

2025年度 修士論文

ド・ジッター宇宙における
ホログラフィ原理と量子情報理論

京都大学大学院理学研究科

物理学・宇宙物理学専攻 物理学第二分野

基礎物理学研究所 素粒子論グループ

藤木 恒成

概要

量子重力理論の構築は素粒子理論分野において最も重要かつ挑戦的な問題の一つである。その解決に向けた幅広いアプローチの中でも特に、「ある時空における量子重力理論は、その境界における一次元低い場の量子論と等価である」というホログラフィ原理が注目を集め、熱心に研究されている。本修士論文ではまず、そのホログラフィ原理で最も成功している例である AdS/CFT 対応を紹介し、さらには量子情報理論との関連で発展した事実を確認する。そこから時空の創発を理解する上での量子エンタングルメントの重要性について議論する。さらには、AdS/BCFT 対応や dS/CFT 対応などの新たなホログラフィ原理についても現状知られていることをまとめる。特に dS 時空のさらなる理解は本修士論文のメインの目的であり、現状の問題点も言及した上で後半に繋げる。

本修士論文の後半では、前半で整理した前提知識を用いて著者の研究成果を紹介する。大きく分けて二つの内容を扱っている。一つ目は AdS/BCFT 対応のセットアップに埋め込んだ dS ブレーンに局在したスカラー場を導入し、ブレーン上の dS/CFT 対応の解析、timelike g 定理の証明、そして宇宙論モデルの構築を行う。二つ目は AdS/CFT 対応で既に知られている線形化アインシュタイン方程式とエンタングルメントエントロピーの第一法則の等価性を dS/CFT 対応に拡張する。

目次

1	序論	1
2	AdS/CFT 対応	7
2.1	AdS 時空	7
2.1.1	埋め込み多様体	7
2.1.2	global 座標	8
2.1.3	Poincaré 座標	10
2.1.4	Schwarzschild-AdS 座標	12
2.1.5	AdS black brane 座標 (planar AdS black hole)	18
2.1.6	Einstein 方程式と AdS 時空	20
2.1.7	AdS 時空の Isometries	20
2.2	共形場理論 (Conformal Field Theory)	22
2.2.1	d 次元共形対称性	23
2.2.2	2 次元共形場理論	26
2.2.3	場の変換性と相関関数	29
2.2.4	動径量子化と共形変換	31
2.2.5	演算子積展開 (Operator Product Expansion)	33
2.2.6	自由ボソンと自由フェルミオン	34
2.2.7	Weyl Anomaly	36
2.2.8	$T\bar{T}$ Deformation	37
2.2.9	c 定理 (c Theorem)	41
2.3	AdS/CFT 対応	43

目次	iii
2.3.1 AdS/CFT 対応	43
2.3.2 AdS/CFT 対応の辞書	47
2.3.3 AdS/CFT 対応におけるブラックホール	53
2.3.4 AdS/CFT 対応における $T\bar{T}$ deformation	54
2.3.5 ホログラフィック c 定理	56
2.3.6 AdS_3/CFT_2 対応における Bañados map	57
3 AdS/CFT 対応と量子情報理論	60
3.1 量子情報理論	60
3.1.1 一般的な量子状態の記述	61
3.1.2 量子系における情報量	63
3.1.3 量子情報理論におけるエンタングルメントエントロピー	69
3.2 場の理論におけるエンタングルメントエントロピー	73
3.2.1 例 1: 自由場の 2 次元 CFT	78
3.2.2 例 2: 有限温度系の 2 次元 CFT	89
3.2.3 例 3: 2 次元 CFT における量子クエンチ (quantum quench)	90
3.3 ホログラフィックエンタングルメントエントロピー	93
3.3.1 例 1: pure AdS_3	94
3.3.2 例 2: 3 次元ブラックホール	97
3.3.3 例 3: 量子クエンチに対する重力双対	98
3.4 その他の量子相関とその重力双対	102
3.4.1 相互情報量 (Mutual Information)	103
3.4.2 純粋化エンタングルメント (Entanglement of Purification) と Entanglement Wedge Cross Section	104
3.4.3 Reflected Entropy	106
3.5 多体量子相関	108
3.5.1 Genuine Multipartite Entanglement Measure	108
3.5.2 多体相互情報量 (multi-mutual information)	110
3.5.3 Markov Gap	112
3.5.4 Multi-Entropy	112

4	AdS/BCFT 対応	131
4.1	境界付き共形場理論 (Boundary Conformal Field Theory)	131
4.1.1	高い対称性を保つ境界条件	131
4.1.2	境界場 (boundary field)	134
4.1.3	境界状態の構成 (Ishibashi state, Cardy state)	136
4.1.4	g 関数と g 定理	140
4.2	AdS/BCFT 対応	141
4.2.1	End-of-the-World(EOW) ブレーン	141
4.2.2	対称性を保った EOW ブレーンの挿入	143
4.2.3	ホログラフィック境界エントロピー	144
5	dS/CFT 対応	148
5.1	dS 時空	148
5.1.1	埋め込み多様体	149
5.1.2	global 座標	149
5.1.3	Conformal 座標	151
5.1.4	Poincaré (Planar) 座標	151
5.1.5	Static 座標	154
5.1.6	Schwarzschild-dS 座標	156
5.1.7	dS 時空上の場の量子論	158
5.2	dS/CFT 対応	160
5.2.1	dS/CFT 対応	160
5.2.2	dS/CFT 対応におけるエンタングルメントエントロピー (Pseudo エントロピー)	162
5.2.3	dS_3/CFT_2 対応における Bañados map	167
5.2.4	Static Patch Holography	168
6	局在したスカラー場によって摂動された dS ブレーンの解析	170
6.1	ブレーン上で実現される dS/CFT 対応のスペクトラムへの制限	171
6.1.1	dS ブレーン	171
6.1.2	dS ブレーンの摂動に対する条件	171

6.1.3	様々な dS ブレーンの摂動	175
6.1.4	一般のブレーン上の dS/CFT 対応の解析	181
6.1.5	高次元における EOW ブレーン	182
6.2	Holographic Timelike g 定理	184
6.2.1	type I における g 定理	185
6.2.2	type II における g 定理	187
6.3	宇宙論モデルの構築	189
6.3.1	Brane-World Holography	190
6.3.2	EOW ブレーンの宇宙論的解釈	191
6.3.3	様々な EOW ブレーンの解	197
7	線形化アインシュタイン方程式とエンタングルメントエントロピーの第一法則	204
7.1	AdS/CFT 対応における等価性	204
7.1.1	エンタングルメントエントロピーの第一法則	205
7.1.2	ΔS_A と ΔH_A の重力理論における記述	208
7.1.3	重力の計算による等価性の証明	209
7.2	dS/CFT 対応における等価性	211
7.2.1	線形化アインシュタイン方程式の解	211
7.2.2	ΔH_A の書き換え	213
7.2.3	ΔS_A の書き換え	216
7.2.4	Bañados map を用いた等価性の解析	219
7.3	AdS/BCFT 対応における Bañados map を用いた等価性の解析	222
8	まとめと展望	226

第1章

序論

素粒子物理学史におけるホログラフィ原理

素粒子物理学とは、「物質の最小構成単位」である素粒子が何かを特定し、さらにはそれらがどのように相互作用しているかを調べることで、ミクロな世界の法則を探求する学問である。この思想のもとで湯川秀樹を始めとする 20 世紀の偉人たちは素粒子物理学の理解に大きな進展をもたらした。実際に、我々の世界を構成する物質粒子としてクォークとレプトン、相互作用を記述するゲージ粒子、さらにはこれらに質量を与えるヒッグス粒子が、場の量子論の言葉を用いて**素粒子標準模型**という形で統一的に記述されている。

しかし、素粒子物理学はこれで完成したわけではない。この世界には電磁気力・強い力・弱い力・重力の四つの力が存在していると考えられているが、この素粒子標準模型が記述しているのは重力を除く三つの力だけなのである。したがって、我々は重力も含めて完全に記述した更なる統一理論を構築する必要があるが、ここで大きな問題に直面する。重力だけを扱った理論に関しては、20 世紀前半に Einstein が相対性理論という形で既に完成させていた。しかし、これを場の量子論の言葉で統一的に記述しようとした時に、正常な理論として要請される「繰り込み可能性」を重力理論が満たしていないことが判明した。さらに、重力理論で予言されるブラックホールの存在は一見すると量子論の基盤概念である「ユニタリー性」を破って

いるように思える. このように, それぞれ独立に完成された量子論と相対性理論は根源的なところで矛盾を孕んでいるのだ.

このような多くの問題を回避し, 二つの理論を統一した**量子重力理論**を構築しようという試みは 1970 年代頃から熱心に行われてきた. 特に, Bekenstein と Hawking によって確立された「ブラックホール熱力学」では, ブラックホールが以下のようなエントロピーを持つことが知られている [1, 2].

$$S_{bh} = \frac{k_B c^3}{4G_N \hbar} A_{bh}$$

ここで k_B はボルツマン定数, c は光速, G_N はニュートン定数, $\hbar$ はプランク定数, A_{bh} はブラックホールの面積である. ここで重力の結合定数である G_N や量子性の指標である $\hbar$ が公式に現れていることから明らかであるように, 量子効果が顕著な重力現象としてのブラックホールの物理を理解するにはそれらを統一的に考える必要がある. このような理由で量子重力理論の探求にはブラックホールが大きな鍵となる.

また, これらとは別の角度で重力の「繰り込み不可能性」を回避する理論として**弦理論**が提唱された. これは物質の最小構成単位が点粒子ではなくひもであると考えることによって紫外領域で現れる発散を避けることに成功している. この描像では相対性理論や素粒子標準模型というのは弦理論における低エネルギー有効理論として考えられる. この理論は物理的にも数学的にも非常に美しく, 上式で与えられるブラックホールエントロピーに微視的導出を与えるなどといった多くの示唆的な結果を残した上で, 現在でも素粒子論研究の基盤をなす理論の一つになっている. しかし, このように成功を収めた弦理論に対しても, 低エネルギー有効理論としての既存の理論との整合性の不確かさや, 我々の住む宇宙定数が正のド・ジッター (dS) 宇宙を再現できないなどの問題によって, 現在ではこれが完璧な統一理論であると信じている人は少ない.

以上のように, 量子重力理論の探究にはいくつかの進展はあったものの, 完成というには程遠く, まだまだ全貌が見えないままの真っ暗闇を手探りで進んでいるのが現状である. そのような状況に一筋の光として差し込んだのが, 't Hooft や Susskind によって提唱された**ホログラフィ原理**である [3, 4]. それは「ある時空に

における量子重力理論は, その境界における一次元低い場の量子論と等価である」というものであり, 未知の量子重力理論を既知の場の量子論で記述できるという強力かつ大胆な主張であった. さらに, 宇宙定数が負である反ド・ジッター (AdS) 時空が共形場理論 (CFT) と等価であるという, ホログラフィ原理における最も著名な例が 1997 年に Maldacena によって提唱され, **AdS/CFT 対応**と呼ばれている [5]. この対応はすぐに多くの素粒子論研究者の注目を集め, そこから両方の理論における計算によって多くの一致が確認され, その膨大な数の状況証拠をもとに今ではほぼ確実に成り立っていると信じられている. ここで「信じられている」という言葉を用いたのは, 実はこの対応には厳密な証明がないからである. この概念によって照らされた先というのは我々が今見えていた場所から地続きになっているわけではないのである. とはいえ, 真っ暗闇の中に浮かび上がる一筋の光は, 我々に進むべき道を示すと同時に, 探究心を奮い立たせるのに十分な明かりであった.

ホログラフィ原理における量子情報理論

確率過程で記述される量子論の枠組みに情報という抽象概念を取り込み, 操作論的な視点で確立された理論を**量子情報理論**という. この理論が収めた数ある成功の中でも特に顕著なものはベルの不等式の破れである [6, 7]. これは古典的な情報理論において満たされるべき不等式 (ベルの不等式) が量子論において破れることを提唱したものであり, 実際にその破れが実験で確認されている [8]. これは我々が扱ってきた古典論では捉えられない量子論特有の相関が存在することを示唆している. このような相関を**量子エンタングルメント** (量子もつれ, 量子相関) と呼び, この顕著な量子性は多くの分野で調べられ, 応用されている. 二つの量子系がどれほど量子エンタングルメントを持っているかを定量化する指標として**エンタングルメントエントロピー**が広く用いられている. ここで, これは二体系の純粋状態に対する量子エンタングルメントを定量化する量であるが, 多体系や混合状態に対しては適用できないことを注意しておく.

ホログラフィ原理において最も成功した双対性は AdS/CFT 対応であり, その文脈において「境界上の共形場理論のある部分領域 A におけるエンタングルメン

トエントロピーが, その領域と端点を共有して AdS 時空に伸びるような極小曲面の面積で計算される」という**笠-高柳公式**が提唱された [9]. この公式によって, エンタングルメントエントロピーが持つ豊富な性質を重力理論の言葉で翻訳することができ, 量子系に双対な時空の幾何について多くのことを調べることができるようになった. 例えば, エンタングルメントエントロピーの第一法則という量子系における基礎方程式が, 重力理論の線形化 Einstein 方程式と等価であることなどが知られている. このような研究は「量子エンタングルメントから創発する時空」という標語のもとで盛んに行われている. 以上のような進展から, 量子情報理論がホログラフィ原理の分野においても非常に重要視され, 量子重力理論解明のための鍵であると考えられている.

ホログラフィ原理の新しい可能性

ここまでホログラフィ原理の歴史と現状について見てきたが, 以下ではその発展について述べていく. 量子情報理論がホログラフィ原理において重要であるという事実を踏まえた上で, エンタングルメントエントロピーは非常に強力な武器ではあるが, それだけでは不十分である. 上でも述べたようにこの量は二体系の純粋状態にのみ適用可能なので, 多体系や混合状態の量子エンタングルメントを適切に測る事はできない. しかし, 多体系は二体系よりも豊富な量子相関を持っていることが知られており, ホログラフィ原理で重要になってくることも明らかである. さらに混合状態は既にホログラフィ原理において多く現れており, ブラックホールの解析などには必要不可欠である. このようにエンタングルメントエントロピーでは捉えられない新たな量子相関を用いてホログラフィ原理を捉え直すことが重要である.

現状のホログラフィ原理は最も成功してきた AdS/CFT 対応を用いて考えられることが多い. しかし, AdS 時空というのは負の宇宙定数を持つ時空のことであり, 我々が住む膨張宇宙を正しく記述する事はできない. したがって, AdS 時空の双対性を, 正の宇宙定数を持つ dS 時空に拡張しようという試みが盛んに行われている. dS/CFT 対応と呼ばれるこの双対性は, しばしば AdS/CFT 対応を解析接

続することで得られるが, そこには非ユニタリー性などの dS 時空特有の問題がいくつかもある. このような AdS 以外の時空へのホログラフィ原理の拡張はどこまで可能で, どのように定式化されるのかについての理解を進めていくことが重要である.

本修士論文ではホログラフィ原理の基礎を詳しく見ていくだけでなく, こういった新たな側面についても言及していきたい. 本修士論文が量子重力理論探求の真っ暗闇を進むための小さな蠟燭にでもなれたら幸いである.

本修士論文の構成

本修士論文の構成は以下の通りである.

- 第 2 章

反ド・ジッター (AdS) 時空と共形場理論 (CFT) の基礎を整理した後に, 本修士論文の基盤となる概念である AdS/CFT 対応を導入する. 双対性として確認されている事実をできる限り紹介していく.

- 第 3 章

量子情報理論の基礎を整理した後に, 共形場理論と重力理論の両方で, エンタングルメントエントロピーを始めとするいくつかの重要な量子相関の指標を見ていく. 最後に多体量子相関についても言及する.

- 第 4 章

境界付き共形場理論 (BCFT) の基礎を整理した後に, それに対応する重力理論の幾何として end-of-the-world (EOW) ブレーンを導入し, それらが成す双対性として AdS/BCFT 対応を紹介する.

- 第 5 章

ド・ジッター (dS) 時空の基礎を整理した後に, dS 時空におけるホログラフィ原理として dS/CFT 対応を紹介する. その際に AdS/CFT 対応からの解析接続による構成方法や, その問題点にも言及する.

- 第 6 章

ここまでの内容を踏まえて, 著者らによって書かれた論文 [10] についてのいくつかの成果を紹介する. 具体的には EOW ブレーンに局在したスカラー場を導入することで dS ブレーンの摂動を実現し, そこから dS/CFT 対応におけるスペクトラムの解析, Holographic timelike g 定理の証明, 最後にはこのモデルの宇宙論への応用を見る.

- 第 7 章

ここまでの内容を踏まえて, 著者らによって書かれた論文 [11] についてのいくつかの成果を紹介する. 具体的には, AdS/CFT 対応で知られる線形化アインシュタイン方程式とエンタングルメントエントロピーの第一法則の等価性をレビューし, それを dS/CFT 対応に拡張する. その際に, dS/CFT 対応における笠-高柳公式をどのように改良するかを議論する. また, 最後にこの等価性が AdS/BCFT 対応においても成り立つことを確認する.

- 第 8 章

本修士論文の内容についてまとめ, さらに今後の展望についても述べる.

第2章

AdS/CFT 対応

本章では, AdS 時空と共形場理論の基礎を整理した後に, 本修士論文の基盤となる概念である AdS/CFT 対応を導入する.

2.1 AdS 時空

反ド・ジッター (AdS) 時空とは負の宇宙定数を持った真空アインシュタイン方程式の極大対称解である. 本節ではこの AdS 時空を張る様々な座標を紹介していく. この時空は負の宇宙定数を持つことにより, 真空であるにも関わらずブラックホール解などが存在しており, そこから多くの物理的な示唆が得られる. また, 座標の構成は埋め込み多様体を用いて統一的に記述することができる. これは AdS 時空が非常に高い対称性を持つことに起因し, その時空の isometries についても紹介する.

2.1.1 埋め込み多様体

$d+1$ 次元 AdS 座標は $d+2$ 次元の幾何に埋め込まれた双曲面として得られる. この埋め込み多様体として以下のような $d+2$ 次元多様体を考える.

$$-(X_0)^2 + (X_1)^2 + \cdots + (X_d)^2 - (X_{d+1})^2 = -R_{AdS}^2 \quad (2.1.1)$$

ここで R_{AdS} は AdS 時空の半径であり, 時空の大きさを表す. 後に節 2.1.6 において Einstein 方程式を用いることでこれが宇宙定数と結びつくことを見る. この多様体上の計量を以下のように指定する.

$$ds^2 = -dX_0^2 + dX_1^2 + \cdots + dX_d^2 - dX_{d+1}^2 \quad (2.1.2)$$

このような埋め込み多様体は定義から明らかに $SO(d, 2)$ の対称性を持つ. また, 埋め込み座標を用いた時の測地線の長さもこの対称性を保つ形であり, 実際に二点 $P = (X_0, X_1, \cdots, X_{d+1}), P' = (X'_0, X'_1, \cdots, X'_{d+1})$ を結ぶ測地線長は以下のように与えられる.

$$\frac{L(P, P')}{R_{AdS}} = \cosh^{-1} \left[\frac{X_0 X'_0 - X_1 X'_1 - \cdots - X_d X'_d + X_{d+1} X'_{d+1}}{R_{AdS}^2} \right] \quad (2.1.3)$$

2.1.2 global 座標

(2.1.1) を満たすような以下の座標変換を考える.

$$\begin{aligned} X_0 &= R_{AdS} \cosh \rho \cos t, \\ X_i &= R_{AdS} \sinh \rho \Omega_i \quad (i = 1, 2, \cdots, d), \\ X_{d+1} &= R_{AdS} \cosh \rho \sin t \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

ここで Ω_i は $d-1$ 次元球面上の単位ベクトルであり, 以下を満たす.

$$\sum_i \Omega_i^2 = 1 \quad (2.1.5)$$

この時 (2.1.2) は

$$ds^2 = R_{AdS}^2 (d\rho^2 - \cosh^2 \rho dt^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_{d-1}^2) \quad (2.1.6)$$

のように変換される. ここで $d\Omega_{d-1}$ は $d-1$ 次元単位球面の計量を表す.

(2.1.4) から明らかなように時間座標 t は周期的な座標であるが, 以下ではこれらの普遍被覆を取り, $t \in (-\infty, \infty)$ の範囲で考える. これらの座標は AdS 時空を大域的に覆うことができおり, 例として $d=2$ の 3 次元 global 座標が張る空間は図 2.1 のように描ける.

また, 埋め込み座標を用いた測地線長 (2.1.3) に global 座標の座標変換 (2.1.4) を

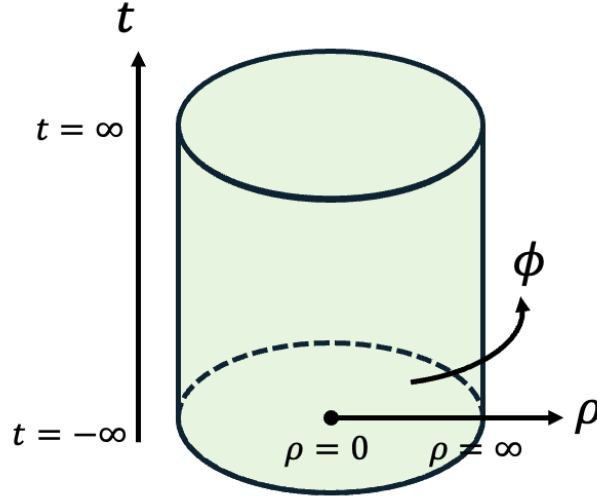


図 2.1: 3 次元 global 座標

代入すると, 測地線長は

$$\begin{aligned} \frac{L(P, P')}{R_{AdS}} = \cosh^{-1} & \left[\cosh \rho \cos t \cosh \rho' \cos t' \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^d \sinh \rho \Omega_i \sinh \rho' \Omega'_i + \cosh \rho \sin t \cosh \rho' \sin t' \right] \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

となる.

ここで (2.1.4) を $r = R_{AdS} \sinh \rho$ で座標変換するとさらに書き換えることができ,

$$X_0 = \sqrt{R_{AdS}^2 + r^2} \cos\left(\frac{t}{R_{AdS}}\right), \quad (2.1.8)$$

$$X_i = r \Omega_i \quad (i = 1, \dots, d), \quad (2.1.9)$$

$$X_{d+1} = \sqrt{R_{AdS}^2 + r^2} \sin\left(\frac{t}{R_{AdS}}\right). \quad (2.1.10)$$

という埋め込み座標からの変換で,

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r^2}{R_{AdS}^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{r^2}{R_{AdS}^2}\right)} + r^2 d\Omega_{d-1}^2 \quad (2.1.11)$$

のように別の global 座標を得ることができる.

また, (2.1.6) を

$$\tan \chi = \sinh \rho \quad (2.1.12)$$

と座標変換すると

$$ds^2 = \frac{R_{AdS}^2}{\cos^2 \chi} (d\chi^2 - dt^2 + \sin^2 \chi d\Omega_{d-1}) \quad (2.1.13)$$

となる. これも AdS 時空全体に張られた global 座標である.

