = +m^2\phi \quad \rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2}\phi = -m^2\phi \quad (40)$$

となって、通常の調和振動子と全く同じ方程式となる。よって $\phi = 0$ に置いた質点は全く安定なのである。この負振動子の古典的運動には全く不安定性は存在しない。運動項が負のこの負振動子には、ポテンシャルによる力は、実効的に、通常と逆符号の $(-1) \times (-\partial V/\partial\phi)$ で働くので、原点に向いた復元力

$$+\frac{\partial V}{\partial\phi} = -m^2\phi \quad (41)$$

として機能しているのである。しかし、「この負振動子は自由場なので不安定性が顕在化しないだけで、正振動子との相互作用が存在すれば、不安定性が出るのではないか？」という反論があるかも知れない。

これに答えるため、正・負振動子が一つずつ ($j = 0, 1$) 存在する $n = 1$ の系 (12) で、

$$L_{\text{int}} = -\frac{\mu^2}{2}\Delta m^2\Phi^2 - \frac{\lambda}{4}(\Delta m^2\Phi^2)^2 = -\frac{\mu^2}{2}(\phi_0 + \phi_1)^2 - \frac{\lambda}{4}(\phi_0 + \phi_1)^4 \quad (42)$$

を相互作用項として持つ場合を考えよう。(34) 式、 $\sqrt{\Delta m^2}\Phi = \phi_0 + \phi_1$ 、により、これらは元の高階微分場 Φ で書かれた非微分相互作用項で、どちらも展開すれば正振動子 ϕ_0 と負振動子 ϕ_1 の間の相互作用項を持つ。 μ^2 項は、しかし、場の 2 次の相互作用なので解けて、その効果は単に ϕ_0, ϕ_1 の mass parameter (角振動数) m_0^2 および m_1^2 の値をそれぞれ

$$\begin{aligned} m_0^2 &\rightarrow m_0'^2 = \frac{1}{2}\left[(m_0^2 + m_1^2) - \sqrt{\Delta m^2(\Delta m^2 - 4\mu^2)}\right] \\ m_1^2 &\rightarrow m_1'^2 = \frac{1}{2}\left[(m_0^2 + m_1^2) + \sqrt{\Delta m^2(\Delta m^2 - 4\mu^2)}\right] \end{aligned} \quad (43)$$

へシフトするだけである事がわかる。したがって、 $\mu^2 \leq \Delta m^2/4$ の範囲の μ^2 の間は、原点 $\phi_0 = \phi_1 = 0$ 回りの振動の安定性は全く変わらない。 $(\mu^2$ が $\Delta m^2/4$ に達すると、正・負振動子の mass が縮退し $m_0'^2 = m_1'^2$ 、さらに大きくなると、 $m_0'^2$ および $m_1'^2$ は互いに複素共役な複素数となる。しかし、これは上で議論した Ostrogradski 不安定性とは全く別の Complex ghost の問題 [3-5, 15-17] となって、同じく不定計量の場の理論 [14] で扱う必要があることがわかるが、ここでは議論しない。)

λ 項は場の 4 次項で、それがあってもはや解析的には解けないが、非摂動系の振動安定性を考えれば、少なくとも λ の小さい間は系の振動の安定性を壊さないことは明らかであろう。この相互作用項を入れた古典系の運動を数値的に解いて見るのはおもしろいだろう。

6 負ノルム量子化での調和振動子の Schrödinger 波動関数

負ノルム量子化では、調和振動子の Schrödinger 波動関数が発散して規格化できず、量子系の状態に対応しない、という主張も、正定値 Hilbert 空間の量子論の常識にとらわれた間

違った主張である。実際、我々はゲージ理論の明白にローレンツ共変な演算子形式の成功をよく知っており、そこではゲージ場の時間成分 A_0 は負ノルムを持っている。その演算子形式における不定計量状態は、通常の場合の理論の常として、規格化された真空状態 $|0\rangle$ に正・負ノルムの場の演算子 A_μ を演算して構成されるので、必ずしも Schrödinger 波動 (汎) 関数で書かれてはいない。しかしながら、状態を代数的なブラ・ケット表示で書くか、Schrödinger 波動 (汎) 関数表示で書くかは単に表示の違いであって、物理的内容に違いがあるはずがない。実際、この問題意識から、有末-藤原-井上-小川 (AFIO) はすでに 1981 年の JMP 論文 [12] で、負ノルム調和振動子に対する正しい Schrödinger 波動関数表示とは何かを明らかにして、この問題に対する完全な解答を与えた。

AFIO の議論のポイントは、エルミートな調和振動子の座標演算子 $\hat{\phi}$ の固有値 ϕ が、不定計量の量子論では実数だとは限らない、という点である。実際、一般の複素数 ϕ を固有値とする固有状態 $|\phi\rangle$ は、⁴

$$\hat{\phi}|\phi\rangle = \phi|\phi\rangle \quad \overset{\dagger}{\mapsto} \quad \langle\phi|\hat{\phi}^\dagger = \phi^*\langle\phi| \quad (44)$$

を満たす。 $\hat{\phi}$ がエルミート演算子 $\hat{\phi}^\dagger = \hat{\phi}$ の場合、演算子 $\hat{\phi}$ は、右側のケット状態 $|\phi\rangle$ に作用すると固有値 ϕ を出し、左側のブラ状態 $\langle\phi|$ に作用すると複素共役値 ϕ^* を出す、ことに注意する。すると、 $\hat{\phi}$ を $\langle\phi'|$ と $|\phi\rangle$ で挟んだ場合、右側と左側に作用させることで

$$\langle\phi'|\hat{\phi}|\phi\rangle = \phi\langle\phi'|\phi\rangle = \phi^*\langle\phi'|\phi\rangle \quad (45)$$