さらに後に必要になるので $d+1$ 次元の Euclidean AdS に対する AdS 時空の座標も求めておく. 埋め込み座標において $X_{d+1} \rightarrow iX_{d+1}$ で解析接続すると

$$-(X_0)^2 + (X_1)^2 + \cdots + (X_d)^2 + (X_{d+1})^2 = -R_{AdS}^2, \quad (2.1.14)$$

$$ds^2 = -dX_0^2 + dX_1^2 + \cdots + dX_d^2 + dX_{d+1}^2 \quad (2.1.15)$$

が得られ,

$$\begin{aligned} X_0 &= R_{AdS} \cosh \rho, \\ X_i &= R_{AdS} \sinh \rho \Omega_i \quad (i = 1, \dots, d+1) \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

の埋め込みによって

$$ds^2 = R_{AdS}^2 (d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_d^2) \quad (2.1.17)$$

のような global 座標が得られる. ここで Ω_i は d 次元球面上の単位ベクトルである. この座標は AdS 時空から dS 時空への解析接続において役割を果たす.

2.1.3 Poincaré 座標

(2.1.1) を満たすような以下の座標変換を考える.

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{z}{2} \left(1 + \frac{R_{AdS}^2 + \mathbf{x}^2 - t^2}{z^2} \right), \\ X_i &= \frac{R_{AdS} x_i}{z} \quad (i = 1, 2, \dots, d-1), \\ X_d &= \frac{z}{2} \left(1 - \frac{R_{AdS}^2 - \mathbf{x}^2 + t^2}{z^2} \right), \\ X_{d+1} &= \frac{R_{AdS} t}{z} \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

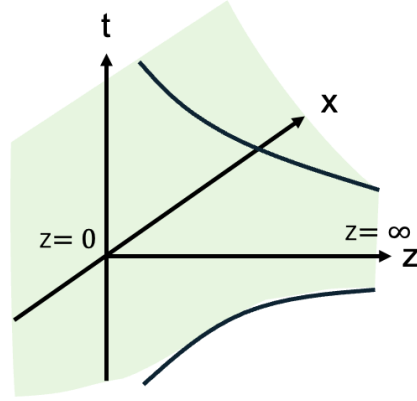


図 2.2: 3 次元 Poincaré 座標

ここで $\mathbf{x}$ は $d-1$ 次元ベクトルを表す. この時 (2.1.2) は

$$ds^2 = R_{AdS}^2 \left(\frac{dz^2 - dt^2 + d\mathbf{x}^2}{z^2} \right) \quad (2.1.19)$$

のように変換される. これら座標が張る時空間は $d = 2$ の 3 次元 AdS 時空間の時には図 2.2 のように描かれる.

また, Poincaré 座標と global 座標は (2.1.4) と (2.1.18) を用いて以下のように結びつく.

$$\begin{aligned} x &= R_{AdS} \frac{\sinh \rho \sin \phi}{\cosh \rho \cos t_g - \sinh \rho \cos \phi} \\ t_P &= R_{AdS} \frac{\cosh \rho \sin t_g}{\cosh \rho \cos t_g - \sinh \rho \cos \phi} \\ z &= R_{AdS} \frac{1}{\cosh \rho \cos t_g - \sinh \rho \cos \phi} \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

ここで時間座標を区別するために Poincaré 座標の時間を t_P , global 座標の時間を t_g と表記した. 以上の関係式から Poincaré 座標は AdS 時空間の一部しか覆えていないことが分かる. Poincaré 座標が覆う領域を global 座標に埋め込む形で図 2.3 に図示した.

また, 埋め込み座標を用いた測地線長 (2.1.3) に Poincaré 座標の座標変換 (2.1.18) を代入すると, 測地線長は

$$\frac{L(P, P')}{R_{AdS}} = \cosh^{-1} \left[\frac{z^2 + z'^2 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 - (t - t')^2}{2zz'} \right] \quad (2.1.21)$$

となる.

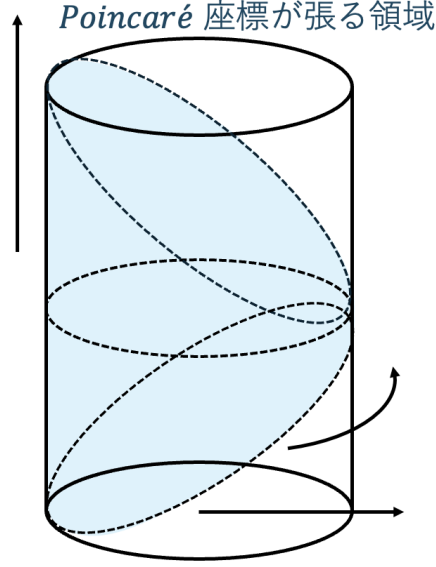


図 2.3: Poincaré 座標と global 座標の関係

2.1.4 Schwarzschild-AdS 座標

AdS 時空は Einstein 方程式の真空解であるにもかかわらずブラックホール解が存在し, 一般に以下の計量で与えられる [12].

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{d-1}^2, \quad f(r) = 1 + \frac{r^2}{R_{AdS}^2} - \frac{\mu}{r^{d-2}} \quad (2.1.22)$$

この座標が張る領域は図 2.4 の左図に図示した. この座標は $R_{AdS} \rightarrow \infty$ (宇宙定数 $\Lambda \rightarrow 0$ に対応) の極限で通常の Schwarzschild 座標に帰着する. さらに $r \rightarrow \infty$ で global 座標 (2.1.11) に帰着するような漸近的 AdS 時空となっている. ここで, このような漸近的に AdS 座標で表される時空と区別するために, 時空全体が AdS 座標で表されるものを pure AdS 時空と呼ぶことがある.

ここで μ は以下のようにブラックホールの ADM 質量によって決まる積分定数である [13].

$$\mu = \frac{16\pi G_N^{(d+1)}}{(d-1)\Omega_{d-1}} M \quad (2.1.23)$$

ここで $G_N^{(d+1)}$ は $d+1$ 次元のニュートン定数である. また Ω_{d-1} は $d-1$ 次元単位球の体積であり, $\Omega_{d-1} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$ で与えられる.

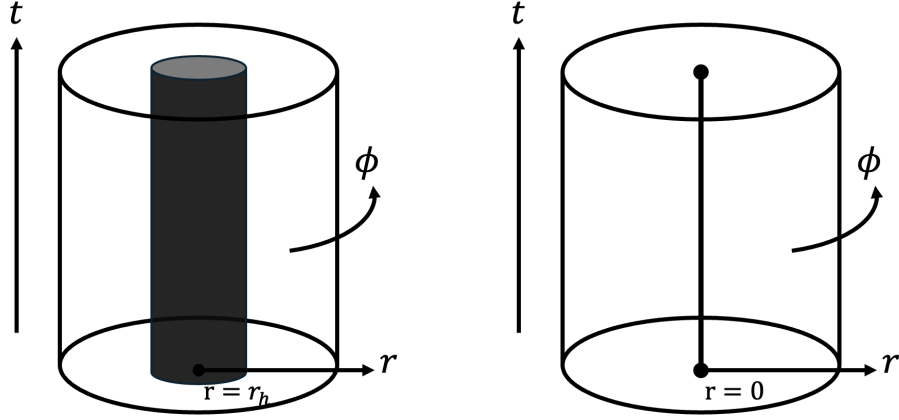


図 2.4: 3次元 Schwarzschild-AdS 座標 (左図) と 3次元の conical defect を持つ座標 (右図)

この AdS ブラックホールのホライズン $r = r_h$ は

$$f(r_h) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = r_h^{d-2} \left(1 + \frac{r_h^2}{R_{\text{AdS}}^2} \right) \quad (2.1.24)$$

で与えられる. これを用いて計量を書き直すと,

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{d-1}^2, \quad (2.1.25)$$

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{R_{\text{AdS}}^2} - \frac{r_h^{d-2}}{r^{d-2}} \left(1 + \frac{r_h^2}{R_{\text{AdS}}^2} \right).$$

となる.

ここで通常の Schwarzschild ブラックホールの時同様に,

$$\frac{dr_*}{dr} = \frac{1}{f(r)} \quad \Rightarrow \quad r_*(r) = \int^r \frac{d\tilde{r}}{f(\tilde{r})}. \quad (2.1.26)$$

のように座標 r_* を導入し,

$$u = t - r_*, \quad v = t + r_* \quad (2.1.27)$$

とする. この時 r, t 方向以外を省略すると, 2次元の計量は以下ようになる.

$$ds^2 = -f(r) du dv \quad (2.1.28)$$

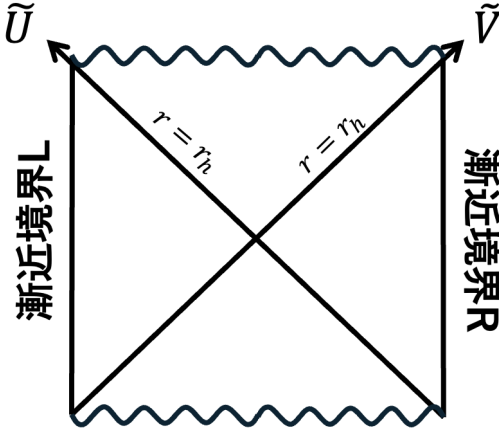


図 2.5: Schwarzschild-AdS ブラックホールの Penrose ダイアグラム

さらに, 表面重力 $\kappa = \frac{1}{2}f'(r_h)$ を用いて

$$U = -e^{-\kappa u}, \quad V = e^{\kappa v} \quad (2.1.29)$$

を定義し,

$$\tilde{U} = \arctan U, \quad \tilde{V} = \arctan V \quad (2.1.30)$$

によって正則化すると, Schwarzschild-AdS ブラックホールの Penrose ダイアグラム (図 2.5) を得る. ここで r_* は $r \rightarrow \infty$ においても有限の値を与えることに注意. ここでは適切に定数シフトすることで $X = \tilde{V} - \tilde{U} = \pm \frac{\pi}{2}$ が漸近境界になるようにしている.

AdS ブラックホールの熱的性質

さらに $t = it_E$ としてこの時空を Euclid 化し,

$$t_E \sim t_E + \beta \quad (2.1.31)$$

として Euclid 時間に同一視を入れることでブラックホールを逆温度 β の有限温度系として考える. この時 Euclidean AdS ブラックホールの計量は

$$ds^2 = f(r) dt_E^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{d-1}^2 \quad (2.1.32)$$

で与えられる. 以下ではホライズン近傍で曲率が発散しない (重力の経路積分において抑制されない) という条件を課すことで温度とホライズン r_h の関係を求めていく. ホライズン近傍で

$$f(r) \simeq f'(r_h)(r - r_h) \quad (2.1.33)$$

のように展開し, 計量の (t_E, r) の成分だけに注目すると,

$$ds^2 \simeq f'(r_h)(r - r_h) dt_E^2 + \frac{dr^2}{f'(r_h)(r - r_h)}. \quad (2.1.34)$$

ここで

$$\rho^2 \equiv \frac{4(r - r_h)}{f'(r_h)} \quad (2.1.35)$$

として座標変換を導入すると

$$f'(r_h)(r - r_h) dt_E^2 = f'(r_h) \frac{f'(r_h)}{4} \rho^2 dt_E^2 = \frac{f'(r_h)^2}{4} \rho^2 dt_E^2, \quad (2.1.36)$$

$$\frac{dr^2}{f'(r_h)(r - r_h)} = \frac{\left(\frac{f'(r_h)}{2} \rho d\rho\right)^2}{f'(r_h) \frac{f'(r_h)}{4} \rho^2} = d\rho^2. \quad (2.1.37)$$

より,

$$ds^2 \simeq d\rho^2 + \frac{f'(r_h)^2}{4} \rho^2 dt_E^2. \quad (2.1.38)$$

よって, 曲率が発散しない条件として conical singularity が生じないことを課すと

$$\frac{f'(r_h)}{2} t_E \sim \frac{f'(r_h)}{2} t_E + 2\pi \quad (2.1.39)$$

という周期性を持つ必要がある. (2.1.31) と比較すると,

$$\beta = \frac{4\pi}{f'(r_h)} \quad (2.1.40)$$

が得られ, 温度 T は

$$T = \frac{1}{\beta} = \frac{f'(r_h)}{4\pi}. \quad (2.1.41)$$

となる. ブラックホールホライズン r_h を用いた $f(r)$ の表式 (2.1.25) を用いると,

$$T = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{d-2}{r_h} + \frac{dr_h}{R_{\text{AdS}}^2} \right) = \frac{dr_h^2 + (d-2)R_{\text{AdS}}^2}{4\pi R_{\text{AdS}}^2 r_h}. \quad (2.1.42)$$

が得られる. このようにして Euclid 化したブラックホールの計量から熱化した温度とホライズン半径を結びつけることができ, この方法を conical defect trick と

いう.

さらに Euclidean 経路積分の鞍点近似を用いて分配関数を計算し, いくつかの熱力学的量を求めていく [14, 15].

以下では簡単のために 4 次元の Schwarzschild-AdS 時空に制限して考える. 重力の Euclidean 作用として

$$S_E = -\frac{1}{16\pi G_N} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{g} (R - 2\Lambda) - \frac{1}{8\pi G_N} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{\gamma} K + \frac{1}{8\pi G_N} S_{ct}(\gamma_{\mu\nu}) \quad (2.1.43)$$

を考える. ここで Einstein 方程式から導かれる (2.1.62) を用いると $d = 3$ の 4 次元時空の時は $\Lambda = -\frac{3}{R_{AdS}^2}$ となる. また, γ_{ij} は ∂M 上の誘導計量, K は外的曲率である. さらに漸近境界において作用が発散ないように counter term として S_{ct} を導入している.

この時分配関数 $Z|_{AdS}$ は

$$Z|_{AdS} = \int \mathcal{D}g e^{-S_E[g]} \quad (2.1.44)$$

で与えられる. ここで実は Euclidean AdS を境界に持つような重力作用の鞍点として Schwarzschild-AdS 座標だけでなく Thermal AdS 座標が存在し, これらは温度を秩序パラメータとして相転移を起こすことが知られている [15]. ここでは Schwarzschild-AdS 座標が支配的になる温度領域にのみ注目して以下のような鞍点近似を行うことにする.

$$Z|_{AdS} \simeq e^{-S_E[g_{Sch-AdS}]} \quad (2.1.45)$$

実際に 4 次元の Schwarzschild-AdS 座標 (2.1.22) を用いて適切に発散を除去しながら on-shell 作用を計算すると

$$S_E[g_{Sch-AdS}] = \frac{\pi r_h^2 (R_{AdS}^2 - r_h^2)}{G_N (R_{AdS}^2 + 3r_h^2)} \quad (2.1.46)$$

この時, 自由エネルギー F は

$$F = -T \log Z \simeq T S_E[g_{Sch-AdS}] \simeq \frac{r_h (R_{AdS}^2 - r_h^2)}{4G_N R_{AdS}^2} \quad (2.1.47)$$

となり, エネルギー E は

$$E = -\partial_\beta \log Z \simeq \frac{\partial r_h}{\partial \beta} \partial_{r_h} S_E[g_{Sch-AdS}] = \frac{r_h (R_{AdS}^2 + r_h^2)}{2G_N R_{AdS}^2} = \frac{\mu}{2G_N} \quad (2.1.48)$$

ここから計量のパラメータ μ とブラックホールのエネルギーの関係も読み取れる.

これは $d = 3$ の時に (2.1.23) の関係式とも一致している.

最後に, エントロピー S は

$$S = (1 - \beta \partial_\beta) \log Z \simeq \frac{\pi r_h^2}{G_N} \quad (2.1.49)$$

と得られる. ここで 4 次元時空におけるブラックホールの面積が $\text{Area}(\text{BH}) = 4\pi r_h^2$

であることから, ブラックホールエントロピーの面積則

$$S_{bh} = \frac{\text{Area}(\text{BH})}{4G_N} \quad (2.1.50)$$

が確認できる [1, 16].

3 次元ブラックホールと conical defect 時空

特に 3 次元の AdS 時空は重力の自由度がなく, 局所的には全ての時空が pure AdS に変換することができるという特別な性質を持つ (実際に Bañados map として構成する方法が知られており, それらは節 2.3.6 にまとめる). このような 3 次元特有の性質を用いることで, ブラックホールや conical defect を持った時空が, global AdS 時空の商群として得られることを見ていく.

3 次元の Schwarzschild- AdS 座標を **BTZ ブラックホール** という [17]. 座標は (2.1.22) で $d + 1 = 3$ とおくと以下のように得られる.

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\phi^2, \quad f(r) = \frac{r^2}{R_{AdS}^2} - M \quad (2.1.51)$$

ここで $M = \mu - 1$ として新たなパラメータを導入した (この M は (2.1.23) に出てくるブラックホール質量とは異なるので注意).

埋め込み座標 $\{X_0, X_1, X_2, X_3\}$ からこの計量を構成する時には

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{r}{\sqrt{M}} \cosh(\sqrt{M}\phi), \\ X_1 &= \frac{r}{\sqrt{M}} \sinh(\sqrt{M}\phi), \\ X_2 &= R_{AdS} \sqrt{\frac{r^2}{MR_{AdS}^2} - 1} \cosh\left(\frac{\sqrt{M}}{R_{AdS}} t\right), \\ X_3 &= R_{AdS} \sqrt{\frac{r^2}{MR_{AdS}^2} - 1} \sinh\left(\frac{\sqrt{M}}{R_{AdS}} t\right) \end{aligned} \quad (2.1.52)$$

で変換し, さらに $\phi \sim \phi + 2\pi$ の周期性に合わせて $X_0 \pm X_1 \sim \exp \left[2\pi\sqrt{M} \right] (X_0 \pm X_1)$ という同一視を加える必要がある. ここから明らかなように 3 次元 AdS 時空の BTZ ブラックホールは pure AdS₃ からの商群で得られる.

BTZ ブラックホールという時は基本的に $M \geq 0$ の領域に対応しており, この時のホライズンは $r_h = R_{AdS}\sqrt{M}$ で与えられる. さらに $M = -1$ の時には pure AdS の global 座標 (2.1.11) と一致することがわかる.

以下ではその中間領域である $-1 < M < 0$ について考えていく. 座標変換

$$\tilde{r} = \frac{r}{\sqrt{|M|}}, \quad \tilde{t} = \sqrt{|M|}t, \quad \tilde{\phi} = \sqrt{|M|}\phi \quad (2.1.53)$$

を用いると

$$ds^2 = - \left(\frac{\tilde{r}^2}{R_{AdS}^2} + 1 \right) d\tilde{t}^2 + \frac{d\tilde{r}^2}{\frac{\tilde{r}^2}{R_{AdS}^2} + 1} + \tilde{r}^2 d\tilde{\phi}^2 \quad (2.1.54)$$

となる. これは (2.1.11) と同じ形であるが, pure AdS において $\phi \sim \phi + 2\pi$ の周期性であった時にこの座標は

$$\tilde{\phi} \sim \tilde{\phi} + 2\pi\sqrt{|M|} \quad (2.1.55)$$

という周期を持つ. これは $2\pi(1 - \sqrt{|M|})$ の欠損角 (deficit angle) を持つ conical defect 時空である. conical defect 時空の座標を図 2.4 の右図に図示した.

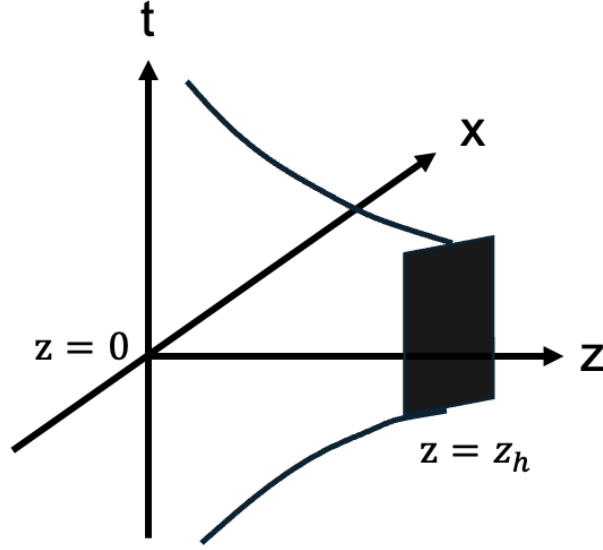
このように conical defect 時空も pure AdS₃ をその isometry で割った商群で得ることができる. 例えば $M = -\frac{1}{n^2}$ の conical defect 時空は AdS 時空を離散群 $\mathbb{Z}_n$ で割ることで得られる.

2.1.5 AdS black brane 座標 (planar AdS black hole)

平坦なホライズンを持つ時空として以下のような AdS black brane 座標 (planar AdS black hole) が存在する.

$$ds^2 = \frac{R_{AdS}^2}{z^2} \left(-f(z) dt^2 + d\mathbf{x}^2 + \frac{dz^2}{f(z)} \right), \quad f(z) = 1 - \left(\frac{z}{z_h} \right)^d. \quad (2.1.56)$$

これが張る座標は図 2.6 に図示した. ここで $z = z_h$ は平坦なブラックホールホライズンになる. また, この座標は $z \rightarrow 0$ で (2.1.19) に帰着するような漸近的 AdS 時空となっている.

図 2.6: 3 次元 AdS black brane 座標 (planar AdS black hole)

また, 前節と同様の conical defect trick を用いると Euclid 化したブラックホールを熱的に扱った時の温度 T とホライズン z_h は以下のように結びつく.

$$T = \frac{d}{4\pi z_h} \quad (2.1.57)$$

この座標が (2.1.25) の planar limit で得られることを見ておく [18]. ブラックホールが AdS 半径よりも十分大きい極限 $r_h \gg R_{AdS}$ で

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{R_{AdS}^2} - \frac{r_h^{d-2}}{r^{d-2}} \left(1 + \frac{r_h^2}{R_{AdS}^2} \right) \simeq \frac{r^2}{R_{AdS}^2} \left(1 - \left(\frac{r_h}{r} \right)^d \right) \quad (2.1.58)$$

となる. ここで十分小さい角度領域で $\mathbf{x} = R_{AdS} \boldsymbol{\theta}$, $d\mathbf{x}^2 = R_{AdS}^2 d\Omega_{d-1}^2$ として S^{d-1} を $\mathbb{R}^{d-1}$ で近似する. さらに

$$r = \frac{R_{AdS}^2}{z} \quad (2.1.59)$$

で座標変換を施すと, (2.1.56) を得る.

2.1.6 Einstein 方程式と AdS 時空

ここまで見てきた $d+1$ 次元 AdS 時空の座標を用いるとリッチテンソルとリッチスカラーは

$$R_{\mu\nu} = -\frac{d}{R_{AdS}^2} g_{\mu\nu}, \quad R = -\frac{d(d+1)}{R_{AdS}^2} \quad (2.1.60)$$

となり, Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (2.1.61)$$

に代入すると宇宙定数は

$$\Lambda = -\frac{d(d-1)}{2R_{AdS}^2} \quad (2.1.62)$$

で与えられる. よって AdS 時空は負の宇宙定数を持つ Einstein 方程式の真空解として与えられることがわかる.

2.1.7 AdS 時空の Isometries

節 2.1.1 で見たように埋め込み多様体 (2.1.1) は以下の変換で不変である.

$$X^A \rightarrow \Lambda^A{}_B X^B, \quad \Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \quad (2.1.63)$$

ここで η は

$$\eta_{AB} = \text{diag}(-, +, \dots, +, -) \quad (2.1.64)$$

で与えられる. このような変換群は $SO(d, 2)$ を成し, 最大対称空間である AdS_{d+1} は isometry として完全に対称性を引き継ぐので $SO(d, 2)$ を持つ. この時, 独立な Killing ベクトルの数は

$$\frac{(d+1)(d+2)}{2} \quad (2.1.65)$$

である.

例：3 次元 AdS 時空における Killing ベクトルの構成

埋め込み空間における無限小ローレンツ変換の生成子は

$$J_{AB} = X_A \frac{\partial}{\partial X^B} - X_B \frac{\partial}{\partial X^A}. \quad (2.1.66)$$

これら J_{AB} を AdS 超曲面上に制限することで, そのまま AdS 内の Killing ベクトル場が得られる. J_{AB} は以下のように埋め込み計量を不変に保つローレンツ代数を満たす.

$$[J_{AB}, J_{CD}] = \eta_{BC} J_{AD} - \eta_{AC} J_{BD} - \eta_{BD} J_{AC} + \eta_{AD} J_{BC}. \quad (2.1.67)$$

J_{AB} は反対称行列なので独立なものは6つあり, 埋め込み空間における Killing ベクトルは以下のように書き下せる.

$$V = \begin{cases} X^0 \partial_{X^1} + X^1 \partial_{X^0}, & X^0 \partial_{X^2} + X^2 \partial_{X^0}, & (\text{boost}) \\ X^3 \partial_{X^1} + X^1 \partial_{X^3}, & X^3 \partial_{X^2} + X^2 \partial_{X^3}, & \\ X^0 \partial_{X^3} - X^3 \partial_{X^0}, & X^1 \partial_{X^2} - X^2 \partial_{X^1} & (\text{rotation}) \end{cases} \quad (2.1.68)$$

具体的な Killing ベクトルを求めるために以下のような射影演算子 (テトラド) を考える.

$$e_\mu^A = \frac{\partial X^A}{\partial x^\mu} \quad (2.1.69)$$

これを用いて AdS 空間の座標に対して Killing ベクトル χ を以下のように簡単に求めることができる.

$$\chi_\mu = e_\mu^A V_A \quad (2.1.70)$$

global 座標の座標変換 (2.1.4) を用いて Killing ベクトルを求めると

$$\begin{aligned} \chi_{(01)} &= -\tanh \rho \sin t \sin \phi \partial_t + \cos t \sin \phi \partial_\rho + \coth \rho \cos t \cos \phi \partial_\phi, \\ \chi_{(02)} &= -\tanh \rho \sin t \cos \phi \partial_t + \cos t \cos \phi \partial_\rho - \coth \rho \cos t \sin \phi \partial_\phi, \\ \chi_{(31)} &= \tanh \rho \cos t \sin \phi \partial_t + \sin t \sin \phi \partial_\rho + \coth \rho \sin t \cos \phi \partial_\phi, \\ \chi_{(32)} &= \tanh \rho \cos t \cos \phi \partial_t + \sin t \cos \phi \partial_\rho - \coth \rho \sin t \sin \phi \partial_\phi, \\ \chi_{(03)} &= \partial_t, \\ \chi_{(12)} &= -\partial_\phi. \end{aligned} \quad (2.1.71)$$

となる. これらが Killing 方程式 $\chi_{\mu;\nu} + \chi_{\nu;\mu} = 0$ を満たすことも容易に確認できる. また, これらを取り替えて新たに独立な Killing ベクトルを構成し直すことが

でき,

$$\begin{aligned}
\zeta_{-1} &= \frac{1}{2} \left[\tanh(\rho) e^{-i(t+\phi)} \partial_t + i e^{-i(t+\phi)} \partial_\rho + \coth(\rho) e^{-i(t+\phi)} \partial_\phi \right], \\
\zeta_0 &= \frac{1}{2} (\partial_t + \partial_\phi), \\
\zeta_1 &= \frac{1}{2} \left[\tanh(\rho) e^{i(t+\phi)} \partial_t - i e^{i(t+\phi)} \partial_\rho + \coth(\rho) e^{i(t+\phi)} \partial_\phi \right], \\
\bar{\zeta}_{-1} &= \frac{1}{2} \left[\tanh(\rho) e^{-i(t-\phi)} \partial_t + i e^{-i(t-\phi)} \partial_\rho - \coth(\rho) e^{-i(t-\phi)} \partial_\phi \right], \\
\bar{\zeta}_0 &= \frac{1}{2} (\partial_t - \partial_\phi), \\
\bar{\zeta}_1 &= \frac{1}{2} \left[\tanh(\rho) e^{i(t-\phi)} \partial_t - i e^{i(t-\phi)} \partial_\rho - \coth(\rho) e^{i(t-\phi)} \partial_\phi \right].
\end{aligned} \tag{2.1.72}$$

のように求まる.

これらの Killing ベクトルは以下の関係式を満たし, $SL(2, R)$ を形成することがわかる.

$$\begin{aligned}
[\zeta_1, \zeta_{-1}] &= 2\zeta_0, \\
[\zeta_0, \zeta_1] &= -\zeta_1, \\
[\zeta_0, \zeta_{-1}] &= \zeta_{-1}.
\end{aligned} \tag{2.1.73}$$

さらに

$$[\zeta_m, \bar{\zeta}_n] = 0 \tag{2.1.74}$$

より, (2.1.72) は上下 3 つずつで完全に分離していることがわかり, これらの AdS_3 の Killing ベクトル 6 つは

$$SL(2, R)_L \times SL(2, R)_R \simeq SO(2, 2) \tag{2.1.75}$$

を形成する. この AdS 時空の isometry は後に見る 2 次元共形場理論の対称性と一致しており, それぞれの $SL(2, R)$ は 'left-moving' と 'right-moving' に対応している.

2.2 共形場理論 (Conformal Field Theory)

共形場理論 (CFT) は共形対称性を持った場の理論であり, 繰り込み群における固定点で現れるという性質から, 素粒子物理学から物性物理に至るまで幅広く研究

されている [19–21].

2.2.1 d 次元共形対称性

(p, q) 型の d 次元ミンコフスキー空間 $\mathbf{M}^{(p, q)}$ を考える ($d = p + q$). 計量は以下で与えられる.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} \quad (2.2.76)$$

この時, $x \rightarrow x'$ の座標変換で計量は

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x) \quad (2.2.77)$$

と変換する.

共形群 (Conformal group) は計量のスケール変換

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \Omega(x) g_{\mu\nu}(x) \quad (2.2.78)$$

を許した座標変換であり, $\frac{v \cdot w}{\sqrt{v^2 w^2}}$ を一定に保つという性質を持つ.

無限小変換 $x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu(x)$ において計量は

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.2.79)$$

$$\rightarrow g_{\mu\nu} d(x^\mu + \epsilon^\mu) d(x^\nu + \epsilon^\nu) \quad (2.2.80)$$

$$= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) dx^\mu dx^\nu + O(\epsilon^2) \quad (2.2.81)$$

のように変換され, その中でも (2.2.78) を満たすような変換は

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \alpha(x) g_{\mu\nu} \quad (2.2.82)$$

と書けるものに限られる. 両辺に $g^{\mu\nu}$ をかけると $\alpha(x) = \frac{2}{d}(\partial \cdot \epsilon)$ となり, したがって無限小変換が満たす方程式は

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{d}(\partial \cdot \epsilon) g_{\mu\nu} \quad (2.2.83)$$

となる. これを ∂_ρ で微分し, 再度この式を用いて整理すると

$$2\partial_\mu\partial_\nu\epsilon_\rho = -g_{\mu\nu}\partial_\rho\alpha(x) + g_{\mu\rho}\partial_\nu\alpha(x) + g_{\rho\nu}\partial_\mu\alpha(x) \quad (2.2.84)$$

となる. これに ∂^ρ で微分したものを整理すると以下の式を得る.

$$(2-d)\partial_\mu\partial_\nu\alpha(x) = g_{\mu\nu}\partial^2\alpha(x). \quad (2.2.85)$$

さらに, $g^{\mu\nu}$ で縮約を取ると

$$(d-1)\partial^2\alpha(x) = 0 \quad (2.2.86)$$

が得られる. $d=1$ の時, これらの条件式は全て自明なものとなり, 任意の座標変換が共形変換になる. $d=2$ の時は (2.2.85) が自明になるので, (2.2.86) の条件のみが課された広いクラスの共形変換が得られる. これは次の節以降で詳しく扱う. $d \geq 3$ の時, (2.2.85) (2.2.86) より α が一次関数であることがわかる. さらに (2.2.84) より, $\epsilon(x)$ は x の二次以下であることがわかる. 二次の一般形

$$\epsilon_\mu = A_{\mu\nu\rho}x^\nu x^\rho \quad (2.2.87)$$

($A_{\mu\nu\rho}$ の ν と ρ は可換) を考えると, (2.2.84) より

$$A_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{4}(-g_{\mu\nu}\partial_\rho\alpha(x) + g_{\mu\rho}\partial_\nu\alpha(x) + g_{\rho\nu}\partial_\mu\alpha(x)). \quad (2.2.88)$$

よって (2.2.87) は

$$\epsilon_\rho = -\frac{1}{4}x^2\partial_\rho\alpha(x) + \frac{1}{2}(x^\mu\partial_\mu\alpha(x))x_\rho \quad (2.2.89)$$

と表すことができ, α の一次の係数は任意であることから, 最も一般的な無限小変換 $\epsilon^\mu(x)$ は

$$\epsilon^\mu(x) = a^\mu + \omega^\mu_\nu x^\nu + \lambda x^\mu + b^\mu x^2 - 2x^\mu(b \cdot x) \quad (2.2.90)$$

と表せる. ここで ω^μ_ν は反対称テンソルである.

各項に注目することで一般的な共形変換を分解して見ていく.

• 並進

無限小変換が $\epsilon^\mu(x) = a^\mu$ で表される時, その生成子は

$$\mathcal{P}_\mu = -i\partial_\mu \quad (2.2.91)$$

となり, 並進を表す. ここで生成子をエルミートにするために i を導入した.
また, その有限変換は

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu \quad (2.2.92)$$

で表される.

- 回転

無限小変換が $\epsilon^\mu(x) = \omega_\nu^\mu x^\nu$ (ω_ν^μ は反対称テンソル) で表される時, その生成子は

$$\mathcal{J}_{\mu\nu} = -i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \quad (2.2.93)$$

となり, 回転を表す. また, その有限変換は

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu, \quad \Lambda \in SO(p, q) \quad (2.2.94)$$

で表される.

以上の並進と回転を合わせてポアンカレ群を成す.

- 拡大

無限小変換が $\epsilon^\mu(x) = \lambda x^\mu$ で表される時, その生成子は

$$\mathcal{D} = ix^\mu \partial_\mu \quad (2.2.95)$$

となり, 拡大を表す. また, その有限変換は

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = e^\lambda x^\mu \quad (2.2.96)$$

で表される.

- 特殊共形変換

無限小変換が $\epsilon^\mu(x) = b^\mu x^2 - 2x^\mu(b \cdot x)$ で表される時, その生成子は

$$\mathcal{K}_\mu = i(2x_\mu x^\nu \partial_\nu - x^2 \partial_\mu) \quad (2.2.97)$$

となり, 特殊共形変換を表す. また, その有限変換は

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \frac{x^\mu + b^\mu x^2}{1 + 2(b \cdot x) + b^2 x^2} \quad (2.2.98)$$

で表される.

これらの変換の自由度を勘定すると $d + \frac{d(d-1)}{2} + 1 + d = \frac{(d+2)(d+1)}{2}$ となり, $SO(p+1, q+1)$ の次元と一致することが確認できる.

2.2.2 2次元共形場理論

これ以降の小節では最も対称性が高く扱いやすい2次元の共形場理論に制限して考えていく.

$d = 2$ の Euclidean 座標 (x_1, x_2) を考える ($x_2 \rightarrow ix_0$ で Lorentzian 座標に解析接続が可能). この時, (2.2.83) は

$$\partial_1 \epsilon_1 = \partial_2 \epsilon_2, \quad \partial_1 \epsilon_2 = -\partial_2 \epsilon_1 \quad (2.2.99)$$

と書き換えることができる.

$$z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2 \quad (2.2.100)$$

として複素座標 $(z, \bar{z})$ を導入する. これに付随した座標変換は以下のように表される.

$$\begin{aligned} x^1 &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}), & x^2 &= \frac{1}{2i}(z - \bar{z}), \\ \partial_z &= \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2), & \partial_{\bar{z}} &= \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2), \\ \partial_1 &= \partial_z + \partial_{\bar{z}}, & \partial_2 &= i(\partial_z - \partial_{\bar{z}}). \end{aligned} \quad (2.2.101)$$

この時, (2.2.99) は Cauchy-Riemann の方程式になり, 任意の正則関数を用いて

$$z \rightarrow f(z), \quad \bar{z} \rightarrow \bar{f}(\bar{z}) \quad (2.2.102)$$

が2次元共形変換全体を表す. 無限小変換

$$z \rightarrow z' = z + \epsilon(z), \quad \bar{z} \rightarrow \bar{z}' = \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z}) \quad (2.2.103)$$

は $\epsilon(z) = \epsilon_1 + i\epsilon_2$, $\bar{\epsilon}(\bar{z}) = \epsilon_1 - i\epsilon_2$ で与えられ, Laurent 展開で

$$\epsilon(z) = \sum_n c_n z^{n+1}, \quad \bar{\epsilon}(\bar{z}) = \sum_n \bar{c}_n \bar{z}^{n+1} \quad (2.2.104)$$

とできる. この時, 例えば spin 0 の演算子 $\phi(z, \bar{z})$ は

$$\begin{aligned} \phi'(z', \bar{z}') &= \phi(z, \bar{z}) \\ &= \phi(z', \bar{z}') - \epsilon(z') \partial' \phi(z', \bar{z}') - \bar{\epsilon}(\bar{z}') \bar{\partial}' \phi(z', \bar{z}') \end{aligned} \quad (2.2.105)$$

と変換され, その変化分は

$$\begin{aligned}\delta\phi &= -\epsilon(z)\partial\phi - \bar{\epsilon}(\bar{z})\bar{\partial}\phi \\ &= \sum_n (-c_n z^{n+1}\partial\phi - \bar{c}_n \bar{z}^{n+1}\bar{\partial}\phi)\end{aligned}\quad (2.2.106)$$

となる. ここで生成子は以下のように表される.

$$l_n = -z^{n+1}\partial_z, \quad \bar{l}_n = -\bar{z}^{n+1}\bar{\partial}_{\bar{z}} \quad (2.2.107)$$

交換関係は

$$\begin{aligned}[l_n, l_m] &= (n-m)l_{n+m} \\ [\bar{l}_n, \bar{l}_m] &= (n-m)\bar{l}_{n+m} \\ [l_n, \bar{l}_m] &= 0\end{aligned}\quad (2.2.108)$$

で与えられる. これらは二つの同型な代数の直積で与えられ, しばしば **Witt 代数** と呼ばれる.

さらに, これらの生成子が Riemann 球面 $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の全域で well-defined となる条件を探していく. 任意の共形変換は

$$v(z) = -\sum_n a_n l_n = \sum_n a_n z^{n+1}\partial_z \quad (2.2.109)$$

で与えられ, $z \rightarrow 0$ で発散しないのは $a_n = 0$ ($n < -1$) の時のみである. また, $z \rightarrow \infty$ を調べるために $z = -\frac{1}{w}$ の変換を行うと,

$$v(z) = \sum_n a_n \left(-\frac{1}{w}\right)^{n+1} \left(\frac{dz}{dw}\right)^{-1} \partial_w = \sum_n a_n \left(-\frac{1}{w}\right)^{n-1} \partial_w \quad (2.2.110)$$

となり, $w \rightarrow 0$ ($z \rightarrow \infty$) で発散しない条件は $a_n = 0$ ($n > 1$) である. よって, これらの条件を満たすような大域的に well-defined な生成子は $l_0, l_{\pm 1}$ である. 同様に $\bar{l}_0, \bar{l}_{\pm 1}$ も大域的な生成子である. (2.2.108) からわかるように, これらの 3 つずつの生成子は閉じた部分代数になっている. さらに (2.2.107) と (2.2.91)(2.2.93)(2.2.95)(2.2.97) を比較することで, $l_{-1}, \bar{l}_{-1}$ が並進, $i(l_0 - \bar{l}_0)$ が回転, $l_0 + \bar{l}_0$ が拡大, $l_1, \bar{l}_1$ が特殊共形変換に対応していることがわかる.

これら 6 つの生成子のみを用いて得られる大域的な共形変換の有限変換は

$$z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}, \quad \bar{z} \rightarrow \frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}+\bar{d}} \quad (2.2.111)$$

$(a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1)$ で与えられる. この変換群は $SL(2, \mathbb{C})/Z_2$ で表され, これは $SO(3, 1)$ と同型である. Z_2 で割られているのはこれらの変換が $a.b.c.d \rightarrow -a, -b, -c, -d$ で不変であることからくる. 8つのパラメータとそれらを結びつける2つの条件式からこの変換の自由度は6であり, $SO(3, 1)$ の自由度と一致することも確認できる. 既に節 2.1.7 でも言及したように, Lorentzian に持って行った時の2次元共形場理論における対称性は3次元 AdS 時空の isometry と対応しており, 節 2.3 で見る AdS/CFT 対応の強力な根拠の一つになっている.

また, (2.2.108) のような Witt 代数は古典論を扱う際のものであり, 量子論では中心電荷 (central charge) を用いた中心拡大によって代数が拡張される. 以下ではその事実を見ていく.

共形場理論における energy stress tensor $T_{\mu\nu}$ は

$$\begin{cases} T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu} & (\text{symmetric}) \\ \partial^\mu T_{\mu\nu} = 0 & (\text{divergence-free}) \\ T^\mu{}_\mu = 0 & (\text{traceless}) \end{cases} \quad (2.2.112)$$

の三つの条件を満たす. $T_{\mu\nu}$ を複素座標 $(z, \bar{z})$ に座標変換すると

$$\begin{aligned} T_{zz} &= \frac{1}{4} (T_{11} - T_{22} - 2iT_{12}), \\ T_{\bar{z}\bar{z}} &= \frac{1}{4} (T_{11} - T_{22} + 2iT_{12}), \\ T_{z\bar{z}} &= \frac{1}{4} (T_{11} + T_{22}). \end{aligned} \quad (2.2.113)$$

となり, (2.2.112) の条件は

$$T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = 0, \quad (2.2.114)$$

$$\partial_{\bar{z}} T_{zz} = 0, \quad \partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \quad (2.2.115)$$

と書き換えられる. ここからわかるように energy stress tensor は

$$T(z) \equiv T_{zz} \quad \bar{T}(\bar{z}) \equiv T_{\bar{z}\bar{z}} \quad (2.2.116)$$

のように正則なものと反正則なものに分けられる. これらは上記の大域的な共形変換 (並進・回転・拡大・特殊共形変換) の Noether カレント J^μ を生成する (例とし

て, $x^\nu T_{\mu\nu}$ は拡大の保存カレント). さらに複素座標による動径量子化を用いて保存 charge Q も生成する. ある場 A に対する対称性に関する微小変換は charge を用いて $\delta_\epsilon A = \epsilon[Q, A]$ で与えられ, これらを用いて energy stress tensor と各場の演算子積展開 (Operator Product Expansion, OPE) が求まる. この概念に関しては節 2.2.5 で詳しく説明する. また, 共形変換を 2 回繰り返すことで energy stress tensor 同士の OPE も得られる. そこから energy stress tensor を Laurent 展開した

$$T(z) = \sum_n z^{-n-2} L_n, \quad \bar{T}(\bar{z}) = \sum_n \bar{z}^{-n-2} \bar{L}_n \quad (2.2.117)$$

に現れる展開係数 $L_n, \bar{L}_n$ の交換関係が以下のように得られる.

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0} \\ [\bar{L}_n, \bar{L}_m] &= (n-m)\bar{L}_{n+m} + \frac{\bar{c}}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0} \\ [L_n, \bar{L}_m] &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.118)$$

これらは Virasoro 代数と呼ばれ, 2 つの無限次元代数の直積で与えられる. ここで現れる $c, \bar{c}$ は中心電荷 (central charge) と呼ばれ, Witt 代数から拡張して量子論に移る際に現れる. $n = 0, \pm 1$ の時に (2.2.118) の第 1, 2 式の右辺第二項が 0 になることから, $L_0, L_{\pm 1}, \bar{L}_0, \bar{L}_{\pm 1}$ で与えられる大域的な対称性については古典の Witt 代数の時と変わらないことを注意しておく.

2.2.3 場の変換性と相関関数

二次元共形場理論においてスカラー場 $\phi(z, \bar{z})$ を考える. 共形変換 (2.2.102) に対する場の変換性は

$$\phi(z, \bar{z}) \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^h \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \right)^{\bar{h}} \phi(f(z), \bar{f}(\bar{z})) \quad (2.2.119)$$

のように与えられ, 理論に入れる場はこの変換性を決める共形ウェイト $(h, \bar{h})$ で特徴づけられる. 局所的な共形変換 (任意の l_n から構成される) に対して上記の変換性を持つ場を**プライマリー場**, 大域的な共形変換 ($l_0, l_{\pm 1}$ から構成される) のみに対して上記の変換性を持つ場を**準プライマリー場**という. ここで明らかにプラ

イマリー場は準プライマリー場である.

ここで微小な共形変換 (2.2.103) に対して

$$\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \phi(z, \bar{z}) = \left((h \partial \epsilon + \epsilon \partial) + (\bar{h} \bar{\partial} \bar{\epsilon} + \bar{\epsilon} \bar{\partial}) \right) \phi(z, \bar{z}) \quad (2.2.120)$$

が得られる.

さらに, 準プライマリー場に対する相関関数を考えていく. 二点関数は

$$G^{(2)}(z_i, \bar{z}_i) = \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \phi_2(z_2, \bar{z}_2) \rangle \quad (2.2.121)$$

与えられ, これが微小な共形変換で不変であるという式

$$\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} G^{(2)}(z_i, \bar{z}_i) = \langle \delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \phi_1 \phi_2 \rangle + \langle \phi_1 \delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \phi_2 \rangle = 0 \quad (2.2.122)$$

を具体的に記述すると以下ようになる.

$$\begin{aligned} & \left((\epsilon(z_1) \partial_{z_1} + h_1 \partial \epsilon(z_1)) + (\epsilon(z_2) \partial_{z_2} + h_2 \partial \epsilon(z_2)) \right. \\ & \quad \left. + (\bar{\epsilon}(\bar{z}_1) \partial_{\bar{z}_1} + \bar{h}_1 \bar{\partial} \bar{\epsilon}(\bar{z}_1)) + (\bar{\epsilon}(\bar{z}_2) \partial_{\bar{z}_2} + \bar{h}_2 \bar{\partial} \bar{\epsilon}(\bar{z}_2)) \right) G^{(2)}(z_i, \bar{z}_i) = 0. \end{aligned} \quad (2.2.123)$$

この時, $\epsilon(z) = \bar{\epsilon}(\bar{z}) = \text{const.}$ の変換から得られる微分方程式を考えると, 二点関数が $z_{12} = z_1 - z_2$, $\bar{z}_{12} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ にのみ依存することがわかる. さらに $\epsilon(z) \propto z$, $\bar{\epsilon}(\bar{z}) \propto \bar{z}$ の変換から得られる微分方程式を考えると, 二点関数が $z_{12}^{-(h_1+h_2)} \bar{z}_{12}^{-(\bar{h}_1+\bar{h}_2)}$ に比例することがわかる. 最後に $\epsilon(z) \propto z^2$, $\bar{\epsilon}(\bar{z}) \propto \bar{z}^2$ の変換から得られる微分方程式を考えると $h = h_1 = h_2$, $\bar{h} = \bar{h}_1 = \bar{h}_2$ となる必要があることがわかる. 以上より, このように対称性から二点関数 $G^{(2)}(z_i, \bar{z}_i)$ の形が制限され,

$$G^{(2)}(z_i, \bar{z}_i) = \frac{C_{12}}{z_{12}^{2h} \bar{z}_{12}^{2\bar{h}}} \quad (2.2.124)$$

となる. ここで C_{12} は定数である. さらにスカラー場がスピン 0 ($s = h - \bar{h} = 0$) のボソン場の時, 共形次元を $\Delta = h + \bar{h}$ と定義して二点関数は以下のように書き換えられる.

$$G^{(2)}(z_i, \bar{z}_i) = \frac{C_{12}}{|z_{12}|^{2\Delta}} \quad (2.2.125)$$

さらに三点関数 $G^{(3)}(z_i, \bar{z}_i) = \langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \rangle$ も同様に対称性から形が制限され,

$$G^{(3)}(z_i, \bar{z}_i) = C_{123} \frac{1}{z_{12}^{h_1+h_2-h_3} z_{23}^{h_2+h_3-h_1} z_{13}^{h_3+h_1-h_2}} \frac{1}{\bar{z}_{12}^{\bar{h}_1+\bar{h}_2-\bar{h}_3} \bar{z}_{23}^{\bar{h}_2+\bar{h}_3-\bar{h}_1} \bar{z}_{13}^{\bar{h}_3+\bar{h}_1-\bar{h}_2}} \quad (2.2.126)$$

と与えられる. ここで C_{123} は定数であり, 以下で見る 3 つの演算子の演算子積展開 (OPE) の係数と同じである.