が得られ、よって

$$(\phi - \phi^*)\langle\phi'|\phi\rangle = 0 \quad (46)$$

が導かれる。この式は、 $\phi' = \phi$ の時、 $|\phi\rangle$ のノルム $\| |\phi\rangle \|^2 = \langle\phi|\phi\rangle$ が non-zero なのは、 $\phi = \phi^*$ すなわち ϕ が実数の場合に限ることを言っている。特に、通常の正定値の Hilbert 空間の場合は (状態のノルムは必ず正だから)、「エルミート演算子の固有値は実数である」という良く知られた事実を証している。(逆に、直ぐ下で見るように、実数固有値の状態だけで完全系を張る場合は、系は正定値 Hilbert 空間であることが言える。) 他方、不定計量を許せば、複素数固有値もあり得ることを言っていて、その場合、

$$\langle\phi'|\phi\rangle \neq 0 \quad \iff \quad \phi' = \phi^*. \quad (47)$$

すなわち、内積 $\langle\phi'|\phi\rangle$ が non-zero で存在するのは、 ϕ と ϕ' が互いに複素共役な場合のみであること、よって特に、エルミート演算子の複素固有値状態 $|\phi\rangle$ は、すべてゼロノルムであることを示している。

⁴ AFIO は、 $\hat{\phi}$ の固有状態をブラ状態で

$$\langle\phi|\hat{\phi} = \phi\langle\phi|$$

と定義した。従って、 ϕ が複素数の場合は、我々のケット状態で定義した固有値 ϕ と複素共役の関係になっていることに注意したい。

状態 $|\psi\rangle$ に対応する通常の Schrödinger の波動関数 $\psi(x)$ は、Dirac の教科書に従えば、座標演算子 \hat{x} に対し

$$\langle x | \hat{x} = x \langle x | \quad (48)$$

を満たすブラ固有状態 $\langle x |$ を用いて $\psi(x) \equiv \langle x | \psi \rangle$ で与えられる。しかし、複素固有値 $x \neq x^*$ の場合は、固有値 x を与えるブラ状態は $\langle x |$ ではなく

$$\langle x^* | \hat{x} = x \langle x^* | \quad \left(\left\langle \leftarrow \hat{x} | x^* \right\rangle = x^* | x^* \right) \right) \quad (49)$$

なので、 $|\psi\rangle$ に対応させる Schrödinger 波動関数 $\psi(x)$ は

$$|\psi\rangle \longleftrightarrow \psi(x) = \langle x^* | \psi \rangle \quad (50)$$

と同定すべきことがわかる。実際それに座標演算子 \hat{x} が作用すれば

$$\hat{x} |\psi\rangle \longleftrightarrow \hat{x} \psi(x) = \langle x^* | \hat{x} | \psi \rangle = x \langle x^* | \psi \rangle = x \psi(x) \quad (51)$$

となって、うまく座標固有値 x の掛け算と同じになるからである。

また、通常の正定値 Hilbert 空間の場合の完全性関係

$$\int_R dx |x\rangle \langle x| = 1 \quad (R: \text{実軸 } (-\infty, +\infty)) \quad (52)$$

は、不定計量の場合は、AFIO が示した様に、⁵

$$i^{-1} \int_I dx |x\rangle \langle x^*| = 1 \quad (53)$$

となる。ここに複素平面上の積分経路 I は、最も単純には虚軸 $(-i\infty, +i\infty)$ にとっても良いが、必要な条件は、 $|x| \rightarrow \infty$ の無限遠方で虚軸からの角度が 45 度未満内の領域に納まることのみである。この条件を満たす経路 I を「虚数的経路」と呼ぶ。これを用いれば、一般の状態 $|\psi\rangle$ は、任意の虚数的経路 I 上の複素数 x を固有値とする座標固有状態 $|x\rangle$ ($x \in I$) で

$$|\psi\rangle = i^{-1} \int_I dx |x\rangle \langle x^* | \psi \rangle = i^{-1} \int_I dx \psi(x) |x\rangle \quad (54)$$

と展開されること、また $\langle \psi' |$ との内積が

$$\langle \psi' | \psi \rangle = i^{-1} \int_I dx \langle \psi' | x \rangle \langle x^* | \psi \rangle = i^{-1} \int_I dx \langle x | \psi' \rangle^* \langle x^* | \psi \rangle = i^{-1} \int_I dx (\psi'(x^*))^* \psi(x) \quad (55)$$

で与えられること、がわかる。この内積の式についてコメントを二つ。まず一つは、この内積の被積分関数 $(\psi'(x^*))^* \psi(x)$ が x^* を含まず x のみに依存する holomorphic 関数であること

⁵ 完全性関係の証明にはもちろん $|x\rangle$ の規格化を指定する必要がある。AFIO は、 $|x\rangle$ を調和振動子の完全系で展開して定義した。また AFIO は、虚数的積分経路 I の定義を、我々の採用している虚軸の向きとは逆の $+i\infty$ から $-i\infty$ への向き、に採っている。そのため (53) 式の前の因子は i^{-1} でなく i となっている。

に注意すべきである。よって被積分関数が pole などの singularity にぶつからない限り、積分経路 I は上述の任意の虚数的経路に変形しても同じ内積の値を与えるのである。もう一つは、この内積の式が、積分経路が実軸 R 上の場合にはノルムが**正定値**である事を示している点である。通常のように固有値 x が実軸上だけで完全系を張っていると仮定すると、すなわちと完全系 (52) を仮定すると、(55) 式は

$$\langle \psi' | \psi \rangle = \int_R dx (\psi'(x))^* \psi(x) \quad (56)$$

となるので、特に、 $\psi' = \psi$ の場合、任意の状態 $|\psi\rangle$ のノルムが正定値であることを示している。したがって、不定計量の量子論を扱うにはエルミートな座標演算子 \hat{x} の固有値を虚数的経路 I 上の複素数にまで拡張する必要があるのである。

さて、ここで懸案の負振動子の Schrödinger 波動関数を求めよう。正・負振動子の違いも明示するため、 $n = 1$ の場合の二つの自由場 $\phi_j (j = 0, 1)$ から成る系、すなわち $L_{\text{int}} = 0$ の、Lagrangian が (12) 式、Hamiltonian が (14) 式で与えられる系、を考える。その生成、消滅演算子は、展開式 (18) を用いれば、Schrödinger 演算子 ($t = 0$ の Heisenberg 演算子) $\phi_j = \phi_j(0)$ および $\pi_j = (-1)^j \dot{\phi}_j(0)$ で表せて

$$a_j = \frac{1}{\sqrt{2m_j}} (m_j \phi_j + i(-1)^j \pi_j) \quad (57)$$

(a_j^\dagger はそのエルミート共役)。 ϕ_j, π_j の正準交換関係は $j = 0, 1$ に依らず (15) 式、 $[\phi_j, \pi_j] = i$ なので、(以後しばらく演算子の ϕ_j, π_j にはハット^を付けて) 座標表示 (座標演算子の固有状態 $\langle \phi^* | \hat{\phi}_j = \phi \langle \phi^* |$ 上) の Schrödinger 波動関数、 $\Psi(\phi) \equiv \langle \phi^* | \Psi \rangle$ 、に対する演算子 $\hat{\phi}_j, \hat{\pi}_j$ の作用は、通常通り、

$$\hat{\phi}_j \Psi(\phi) = \phi \Psi(\phi), \quad \hat{\pi}_j \Psi(\phi) = -i \frac{d}{d\phi} \Psi(\phi) \quad (58)$$

であることがわかる。したがって、正負振動子の基底状態 $|0\rangle_j$ の Schrödinger 波動関数 $\Psi_{0j}(\phi) \equiv \langle \phi | \Psi_{0j} \rangle$ は、消滅演算子 a_j の表式 (57) を用いて

$$a_j |0\rangle_j = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{d}{d\phi} + (-1)^j m_j \phi \right) \Psi_{0j}(\phi) = 0 \quad (59)$$

を満たす。この方程式の解は、 N_j を適当な規格化因子として

$$\Psi_{0j}(\phi) = N_j^{-1/2} \exp \left[-(-1)^j \frac{1}{2} m_j \phi^2 \right]. \quad (60)$$

正振動子の $j = 0$ の場合は確かに**実の座標固有値** ϕ の表式として、この表式で規格化可能であるが、負振動子の $j = 1$ に対しては、 ϕ が実だと考えると発散する Gauss 関数であり、Woodard の指摘するように規格化可能ではない。しかし、負振動子はそもそも負ノルム粒子として量子化すべきもので、対応する Schrödinger 波動関数の引数 ϕ ($= \hat{\phi}$ の固有値) は、

AFIO が明らかにしたように虚数的経路 I 上の複素数でなければならない。そうすれば確かに、 $|\phi| \rightarrow \infty$ からの寄与は抑えられ、(55) 式の内積は well-defined で、規格化可能なのである。ついでに、 n 番目の励起状態 (21) の波動関数 Ψ_{nj} を求めておこう。波動関数に対して生成演算子 a_j^\dagger は

$$a_j^\dagger = -\frac{(-1)^j}{\sqrt{2m_j}} \left(\frac{d}{d\phi} - (-1)^j m_j \phi \right) = -\frac{(-1)^j}{\sqrt{2m_j}} \left(e^{(-1)^j m_j \phi^2 / 2} \frac{d}{d\phi} e^{-(-1)^j m_j \phi^2 / 2} \right) \quad (61)$$

と作用するので、 $(a^\dagger)^n |0\rangle_j$ の波動関数表示は

$$(a_j^\dagger)^n \Psi_{0j}(\phi) = \frac{(-1)^n}{((-1)^j)^n \sqrt{(2m_j)^n}} \Psi_{0j}(\phi) e^{(-1)^j m_j \phi^2} \frac{d^n}{d\phi^n} e^{-(-1)^j m_j \phi^2} \quad (62)$$

となる。ここで、 $(-1)^j$ のルートが $\sqrt{(-1)^j} = ((i^2)^j)^{1/2} = i^j$ と書けることに注意すれば、

$$(-1)^j m_j \phi^2 = (i^j \sqrt{m_j} \phi)^2 \quad (63)$$

さらに、エルミート多項式の定義式

$$H_n(q) \equiv (-1)^n e^{q^2} \frac{d^n}{dq^n} e^{-q^2} \quad (64)$$

を思い起こして、 n 番目の励起状態 $|n\rangle = (1/\sqrt{n!})(a^\dagger)^n |0\rangle$ の波動関数は

$$\begin{aligned} \Psi_{nj}(\phi) &= \frac{1}{\sqrt{n!}} (a_j^\dagger)^n \Psi_{0j}(\phi) \\ &= \frac{1}{i^{nj} \sqrt{2^n n!}} \Psi_{0j}(\phi) H_n(i^j \sqrt{m_j} \phi) \\ &= \frac{1}{i^{nj} \sqrt{2^n n!} N_j} e^{-q_j^2 / 2} H_n(q_j) \quad (q_j \equiv i^j \sqrt{m_j} \phi) \end{aligned} \quad (65)$$

となることがわかる。この内積を計算するにはエルミート多項式の直交性

$$\int_R dq H_n(q) H_m(q) e^{-q^2} = \delta_{nm} \sqrt{\pi} 2^n n! \quad (66)$$

および、次の(係数の)実数性と偶奇性を使う：

$$(H_n(q))^* = H_n(q^*), \quad H_n(q) = (-1)^n H_n(q). \quad (67)$$

負振動子の $j = 1$ の場合の内積は、Eq. (55) より

$$\begin{aligned} \langle n | m \rangle_{j=1} &= i^{-1} \int_I d\phi (\Psi_{n1}(\phi^*))^* \Psi_{m1}(\phi) \\ &= \frac{1}{i^{m-n} \sqrt{2^{n+m} n! m!} N_1} i^{-1} \int_I d\phi (H_n(-q_1^*) e^{-q_1^{*2}/2})^* H_m(q_1) e^{-q_1^2/2} \end{aligned} \quad (68)$$

N_1 は、 $j = 1$ の基底状態の規格化因子 N_j である。 $q_1 = i\sqrt{m_1}\phi$ なので、 ϕ だけを ϕ^* にした場合の q_1 は $-q_1^*$ になることを用いた。虚数的経路 I を最も簡単な虚軸に採ることにして、

$\phi = -i\infty$ から $\phi = +i\infty$ までの虚軸上の $d\phi$ 積分を、 $\phi' \equiv i\phi$ で書き直せば、

$$i^{-1} \int_I d\phi = i^{-1} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\phi = - \int_{+\infty}^{-\infty} d\phi' = \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi' = \int_R d\phi' \quad (69)$$