四点関数 $G^{(4)}(z_i, \bar{z}_i) = \langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle$ に対しても同様に形が制限され,

$$G^{(4)}(z_i, \bar{z}_i) = f(x, \bar{x}) \prod_{i < j} z_{ij}^{-(h_i + h_j) + h/3} \prod_{i < j} \bar{z}_{ij}^{-(\bar{h}_i + \bar{h}_j) + \bar{h}/3} \quad (2.2.127)$$

で与えられる. ここで $h = \sum_{i=1}^4 h_i$, $\bar{h} = \sum_{i=1}^4 \bar{h}_i$ であり, 係数の $f(x, \bar{x})$ は以下で与えられる cross-ratio x の関数である.

$$x = \frac{z_{12} z_{34}}{z_{13} z_{24}}, \quad 1 - x = \frac{z_{14} z_{23}}{z_{13} z_{24}}, \quad \frac{x}{1 - x} = \frac{z_{12} z_{34}}{z_{14} z_{23}}. \quad (2.2.128)$$

2.2.4 動径量子化と共形変換

energy stress tensor $T_{\mu\nu}$ と微小な共形変換に用いる任意関数 $\epsilon(z)$ を用いると current j^μ が

$$j^\mu = T^{\mu\nu} \epsilon_\nu(x) \quad (2.2.129)$$

として得られる. このカレントの保存則は

$$\partial \cdot j = \frac{1}{2} T_\mu^\mu (\partial \cdot \epsilon) \quad (2.2.130)$$

となり, $T_{\mu\nu}$ に課されたトレースレス条件から自明に成り立つ. 円筒座標 (σ_0, σ_1) から複素平面 $(z, \bar{z})$ に移ることで時間方向が複素平面の動径方向に変わり, この複素平面で時間一定面を取った時に得られる量子化として**動径量子化**を行う. この時, 上記の current から得られる charge は

$$Q = \frac{1}{2\pi i} \oint (dz T(z) \epsilon(z) + d\bar{z} \bar{T}(\bar{z}) \bar{\epsilon}(\bar{z})) \quad (2.2.131)$$

で与えられる. ここで場の量子論の一般論から $\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \phi = [Q, \phi]$ のように場の微小変換と charge は結びつき,

$$\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \phi(w, \bar{w}) = \frac{1}{2\pi i} \oint (dz [T(z) \epsilon(z), \phi(w, \bar{w})] + d\bar{z} [\bar{T}(\bar{z}) \bar{\epsilon}(\bar{z}), \phi(w, \bar{w})]) \quad (2.2.132)$$

のように書き直すことができる. ここで時間順序に対応させて動径順序を以下のように導入する.

$$R(A(z)B(w)) = \begin{cases} A(z)B(w), & |z| > |w|, \\ B(w)A(z), & |z| < |w|. \end{cases} \quad (2.2.133)$$

この時, 交換子を複素経路で書き直すことによって, 以下のように書き直せる.

$$\begin{aligned}
 \delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \phi(w, \bar{w}) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{|z| > |w|} - \oint_{|z| < |w|} \right) \\
 &\quad (dz \epsilon(z) R(T(z) \phi(w, \bar{w})) + d\bar{z} \bar{\epsilon}(\bar{z}) R(\bar{T}(\bar{z}) \phi(w, \bar{w}))) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint (dz \epsilon(z) R(T(z) \phi(w, \bar{w})) + d\bar{z} \bar{\epsilon}(\bar{z}) R(\bar{T}(\bar{z}) \phi(w, \bar{w}))) \\
 &= h \partial \epsilon(w) \phi(w, \bar{w}) + \epsilon(w) \partial \phi(w, \bar{w}) + \bar{h} \bar{\partial} \bar{\epsilon}(\bar{w}) \phi(w, \bar{w}) + \bar{\epsilon}(\bar{w}) \bar{\partial} \phi(w, \bar{w}).
 \end{aligned} \tag{2.2.134}$$

ここで第三式にはスカラー場の変換性 (2.2.120) を用いた. この第二式と第三式を比較すると

$$\begin{aligned}
 R(T(z) \phi(w, \bar{w})) &= \frac{h}{(z-w)^2} \phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{z-w} \partial_w \phi(w, \bar{w}) + \dots \\
 R(\bar{T}(\bar{z}) \phi(w, \bar{w})) &= \frac{\bar{h}}{(\bar{z}-\bar{w})^2} \phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{\bar{z}-\bar{w}} \bar{\partial}_{\bar{w}} \phi(w, \bar{w}) + \dots
 \end{aligned} \tag{2.2.135}$$

が得られ, 動径順序を省略すると

$$\begin{aligned}
 T(z) \phi(w, \bar{w}) &= \frac{h}{(z-w)^2} \phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{z-w} \partial_w \phi(w, \bar{w}) + \dots \\
 \bar{T}(\bar{z}) \phi(w, \bar{w}) &= \frac{\bar{h}}{(\bar{z}-\bar{w})^2} \phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{\bar{z}-\bar{w}} \bar{\partial}_{\bar{w}} \phi(w, \bar{w}) + \dots.
 \end{aligned} \tag{2.2.136}$$

となり, これは次の節で演算子積展開として与えられる.

ここで計算に便利な **conformal Ward identity** を求めるために, 以下のような期待値を考える.

$$\begin{aligned}
 &\left\langle \oint_C \frac{dz}{2\pi i} \epsilon(z) T(z) \phi_1(w_1, \bar{w}_1) \cdots \phi_n(w_n, \bar{w}_n) \right\rangle \\
 &= \sum_{j=1}^n \left\langle \phi_1(w_1, \bar{w}_1) \cdots \left(\oint_{C_j} \frac{dz}{2\pi i} \epsilon(z) T(z) \phi_j(w_j, \bar{w}_j) \right) \cdots \phi_n(w_n, \bar{w}_n) \right\rangle \\
 &= \sum_{j=1}^n \langle \phi_1(w_1, \bar{w}_1) \cdots \delta_{\epsilon} \phi_j(w_j, \bar{w}_j) \cdots \phi_n(w_n, \bar{w}_n) \rangle
 \end{aligned} \tag{2.2.137}$$

第二式で全てのスカラー場を囲う経路 C から各スカラー場を囲む C_j の和に積分経路を変更した. さらに第三式では (2.2.134) で与えられるように energy stress

tensor との周回積分を場の微小変換で置き換えた. さらに (2.2.120) を用いると,

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon \phi(w, \bar{w}) &= (h \partial \epsilon + \epsilon \partial) \phi(w, \bar{w}) \\ &= \oint_{C_j} \frac{dz}{2\pi i} \left(\frac{\epsilon(z)h}{(z-w)^2} + \frac{\epsilon(z)}{z-w} \partial_w \right) \phi(w, \bar{w})\end{aligned}\quad (2.2.138)$$

とでき, 上式に代入すると,

$$\begin{aligned}& \oint_C \frac{dz}{2\pi i} \epsilon(z) \langle T(z) \phi_1(w_1, \bar{w}_1) \cdots \phi_n(w_n, \bar{w}_n) \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \oint_{C_j} \frac{dz}{2\pi i} \left(\frac{\epsilon(z)h_j}{(z-w_j)^2} + \frac{\epsilon(z)}{z-w_j} \partial_{w_j} \right) \langle \phi_1(w_1, \bar{w}_1) \cdots \phi_n(w_n, \bar{w}_n) \rangle \\ &= \oint_C \frac{dz}{2\pi i} \epsilon(z) \sum_{j=1}^n \left(\frac{h_j}{(z-w_j)^2} + \frac{1}{z-w_j} \partial_{w_j} \right) \langle \phi_1(w_1, \bar{w}_1) \cdots \phi_n(w_n, \bar{w}_n) \rangle\end{aligned}\quad (2.2.139)$$

最終式ではまた積分経路を C に戻す操作を行った. 両辺を比較することで以下を得る.

$$\begin{aligned}\langle T(z) \phi_1(w_1, \bar{w}_1) \cdots \phi_n(w_n, \bar{w}_n) \rangle &= \\ \sum_{j=1}^n \left(\frac{h_j}{(z-w_j)^2} + \frac{1}{z-w_j} \partial_{w_j} \right) \langle \phi_1(w_1, \bar{w}_1) \cdots \phi_n(w_n, \bar{w}_n) \rangle\end{aligned}\quad (2.2.140)$$

これは conformal Ward identity と呼ばれ, 後に見るように様々な 2 次元共形場理論における計算で応用される.

2.2.5 演算子積展開 (Operator Product Expansion)

2 次元共形場理論においてプライマリー場を基底にとると, 二つのプライマリー場を近づけた際の演算子積もこの基底で展開することができる. これも対称性から制限された以下の形式で与えられ, これを**演算子積展開 (Operator Product Expansion)** という.

$$\phi_i(z, \bar{z}) \phi_j(w, \bar{w}) \sim \sum_k C_{ijk} (z-w)^{h_k-h_i-h_j} (\bar{z}-\bar{w})^{\bar{h}_k-\bar{h}_i-\bar{h}_j} \phi_k(w, \bar{w})\quad (2.2.141)$$

ここで二点関数の規格化を

$$\langle \phi_i(z, \bar{z}) \phi_j(w, \bar{w}) \rangle = \delta_{ij} \frac{1}{(z-w)^{2h_i}} \frac{1}{(\bar{z}-\bar{w})^{2\bar{h}_i}}\quad (2.2.142)$$

と取ると, C_{ijk} は OPE 係数と呼ばれ, これを用いると三点関数 (2.2.126) を再現する.

さらに energy stress tensor とプライマリー場の演算子積展開は以下のように与えられ, この関係式から場の共形ウェイトを得られる.

$$\begin{aligned} T(z) \phi(w, \bar{w}) &= \frac{h}{(z-w)^2} \phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{z-w} \partial_w \phi(w, \bar{w}) + \cdots \\ \bar{T}(\bar{z}) \phi(w, \bar{w}) &= \frac{\bar{h}}{(\bar{z}-\bar{w})^2} \phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{\bar{z}-\bar{w}} \partial_{\bar{w}} \phi(w, \bar{w}) + \cdots \end{aligned} \quad (2.2.143)$$

さらに, energy stress tensor 同士の演算子積展開によって中心電荷を読み取ることができる.

$$\begin{aligned} T(z)T(w) &= \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2} T(w) + \frac{1}{z-w} \partial T(w) \\ \bar{T}(\bar{z})\bar{T}(\bar{w}) &= \frac{\bar{c}/2}{(\bar{z}-\bar{w})^4} + \frac{2}{(\bar{z}-\bar{w})^2} \bar{T}(\bar{w}) + \frac{1}{\bar{z}-\bar{w}} \partial \bar{T}(\bar{w}) \end{aligned} \quad (2.2.144)$$

さらに (2.2.144) を (2.2.134) に代入すると energy stress tensor の変換性が以下のように求まる.

微小変換 $z \rightarrow z + \epsilon(z)$ に対して

$$\delta_\epsilon T(z) = \epsilon(z) \partial T(z) + 2 \partial \epsilon(z) T(z) + \frac{c}{12} \partial^3 \epsilon(z) \quad (2.2.145)$$

有限変換 $z \rightarrow f(z)$ に対して

$$T(z) \rightarrow (\partial f)^2 T(f(z)) + \frac{c}{12} \{f; z\} \quad (2.2.146)$$

ここで $\{f; z\}$ は Schwarz 微分であり

$$\{f; z\} = \frac{\partial_z f \partial_z^3 f - \frac{3}{2} (\partial_z^2 f)^2}{(\partial_z f)^2} \quad (2.2.147)$$

で与えられる.

2.2.6 自由ボソンと自由フェルミオン

ここで自由ボソンと自由フェルミオンについての理論についてまとめておく.

- 自由ボソン

自由ボソン $X(z, \bar{z})$ の作用は

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \partial X \bar{\partial} X \quad (2.2.148)$$

であり, この時二点関数は

$$\langle X(z, \bar{z}) X(w, \bar{w}) \rangle = -\frac{1}{2} \log |z - w| \quad (2.2.149)$$

で運動方程式は

$$\partial \bar{\partial} X = 0 \quad (2.2.150)$$

となる. したがって $X(z, \bar{z})$ は正則パートと反正則パートに分けることができ, $X(z, \bar{z}) = \frac{1}{2} (x(z) + \bar{x}(\bar{z}))$ とできる. この時の二点関数も

$$\langle x(z) x(w) \rangle = -\log(z - w), \quad \langle \bar{x}(\bar{z}) \bar{x}(\bar{w}) \rangle = -\log(\bar{z} - \bar{w}) \quad (2.2.151)$$

と分解され, ここから OPE は

$$\partial x(z) \partial x(w) = -\frac{1}{(z - w)^2} + \cdots \quad (2.2.152)$$

となる. 左右の共形変換による変換性を比較すると ∂x は共形ウェイト $(h, 0)$ の場であることがわかる.

さらに, この理論における energy stress tensor は

$$\begin{aligned} T(w) &= -\frac{1}{2} : \partial x(w) \partial x(w) : \\ &\equiv -\frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow w} \left[\partial x(z) \partial x(w) + \frac{1}{(z - w)^2} \right] \end{aligned} \quad (2.2.153)$$

で与えられる. $T \partial x$ の演算子積展開は

$$T(z) \partial x(w) \sim \frac{\partial x(w)}{(z - w)^2} + \frac{1}{z - w} \partial^2 x(w) + \cdots \quad (2.2.154)$$

であり, ∂x は共形ウェイト $(h, 0)$ のプライマリ場であることまでわかる.

さらに TT の演算子積展開は

$$T(z)T(w) = \frac{1/2}{(z - w)^4} + \frac{2}{(z - w)^2} \left(-\frac{1}{2} (\partial x(w))^2 \right) + \frac{1}{z - w} \partial \left(-\frac{1}{2} (\partial x(w))^2 \right) \quad (2.2.155)$$

で与えられ, (2.2.144) と比較すると中心電荷は $c = 1$ とわかる.

• 自由フェルミオン

自由フェルミオンについても作用は

$$S = \frac{1}{8\pi} \int (\psi \bar{\partial} \psi + \bar{\psi} \partial \bar{\psi}) \quad (2.2.156)$$

で与えられる. ここでボソンと同様に運動方程式の解析から場が正則パートと反正則パートに分けられることを用いている. ここでフェルミオン場同士の演算子積展開は

$$\psi(z)\psi(w) = -\frac{1}{z-w}, \quad \bar{\psi}(\bar{z})\bar{\psi}(\bar{w}) = -\frac{1}{\bar{z}-\bar{w}}. \quad (2.2.157)$$

と求まる. さらにこの理論の energy stress tensor は

$$T(z) = \frac{1}{2} : \psi(z) \partial \psi(z) :, \quad \bar{T}(\bar{z}) = \frac{1}{2} : \bar{\psi}(\bar{z}) \bar{\partial} \bar{\psi}(\bar{z}) : \quad (2.2.158)$$

で与えられ, ボソン場と同様に $T\psi$ の演算子積展開を計算すると, $\psi, \bar{\psi}$ はそれぞれ共形ウェイト $(\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2})$ のプライマリー場であることがわかる. さらに TT の演算子積展開から中心電荷 $c = \frac{1}{2}$ であることもわかる.

2.2.7 Weyl Anomaly

古典の共形場理論で保たれていた Weyl 対称性が実は量子論において破れることが知られている. Weyl 対称性に付随して, energy stress tensor のトレースレス条件が成り立っていたがこれも破れることになる. このような現象は **Weyl anomaly** もしくは **trace anomaly** として知られる. 以下では energy stress tensor のトレースに注目してこの anomaly がどのように現れるかを見ていく.

平坦な時空ではこのトレースがゼロになることは知っているのですが, ノンゼロのトレースが現れるならそれは計量 R に比例する形になる. ここで 2 次元 CFT を考えるので他のスカラー曲率不変量は存在しないことに注意する. このトレースを

$$T^\mu_\mu = aR \quad (2.2.159)$$

のように書く. 以降はこの係数 a を求めていく. 複素座標 $(z, \bar{z})$ への座標変換を用いて上式は

$$T_{z\bar{z}} = \frac{a}{2} g_{z\bar{z}} R \quad (2.2.160)$$

とでき, 共変微分を作用させると以下の関係式を得る.

$$\nabla^{\bar{z}} T_{z\bar{z}} = \frac{a}{2} \nabla^{\bar{z}} (g_{z\bar{z}} R) = \frac{a}{2} \partial_z R \quad (2.2.161)$$

さらに energy stress tensor の保存則より,

$$\nabla^z T_{zz} = -\nabla^{\bar{z}} T_{z\bar{z}} = -\frac{a}{2} \partial_z R. \quad (2.2.162)$$

となり, 右辺を Weyl 変換すると, スカラー曲率 R に対する変換則 $\sqrt{g'}R' = \sqrt{g}(R - 2\nabla^2\omega)$ を用いて

$$a \partial_z \nabla^2 \delta\omega \approx 4a \partial_z^2 \partial_{\bar{z}} \delta\omega \quad (2.2.163)$$

を得る. さらに, energy stress tensor の共形変換に対する変換則は (2.2.134) と (2.2.144) を用いると

$$\delta_\epsilon \delta T_{zz}(z) = -\frac{c}{12} \partial_z^3 \epsilon(z) - 2 \partial_z \epsilon(z) T_{zz}(z) - \epsilon(z) \partial_z T_{zz}(z) \quad (2.2.164)$$

と分かり, 共形変換が座標変換と Weyl 変換を用いて計量の成分を保つようにしたものであるという事実を踏まえると, 第二項と第三項は $z \rightarrow z + \epsilon(z)$ の座標変換による変化分なので, 残った第一項が energy stress tensor の $2\delta\omega = \partial\epsilon(z) + (\partial\epsilon(z))^*$ の Weyl 変換だとわかる. つまり,

$$\delta_{\text{Weyl}} T_{zz} = -\frac{c}{6} \partial_z^2 \delta\omega. \quad (2.2.165)$$

よって, (2.2.162) の左辺に対して Weyl 変換したものは

$$-\frac{c}{3} \partial_z^2 \partial_{\bar{z}} \delta\omega \quad (2.2.166)$$

となり, (2.2.163) と比較すると,

$$c = -12a \quad (2.2.167)$$

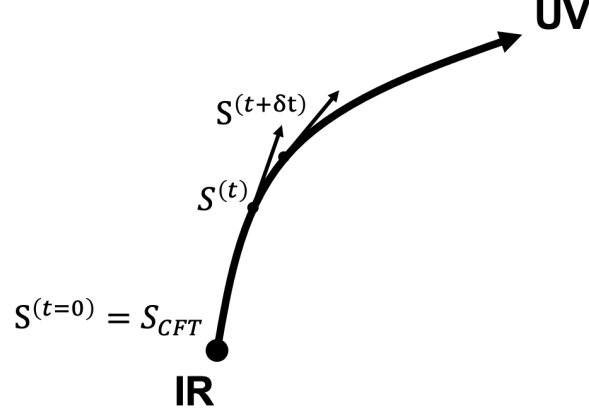
となる. 量子化による寄与であることをわかりやすく書くと energy stress tensor のトレースは

$$\langle T_\mu^\mu \rangle = -\frac{c}{12} R \quad (2.2.168)$$

となる. この式から量子論で Weyl 対称性が破れていることが明示的にわかる. このような事実は偶数次元の共形場理論で一般に確認される. この anomaly は (2.2.118) で見たように, 量子化によって共形対称性の生成子 $L_n, \bar{L}_n$ の交換関係に中心電荷による補正がついたことからくるものであり, 実際に anomaly は中心電荷に比例した形になっている.

2.2.8 $T\bar{T}$ Deformation

繰り込み群における irrelevant な変形として $T\bar{T}$ deformation が知られている [22–24]. これは IR 固定点に存在する CFT の data を用いて UV の理論が構築で

図 2.7: 理論空間における $T\bar{T}$ deformation

きる可解な変形として注目を集め, 熱心に研究されている. 以下では CFT における議論に限定して見ていくが, ホログラフィックな解釈については節 2.3.4 で紹介する.

繰り込み群フローのパラメータ (理論のスケールを表すパラメータ) を t とすると, $T\bar{T}$ deformation によって作用 $S^{(t)}$ は以下のように変形される.

$$S^{(t+\delta t)} = S^{(t)} + \delta t \int d^2x \sqrt{g} T\bar{T}^{(t)}(x) \quad (2.2.169)$$

ここで第二項の $T\bar{T}$ 演算子はブロック体で表されており, 繰り込み群固定点の CFT においては斜体で書かれる $T\bar{T}$ と一致するが一般には後に確認するようにノンゼロの $T_{z\bar{z}}$ 成分が現れる. また, 理論空間のフローは図 2.7 に図示する. この時 $T\bar{T}$ deformation の矢印の向きは通常の繰り込み群フローの粗視化のプロセスと逆であることに注意する. また, energy stress tensor は質量次元が $[T] = 2$ なので, $T\bar{T}$ 演算子は $[T\bar{T}] = 4$ である. 次元解析から結合定数の t の質量次元は $[t] = -2 < 0$ であることがわかり, $T\bar{T}$ deformation が irrelevant な変形であることが確認できる.

$T\bar{T}$ は一般に

$$T\bar{T} = \frac{1}{8} \left(T^{\mu\nu} T_{\mu\nu} - (T^\mu_\mu)^2 \right) \quad (2.2.170)$$

で定義され, flat な計量 $ds^2 = dzd\bar{z}$ では (2.2.113) などを用いると以下のように書き直せる.

$$\begin{aligned} T\bar{T} &= -\frac{1}{4}(T_{11}T_{22} - T_{12}^2) \\ &= T_{zz}T_{\bar{z}\bar{z}} - T_{z\bar{z}}^2 \equiv T\bar{T} - \Theta^2 \end{aligned} \quad (2.2.171)$$

ここで $T_{zz} \equiv T$, $T_{\bar{z}\bar{z}} \equiv \bar{T}$ と同様に $T_{z\bar{z}} \equiv \Theta$ と定義した. CFT においてはスケール対称性から energy stress tensor にトレースレス条件がつき, $\Theta = 0$ となっていたことに注意する.