という実軸 R 上の積分になる。その時、 q_1 は実数の $\sqrt{m_1}\phi'$ なので、 ϕ' を $j=0$ の正振動子の実座標変数 ϕ_0 の $\sqrt{m_0/m_1}$ 倍、 $\phi' =: \sqrt{m_0/m_1}\phi_0$ 、と見なせば、正振動子の場合の $q_0 = \sqrt{m_0}\phi_0$ と同定出来る。すなわち、 $\phi \in I$ (虚軸) の場合、 $q_1 = q_0 \in R$ (実軸)。よって

$$\langle n | m \rangle_{j=1} = \frac{1}{\sqrt{2^{n+m}n!m!N_1}} \sqrt{\frac{m_0}{m_1}} \int_R d\phi_0 H_n(-q_0) H_m(q_0) e^{-q_0^2} = (-1)^n \delta_{nm} \frac{\sqrt{\pi}}{N_1 \sqrt{m_1}}$$

を得る。最後の表式へは、エルミート多項式の偶奇性 $H_n(-q) = (-1)^n H_n(q)$ 、積分変数の変換 $\sqrt{m_0} d\phi_0 = dq_0$ 、および積分公式 (66) を使った。 N_1 は、 $j=1$ の基底状態 $|0\rangle$ の規格化因子であったから、 $\langle 0 | 0 \rangle = 1$ に規格化してあったとすれば、この式の $n=m=0$ での値は 1 でなければならないので、 $N_1 = \sqrt{\pi/m_1}$ と決まり、当然のことながら演算子形式の不定計量量子論の

$$\langle n | m \rangle_{j=1} = (-1)^n \delta_{nm} \quad (70)$$

を正しく再現している。交替符号のノルム因子 $(-1)^n$ は、結局の所、内積の定義 (68) で一方の波動関数 $H_n(q_1 = i\sqrt{m_1}\phi)$ の引数の座標変数 ϕ が複素共役 $\phi \rightarrow \phi^*$ を取られるため、 $q_1 \rightarrow -q_1^*$ となって H_n の偶奇性 $H_n(-q_1^*) = (-1)^n H_n(q_1^*)$ から出た、ということに注意しよう。

7 負ノルム量子系の古典論との対応

さて、以上で不定計量の負振動子の量子論は、演算子形式の代数的表現だけでなくエルミートな座標演算子 $\hat{\phi}$ の純虚数固有値 ϕ を引数とする Schrödinger 波動関数 $\Psi(\phi)$ でも問題なく表現できることが明らかになった。

7.1 負振動子の経路積分表示

AFIO は、さらに、負振動子に対する経路積分表示が、時々刻々の各時刻で純虚数固有値の完全系

$$i^{-1} \int_I d\phi |\phi\rangle \langle \phi^*| = 1 \quad (71)$$

を挿入することで、ほぼ通常の形で得られる事を示した。すなわち、例えば、正負振動子を含む (12) の系に対しても、見かけ上通常の遷移振幅の表式

$$\langle \phi_F^* | e^{-i\hat{H}(t_F-t_I)/\hbar} | \phi_I \rangle = \int_{\phi(t_I)=\phi_I}^{\phi(t_F)=\phi_F} \mathcal{D}\phi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_I}^{t_F} dt L(\phi(t)) \right], \quad (72)$$

(以降、強調すべき所では \hbar を復活させる。)あるいは、連結 Green 関数の生成汎関数に対する表式

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}W[J]\right) = \int \mathcal{D}\phi \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int dt \left(L(\phi(t)) + J(t)\phi(t)\right)\right] \quad (73)$$

が得られる。ここで ϕ は、 $n+1$ 個の場の固有値 ϕ_j ($j=0,1,\dots,n$)の略記で、 $\mathcal{D}\phi = \prod_{j=0}^n \mathcal{D}\phi_j$ や $J\phi = \sum_{j=0}^n J_j\phi_j$ 等を表す。通常と唯一異なるのは、奇数の j の負振動子部分の座標値 $\phi_j(t)$ が実数ではなく純虚数である点である。すなわち経路積分は

$$\int \mathcal{D}\phi = \prod_t \left(\prod_{j:\text{even}} \int_R d\phi_j(t) \cdot \prod_{j:\text{odd}} i^{-1} \int_I d\phi_j(t) \right). \quad (74)$$

各時刻 t の積分 $d\phi_j(t)$ は、実数的経路 R ないし虚数的経路 I に沿った積分である。

通常、古典論は、この経路積分表式をにらみながら、古典論において議論している作用 $S[\phi] = \int dt L(\phi(t))$ の大きさのオーダーが \hbar に比べてはるかに大きいので、古典論的スケールで経路を少しでもずらすと、そのズレによる $\exp(iS[\phi]/\hbar)$ の位相が激しく変化し、ほとんどすべての経路の寄与は実質0となる。そのため、古典論において実質上寄与するのは作用の停留点のみである、ということで、経路の変分に対する作用の停留性

$$\delta S[\phi] = \int dt \left[\frac{\partial L}{\partial \phi(t)} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}(t)} \right) \right] \delta \phi(t) = 0 \quad (75)$$

を要求して、古典論において「実現される経路」を決める運動方程式、

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(t)} = \frac{\partial L}{\partial \phi(t)} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}(t)} \right) = 0, \quad (76)$$

すなわち、Euler-Lagrange 方程式、が得られる。しかし、ここで素朴な疑問が生まれる。そもそも、この変分をとった作用 $S[\phi] = \int dt L(\phi(t))$ は、虚数的経路 I 上の $\phi(t)$ の汎関数であり、端的に I を虚軸にとった場合は、純虚数の $\phi(t)$ の汎関数である。そういう作用の Euler-Lagrange 方程式で決まる解 $\phi(t)$ は純虚数になるのではないか？という疑問である。

7.2 古典論における場と運動方程式とは？

これに直接答えることは後に回して、そもそも古典論に於ける場 $\phi(t)$ や運動方程式とは何かを考えよう。まず古典場 $\varphi(t)$ は、古典論的状况下にある量子状態 $|\Psi\rangle$ において観測される、Heisenberg 場 $\hat{\phi}(t)$ の期待値である：

$$\varphi(t) = \langle \Psi | \hat{\phi}(t) | \Psi \rangle / \langle \Psi | \Psi \rangle. \quad (77)$$