$T\bar{T}$ は二つの演算子の積で定義された composite operator なので一般には OPE からくる発散などうまく定義できないが, ここでは

$$T\bar{T} = \lim_{z \rightarrow w} (T(z)\bar{T}(w) - \Theta(z)\Theta(w)) \quad (2.2.172)$$

のような極限で定義する. 2 次元 CFT において T と $\bar{T}$ が factorize される, つまり $T\bar{T} \sim 0$ であるという事実から well-defined になっている. 一般に, CFT から $T\bar{T}$ deform された後の QFT においてもこの演算子が well-defined であることも示されている.

ここから CFT の data を用いて $T\bar{T}$ deform された後の QFT における spectrum を構成しよう. 円周 R の円筒上に定義された QFT を考える. ここで理論に並進対称性を課すと, 全ての期待値は座標依存しなくなり, エネルギー固有状態 $|n\rangle$ に対する固有値 $\mathcal{E}_n(R, t)$ とその R 依存性, さらに momentum P_n は以下のように与えられる.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n(R, t) &= \int_0^R dx \langle n | T_{\tau\tau} | n \rangle = R \langle n | T_{\tau\tau} | n \rangle, \\ \partial_R \mathcal{E}_n(R, t) &= \int_0^R dx \langle n | \frac{\partial g_{xx}}{\partial R} \frac{\delta}{\delta g_{xx}} \mathcal{L} | n \rangle = \langle n | T_{xx} | n \rangle, \\ P_n &= i \int_0^R dx \langle n | T_{x\tau} | n \rangle = iR \langle n | T_{x\tau} | n \rangle \end{aligned} \quad (2.2.173)$$

ここで第二式では Euclidean 座標で $\delta H = \int dx \delta \mathcal{L}$ であることを用いた. $\mathcal{E}_n(R, t)$

を繰り込み群パラメータ t で微分した時も同様に計算することができ,

$$\begin{aligned}
 \partial_t \mathcal{E}_n(R, t) &= \int_0^R dx \langle n | \frac{\delta}{\delta t} \mathcal{L} | n \rangle \\
 &= R \langle n | T \bar{T} | n \rangle \\
 &= -\frac{R}{4} (\langle n | T_{\tau\tau} | n \rangle \langle n | T_{xx} | n \rangle - \langle n | T_{\tau x} | n \rangle \langle n | T_{x\tau} | n \rangle) \\
 &= -\frac{1}{4} \left(\mathcal{E}_n(R, t) \partial_R \mathcal{E}_n(R, t) + \frac{1}{R} P_n \right)
 \end{aligned} \tag{2.2.174}$$

を得る. ここで最終式に Zamolodchikov の factorization formula

$$\begin{aligned}
 \langle n | T \bar{T} | n \rangle &= \langle n | T | n \rangle \langle n | \bar{T} | n \rangle - \langle n | \Theta | n \rangle \langle n | \bar{\Theta} | n \rangle \\
 &= -\frac{1}{4} (\langle n | T_{\tau\tau} | n \rangle \langle n | T_{xx} | n \rangle - \langle n | T_{\tau x} | n \rangle \langle n | T_{x\tau} | n \rangle)
 \end{aligned} \tag{2.2.175}$$

を用いた. ここで $t = 0$ で CFT によって与えられる以下の初期条件を課す.

$$E_n(R) = \frac{1}{R} \left(n + \bar{n} - \frac{c}{12} \right), \quad P_n(R) = \frac{1}{R} (n - \bar{n}) \tag{2.2.176}$$

ここで $n, \bar{n}$ はそれぞれ CFT の generator $L_0, \bar{L}_0$ の固有値である. これを用いて (2.2.174) を解くと,

$$\mathcal{E}_n(R, t) = \frac{2R}{t} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{t E_n}{R} + \frac{t^2 P_n}{4R^2}} \right) \tag{2.2.177}$$

となる. 以上のように, 元の CFT から $T\bar{T}$ deform された後の QFT における spectrum を求めることができる.

次に, $T\bar{T}$ deform された QFT の背景計量 g と energy stress tensor $T_{\mu\nu}$ を求めよう [25, 26].

以下で定義される生成汎関数 $W[g]$ を考える.

$$W[g] = -\log Z[g] \tag{2.2.178}$$

ここで, $Z[g]$ は背景計量 g を持つ QFT の分配関数である. energy stress tensor の定義

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{2.2.179}$$

を用いると, g による変化分は

$$\delta W^{(t+\delta t)} = \frac{1}{2} \int d^2x (\sqrt{g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu})^{(t+\delta t)} \quad (2.2.180)$$

となり, 一方で (2.2.169) より

$$\begin{aligned} \delta W^{(t+\delta t)} &= \delta W^{(t)} + \delta t \delta S_{(T\bar{T})} \\ &= \frac{1}{2} \int d^2x (\sqrt{g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu})^{(t)} + \delta t \delta \left(\int d^2x \frac{\sqrt{g}}{8} (T^{\mu\nu} T_{\mu\nu} - (T^\mu_\mu)^2) \right) \end{aligned} \quad (2.2.181)$$

となる. これら二式を比較して

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \int d^2x (\sqrt{g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu})^{(t)} \right) = \delta \left(\int d^2x \frac{\sqrt{g}}{8} (T^{\mu\nu} T_{\mu\nu} - (T^\mu_\mu)^2) \right) \quad (2.2.182)$$

を得る. 丁寧に分解して δg と $\delta \partial_t g$ で係数を比較すると

$$\partial_t g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} T) = \frac{1}{2} \hat{T}_{\mu\nu}, \quad \partial_t \hat{T}_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \hat{T}_{\mu\rho} \hat{T}^{\rho\nu}, \quad \partial_t (\hat{T}_{\mu\rho} \hat{T}^\rho_\nu) = 0 \quad (2.2.183)$$

となる. ここで $\hat{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} T$ と定義した. また, 第三式は 2 次元で常に成り立つ恒等式である. これら三式から明らかに $\partial_t^3 g_{\mu\nu} = 0$ とわかり, さらに t の 1 次と 2 次の係数が求まる. また, $\partial_t^2 \hat{T}_{\mu\nu} = 0$ で t の 1 次の決まる. 具体的には

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}^{(t)} &= g_{\mu\nu}^{(0)} + \frac{t}{2} \hat{T}_{\mu\nu}^{(0)} + \frac{t^2}{16} \hat{T}_{\mu\rho}^{(0)} \hat{T}_{\sigma\nu}^{(0)} g^{(0)\rho\sigma} \\ \hat{T}_{\mu\nu}^{(t)} &= \hat{T}_{\mu\nu}^{(0)} + \frac{t}{4} \hat{T}_{\mu\rho}^{(0)} \hat{T}_{\sigma\nu}^{(0)} g^{(0)\rho\sigma} \end{aligned} \quad (2.2.184)$$

を得る.

2.2.9 c 定理 (c Theorem)

以下では 2 次元 CFT における中心電荷 c が繰り込み群フローで単調減少するという c 定理を見ていく [27]. 数式にすると

$$c_{UV} \geq c_{IR} \quad (2.2.185)$$

となる. もしくは系の長さスケールを l として

$$\frac{dc(l)}{dl} \leq 0 \quad (2.2.186)$$

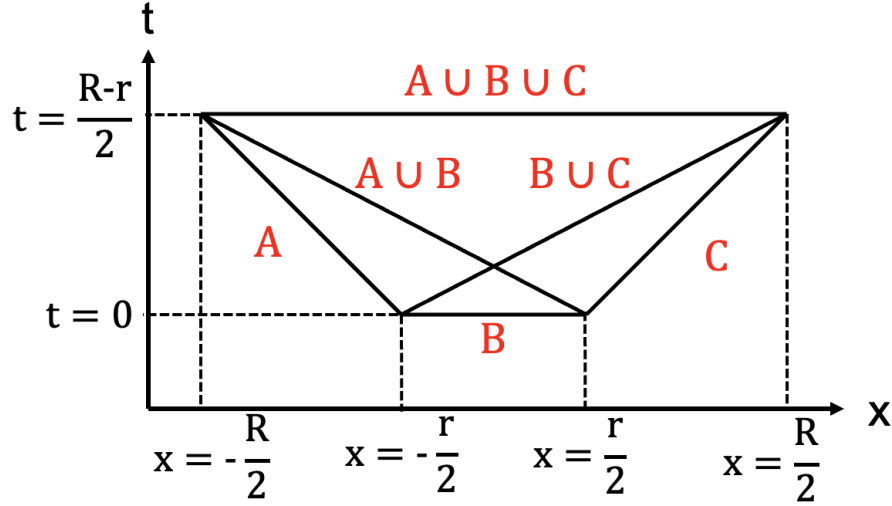


図 2.8: 2 次元の場の理論におけるエントロピック c 定理のセットアップ.

のように書かれる. これらは繰り込み群フローが系に対する粗視化 (長さスケール l を大きくする操作) であり, それによって UV 理論から IR 理論に変形するものであるという事実から理解できる. この c 定理は Zamolodchikov によって示されている [28] が, ここではエンタングルメントエントロピーを用いた証明を紹介する [29]. 以下では第 3 章において導入しているエンタングルメントエントロピーの定義や性質をふんだんに使うので, 詳しく知らない読者は先にそちらを参照されたい.

まずは Lorentz 不変な場の理論を考え, 図 2.8 のように部分系 A, B, C を取る. ここで A, C は null 測地線上に乗っているが, 適切に boost することで時間一定面に移動させてから Hilbert 空間を構成することができる. また, 情報の伝達が null 測地線で与えられることを考えると, 因果的な関係性として $A \cup B, B \cup C, A \cup B \cup C$ の部分系を図のように取ることができる. ここで部分系 B の長さを r , 部分系 $A \cup B \cup C$ の長さを R とする. さらに部分系 B は $t = 0$, 部分系 $A \cup B \cup C$ は $t = \frac{R-r}{2}$ とする. この時に, boost で不変な系の長さとして部分系 $A \cup B$ の長さを

$$\sqrt{\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 - \left(\frac{R-r}{2}\right)^2} = \sqrt{Rr} \quad (2.2.187)$$

と求めることができる. 同様に $B \cup C$ の長さも $\sqrt{Rr}$ である. ここで, エンタングルメントエントロピーの強劣加法性 (3.1.19) より,

$$S_{AB} + S_{BC} = 2S(\sqrt{Rr}) \geq S(R) + S(r) = S_{ABC} + S_B \quad (2.2.188)$$

であることがわかる. したがって, 物理的長さを L として対数スケール $l = \log L$ を定義すると, エンタングルメントエントロピーは l の関数として上に凸である. これは以下の式で書くことができる.

$$\frac{d^2 S(l)}{dl^2} \leq 0 \quad (2.2.189)$$

ここでさらに 2 次元 CFT においてエンタングルメントエントロピーが (3.2.76) のように得られることから,

$$c(l) = 3 \frac{dS(l)}{dl} \quad (2.2.190)$$

とおくことができ, これらから (2.2.186) が得られる.

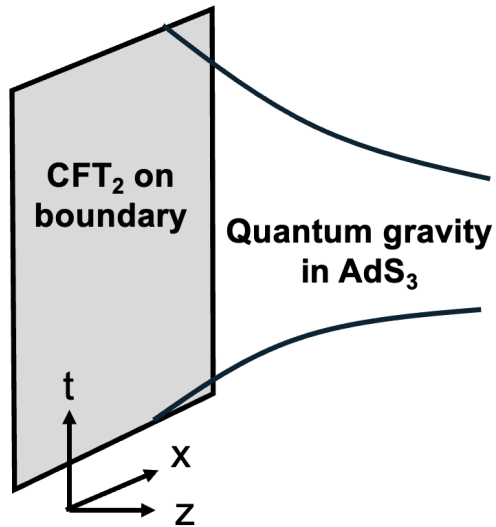
2.3 *AdS/CFT* 対応

量子重力理論の研究は長らくの間, 難航を極めていたが 1997 年に Maldacena が提唱した *AdS/CFT* 対応によって大きな進展があった. *AdS* 時空上の量子重力理論がそれより次元低い境界上の共形場理論と等価であると主張するこの対応は, 既によく知られた共形場理論によって未知の量子重力理論を解析するだけでなく, 逆に計算が困難な強結合の場の理論に対して重力理論から解析することができ, 相補的な解析が可能になっている. また後に第 3 章でも見るように, *AdS/CFT* 対応は笠-高柳公式を通して量子重力理論と量子情報理論の密接な関係を明らかにした. さらにこの対応は素粒子理論分野に限らず, 物性分野や宇宙論分野などでも大きく広がりがあある.

本節ではここまで見てきた *AdS* 時空の重力理論と共形場理論の基礎を踏まえて, いよいよ本章のメインである *AdS/CFT* 対応について見ていく [3–5, 30–33].

2.3.1 *AdS/CFT* 対応

1997 年に Maldacena によって ***AdS/CFT* 対応**が提唱された [5]. その主張は以下の通りである.

図 2.9: AdS/CFT 対応**AdS/CFT 対応**

$d+1$ 次元漸近的反ド・ジッター (AdS_{d+1}) 時空の量子重力理論が, 境界上の d 次元共形場理論 (CFT_d) と等価である.(図 2.9 参照)

具体的には以下のように分配関数のレベルで等価性が成立すると信じられている.

$$Z_{\text{量子重力}}|_{AdS} = Z_{\text{境界上の} CFT} \quad (2.3.191)$$

ここで「信じられている」と書いたのは AdS/CFT 対応の厳密な証明が存在しないからである. しかし, これ以降の節でも何度も見るようにこの二つの理論の等価性は対称性, 相関関数, エンタングルメントエントロピーなどといった様々な側面から確認されており, このような大量の状況証拠からほぼ確実に成り立っているだろうとされている.

Maldacena による超弦理論を用いた議論 (top-down な議論)

AdS/CFT 対応には厳密な証明がないが, それが初めて発見されたのは超弦理論に基づいて得られる自然な考察からである [5, 34, 35]. 以下ではその考察を簡単に見

ていく.

• D3 ブレーンの見方

N 枚の D3 ブレーンを考え, 以下のような作用を用いる.

$$S = S_{bulk} + S_{brane} + S_{int} \quad (2.3.192)$$

ここで S_{bulk} は 10 次元のタイプ II B 超弦理論の作用, S_{brane} はブレーン上の開弦の作用, S_{int} はそれらの相互作用項である. これらは低エネルギー極限 (弦の長さ $l_s \rightarrow 0$, $\alpha' \rightarrow 0$) において相互作用項は消え, 閉弦の寄与として自由なタイプ II B 超弦理論が, 開弦の寄与として $\mathcal{N} = 4SU(N)$ 超対称ゲージ理論が得られる.

• ブラック 3 ブレーン解の見方

ブレーンを持つ超重力理論の解としてブラック 3 ブレーン解を考える. 解は以下のように与えられる.

$$\begin{aligned} ds^2 &= f^{-1/2} (-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + f^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2) \\ f &= 1 + \frac{R^4}{r^4}, \quad R^4 \equiv 4\pi g_s \alpha'^2 N \end{aligned} \quad (2.3.193)$$

ここで g_s は弦の結合定数である. さらにこれは $r \rightarrow 0$ の極限では

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2} (-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + R^2 \frac{dr^2}{r^2} + R^2 d\Omega_5^2 \quad (2.3.194)$$

となり, これは $AdS_5 \times S^5$ の時空を記述することがわかる. 逆に $r \rightarrow \infty$ では平坦時空になる. ここで低エネルギー極限ではこれらの領域が decouple することが知られている.

これらの二つの見方において共に平坦時空における閉弦の寄与を無視すると, 以下のような理論の双対性が現れる (図 2.10 参照).

Maldacena の主張

4 次元の $\mathcal{N} = 4 SU(N)$ 超対称ゲージ理論 と $AdS_5 \times S^5$ 上のタイプ II B 超弦理論が等価である.

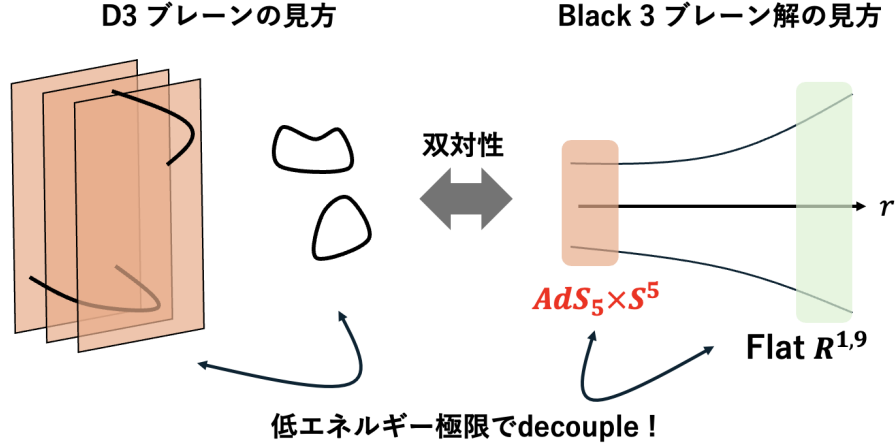


図 2.10: Maldacena による双対性の議論

これらの二つの理論の対称性が一致するという双対性の一つの例を確認しておく。まず、4次元共形場理論の共形対称性は $SO(4,2)$ であり、これは重力側では AdS_5 の isometry として現れる。 $\mathcal{N} = 4SU(N)$ 超対称ゲージ理論の R 対称性は理論が持つ6個のスカラー場に対応し、 $SO(6)$ を与える。一方で重力側では5次元球面 S^5 の持つ対称性として同じものが現れる。

さらに、これらの理論を一致させる時のパラメータの対応関係として

$$G_N \sim \frac{1}{N^2}, \quad (2.3.195)$$

$$\lambda = g_{YM}^2 N \sim g_s N \sim \frac{R_{AdS}^4}{l_s^4} \quad (2.3.196)$$

の二つがある。ここで λ はトフーフト結合定数であり、large N QFT における展開係数である。(2.3.195) より、重力の古典極限 $G_N \rightarrow 0$ では対応する共形場理論は large N 理論になることがわかる。また (2.3.196) より、弦のループ補正や高階曲率といった stringy な寄与を無視する極限で共形場理論は強結合になることがわかる。これら二つの極限を合わせて Einstein 重力を実現することができる。 AdS/CFT 対応において、扱いやすい Einstein 重力で AdS 時空を解析した時に双対となるような large N で強結合な CFT を **holographic CFT** という。

また、このような双対な重力理論と共形場理論で強結合と弱結合が逆になる事実を strong/weak duality という。

重力側 (AdS の bulk 場)	CFT 側 (境界上の演算子)
スカラー場 ϕ (質量 m)	スカラー演算子 $\mathcal{O}$ (共形次元 $\Delta = \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2 R_{\text{AdS}}^2}$)
ゲージ場 A_μ	カレント J_μ
計量の摂動 $h_{\mu\nu}$	energy stress tensor $T_{\mu\nu}$

表 2.1: AdS 時空上の場と CFT の演算子の基本的な対応

2.3.2 AdS/CFT 対応の辞書

AdS/CFT 対応は概念的なレベルではなく実際に様々な側面から両者の一致が確認されている. それを手助けする具体的な辞書として以下のように与えられる GKPW 辞書というを紹介する [30, 31].

$$Z_{\text{重力}}(\phi_{\text{bulk}}(z, x)) = \left\langle \exp \left[i \int \phi_0(x) O(x) \right] \right\rangle_{\text{CFT}} \quad (2.3.197)$$

ここで左辺の $\phi_{\text{bulk}}(z, x)$ は AdS 時空の一般の場であり, 漸近境界で $\phi_0(x)$ になるという境界条件を持つ. 重力の分配関数は計量についての経路積分を行っている. $G_N \rightarrow 0$ の古典重力極限で

$$Z_{\text{重力}} \simeq \exp[iS_{\text{重力}}] \quad (2.3.198)$$

のように近似できる. 多くのホログラフィ原理の研究はこのように古典重力極限を取って扱いやすい重力計算を行っている.

右辺は CFT の演算子 $O(x)$ に結合した source $\phi_0(x)$ を持ち, 右辺全体で CFT の生成汎関数となる. 実際に CFT の相関関数は係数を除いて

$$\langle O_1(x_1) \cdots O_n(x_n) \rangle_{\text{CFT}} \sim \frac{\delta^n}{\delta \phi_0^{(1)} \cdots \delta \phi_0^{(n)}} Z_{\text{CFT}}[\phi_0] |_{\phi_0=0} \quad (2.3.199)$$

のように得られる.

このようにして繋がる重力理論の場と CFT の演算子の対応関係は表 2.1 のようになっている. 以下ではスカラー演算子と energy stress tensor について詳しく見ていく.

スカラー演算子の共形次元

AdS 時空上のスカラー場と CFT のスカラー演算子の対応関係を見ていく [31, 32, 36]. $d+1$ 次元 AdS 時空で Poincaré 座標を用いた時のスカラー場の作用は以下のように与えられる.

$$\begin{aligned} S_{\text{scalar}} &= -\frac{1}{2} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} (g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + m^2 \phi^2) \\ &= -\frac{R_{\text{AdS}}^{d-1}}{2} \int d^d x \frac{dz}{z^{d-1}} \left((\partial_z \phi)^2 + (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{m^2 R_{\text{AdS}}^2}{z^2} \phi^2 \right) \end{aligned} \quad (2.3.200)$$

ここでスカラー場の質量は m とした. さらにこのスカラー場をフーリエ変換すると

$$\phi(t, x_i, z) = \int d\omega d^{d-1}k \phi(\omega, k_i, z) e^{-i\omega t + i k^i x_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, d-1) \quad (2.3.201)$$

となり, これを用いるとスカラー場の運動方程式は

$$\partial_z^2 \phi - \frac{d-1}{z} \partial_z \phi - \left(\frac{m^2 R_{\text{AdS}}^2}{z^2} + k^2 - \omega^2 \right) \phi = 0 \quad (2.3.202)$$

と得られる. ここで漸近境界 $z=0$ 近傍でのスカラー場の振る舞いを $\phi \propto z^\Delta$ と仮定して上式に代入すると

$$\Delta(\Delta - d) = m^2 R_{\text{AdS}}^2 \quad (2.3.203)$$

という二次方程式が得られ,

$$\Delta_\pm = \frac{d}{2} \pm \sqrt{m^2 R_{\text{AdS}}^2 + \frac{d^2}{4}} \quad (2.3.204)$$

のように二つの解を得る. したがって, $z \rightarrow 0$ でスカラー場は以下のような振る舞いになる.

$$\phi(x_\mu, z) \simeq z^{\Delta_-} (A(x) + \dots) + z^{\Delta_+} (B(x) + \dots) \quad (2.3.205)$$

ここで z^{Δ_-} に比例する項は漸近境界に近づくにつれて発散する項であり, AdS 時空の $z \rightarrow 0$ の領域が CFT では紫外領域に対応することを踏まえると, この項は CFT に外場をかけて理論自体を变形することに対応する. これを non-renormalizable な変形という. この時, $A(x)$ は

$$S_{\text{CFT}} = \int d^d x A(x) O(x) \quad (2.3.206)$$

のように CFT の作用に組み込まれ, 双対なスカラー演算子 $O(x)$ に結合した source として働く. 一方で z^{Δ_+} に比例する項は CFT の紫外領域を変えないような状態の励起に対応する. また, 辞書を用いた具体的な計算によって係数の $B(x)$ が演算子 $O(x)$ の期待値で与えられることがわかる.

$$B(x) \propto \langle O(x) \rangle \quad (2.3.207)$$

一般にバルクの z 座標は CFT における繰り込み群スケールとみなすことができ, 上の関係式から, 双対な演算子 $O(x)$ の共形次元 Δ は

$$\Delta = \Delta_+ = \frac{d}{2} + \sqrt{m^2 R_{AdS}^2 + \frac{d^2}{4}} \quad (2.3.208)$$

で与えられることがわかる. ここで共形次元が正の実数であるという条件から

$$m^2 R_{AdS}^2 \geq -\frac{d^2}{4} \quad (2.3.209)$$

が得られ, この条件が AdS 時空の安定性を保証する **BF バウンド**と一致することがわかる [37, 38].

さらに, 演算子の共形次元 Δ が CFT が住む時空の次元 d より大きいかどうかで低エネルギーでの繰り込み群フローに対して relevant か marginal か irrelevant かが決まる. (2.3.208) より, AdS 時空上のスカラー場の質量が正 ($m^2 > 0$) なら双対なスカラー演算子の共形次元は $\Delta > d$ で irrelevant であり, スカラー場の質量が 0 なら共形次元が $\Delta = d$ で marginal であり, スカラー場の質量が負 ($m^2 < 0$) のタキオン場であれば共形次元が $\Delta < d$ で relevant であることがわかる.

Holographic Stress Tensor

AdS/CFT 対応において AdS 時空の計量の摂動から対応する CFT の energy stress tensor を導くことができ, それを Holographic stress tensor という [39–41]. さらに Einstein 方程式の摂動解から Weyl anomaly も求めることができる. そこから Brown-Henneaux 関係式を導くところまで見ていく.

まずは漸近 AdS 時空の計量として以下のように Fefferman-Graham 座標を取る [42].

$$ds^2 = G_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = R_{AdS}^2 \left(\frac{d\rho^2}{4\rho^2} + \frac{1}{\rho} g_{ij}(x, \rho) dx^i dx^j \right) \quad (2.3.210)$$

$$g(x, \rho)_{ij} = g_{(0)ij} + \rho g_{(2)ij} + \rho^2 g_{(4)ij} + \cdots + h_{(d)ij} \rho^{d/2} \log \rho + \cdots$$

ここで, $\rho^{d/2} \log \rho$ に比例する項は時空の次元 $(d+1)$ が奇数の時にのみ存在する.

ここで $g_{(n)}$ の下付き添え字はその量が n 個の微分を含んでいることを表す.

この座標を用いた時の Einstein 方程式は

$$\begin{aligned} 0 &= \rho \left[2g''_{ij} - 2g'_{ik} g^{kl} g'_{lj} + (g^{kl} g'_{kl}) g'_{ij} \right] + R_{ij} - (d-2) g'_{ij} - (g^{kl} g'_{kl}) g_{ij} \\ 0 &= \nabla_i (g^{kl} g'_{kl}) - \nabla^j g'_{ij} \\ 0 &= g^{ij} g''_{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} g'_{jk} g^{kl} g'_{li} \end{aligned} \quad (2.3.211)$$

で与えられる. ここで ρ による微分を $'$ で表している. これを逐次的に解くことで $g_{(0)}, g_{(2)}, \dots, g_{(d-2)}, h_{(d)}$ を $g_{(0)}$ を用いて書き直すことができる. また, $g_{(d)}$ に関してもその共変微分とトレースは $g_{(0)}$ で表せる.

実際に Weyl tensor がゼロになるような 3 次元漸近 AdS 時空 ($d=2$) の時に $g_{(2n)}$ は以下のように与えられる.

$$g_{(2)ij} = \frac{1}{2} R_{AdS}^2 (R g_{(0)ij} + t_{ij}), \quad g_{(4)ij} = \frac{1}{4} g_{(2)ik} g_{(0)}^{kl} g_{(2)lj}, \quad g_{(2n)} = 0 \quad (n \geq 3) \quad (2.3.212)$$

この時, 対称 tensor t_{ij} は以下を満たす [43].

$$\nabla^i t_{ij} = 0, \quad \text{Tr } t = -R \quad (2.3.213)$$

さらにここから holographic stress tensor について見ていく. 重力理論の作用は

$$S = \frac{1}{16\pi G_N} \int_{\mathcal{M}} d^{d+1}x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + \frac{1}{8\pi G_N} \int_{\partial\mathcal{M}} d^d x \sqrt{-\gamma} K + \frac{1}{8\pi G_N} S_{ct}(\gamma_{\mu\nu}) \quad (2.3.214)$$

と書ける. ここで Λ は宇宙定数, γ_{ij} は ∂M 上の誘導計量, K は外的曲率である. さらに以降で見るように漸近境界において stress tensor が発散しないように counter term として S_{ct} を導入している. さらに, energy stress tensor の定義 [44]

$$T_{ij} = \frac{-2}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta S_{on-shell}}{\delta \gamma^{ij}} \quad (2.3.215)$$

を用いる. この時, 変分が γ_{ij} によるものであれば右辺のマイナスを除く必要がある. 以上の定義を用いて具体的に計算すると

$$T_{ij} = \frac{1}{8\pi G_N} \left(K_{ij} - \gamma_{ij} K - \frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta S_{ct}}{\delta \gamma^{ij}} \right) \quad (2.3.216)$$

ここで, $\delta\gamma = -\gamma\gamma_{ij}\delta\gamma^{ij}$ を用いた. 3 次元 AdS 時空の場合の counter term は

$$S_{ct} = - \int_{\partial M} \frac{\sqrt{-\gamma}}{R_{AdS}} \quad (2.3.217)$$

で与えられ, この時 energy stress tensor は

$$T_{ij} = \frac{1}{8\pi G_N} \left(K_{ij} - \gamma_{ij} K - \frac{1}{R_{AdS}} \gamma_{ij} \right) \quad (2.3.218)$$

となる. ここで (2.3.210) を用いて具体的に計算すると以下を得る.

$$T_{ij} = \frac{R_{AdS}}{8\pi G_N} \left(g_{(2)ij} - g_{(0)ij} (g_{(0)}^{kl} g_{(2)kl}) \right) \quad (2.3.219)$$

(2.3.212) と (2.3.213) を用いると

$$T_{ij} = \frac{R_{AdS}}{16\pi G_N} t_{ij} \quad (2.3.220)$$

であり, トレースを取って以下ようになる.

$$T_i^i = - \frac{R_{AdS}}{16\pi G_N} R \quad (2.3.221)$$

これから, (2.3.213) の第一式は energy stress tensor の保存則, 第二式は Weyl Anomaly に対応することがわかる. この式を CFT の convention と合わせるために, energy stress tensor の定義に 2π をかけておくと

$$\langle T_i^i \rangle = - \frac{R_{AdS}}{8G_N} R \quad (2.3.222)$$

であり, (2.2.168) と比較すると

$$c = \frac{3R_{AdS}}{2G_N} \quad (2.3.223)$$

で与えられる Brown-Henneaux 関係式を再現する [45].

さらに AdS 時空の charge について見ておく [44]. 境界 ∂M 上の任意の spacelike surface Σ を取る. Σ 上の計量を σ_{ab} として ∂M 上の計量 γ は ADM 形式を用いて

$$\gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -N_\Sigma^2 dt^2 + \sigma_{ab} (dx^a + N_\Sigma^a dt) (dx^b + N_\Sigma^b dt). \quad (2.3.224)$$

ここで N_Σ はラプスと呼ばれる. さらにその Σ に垂直な timelike な単位ベクトルとして u^i , また境界 ∂M の isometry からくる Killing vector ξ^i を用いて conserved charge (Brown-York charge) は以下のように書ける.

$$Q_\xi = \int_\Sigma d^{d-1}x \sqrt{\sigma} (u^i T_{ij} \xi^j). \quad (2.3.225)$$

ここで, energy density を

$$\epsilon = u^i u^j T_{ij}. \quad (2.3.226)$$

のように定義すると, ADM 質量は

$$\mathcal{M} = \int_{\Sigma} d^{d-1}x \sqrt{\sigma} N_{\Sigma} \epsilon \quad (2.3.227)$$

で与えられる. この時 timelike な Killing vector は $\xi^i = N_{\Sigma} u^i$ である. 同様に運動量は

$$\mathcal{P}_a = \int_{\Sigma} d^{d-1}x \sqrt{\sigma} j_a \quad (2.3.228)$$

であり, この時 momentum density j_a は

$$j_a = \sigma_{ab} u_i T^{bi} \quad (2.3.229)$$

で得られる.

例として回転する BTZ ブラックホールについて考える. 計量は以下で与えられる.

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\phi - N_{\phi} dt)^2, \quad f(r) = \frac{r^2}{R_{AdS}^2} - M + \frac{J^2}{4r^2}, \quad N_{\phi} = \frac{J}{2r^2} \quad (2.3.230)$$

この時, $r = \infty$ での誘導計量は

$$\gamma_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = -f(r) dt^2 + r^2(d\phi - N_{\phi} dt)^2, \quad (2.3.231)$$

となり, 外的曲率は

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{r}{R_{AdS}^2} f(r) & 0 \\ 0 & r f(r) \end{pmatrix}, \quad K = \frac{2r^2 - MR_{AdS}^2}{r R_{AdS}^2 f(r)} \quad (2.3.232)$$

となる. これらを (2.3.218) に代入して, $r \rightarrow \infty$ で支配的な項のみ残すと, 以下のよう Brown-York tensor が得られる.

$$\begin{aligned} T_{tt} &= \frac{M}{16\pi G_N R_{AdS}}, \\ T_{t\phi} &= \frac{-J}{16\pi G_N R_{AdS}}, \\ T_{\phi\phi} &= \frac{M R_{AdS}}{16\pi G_N}. \end{aligned} \quad (2.3.233)$$

ここで timelike な単位ベクトルとして

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{f(r)}}, \frac{N_\phi}{\sqrt{f(r)}} \right) \simeq \left(\frac{R_{AdS}}{r}, 0 \right) \quad (2.3.234)$$

を使うと, (2.3.225) で Killing vector として $\xi = \partial_t$ を取った時,

$$\mathcal{M} = \int_0^{2\pi} d\phi r \frac{1}{\sqrt{f(r)}} \frac{M}{16\pi G_N R_{AdS}} \simeq \frac{M}{8G_N} \quad (2.3.235)$$

と得られる. さらに, (2.3.225) で Killing vector として $\xi = \partial_\phi$ を取った時

$$\mathcal{J} = \int_0^{2\pi} d\phi r \frac{1}{\sqrt{f(r)}} \frac{J}{16\pi G_N R_{AdS}} = \frac{-J}{8G_N} \quad (2.3.236)$$

となる.

2.3.3 AdS/CFT 対応におけるブラックホール

節 2.1.4 で見たように AdS 時空は真空解としてブラックホール解を持ち, それらの熱力学的解釈も通常の Schwarzschild ブラックホールと同様に可能である. 以下ではこのブラックホール幾何に対応する境界理論の状態について見ていく [46]. 上述の通り, ブラックホールの熱力学的性質に合わせて境界理論における対応する状態も有限温度の場の理論で解析できると考えるのは自然である. さらにここで注目したいのは AdS ブラックホールの Penrose ダイアグラムは等価な漸近境界が二つ存在することである. ここから推察されるように, 双対な状態は二つの共形場理論の積で与えられる Hilbert 空間で考えられ, 逆温度 β を用いて次のような純粋状態で書ける.

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n e^{-\frac{\beta E_n}{2}} |n\rangle_1 \otimes |n\rangle_2, \quad Z(\beta) = \sum_n e^{-\beta E_n} \quad (2.3.237)$$

このような状態は Thermo Field Double(TFD) 状態と呼ばれる. 実際にここで片方の CFT をトレースアウトして得られる密度行列はカノニカル分布で与えられる混合状態に対応する. このような状態は節 3.2 で見るような Euclidean 経路積分を用いて構成され, 解析接続によって Lorentzian のブラックホールの幾何に繋がる. しばしば図 2.11 のように図示される.

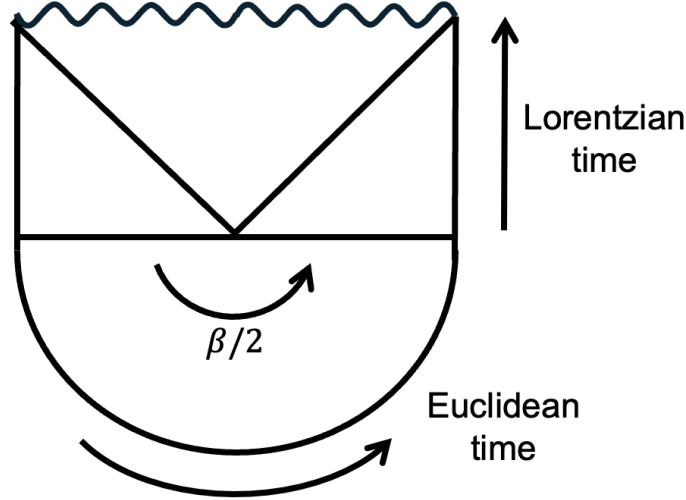


図 2.11: TFD 状態の Euclidean 経路積分による構成

2.3.4 *AdS/CFT* 対応における $T\bar{T}$ deformation

節 2.2.8 に繰り込み群フローの irrelevant な変形として $T\bar{T}$ deformation を導入し, IR 固定点の CFT から UV 方向に QFT を構成していくことができることを見た. ここではそのようにして変形された CFT の重力理論における対応物として提唱されたカットオフ *AdS* 時空を見ていく [47, 48]. irrelevant な変形なので重力理論においても $z \rightarrow \infty$ の IR 領域ではなく $z \simeq 0$ の UV 領域を変形している.

まずは, (2.3.210) で有限の $\rho = \text{const.}$ を考えた時に得られる誘導計量 g_{ij} を考える. (2.3.212) より,

$$g_{ij} = g_{(0)ij} + \frac{\rho}{2} \hat{t}_{ij} + \frac{\rho^2}{16} \hat{t}_{ik} \hat{t}_{lj} g_{(0)}^{kl} \quad (2.3.238)$$

ここで, $\hat{t}_{ij} = t_{ij} - g_{(0)ij} t$ と定義した. これは (2.2.184) と完全に形が一致しており, $T\bar{T}$ deformation のパラメータ t と *AdS* 時空の UV カットオフ ρ が同一視できる. また, (2.3.218) の関係式を考えると, 同様に計量の展開 (2.3.210) において ρ の subleading の項から (2.2.184) と同じ形の holographic stress tensor を得ることができる. このようにして $T\bar{T}$ deform された QFT に対する双対な幾何はカッ

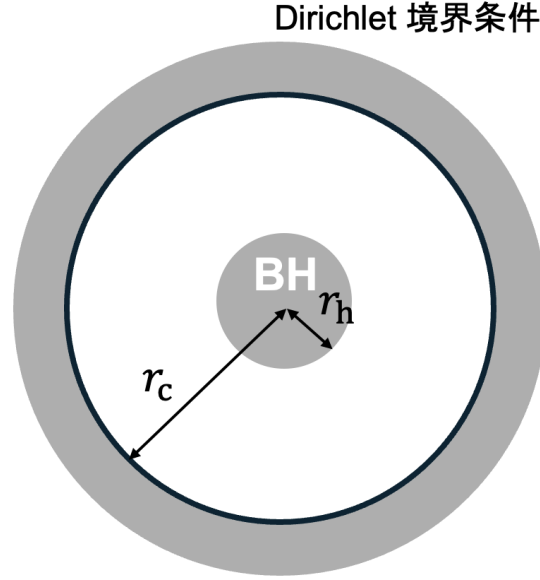


図 2.12: $T\bar{T}$ deformation に双対なカットオフ $r = r_c$ を導入した BTZ ブラックホール

トオフ AdS 時空であると結論づけられる.

次に, 具体的な計量を用いて energy spectrum を求め, CFT の結果と比較しよう. ここでは簡単のために Euclidean BTZ ブラックホールからの deformation を考える (図 2.12 参照). この時, 計量は

$$ds^2 = f(r) d\tau^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 (d\phi - iN_\phi d\tau)^2, \quad f(r) = \frac{r^2}{R_{AdS}^2} - M + \frac{J^2}{4r^2}, \quad N_\phi = \frac{J}{2r^2} \quad (2.3.239)$$

で表される. ここで動径座標 $r = r_c$ でカットオフを導入し, そこに Dirichlet 境界条件を課している.

$r = r_c$ における timelike Killing vector に対する Brown-York charge (2.3.225) を考えれば良い. (2.3.235) で行った計算において $r = \infty$ であったところを有限の $r = r_c$ で置き換えて, さらに timelike な単位ベクトルとして

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{f(r)}}, \frac{iN_\phi}{\sqrt{f(r)}} \right) \quad (2.3.240)$$

を採用して計算し直すと以下の spectrum を得る.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} &= \frac{r_c}{4G_N} \left(\frac{1}{R_{AdS}} - \frac{\sqrt{f(r_c)}}{r_c} \right) \\
 &= \frac{r_c}{4G_N R_{AdS}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{MR_{AdS}^2}{r_c^2} + \frac{J^2 R_{AdS}^2}{4r_c^4}} \right) \\
 &= \frac{2r_c}{tR_{AdS}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{tMR_{AdS}^2}{r_c^2} + \frac{t^2 \mathcal{J}^2 R_{AdS}^2}{4r_c^4}} \right)
 \end{aligned} \tag{2.3.241}$$

最後の行では (2.3.235) と (2.3.236) を用いて変形し, $T\bar{T}$ deformation のパラメータは $t = 8G_N$ という別の様々な解析から得られる辞書を用いた. この式を (2.2.177) と比較すると, 非常に似た形で書けていることがわかる.

2.3.5 ホログラフィック c 定理

以下では AdS/CFT 対応における重力の計算を用いて CFT における c 定理を示していく [49–52]. ここでは 3 次元の重力作用にスカラー場が結合した以下のような作用を考える.

$$S = \frac{1}{16G_N} \int d^3x \sqrt{-g} (R - g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi)) \tag{2.3.242}$$

この作用に対する計量の解として

$$ds^2 = e^{2A(r)} (-dt^2 + dx^2) + dr^2 \tag{2.3.243}$$

という ansatz を置く. ここで, Poincaré 座標 (2.1.19) を

$$z = R_{AdS} \exp \left[-\frac{r}{R_{AdS}} \right] \tag{2.3.244}$$

のように座標変換すると

$$ds^2 = e^{\frac{2r}{R_{AdS}}} (-dt^2 + dx^2) + dr^2 \tag{2.3.245}$$

が得られるので, exact な AdS 時空では

$$A(r) = \frac{r}{R_{AdS}} \tag{2.3.246}$$

となることがわかる.

ここで

$$c(r) = \frac{3}{2G_N A'(r)} \quad (2.3.247)$$

のようにして関数を導入すると, UV の CFT に対応する AdS 時空において

$$c(r \rightarrow \infty) = \frac{3R_{AdS}^{(UV)}}{2G_N} = c_{UV} \quad (2.3.248)$$

となり, 同様に IR の CFT に対応する AdS 時空において

$$c(r \rightarrow -\infty) = \frac{3R_{AdS}^{(IR)}}{2G_N} = c_{IR} \quad (2.3.249)$$

となることが確認できる. ここで, AdS/CFT 対応において CFT 側で格子サイズに対応する UV カットオフが重力側で $z = \epsilon$ に対応することから, UV 理論に対応する CFT は $z \simeq 0 (r \rightarrow \infty)$ で, IR 理論に対応する CFT は $z \rightarrow \infty (r \rightarrow -\infty)$ で表されることを用いた. さらに

$$\frac{dc(r)}{dr} = -\frac{3}{2A'(r)^2} A''(r) = -\frac{3}{2A'(r)^2} (T_t^t - T_r^r) \geq 0 \quad (2.3.250)$$

が成り立つ. ここで二つ目の等号には Einstein 方程式を, 三つ目の等号には null energy condition を用いた. これらから

$$c_{UV} \geq c_{IR} \quad (2.3.251)$$

が成り立ち, holographic に c 定理が示された.

2.3.6 AdS_3/CFT_2 対応における Bañados map

3 次元の AdS 時空は重力の自由度を持たないため, 全ての座標が局所的に pure AdS に持っていくことができる. このような任意の座標から pure AdS への座標変換はホログラフィー原理の観点から考えると 2 次元 CFT の共形変換をバルク側に拡張することで構成することができる. Poincaré 座標を用いてこのような座標変換を実現するものを Bañados map という [53, 54]. 以下ではこの Bañados map を紹介する.

Poincaré 座標 (η, X, T) を考え, $U = T - X$, $V = T + X$ として座標変換すると計量は

$$ds^2 = R_{AdS}^2 \frac{d\eta^2 - dT^2 + dX^2}{\eta^2} = R_{AdS}^2 \frac{d\eta^2 - dUdV}{\eta^2} \quad (2.3.252)$$

となる. 2 次元 CFT の共形変換は任意の正則関数を用いて

$$\tilde{u} = p(u), \quad \tilde{v} = q(v) \quad (2.3.253)$$

と表すことができ, これに双対なバルク側の座標変換は, 変換後の座標を (z, x, t) で $u = t - x, v = t + x$ とおくと

$$\begin{aligned} U &= p(u) + \frac{2z^2(p')^2 q''}{4p'q' - z^2 p''q''} \\ V &= q(v) + \frac{2z^2(q')^2 p''}{4p'q' - z^2 p''q''} \\ \eta &= \frac{4z(p'q')^{3/2}}{4p'q' - z^2 p''q''}, \end{aligned} \quad (2.3.254)$$

と書ける. さらに, 座標変換によって計量は以下のように変化する.

$$\begin{aligned} ds^2 &= R_{AdS}^2 \left[\frac{dz^2}{z^2} + T_+(u)(du)^2 + T_-(v)(dv)^2 - \left(\frac{1}{z^2} + z^2 T_+(u)T_-(v) \right) dudv \right] \\ &= R_{AdS}^2 \left[\frac{dz^2 - dt^2 + dx^2}{z^2} + (T_+ + T_- - z^2 T_+ T_-) dt^2 \right. \\ &\quad \left. + (T_+ + T_- + z^2 T_+ T_-) dx^2 - 2(T_+ - T_-) dt dx \right]. \end{aligned} \quad (2.3.255)$$

ここで T_+, T_- は以下のように与えられる.

$$T_+(u) = \frac{3(p'')^2 - 2p'p'''}{4p'^2}, \quad T_-(v) = \frac{3(q'')^2 - 2q'q'''}{4q'^2}. \quad (2.3.256)$$

ここで, $T_{\pm}$ と表記されるものは, flat な時空で $\langle T \rangle = 0$ であったところから共形変換 (2.2.146) によって CFT の energy stress tensor がノンゼロの値を持つことにより現れるものである. 節 2.3.2 で計量の flat からの摂動の leading order が holographic stress tensor として読み取られたことを考えると, ここではその逆の操作を行なっていると分かる.

このような変換は 2 次元 CFT の対称性, もしくは 3 次元 AdS 時空の isometry の変換に対応しており, この変換で CFT のエンタングルメントエントロピー (もしくは AdS 時空の測地線長) などの量は保存する.