(以後しばらく、 $|\Psi\rangle$ は1に規格化されているものとし分母の $\langle \Psi | \Psi \rangle$ は省略。)しかし、エルミート演算子の期待値は、そもそも、同じ状態のブラとケットで挟んでいるので、負振動子

の場合でも常に**実数**である。実際、座標演算子 $\hat{\phi}$ のエルミート性 $\hat{\phi}^\dagger = \hat{\phi}$ から

$$\varphi^*(t) = \left(\langle \Psi | \hat{\phi}(t) | \Psi \rangle \right)^* = \langle \Psi | \hat{\phi}^\dagger(t) | \Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{\phi}(t) | \Psi \rangle = \varphi(t). \quad (78)$$

さらに、量子論の段階で、例えば (12) の系では、座標演算子 (Heisenberg 場) $\hat{\phi}(t)$ は古典論と同じ形の運動方程式、Euler-Lagrange 方程式、に従う：

$$(-1)^j \left(\partial_t^2 \hat{\phi}_j + m_j^2 \hat{\phi}_j \right) = \frac{\partial}{\partial \hat{\phi}_j} L_{\text{int}}(\hat{\Phi}) \quad (79)$$

右辺の場の 3 次以上の項についても、一般に、任意の関数 $F(\hat{\phi})$ に関して

$$\langle F(\hat{\phi}) \rangle = F(\langle \hat{\phi} \rangle) + O(\hbar) \quad (\langle \dots \rangle \equiv \langle \Psi | \dots | \Psi \rangle) \quad (80)$$

が成り立つので、古典極限 $\hbar \rightarrow 0$ では引数中の演算子それぞれの期待値に置き換えて良い。よって量子論の運動方程式 (79) の期待値は古典極限で古典場の運動方程式

$$(-1)^j \left(\partial_t^2 \varphi_j + m_j^2 \varphi_j \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi_j} L_{\text{int}}(c\varphi) \quad \left(c\varphi \equiv \langle \hat{\Phi} \rangle = \sum_j c_j \varphi_j \right) \quad (81)$$

を導く。同様に、Hamilton 演算子 (14) の (自由場部分の) 期待値は、古典極限で古典的エネルギー表式を与える。

$$\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle = \sum_j \left\langle (-1)^j \frac{1}{2} \left(\hat{\pi}_j^2 + m_j^2 \hat{\phi}_j^2 \right) \right\rangle = \sum_j (-1)^j \frac{1}{2} \left(\dot{\varphi}_j^2 + m_j^2 \varphi_j^2 \right) \quad (82)$$

ここで、 $\langle \hat{\pi}_j \rangle = \langle (-1)^j \dot{\hat{\phi}}_j \rangle = (-1)^j \dot{\varphi}_j$ を使った。古典論においても、負振動子のエネルギーが、overall sign $(-1)^j = -1$ がかかっているため、負定値であることに注意したい。これは、そもそも出発点の古典場理論がそうであったので当然の結果である。

7.3 負振動子の負定値古典エネルギーの起源

しかし、Woodard は、「負ノルム量子化では、負振動子の Hamiltonian \hat{H} の固有値が正定値にも関わらず、古典的 Hamiltonian が負定値になっている」ことでもって量子論と古典論の対応原理が成り立っていないかのように主張している。しかしここまでに見たように、エネルギー固有値が正定値であることと、古典的 Hamiltonian が負定値になっていることは両立し、何の矛盾も存在しない。

負振動子 $j = 1$ の古典的状态 $|\Psi\rangle$ をエネルギー固有状態 $|n\rangle_1$ で一般に展開して

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle_1 \quad (83)$$

とすれば、この状態でのノルム N とエネルギー期待値 E は

$$\begin{aligned} N &\equiv \langle\Psi|\Psi\rangle = \sum_{n,m} c_m^* c_n \langle m|n\rangle_1, \\ E &= N^{-1} \langle\Psi|\hat{H}_1|\Psi\rangle = N^{-1} \sum_{n,m} c_m^* c_n E_n \langle m|n\rangle_1. \end{aligned} \quad (84)$$

エネルギー固有値 $E_n = (n + 1/2)m_1$ は正定値であるが、この場合の内積 $\langle m|n\rangle_1$ は、不定計量の $(-1)^n \delta_{n,m}$ なので、

$$\begin{aligned} N &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n |c_n|^2 \\ \frac{E}{\hbar m_1} &= N^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n |c_n|^2 \left(n + \frac{1}{2}\right) = N^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n |c_n|^2 n\right) + \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (85)$$

ここでも \hbar を復活させておいた。古典論の負定値の Hamiltonian の言うように、Norm N を正に保ちながら、エネルギーの期待値 E を負にすることは可能である。実際、古典論極限というのは、 $E/\hbar m_1 = \langle n \rangle \gg 1$ なので、 n の非常に大きな状態 $|n\rangle$ が支配的に効いている状態という事である。そのような状態 $|\Psi\rangle$ として、例えば、大きな複素数 z をパラメータに持つ次の状態 (coherent state)

$$|\Psi\rangle = \exp\left((-1)^j z a_j^\dagger\right) |0\rangle, \quad \text{i.e.,} \quad c_n = \frac{\left((-1)^j z\right)^n}{\sqrt{n!}} \quad (86)$$

が考えられる。負振動子 ($j = 1$) の場合、この状態のノルムは

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{|z|^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-|z|^2)^n}{n!} = \exp(-|z|^2) > 0, \quad (87)$$

で正である。そしてエネルギー期待値は

$$\begin{aligned} \frac{E}{\hbar m_1} &= N^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-|z|^2)^n}{n!} \times n\right) + \frac{1}{2} \\ &= N^{-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-|z|^2)^{n-1}}{(n-1)!} \times (-|z|^2)\right) + \frac{1}{2} = -|z|^2 + \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (88)$$

古典極限では、 $|z|^2 \gg 1$ なので、ゼロ点振動エネルギー $1/2$ はもちろん無視でき、これは負定値 $-|z|^2$ である。しかも実は、この状態 $|\Psi\rangle$ は coherent state と呼ばれる、消滅演算子 a_j

の固有値 z の固有状態 $|z\rangle$

$$a_j |z\rangle = z |z\rangle \quad \rightarrow \quad \langle z| a_j^\dagger = z^* \langle z| \quad (89)$$

である⁶。 $|z\rangle$ を規格化された coherent 状態、 $\langle z|z\rangle = 1$ 、 とすれば、 正負振動子 $j = 0, 1$ に対し

$$|z\rangle = e^{-(-1)^j |z|^2 / 2} e^{(-1)^j z a_j^\dagger} |0\rangle \quad (90)$$

で与えられる。この状態での消滅演算子 a_j の期待値は、(57) 式を用いれば、

$$z = \langle z| a_j |z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2m_j \hbar}} \langle z| (m_j \hat{\phi}_j + i(-1)^j \hat{\pi}_j) |z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2m_j \hbar}} (m_j \varphi_j + i(-1)^j \pi_j) \quad (91)$$

の関係式を言う。ここで φ_j および π_j は、それぞれエルミート演算子 $\hat{\phi}_j$ および $\hat{\pi}_j$ の期待値であり、実数である。したがって、この coherent 状態での Hamilton 演算子の期待値を計算すれば、

$$\langle z| \hat{H} |z\rangle = \langle z| \left((-1)^j a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2} \right) \hbar m_j |z\rangle = (-1)^j |z|^2 \hbar m_j + \frac{\hbar}{2} m_j = (-1)^j \frac{1}{2} (m_j^2 \varphi_j^2 + \pi_j^2) + \frac{\hbar}{2} m_j \quad (92)$$

となり、ゼロ点振動エネルギー部分 $\hbar m_j / 2$ を除いて古典論のエネルギー表式を、正・負振動子共に再現している。ここで、負振動子の場合、Hamiltonian の個数演算子部分 $(-1)^j a_j^\dagger a_j$ は、固有状態 $|n\rangle$ に対しては常に正の固有値 n を与えていたのに対し、期待値としては負定値の $-|z|^2$ を与えたことに注意したい。この負号はもちろん負ノルム状態のノルムから来ている。

7.4 有効作用の古典極限

量子論において、場の期待値 φ の運動方程式を求める標準的な方法は、いわゆる有効作用 $\Gamma[\varphi]$ を使うものである。まず、系に外場 $J(x)$ との結合項 $J\hat{\phi}$ を導入して Green 関数および Connected Green 関数の生成汎関数 $Z[J]$ および $W[J]$ を

$$\begin{aligned} Z[J] &= \exp\left(\frac{i}{\hbar} W[J]\right) = \langle 0| \text{T exp}\left[\frac{i}{\hbar} \int d^4x J(x) \hat{\phi}(x)\right] |0\rangle \\ &= N \int \mathcal{D}\phi \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int d^4x \left(L(\phi, \partial\phi) + J\phi\right)\right] \end{aligned} \quad (93)$$

と定義する。ここで、一行目の表式中の $\hat{\phi}(x)$ は Lagrangian $L(\hat{\phi}, \partial\hat{\phi})$ を持つ系の Heisenberg 場であり、 $|0\rangle$ はその系の規格化された真空である。二行目冒頭の N は、 $Z[J=0] = 1$ を満た

⁶ この coherent 状態は、場（座標） $\hat{\phi}$ および共役運動量 $\hat{\pi}$ の両者の期待値 φ, π の不確定さ（の積）を最小にする状態として良く知られている。（詳しくは、正計量の場合の量子光学のテキスト [19] や不定計量の場合の迫田の論文 [13] の Appendix を参照。）

すための規格化因子である。連結 Green 関数の生成汎関数 $W[J]$ の引数を、外場 $J(x)$ から、 $J(x)$ が存在するときの場の期待値 $\varphi(x)$

$$\varphi(x) := \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \langle 0 | \text{T} \hat{\phi}(x) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int d^4x J \hat{\phi} \right] | 0 \rangle \quad (94)$$

に書きかえる Legendre 変換

$$\Gamma[\varphi] := W[J] - \int d^4x J(x) \varphi(x) \quad (95)$$

で定義されるのが有効作用 $\Gamma[\varphi]$ である。この定義よりただちに Legendre 変換の常として (94) 式に双対な関係式

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x)} = -J(x) \quad (96)$$

がしたがう。この関係式で $J = 0$ と置いたものが、量子論における場の期待値 $\varphi(x)$ を決める運動方程式であり、量子効果が全て含まれる。正定値計量の量子論を扱う通常の場合の理論の教科書では、古典場 ϕ が実場の場合、外場 J は実数、 $\hat{\phi}$ はエルミート演算子、経路積分変数 ϕ も実数、であり、 $W[J]$ の経路積分表式 (93) を用いた有効作用 $\Gamma[\varphi]$ に対する Loop 数展開 = \hbar 展開の形式的な議論から、簡単に、有効作用の \hbar 展開の第ゼロ次が、古典論の作用 $S[\varphi] = \int d^4x L(\varphi, \partial\varphi)$ と同一であることが示される。したがって、 $J = 0$ の場合の有効作用の運動方程式 (96) が、古典論の Euler-Lagrange 方程式と同じであり、それはまた、経路積分表式の被積分汎関数の位相の停留性条件と一致していたわけである。

ところが、今の負振動子の場合、量子論は不定計量の場の理論であり、その経路積分表式の被積分汎関数の指数部は見かけ上古典論の作用と同一であるが、経路積分変数 ϕ は、虚数的経路 I 上の値をとっている。その $\hbar \rightarrow 0$ 極限の停留性で決まる運動方程式は、果たして実数場の古典論の Euler-Lagrange 方程式と一致しているのか？ということが本節はじめの疑問であった。

この疑問に対し、迫田は、簡単な負振動子の系の場合に、虚軸に沿った ϕ 積分の経路積分表式を用いて、上述のルーティンの方法に従って有効作用 $\Gamma[\varphi]$ を直接計算して、実数の場 φ の（負振動子のマイナス符号を持った）古典論の作用が得られる事を初めてあらわに示した。