Euclidean AdS における Bañados map も確認しておく [55]. Euclidean Poincaré 座標 (η, X, Y) と座標変換後の座標 (z, x, y) に対して, $\xi = X + iY$, $\bar{\xi} = X - iY$, $w = x + iy$, $\bar{w} = x - iy$ という座標変換を考える. 変換前の計量は

$$ds^2 = R_{AdS}^2 \frac{d\eta^2 + dX^2 + dY^2}{\eta^2} = R_{AdS}^2 \frac{d\eta^2 + d\xi d\bar{\xi}}{\eta^2}. \quad (2.3.257)$$

となる. 2 次元 Euclidean CFT の共形変換は任意の正則関数を用いて

$$\xi = f(w), \quad \bar{\xi} = \bar{f}(\bar{w}). \quad (2.3.258)$$

と表すことができ, これに双対なバルク側の座標変換は,

$$\begin{aligned} \xi &= f(w) - \frac{2z^2(f')^2(\bar{f}'')}{4|f'|^2 + z^2|f''|^2}, \\ \bar{\xi} &= \bar{f}(\bar{w}) - \frac{2z^2(\bar{f}')^2(f'')}{4|f'|^2 + z^2|f''|^2}, \\ \eta &= \frac{4z(f'\bar{f}')^{3/2}}{4|f'|^2 + z^2|f''|^2} \end{aligned} \quad (2.3.259)$$

と書ける. さらに, 座標変換によって計量は以下のように変化する.

$$ds^2 = R_{AdS}^2 \left[\frac{dz^2}{z^2} + T(w)(dw)^2 + \bar{T}(\bar{w})(d\bar{w})^2 + \left(\frac{1}{z^2} + z^2 T(w)\bar{T}(\bar{w}) \right) dw d\bar{w} \right] \quad (2.3.260)$$

ここで $T(w)$, $\bar{T}(\bar{w})$ は以下のように与えられる.

$$T(w) = \frac{3(f'')^2 - 2f'f'''}{4f'^2}, \quad \bar{T}(\bar{w}) = \frac{3(\bar{f}'')^2 - 2\bar{f}'\bar{f}'''}{4\bar{f}'^2}. \quad (2.3.261)$$

第3章

AdS/CFT 対応と量子情報理論

本章では量子情報理論の基礎を整理した後に、共形場理論と重力理論の両方で、エンタングルメントエントロピーを始めとするいくつかの重要な量子相関の指標を見ていく。最後に多体量子相関についても言及する。

3.1 量子情報理論

量子情報理論は、情報という抽象的概念を量子力学の枠組みに取り込み、操作論的な視点で記述しなおした理論である。これは単に物理法則を新たな視点で捉え直すだけでなく、計算や通信、暗号といった様々な実学としても発展を遂げている [56, 57]。もともとは古典的な情報理論として Shannon らによって確立された分野であったが、Bell の不等式の破れが確認されたことによって、量子力学特有の重ね合わせなどの性質の下でさらに大きな広がりを見せることがわかり、今でも熱心に研究されている。

本節では量子情報理論の一般的な構成から、情報量に対する定量化を見ていく。さらには量子論特有の量子エンタングルメントの概念と、さらにそれを定量化するエンタングルメントエントロピーとその応用について紹介する。

3.1.1 一般的な量子状態の記述

量子状態を古典的な確率混合によって混ぜ合わせることで得られる**混合状態**を以下のような密度行列 (density matrix) ρ で表す.

$$\rho = \sum_{i=1}^n p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (3.1.1)$$

ここで, 考える混合状態は純粋状態 $\{|\psi_i\rangle\}$ を確率 p_i で混合したものである. この時, 物理量 $A = \sum_a a P_a$ による測定において $A = a$ を得るような確率は

$$\text{Prob}(A = a) = \text{Tr}[P_a \rho] = \sum_i p_i \langle \psi_i | P_a | \psi_i \rangle \quad (3.1.2)$$

で与えられる. このようにして任意の物理量の測定に対する確率を与えるので, 密度行列は全物理的情報が含まれていることがわかる. 操作論的に構成される量子情報理論においては, 「全ての物理量に対して同じ確率分布を与える状態」を同一な状態とみなしており, 密度行列はこの状態表記に対する縮退が解けていることを強調しておく.

さらに物理的な密度行列は以下のような性質を満たす必要がある.

$$(i) \rho \geq 0, \quad (ii) \text{Tr} \rho = 1 \quad (3.1.3)$$

(i) の条件は密度行列の半正定値性であり, 任意のベクトル $|\psi\rangle$ に対して $\langle \psi | \rho | \psi \rangle \geq 0$ が成立することを表している. この時, 密度行列 ρ は固有値が非負のエルミート行列になる. これは混合に用いた確率 p_i がそれぞれ正であることに対応する.

(ii) の条件は

$$\text{Tr} \rho = \text{Tr} \left[\sum_{i=1}^n p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right] = \sum_{i=1}^n p_i \langle \psi_i | \psi_i \rangle = \sum_i p_i = 1 \quad (3.1.4)$$

のようにして確率の和が 1 になることを保証している.

純粋状態

このような一般的な量子状態の記述において純粋状態は

$$\rho = |\psi\rangle \langle \psi| \quad (3.1.5)$$

で表される. この時,

$$\mathrm{Tr}[\rho^2] = 1 \quad (3.1.6)$$

が成り立つ. 一般の混合状態に対しては

$$\frac{1}{d} \leq \mathrm{Tr}[\rho^2] \leq 1 \quad (3.1.7)$$

という不等式が成り立つ. ここで d は Hilbert 空間の次元である. 不等式の下端を与えるような量子状態は $\rho = \frac{1}{d}\mathbb{I}$ で与えられ, 完全混合状態と呼ばれる. このようにして状態がどれだけ純粋状態に近いかを $\mathrm{Tr}[\rho^2]$ を用いて評価することができ, この量を**純粋度 (purity)** という.

縮約状態と純粋化

量子系 A,B とその Hilbert 空間として $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ を考える. この時, 全体の密度行列に対して以下のように部分トレースを取ることで, 量子系 A に制限された縮約密度行列を得ることができる.

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B[\rho_{AB}] \quad (3.1.8)$$

このようにして部分系の縮約状態を定義できる.

ここで混合状態で与えられる量子系 A に対して, 適切な補助系 B を持ってくることで全体として純粋状態を作ることができることを確認する. ρ_A が以下のように固有値分解される時,

$$\rho_A = \sum_i p_i |a_i\rangle \langle a_i| \quad (3.1.9)$$

Hilbert 空間 $\mathcal{H}_B$ の適当な正規直交基底 $\{|b_i\rangle\}$ を持ってきた時に

$$|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |a_i\rangle \otimes |b_i\rangle \quad (3.1.10)$$

とすると $\rho_{AB} = |\psi\rangle \langle \psi|$ は量子系 AB 上の純粋状態となる. ここで

$$\mathrm{Tr}_B \rho_{AB} = \sum_{i,j} \sqrt{p_i} \sqrt{p_j} (\mathrm{Tr}_B |b_i\rangle \langle b_j|) |a_i\rangle \langle a_j| = \sum_i p_i |a_i\rangle \langle a_i| = \rho_A \quad (3.1.11)$$

として縮約密度行列が得られることも確認できる. このようにして混合状態 ρ_A から補助系を用いて純粋状態 ρ_{AB} を構成することを**純粋化 (purification)** という.

上記の構成方法から明らかなように純粋化の方法は一意ではない. 特に補助系としてコピーされた量子系 A^* を持ってきて

$$|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |a_i\rangle \otimes |a_i\rangle \quad (3.1.12)$$

のように純粋状態を構成することを正準純粋化 (canonical purification) と呼ぶ. (2.3.237) で見たような TFD 状態はまさにこの純粋化によって得られる純粋状態である.

3.1.2 量子系における情報量

量子論における情報の概念を適切に扱うために, 様々な情報量を導入する. 以下で見えていく情報量は基本的に古典情報理論で既に確立されていたものを適切に量子論に拡張することで得られる.

von Neumann エントロピー

von Neumann エントロピー $S(\rho)$ は以下のように定義される.

$$S(\rho) \equiv -\text{Tr } \rho \log \rho \quad (3.1.13)$$

ここで ρ を固有値分解して $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ とすると

$$S(\rho) = -\sum_i p_i \log p_i \quad (3.1.14)$$

となり, 古典情報理論の Shannon エントロピーと一致する.

例として, qubit 系を用いて以下のように確率 $\{p, 1-p\}$ ($0 < p < 1$) で状態 $|0\rangle, |1\rangle$ を混合した密度行列を考える.

$$\rho_p = p |0\rangle \langle 0| + (1-p) |1\rangle \langle 1| \quad (3.1.15)$$

この時, von Neumann エントロピーは

$$S(\rho_p) = -p \log p - (1-p) \log(1-p) \quad (3.1.16)$$

となる. このように取りうる状態が二通りの時には二値エントロピーと呼ばれる. これを図示すると図 3.1 のようになる. ここでピークは $p = 1/2$ の最大混合状態

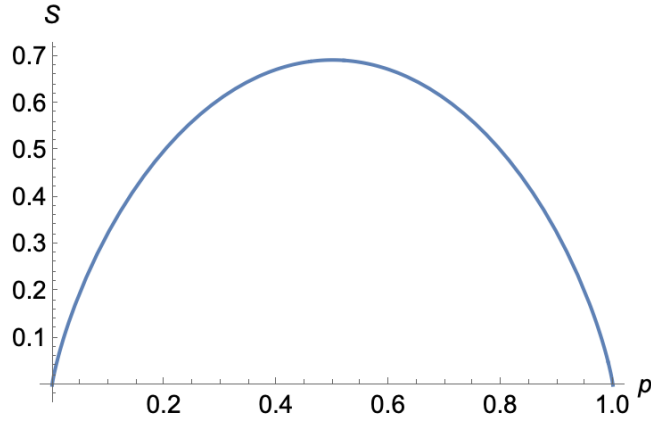


図 3.1: 二値エントロピー $S(\rho_p)$. 対数の底は 2 としている.

の時であることがわかる. ここから分かるように von Neumann エントロピーは量子状態の不確かさを表している.

以下では von Neumann エントロピーの性質を挙げておく.

- (i) 非負性: $S(\rho) \geq 0$ (等号成立は ρ が純粋状態の時)
- (ii) 上限: $S(\rho) \leq \log \dim \mathcal{H}$ (等号成立は $\rho = \frac{1}{\dim \mathcal{H}} \mathbb{I}$ のように最大混合状態の時)
- (iii) ρ_{AB} が純粋状態ならば, 縮約密度行列 ρ_A, ρ_B に対して $S(\rho_A) = S(\rho_B)$
- (iv) 加法性 (additivity): $S(\rho_A \otimes \rho_B) = S(\rho_A) + S(\rho_B)$
- (v) ユニタリ不変性: ユニタリ演算子 U に対して $S(U\rho U^\dagger) = S(\rho)$
- (vi) 凹性 (concavity): 任意の密度行列 ρ_1, ρ_2 と $0 \leq t \leq 1$ に対して

$$S(t\rho_1 + (1-t)\rho_2) \geq tS(\rho_1) + (1-t)S(\rho_2) \quad (3.1.17)$$

- (vii) 劣加法性 (subadditivity): 合成系 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ 上の密度行列 ρ_{AB} に対して

$$S(\rho_A) + S(\rho_B) \geq S(\rho_{AB}) \quad (3.1.18)$$

(等号成立は $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$ の時)

(viii) 強劣加法性 (strong subadditivity): 合成系 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C$ 上の密度行列 ρ_{ABC} に対して

$$S(\rho_{AB}) + S(\rho_{BC}) \geq S(\rho_{ABC}) + S(\rho_B) \quad (3.1.19)$$

相対エントロピー (relative entropy)

相対エントロピー $D(\rho||\sigma)$ は以下のように定義される.

$$D(\rho||\sigma) \equiv \text{Tr} \rho (\log \rho - \log \sigma) \quad (3.1.20)$$

ここで相対エントロピーとは二つの量子状態 ρ, σ がどれだけ隔たっているかを表す量である. 実際に量子仮説検定の理論を通してこれらの状態の区別のしやすさであると意味づけられることが知られている.

以下では相対エントロピーの性質を挙げておく.

(i) 単調性 (monotonicity) 任意の量子操作 (量子通信路) Λ に対して

$$D(\rho||\sigma) \geq D(\Lambda(\rho)||\Lambda(\sigma)) \quad (3.1.21)$$

(等号成立は逆向きの量子操作 Γ が存在して $\Gamma(\Lambda(\rho)) = \rho, \Gamma(\Lambda(\sigma)) = \sigma$ となる時)

(ii) 非負性: $D(\rho||\sigma) \geq 0$ (等号成立は $\rho = \sigma$ の時)

(iii) 加法性 (additivity): $D(\rho_A \otimes \rho_B || \sigma_A \otimes \sigma_B) = D(\rho_A || \sigma_A) + D(\rho_B || \sigma_B)$

(iv) ユニタリ不変性: ユニタリ演算子 U に対して $D(U\rho U^\dagger || U\sigma U^\dagger) = D(\rho||\sigma)$

(v) 結合凸性 (joint convexity): 任意の密度行列 $\rho_1, \rho_2, \sigma_1, \sigma_2$ と $0 \leq t \leq 1$ に対して

$$t D(\rho_1 || \sigma_1) + (1-t) D(\rho_2 || \sigma_2) \geq D(t\rho_1 + (1-t)\rho_2 || t\sigma_1 + (1-t)\sigma_2) \quad (3.1.22)$$

相互情報量 (mutual information)

相互情報量 $I(A : B)$ は以下のように定義される.

$$I(A : B) \equiv D(\rho_{AB} || \rho_A \otimes \rho_B) \quad (3.1.23)$$

これは相対エントロピーを用いて定義されていることから明らかに, 合成系の密度行列 ρ_{AB} が, 量子系 A,B が独立である時の積状態 $\rho_A \otimes \rho_B$ からどれだけ隔たっているかを表す.

また, 相互情報量は von Neumann エントロピーを用いて以下のように書き直すことができる.

$$\begin{aligned}
 I(A : B) &= \text{Tr } \rho_{AB} (\log \rho_{AB} - \log(\rho_A \otimes \rho_B)) \\
 &= \text{Tr } \rho_{AB} \log \rho_{AB} - \text{Tr } \rho_{AB} \log(\rho_A \otimes \mathbb{I}_B) - \text{Tr } \rho_{AB} \log(\mathbb{I}_A \otimes \rho_B) \\
 &= \text{Tr } \rho_{AB} \log \rho_{AB} - \text{Tr } \rho_A \log \rho_A - \text{Tr } \rho_B \log \rho_B \\
 &= S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB})
 \end{aligned} \tag{3.1.24}$$

ここで 2 行目に移る際には

$$\log(\rho_A \otimes \rho_B) = \log(\rho_A \otimes \mathbb{I}_B) + \log(\mathbb{I}_A \otimes \rho_B) \tag{3.1.25}$$

という関係式を用いた.

相対エントロピーの非負性, もしくは von Neumann エントロピーの劣加法性から明らかに相互情報量は非負の量である. その時の等号成立条件は $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$ の時である.

さらに条件付き相互情報量 $I(A : C|B)$ を以下のように定義しておく.

$$I(A : C | B) = S(AB) + S(BC) - S(ABC) - S(B) = I(A : BC) - I(A : B) \tag{3.1.26}$$

これは後に三体量子状態 ρ_{ABC} が quantum Markov chain かどうかを判定するのに用いられる.

トレース距離

トレース距離 $d(\rho, \sigma)$ は以下のように定義される.

$$d(\rho, \sigma) \equiv \frac{1}{2} \|\rho - \sigma\|_1 \equiv \frac{1}{2} \text{Tr} |\rho - \sigma| = \frac{1}{2} \text{Tr} \sqrt{(\rho - \sigma)^\dagger (\rho - \sigma)} \tag{3.1.27}$$

この量は相対エントロピーとまた違った形で二つの量子状態の距離を測る量であり, 実際にこれらの状態を区別するタスクの成功率に関係していることが知られている. また, 距離であるための性質として非負性, $(\rho \leftrightarrow \sigma)$ に対する対称性, 三角

不等式を満たしている.

ここで実は量子状態の差を取らずとも, 一般の行列に対してトレースノルムとして同様に $\|A\|_1$ が定義される. これはノルムであるための性質として, 定義から明らかに非負性と斉次性を満たしている. また, エルミート行列 A を $A = \sum_i a_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ として固有値分解すると,

$$\|A\|_1 = \text{Tr} \left(\sum_i |a_i| |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right) = \sum_i |a_i| \quad (3.1.28)$$

となる.

以下ではトレース距離の性質を挙げておく.

(i) 非負性: $d(\rho, \sigma) \geq 0$ (等号成立は $\rho = \sigma$ の時)

(ii) 対称性: $d(\rho, \sigma)_1 = d(\sigma, \rho)_1$

(iii) 単調性 (monotonicity): 任意の量子操作 (量子通信路) Λ に対して

$$d(\rho, \sigma)_1 \geq d(\Lambda(\rho), \Lambda(\sigma)) \quad (3.1.29)$$

(iv) 結合凸性 (joint convexity): 任意の密度行列 $\rho_1, \rho_2, \sigma_1, \sigma_2$ と $0 \leq t \leq 1$ に対して

$$t d(\rho_1, \sigma_1) + (1-t) d(\rho_2, \sigma_2) \geq d(t\rho_1 + (1-t)\rho_2, t\sigma_1 + (1-t)\sigma_2) \quad (3.1.30)$$

忠実度 (Fidelity)

忠実度 $F(\rho, \sigma)$ は以下のように定義される.

$$F(\rho, \sigma) \equiv \text{Tr} |\sqrt{\rho} \sqrt{\sigma}| = \text{Tr} \sqrt{(\sqrt{\rho} \sqrt{\sigma})(\sqrt{\rho} \sqrt{\sigma})^\dagger} \quad (3.1.31)$$

定義より明らかに $(\rho \leftrightarrow \sigma)$ に対する対称性を持つ.

特に $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$ かつ $\sigma = |\phi\rangle \langle \phi|$ の時に

$$F(\rho, \sigma) = |\langle \psi | \phi \rangle| \quad (3.1.32)$$

のように内積の絶対値で与えられる. さらにこの時, $\rho = \sigma$ で最大値 $F(\rho, \sigma) = 1$ を取り, $|\psi\rangle \perp |\phi\rangle$ で最小値 $F(\rho, \sigma) = 0$ を取ることがわかる. ここから推察され

るように, 一般に忠実度は ρ と σ の純粋化の内積である. これを正しく記述した, **Uhlmann の定理**を紹介しておく.

Uhlmann の定理

Hilbert 空間 $\mathcal{H}_A$ 上の密度行列 ρ, σ を考えた時に, 補助系として Hilbert 空間 $\mathcal{H}_R$ を用いて純粋化を行う. ここで忠実度 $F(\rho, \sigma)$ は ρ の純粋化 $|\psi\rangle$ と σ の純粋化 $|\phi\rangle$ を様々に動かした時の最大値である.

$$F(\rho, \sigma) = \max_{|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_R} |\langle \psi | \phi \rangle| \quad (3.1.33)$$

最後に, 以下に忠実度の性質を挙げておく.

- (i) 非負性: $F(\rho, \sigma) \geq 0$
- (ii) 上限: $F(\rho, \sigma) \leq 1$ (等号成立は $\rho = \sigma$)
- (iii) 対称性: $F(\rho, \sigma) = F(\sigma, \rho)$
- (iv) $\sigma = |\phi\rangle\langle\phi|$ に対して $F(\rho, \sigma) = \sqrt{\langle\phi|\rho|\phi\rangle}$
- (v) 単調性 (monotonicity): 任意の量子操作 (量子通信路) Λ に対して

$$F(\rho, \sigma) \leq F(\Lambda(\rho), \Lambda(\sigma)) \quad (3.1.34)$$

- (vi) ユニタリ不変性: ユニタリ演算子 U に対して $F(U\rho U^\dagger, U\sigma U^\dagger) = F(\rho, \sigma)$
- (vii) 強凹性 (joint concavity): 確率分布 $\{p_i\}, \{q_i\}$ と密度行列 $\{\rho_i\}, \{\sigma_i\}$ に対して

$$F\left(\sum_i p_i \rho_i, \sum_i q_i \sigma_i\right) \geq \sum_i \sqrt{p_i q_i} F(\rho_i, \sigma_i) \quad (3.1.35)$$

- (viii) 結合凹性 (joint concavity): 任意の密度行列 $\rho_1, \rho_2, \sigma_1, \sigma_2$ と $0 \leq t \leq 1$ に対して

$$t F(\rho_1, \sigma_1) + (1-t) F(\rho_2, \sigma_2) \leq F(t\rho_1 + (1-t)\rho_2, t\sigma_1 + (1-t)\sigma_2) \quad (3.1.36)$$

- (ix) トレース距離 $\|\rho - \sigma\|_1$ と忠実度 $F(\rho, \sigma)$ について一般に以下が成り立つ.

$$1 - F(\rho, \sigma) \leq \frac{1}{2} \|\rho - \sigma\|_1 \leq \sqrt{1 - F(\rho, \sigma)^2} \quad (3.1.37)$$

特に, ρ と σ が純粋状態の時

$$\frac{1}{2} \|\rho - \sigma\|_1 = \sqrt{1 - F(\rho, \sigma)^2} \quad (3.1.38)$$

が成り立つ.

3.1.3 量子情報理論におけるエンタングルメントエントロピー

1935 年に Einstein, Podolsky と Rosen が「実在性」と「局所性」を仮定した時に量子力学は不完全であると主張し, これが EPR パラドックスとして人々の注目を集めた [58]. さらに 1964 年に Bell が「実在性」と「局所性」に加えて「自由意志の存在 (測定独立性)」を仮定して満たされるべき Bell の不等式を提唱し, それは CHSH 不等式という形でより扱いやすい形で書かれた [6, 7]. さらにそれらの不等式が量子力学において破られることは既に実験で確かめられている [8]. このように量子力学には古典論では想定されない特別な相関が存在し, それを**量子エンタングルメント (量子相関, 量子もつれ)**という. 量子系特有のこの相関は多くの注目を集め, 量子情報理論と共に大きく発展している. その発展は留まるところを知らず, 凝縮系分野や素粒子論分野など幅広い物理に大きく応用されている.

二体の純粋状態に対してこの量子エンタングルメントを定量化するものとして**エンタングルメントエントロピー**が用いられている. 量子情報理論においては von Neumann エントロピーとして考えられていたこの量は, 凝縮系では量子相転移の秩序パラメータなど, 素粒子論分野ではホログラフィ原理を調べるための最も重要な量として広く用いられている.

本節ではこの量子エンタングルメントやエンタングルメントエントロピーの定義と性質を整理する.

エンタングル状態

一般に, 部分系 A, B の二つの複合量子系に対しての純粋状態 $|\psi\rangle$ を考える. この時, $|\psi\rangle$ は A と B の適当な局所ユニタリ変換 ($U \otimes V$) を用いて

$$(U \otimes V) |\psi\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} \sqrt{p_i} |i\rangle_A |i\rangle_B \quad (3.1.39)$$

のように書ける. このような分解を **Schmidt 分解**という. さらに, この時の係数 $p_0, p_1, \dots, p_{d-1}$ のことを Schmidt 係数という. ここで $d = \min\{\dim \mathcal{H}_A, \dim \mathcal{H}_B\}$

である. ただ一つの係数だけがノンゼロである時,

$$|\psi\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle \quad (3.1.40)$$

のように書け, このように A の状態と B の状態の積で書ける状態のことを**積状態 (product state)**という. この状態は多体量子相関に移る時に separable state として拡張される. このようにどのような局所ユニタリ変換を用いても積状態で表せないような状態のことを**エンタングル状態**と言う.