しかしながら、その直接計算では何故、虚軸に沿った経路積分表式から停留位相の条件で出るべき古典論の有効作用が実数場の作用になるのか？の本質的理由が良く見えない。

この疑問に対する解答のポイントは、「負振動子に対する経路積分変数 ϕ の積分経路 I は、 $|\phi| \rightarrow \pm\infty$ の時に虚軸方向 $\phi \rightarrow \pm i\infty$ に行く「虚数的経路」ではあるが、 ϕ の経路全域にわたって虚軸 $\phi = ix$ [$x \in R(-\infty, \infty)$] である必要はない。」ということである。実際、通常解析関数の複素平面上の積分経路 C は、pole を横切らない限り自由に変形してもその積分値は変わらない。今の経路積分の場合も、被積分関数は ϕ の解析的関数の作用 $S[\phi]$ (の指数

関数) で与えられるので、 $|\phi|$ が有限の領域では虚軸から大きく離れた経路にまで変形しても構わないのである。

その意味では、古典論極限 $\hbar \rightarrow 0$ で経路積分に最も効いている被積分関数指数部の作用 $S[\phi]$ の停留点を探すのは、単に初めに与えられた積分経路の虚軸上だけではなく、複素平面全体で探すべきだということになる。このこと自体は、実は、解析的関数の積分に対して「鞍点法」ないし「最急降下法」と呼ばれる近似計算法で良く知られたことである。作用 $S[\phi]$ は実関数 ($S[\phi]^* = S[\phi^*]$) なので、停留位相条件の解 ($\phi(x)$ の) 関数 $\delta S[\phi]/\delta\phi(x)$ のゼロ点は実軸上にあるか、実軸上でなければ互いに複素共役な対をなして存在している。しかし、我々はそもそも古典論の Euler-Lagrange 方程式が普通の実数解を持つような系から出発したはずなので、その場合、少なくともその実数解 ϕ は複素平面上での経路積分の被積分関数の位相停留点 $\delta S[\phi]/\delta\phi = 0$ を与える、ということである。

この事を、正・負振動子の 0 次元の場の理論を例にとってあらわに見てみよう。0 次元の場の理論というのは、時間も空間もないので、場 ϕ は、その引数が無く、単なる 1 変数 ϕ で、従って、Lagrangian $L = K - V$ は、運動項 $K = 0$ で、potential V のみがある：

$$L = -(-1)^j \frac{1}{2} m_j^2 \phi_j^2 \quad (j = 0: \text{正振動子}, j = 1: \text{負振動子}) \quad (97)$$

これは (自由場の場合の) 振動子 Lagrangian (12) 式の 0 次元版である。以下では負振動子 ($j = 1$) の $L(\phi) = +(1/2)m^2\phi^2$ の場合のみを考えよう。連結 Green 関数の生成関数 $Z(J)$ (の 0 次元アナログ) は、

$$\begin{aligned} Z(J) &= \exp\left(\frac{i}{\hbar} W(J)\right) = N \int_I d\phi \exp \frac{i}{\hbar} \left(+ \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + J\phi \right) \\ &= N \int_I d\phi \exp \frac{i}{\hbar} \left(+ \frac{1}{2} m^2 \left(\phi + \frac{J}{m^2}\right)^2 - \frac{J^2}{2m^2} \right) \end{aligned} \quad (98)$$

である。 N は $Z(J=0) = 1$ ($W(J=0) = 0$) と規格化するための因子。Lagrangian のエルミート性から外場 J は実数でなければならぬが、それが重要である。第 2 行目の式を見れば、指数部の関数の停留点 $\phi = -J/m^2$ は実数であり、 ϕ の積分経路 I が虚軸 $(-i\infty, +i\infty)$ にとつてあったとすると、その経路上にはない事がわかる。しかし、積分経路を ϕ の複素平面上で横に $-J/m^2$ だけシフトして $(-i\infty - J/m^2, +i\infty - J/m^2)$ とすれば⁷、変数 $\phi' = \phi + J/m^2$ に関しては、積分経路の虚軸 $\phi' = ix$ [$x \in R(-\infty, \infty)$] 上に停留点 $\phi' = 0$ のある通常の Gauss(-Fresnel) 積分⁸になる。 $\phi' = ix$ として x について実軸 R 上の積分に書きかえて次のように実

⁷ このシフトで生じる $\text{Im}(\phi) = \pm i\infty$ での余分な横方向の経路 $\pm i\infty - u$ ($0 \leq u \leq J/m^2$) からの積分への寄与がゼロになる事は、Feynman 処方により m^2 が実は $m^2 - i\epsilon$ ないしは $m^2 e^{-i\epsilon}$ であることに注意すればわかる。

⁸ 量子力学の経路積分の常として指数部には虚数の係数 i/\hbar が掛かっているため、実数係数の Gauss 積分にはならず、Fresnel の積分と呼ばれるものになる。しかし、Fresnel 積分も、Gauss 積分の場合の解析関数 e^{-az^2} の実軸上の積分経路 $(0, \infty)$ を $\pi/4$ 回転することにより評価できて、結果として Gauss 積分公式で単に係数 a を虚数 ia に置き換えた公式が成り立つことがわかる。

行できる：

$$\begin{aligned} e^{i\hbar W(J)} &= N i \int_R dx \exp \frac{i}{\hbar} \left(-\frac{m^2}{2} x^2 - \frac{J^2}{2m^2} \right) \\ &= N i \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{im^2}} \cdot \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{J^2}{2m^2} \right) \end{aligned} \quad (99)$$

規格化因子 N は、 $W(J=0) = 0$ となるよう、Gauss-Fresnel 積分から出た $i\sqrt{2\pi\hbar/im^2}$ の因子をキャンセルする。よって

$$W(J) = -\frac{J^2}{2m^2} \quad (100)$$

と求まり、外場 J がある時の場の期待値 φ は、

$$\varphi = \frac{\partial W}{\partial J} = -\frac{J}{m^2} \quad (101)$$

となる。経路積分変数 $\phi \in I$ が純虚数であったのと対照的にこの場 φ は実数である。場 φ の有効作用は

$$\Gamma(\varphi) = W(J) - J\varphi = \frac{J^2}{2m^2} = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \quad (102)$$

となって、出発点の負振動子の古典場の Lagrangian $L = -V = +(1/2)m^2\phi^2$ を再現している。

この計算の示す所は、経路積分 (98) の被積分関数の停留位相点は、元の経路積分変数 ϕ の積分経路の虚軸 I 上にはなく、 I から離れた実数点 $\phi = -J/m^2$ にある！ということである。すなわち、虚軸に沿った経路積分表式を持つ負振動子の場合でも、停留位相条件で決まる場の期待値 φ は実数であり、その古典論における運動は、元の実 Lagrangian $L(\phi)$ を action とする通常の実数場 ϕ に対する Euler-Lagrange 方程式 $\delta L/\delta\phi = 0$ で与えられる、のである。

8 結び

この稿では、2階を越える高階微分の場の理論が必ず含む負振動子の量子化として、負エネルギー量子化はそもそもあり得ず、負ノルム量子化しかないことを詳しく説明した。

高階微分系一般の致命的問題と Woodard の主張する「Ostrogradsky 不安定性」は、間違った負エネルギー量子化を前提とするものであり、そのような不安定性は、正しく負ノルム量子化に基づけば、古典論にも量子論にも存在しない。

負振動子の量子論は、負ノルム状態を許す不定計量空間を表現空間とし、その Schrödinger 波動関数は、エルミートな座標演算子の複素固有値を引数としなければならない、という AFIO の古い論文に注意を喚起した。

本稿がもっとも重点を置いたのは、負ノルム量子系の古典論との対応である。経路積分表式では、負振動子は純虚数の場の変数の積分で書かれているにも関わらず、その $\hbar \rightarrow 0$ の古典極限で支配的な停留位相点として実現される古典論の運動方程式および解は、通常の

実数の方程式と解であることを示した。また負ノルム量子化では、負振動子系は正定値のエネルギー固有値を持つにも関わらず、対応する古典論では負定値のエネルギー表式を持つ。その負号の起源はもちろん負ノルムの負号であるが、その機構を古典論の状況に対応した coherent 状態を用いてあからさまに示した。

この coherent 状態を用いた計算は、高階微分理論の含む負ノルム状態の問題に関して、少なくとも古典論においては、すでに、その問題解決に向けての重要な示唆を与えているように思われる。すなわち、古典論の状況下では、負振動子の非常に高い多くの励起状態が密に励起されており、古典論で議論するエネルギー分解能の幅には、正負のノルムが交互に現れる多くのミクロの励起状態達が分離できずに詰まっている。そのためそういう重ね合わせ状態のノルムは、そこに含まれるミクロな状態達のノルムの和であり、それは常に正となり、ミクロな負ノルム状態のそれぞれを取り出すことは、古典論のエネルギー分解能では、できないと思われる、からである。実際、本文で議論した座標 ϕ と運動量 π が大体決まった値を持つ coherent 状態は、(over-complete だけれど) 完全系をなし、全て正のノルムを持っているのである。

ユニタリティ問題の真の解決には、正のノルムを持ち規格化された状態による直交完全系が必要であり、それは負振動子の全状態空間ではもちろん存在しない。問題は、それが存在するような「観測可能な状態の部分空間」が指定できるか、ということであるが、上で述べたことは、「古典論的状況で観測可能な状態の空間」という部分空間が（うまく指定できれば）その一つの候補であろう、ということである。このような方向で量子論のユニタリティ問題も解決できれば素晴らしい。

謝辞

この稿を書くように励まして頂いた久保治輔さんと向山信治さんに感謝します。また、久保さんには、負エネルギー量子化が通常の Feynman 処方と逆符号の $+i\epsilon$ を与えるので Zimmermann の Minkowski 空間での Feynman グラフの積分収束の証明も壊す事を、既に彼の論文 [20] でも指摘していたことを教わりました。

参考文献

- [1] Philip D. Mannheim, *Found. Phys.*, **42**, 388 (2012), arXiv:1101.2186.
- [2] Alberto Salvio, *Front. in Phys.*, **6**, 77 (2018), arXiv:1804.09944.
- [3] T. D. Lee and G. C. Wick, *Nucl. Phys. B*, **9**(2), 209 (1969).
- [4] T. D. Lee, *A relativistic complex pole model with indefinite metric*, in *Quanta: Essays in Theoretical Physics Dedicated to Gregor Wentzel* (Chicago University Press, Chicago, 1970), p. 260, 1969.
- [5] T. D. Lee and G. C. Wick, *Phys. Rev. D*, **2**(6), 1033 (1970).
- [6] Richard P. Woodard, *Scholarpedia*, **10**(8), 32243 (2015), arXiv:1506.02210.
- [7] M. Ostrogradsky, *Mem. Acad. St. Petersburg*, **6**(4), 385 (1850).
- [8] H. Motohashi and T. Suyama, *Phys. Rev. D* **91** (2015) no.8, 085009
- [9] A. Pais and G. E. Uhlenbeck, *Phys. Rev.* **79** (1950), 145-165.
- [10] W. Pauli and F. Villars, *Rev. Mod. Phys.* **21**,434 (1949).

- [11] K. S. Stelle, Phys. Rev. D, **16**, 953–969 (1977).
- [12] H. Arisue, T. Fujiwara, T. Inoue and K. Ogawa, J. Math. Phys. **22** (1981), 2055.
- [13] S. Sakoda, PTEP **2019** (2019) no.2, 023B03 doi:10.1093/ptep/ptz004 [arXiv:1812.10243 [hep-th]].
- [14] N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. Supplement No.51, 1-95 (1972).
- [15] J. Kubo and T. Kugo, PTEP **2023** (2023) no.12, 123B02. [arXiv:2308.09006 [hep-th]].
- [16] S. Coleman, *Acausality*, in *7th International School of Subnuclear Physics (Ettore Majorana): Subnuclear Phenomena* (1969), p282.
- [17] N. Nakanishi, Phys. Rev. D, **5**, 1968 (1972).
- [18] N. Nakanishi, Phys. Rev. D, **3**, 811 (1971).
- [19] J. Klauder and G. Sudarshan, “Fundamentals of quantum optics,” (New York: W.A.Benjamin, 1968)
- [20] J. Kubo and J. Kuntz, Phys. Rev. D **106** (2022) no.12, 126015. doi:10.1103/PhysRevD.106.126015 [arXiv:2208.12832 [hep-th]].