特に, 全ての Schmidt 係数が等しく, $p_i = \frac{1}{d}$ の時状態は

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=0}^{d-1} |i\rangle_A |i\rangle_B \quad (3.1.41)$$

となり, これを最大エンタングル状態という.

例として最も簡単な 2 準位系 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ のエンタングル状態として最も基本的な **Bell 状態** (もしくは **EPR 状態**) を見ていく.

$$\begin{aligned} |\phi^\pm\rangle_{AB} &= \frac{|0\rangle_A |0\rangle_B \pm |1\rangle_A |1\rangle_B}{\sqrt{2}}, \\ |\psi^\pm\rangle_{AB} &= \frac{|0\rangle_A |1\rangle_B \pm |1\rangle_A |0\rangle_B}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (3.1.42)$$

これらは 2 準位系の最大エンタングル状態であり, 2 準位量子系の正規直交基底にもなっているので Bell 基底とも呼ばれる. これらは以下のようなユニタリ変換で結びついている.

$$\begin{aligned} |\phi^+\rangle_{AB} &= (I \otimes I) |\phi^+\rangle_{AB}, \\ |\psi^+\rangle_{AB} &= (\sigma_x \otimes I) |\phi^+\rangle_{AB}, \\ |\psi^-\rangle_{AB} &= (i\sigma_y \otimes I) |\phi^+\rangle_{AB}, \\ |\phi^-\rangle_{AB} &= (\sigma_z \otimes I) |\phi^+\rangle_{AB}. \end{aligned} \quad (3.1.43)$$

ここで $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ はパウリ行列である.

このような状態に対しては A の測定結果と B の測定結果が必ず同じ (もしくは必ず逆) になることが確認できる. この相関は A, B 両者が共に $|0\rangle$ もしくは共に $|1\rangle$ であるような状態を確率 1/2 で混合した状態

$$\sigma = \frac{|0\rangle_A |0\rangle_B \langle 0|_A \langle 0|_B}{2} + \frac{|1\rangle_A |1\rangle_B \langle 1|_A \langle 1|_B}{2} \quad (3.1.44)$$

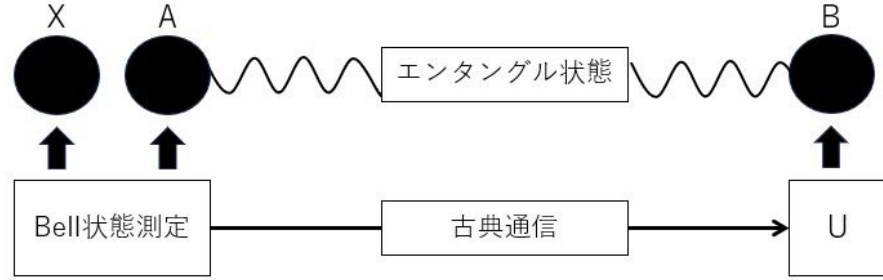


図 3.2: 量子テレポーテーション

にも現れるが, 実は本質的に異なるものである.

$$\begin{cases} |\theta\rangle = \cos\theta |0\rangle + \sin\theta |1\rangle, \\ |\theta_\perp\rangle = -\sin\theta |0\rangle + \cos\theta |1\rangle, \end{cases} \quad (3.1.45)$$

という基底の回転に対して

$$|\psi\rangle = \frac{|\theta\rangle_A |\theta\rangle_B + |\theta_\perp\rangle_A |\theta_\perp\rangle_B}{\sqrt{2}} \quad (3.1.46)$$

と変換され, 相関が残っていることがわかる. このように基底の取り方に関係なく示す強い相関は量子相関と呼ばれる. 一方で (3.1.44) は変換によって相関が失われる. このような相関は古典相関と呼ばれる.

量子テレポーテーション

ここで量子相関の強みを確認するために, 量子エンタングルメントを用いた量子状態の転送手法である量子テレポーテーションを見ていく.

送信者と受信者が以下のエンタングル状態を保持しているとする.

$$|\phi^+\rangle_{AB} = \frac{|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B}{\sqrt{2}} \quad (3.1.47)$$

送信者が持っている量子ビット X の状態

$$|\psi\rangle_X = a |0\rangle_X + b |1\rangle_X \quad (3.1.48)$$

を受信者に転送することを考える (図 3.2). A, B, X の量子ビット全体の状態を Bell

測定結果	B の状態	再構成操作	ユニタリ変換
$ \phi^+\rangle_{XA}$	$a 0\rangle_B + b 1\rangle_B$	何もしない	I
$ \phi^-\rangle_{XA}$	$a 0\rangle_B - b 1\rangle_B$	位相反転	σ_z
$ \psi^+\rangle_{XA}$	$a 1\rangle_B + b 0\rangle_B$	ビット反転	σ_x
$ \psi^-\rangle_{XA}$	$a 1\rangle_B - b 0\rangle_B$	位相・ビット反転	$\sigma_z\sigma_x = i\sigma_y$

表 3.1: 量子テレポーテーションの再構成操作

基底を用いて書き換えると

$$\begin{aligned}
& (a|0\rangle_X + b|1\rangle_X) \otimes \frac{|0\rangle_A|0\rangle_B + |1\rangle_A|1\rangle_B}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{|0\rangle_X|0\rangle_A + |1\rangle_X|1\rangle_A}{\sqrt{2}} \otimes (a|0\rangle_B + b|1\rangle_B) \right. \\
&\quad + \frac{|0\rangle_X|0\rangle_A - |1\rangle_X|1\rangle_A}{\sqrt{2}} \otimes (a|0\rangle_B - b|1\rangle_B) \\
&\quad + \frac{|0\rangle_X|1\rangle_A + |1\rangle_X|0\rangle_A}{\sqrt{2}} \otimes (a|1\rangle_B + b|0\rangle_B) \\
&\quad \left. + \frac{|0\rangle_X|1\rangle_A - |1\rangle_X|0\rangle_A}{\sqrt{2}} \otimes (a|1\rangle_B - b|0\rangle_B) \right] \tag{3.1.49} \\
&= \frac{1}{2} \left[|\phi^+\rangle_{XA} \otimes (a|0\rangle_B + b|1\rangle_B) + |\phi^-\rangle_{XA} \otimes (a|0\rangle_B - b|1\rangle_B) \right. \\
&\quad \left. + |\psi^+\rangle_{XA} \otimes (a|1\rangle_B + b|0\rangle_B) + |\psi^-\rangle_{XA} \otimes (a|1\rangle_B - b|0\rangle_B) \right].
\end{aligned}$$

となる. そこで送信者が X,A に対して四つの Bell 基底の中でどの状態にあるのかを決める測定 (Bell 状態測定) を行う. すると (3.1.49) に従って B の量子状態が定まる. 送信者が測定結果を古典通信で受信者に伝え, 受信者が B に対して適切なユニタリ変換 (表 3.1) を施せば, 元々 X が持っていた量子状態 $|\psi\rangle$ を B に再構成できる. 本来, 古典通信のみで量子状態を送るためには無限回の測定によって状態 $|\psi\rangle_X$ を特定する必要があるので, 到底不可能である. しかしここではエンタングル状態を利用することで転送を実現している. このように局所操作と古典通信だけでは不可能であったことが, 量子エンタングルメントを利用することで可能になる.

量子情報理論におけるエンタングルメントエントロピー

合成系 A, B の Hilbert 空間 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ を考える. 全系の密度行列から部分系 B をトレースアウトして得られる縮約密度行列 ρ_A に対し, その von Neumann エントロピー (3.1.13) を用いて部分系 A のエンタングルメントエントロピーは以下のように定義される.

$$S_A \equiv -\text{Tr} \rho_A \log \rho_A \quad (3.1.50)$$

この量は量子系 A, B の間の量子エンタングルメントを定量化するものであり, 直感的には部分系 B を隠した時に A にいる観測者が失う情報の量として解釈される. ここで定義から明らかに, この量では合成系が純粋状態であるような二体の量子エンタングルメントしか測れないことを注意しておく. 後に節 3.5.4 でこれを多体系に拡張した multi-entropy という量を紹介する.

3.2 場の理論におけるエンタングルメントエントロピー

まずは場の理論におけるエンタングルメントエントロピーの計算方法として最も有名なレプリカ法を紹介する.

一般に場の理論における密度行列 ρ_A は無限次元行列であり, トレースを取るために対角化する操作は非常に困難である. したがってエンタングルメントエントロピーを定義に従って直接計算するのではなく, 以下のように極限を用いた形に書き直すことを考える.

$$\begin{aligned} S_A &\equiv -\text{Tr} \rho_A \log \rho_A \\ &= -\lim_{n \rightarrow 1} \partial_n \log \text{Tr}[\rho_A^n] \\ &= \lim_{n \rightarrow 1} \frac{1}{1-n} \log \text{Tr}[\rho_A^n] \end{aligned} \quad (3.2.51)$$

2 行目は

$$\lim_{n \rightarrow 1} \partial_n \log \text{Tr}[\rho_A^n] = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{\text{Tr} \rho_A^n \log \rho_A}{\text{Tr}[\rho_A^n]} = \text{Tr} \rho_A \log \rho_A \quad (3.2.52)$$

から, 3 行目は

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{\log \text{Tr}[\rho_A] - \log \text{Tr}[\rho_A^n]}{1-n} = -\lim_{n \rightarrow 1} \partial_n \log \text{Tr}[\rho_A^n] \quad (3.2.53)$$

からそれぞれ得られる. 密度行列 ρ_A は $\text{Tr}\rho_A = 1$ で正しく規格化されているとする.

ここで新たに以下で与えられる Rényi entropy

$$S_n = \frac{1}{1-n} \log \text{Tr}[\rho_A^n] \quad (3.2.54)$$

を導入すると, エンタングルメントエントロピーは

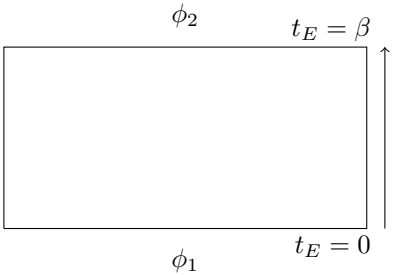
$$S_A = \lim_{n \rightarrow 1} S_n \quad (3.2.55)$$

で与えられる.

以下ではこの Rényi entropy を求めてから極限を取ることでエンタングルメントエントロピーを導く.

Euclidean 経路積分を用いた状態表示

Euclidean 経路積分を用いると状態 $|\phi_1\rangle$ から $|\phi_2\rangle$ へ Euclid 時間 β で時間発展させた時の遷移振幅は

$$\langle \phi_2 | e^{-\beta H} | \phi_1 \rangle = \int_{\phi(t_E=0)=\phi_1}^{\phi(t_E=\beta)=\phi_2} \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]} =$$


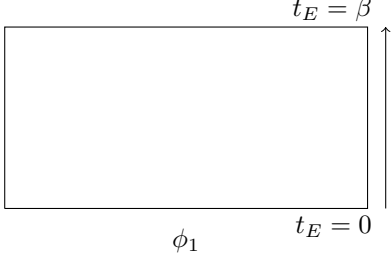
$$(3.2.56)$$

で与えられる. このように経路積分を $R^{d-1} \times \text{interval}$ (interval の長さは β) の strip として図示する. これは ϕ_1, ϕ_2 の境界条件に持った上で, 図示された多様体上で全ての ϕ の配位を足し上げるような経路積分を意味する.

さらに Schrödinger 描像で Euclid 時間発展した状態を記述すると

$$|\Psi\rangle = e^{-\beta H} |\phi_1\rangle \quad (3.2.57)$$

となり, 図示すると

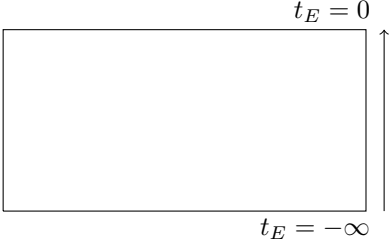
$$|\Psi\rangle = \int_{\phi(t_E=0)=\phi_1}^{\phi(t_E=\beta)=?} \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]} = \quad (3.2.58)$$


である. さらに波動関数は

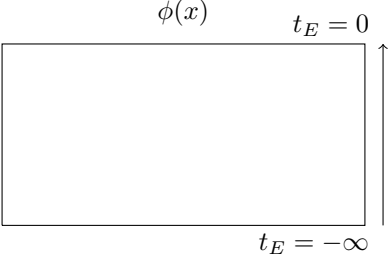
$$\Psi[\phi_2] \equiv \langle \phi_2 | \Psi \rangle. \quad (3.2.59)$$

と書ける.

この時, 任意の初期状態 $|\phi_1\rangle$ を Euclid 時間 $t_E = -\infty$ から時間発展させるとエネルギー固有状態で展開した時に基底状態以外が suppress されることを用いると, 基底状態は

$$|0\rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]} = \quad (3.2.60)$$


となる. $t = 0$ での Hilbert 空間は場の配位 $\phi(x)$ の関数空間で張られるので, 波動関数は

$$\Psi[\phi(x)] = \int_{\phi(t_E=-\infty)}^{\phi(t_E=\beta)=\phi(x)} \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]} = \quad (3.2.61)$$


のように書ける. さらに全体系の密度行列は

$$[\rho_{total}]_{\phi_- \phi_+} = \Psi[\phi_-] \Psi^*[\phi_+] = \int_{\phi(t_E=0_-)=\phi_-}^{\phi(t_E=0_+)=\phi_+} \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline t_E = \infty \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline \phi_+ \quad t_E = 0 \\ \hline \phi_- \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline t_E = -\infty \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \uparrow \end{array} \quad (3.2.62)$$

であり, 部分系 A の密度行列はそこから $t_E = 0$ の A^c の領域について経路積分を行うことで, 以下のように与えられる.

$$[\rho_A]_{\phi_- \phi_+} = \int_{\phi(t_E=0_-, x \in A)=\phi_-}^{\phi(t_E=0_+, x \in A)=\phi_+} \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline t_E = \infty \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline \frac{A}{\phi_-} \quad \phi_+ \quad t_E = 0 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline t_E = -\infty \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \uparrow \end{array} \quad (3.2.63)$$

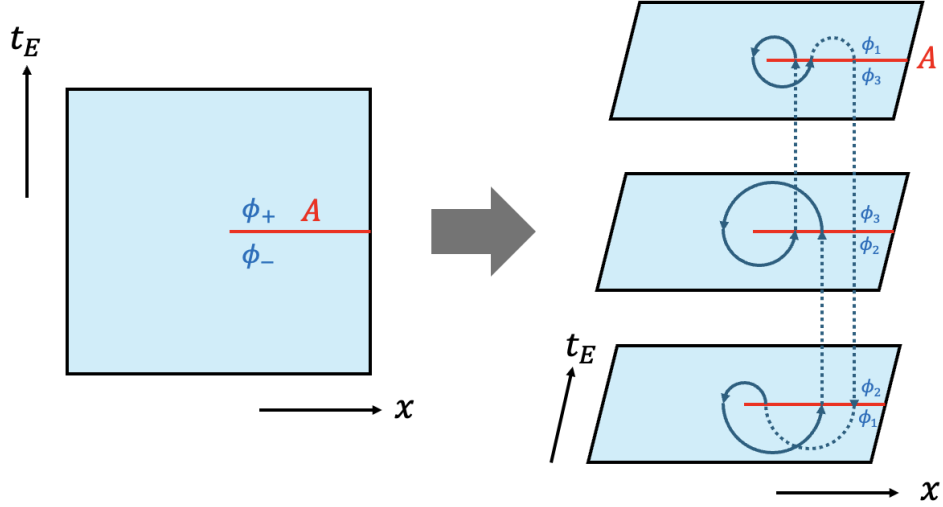


図 3.3: 一つの密度行列の経路積分表示 (左図). $n = 3$ におけるレプリカ法を用いた経路積分 (右図)

レプリカ法

Euclidean 経路積分によって表される密度行列を用いてレプリカ法を行う. $\text{Tr}[\rho_A^n]$ は以下のように書ける.

$$\text{Tr}[\rho_A^n] = \int \prod_{i=1}^n \mathcal{D}\phi_i [\rho_A]_{\phi_1 \phi_2} [\rho_A]_{\phi_2 \phi_3} \cdots [\rho_A]_{\phi_n \phi_1} \quad (3.2.64)$$

これまで見てきた時空の多様体を n 枚用意し, それらの $t_E = 0_-, 0_+$ での境界条件を繋ぎ合わせて全ての場について経路積分を行うことで得られる (図 3.3 参照).

また, レプリカ法を用いた議論も導入しておく. n 枚の時空の多様体を境界条件によって繋ぎ合わせて考える代わりに, 1 枚の多様体 ($\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$) 上に n 個のレプリカ場 $\phi^{(0)}, \phi^{(1)}, \dots, \phi^{(n-1)}$ を考え, 以下の境界条件を与えることで等価な記述を得る.

$$\begin{aligned} \phi^{(m)}(e^{2\pi i}(w-u)) &= \phi^{(m+1)}(w-u) \\ \phi^{(m)}(e^{2\pi i}(w-v)) &= \phi^{(m-1)}(w-v) \end{aligned} \quad (3.2.65)$$

ここで複素座標は $w = x + it_E$ として表し, u と v はそれぞれ部分系 A の端点を表す. この境界条件によって部分系 A を 1 周すると次のレプリカ場に入れ替わる

ことになり, 先ほど登場したレプリカ多様体を用いた記述に対応していることがわかる.

3.2.1 例 1: 自由場の 2 次元 CFT

自由場として massless のフェルミオン場 $(\psi, \bar{\psi})$ を考える [59]. 部分系 A を

$$t = \text{const.}, \quad x_1 \leq x \leq x_2 \quad (3.2.66)$$

のように取り, 時間方向を Euclid 化して 2 次元複素平面 $(w, \bar{w})$ を考えると部分系は以下になる.

$$\text{Im } w = \text{const.}, \quad \text{Re } u = x_1 \leq \text{Re } w \leq \text{Re } v = x_2 \quad (3.2.67)$$

ここで, n 個のレプリカ場 (フェルミオン場) $\psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \dots, \psi^{(n-1)}$ を考えて (3.2.65) の境界条件を課す. このレプリカ場にフーリエ変換

$$\tilde{\psi}(m) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\pi i \frac{mk}{n}} \psi^{(k)} \quad (3.2.68)$$

を行うと, 境界条件は以下のように対角化される.

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^{(m)}(e^{2\pi i}(w-u)) &= e^{2\pi i \frac{m}{n}} \tilde{\psi}^{(m)}(w-u) \\ \tilde{\psi}^{(m)}(e^{2\pi i}(w-v)) &= e^{-2\pi i \frac{m}{n}} \tilde{\psi}^{(m)}(w-v) \end{aligned} \quad (3.2.69)$$

このような境界条件は, $\phi \simeq e^{\frac{2\pi i}{n}} \phi$ で同一視を入れた $\mathbb{Z}_n$ オービフォールド理論においてツイスト演算子 $\sigma_m, \bar{\sigma}_m (= \sigma_{n-m})$ を部分系 A の端点 $z = u, v$ に挿入することで実現できる (図 3.4). ここで n 枚の replica sheet から構成される多様体 (Riemann 面) に張られた座標を $(w, \bar{w})$ とした時に, オービフォールド理論が住む多様体は通常の複素平面 $\mathbb{C}$ であり, $(z, \bar{z})$ で座標を張ることにする.

ここでフェルミオン場が部分系 A を囲むように一周したときに不要な位相を獲得しないというモノドロミー条件から, ツイスト演算子 σ_n に対してもう一方の端点には $\bar{\sigma}_n$ を入れる必要がある. この概念は後に multi-entropy を見るときに拡張される.

実際に 2 次元 CFT においてフェルミオン場を

$$\psi(z) = e^{i\varphi(z)}, \quad \bar{\psi}(\bar{z}) = e^{-i\varphi(\bar{z})}, \quad (3.2.70)$$

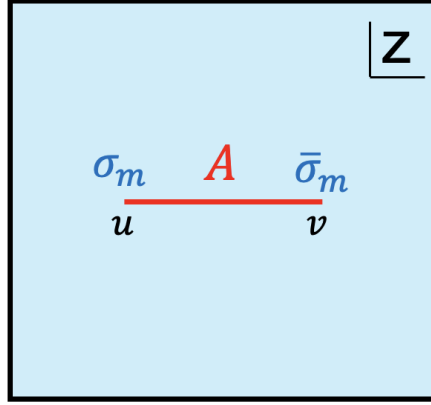


図 3.4: ツイスト演算子の挿入

のようにボゾナイズすることができ, この時ツイスト演算子を

$$\sigma_m(z, \bar{z}) = \begin{cases} e^{i\frac{m}{n}(\varphi(z) - \varphi(\bar{z}))} & (\frac{n}{2} \geq m) \\ e^{i\frac{m-n}{n}(\varphi(z) - \varphi(\bar{z}))} & (\frac{n}{2} < m) \end{cases} \quad (3.2.71)$$

のように定義する. スカラー場同士の OPE (2.2.151) を思い出すとフェルミオン場 ψ とツイスト演算子 σ の OPE は

$$\psi(z)\sigma(0) \propto z^{\frac{m}{n}}, \quad \bar{\psi}(\bar{z})\sigma(0) \propto \bar{z}^{-\frac{m}{n}} \quad (3.2.72)$$

となり, $\psi(z)$ が $\sigma(0)$ の周りを一周すると位相が $e^{2\pi i \frac{m}{n}}$ だけズレることがわかる. これは (3.2.69) の境界条件を再現する.

レプリカ法における $\text{Tr}[\rho_A^n]$ に対応した経路積分は, 以上のようなツイスト演算子の二点関数で表すことができ,

$$\text{Tr}[\rho_A^n] = \prod_{m=0}^{n-1} \langle \sigma_m(u) \bar{\sigma}_m(v) \rangle \propto \prod_{m=0}^{n-1} \frac{1}{(v-u)^{2(h_m + \bar{h}_m)}} \quad (3.2.73)$$

で与えられる. ここで $(h_m, \bar{h}_m)$ はツイスト演算子 $\sigma_m, \bar{\sigma}_m (= \sigma_{n-m})$ の共形ウェイトであり, (3.2.71) から以下のように与えられる.

$$h_m = \bar{h}_m = \begin{cases} \frac{m^2}{2n^2} & (\frac{n}{2} \geq m) \\ \frac{(n-m)^2}{2n^2} & (\frac{n}{2} < m) \end{cases} \quad (3.2.74)$$

これらを用いると

$$\mathrm{Tr}[\rho_A^n] \propto (v-u)^{-\frac{c}{6}(n-\frac{1}{n})} \quad (3.2.75)$$

のように計算できる. ここで c は中心電荷であり, 自由ディラックフェルミオン場の場合 $c = 1$ である. (3.2.51) のようにエンタングルメントエントロピーを計算すると以下のように求まる.

$$S_A = \frac{c}{3} \log \left[\frac{(x_2 - x_1)}{\epsilon} \right] \quad (3.2.76)$$

ここで, 十分小さい領域 $x_2 - x_1 = \epsilon$ で $S_A = 0$ になることと次元解析から, UV カットオフ ϵ を適切に挿入した.

Ward identity を用いた再導出

これまで見てきたように $\mathrm{Tr}[\rho_A^n]$ は n 枚の sheet を適切な境界条件のもとで貼り合わせた上で, Euclidean 経路積分を用いて計算することができる. さらにこの n 枚の replica 多様体を, 1 枚の複素平面上にツイスト演算子が挿入されているものとして経路積分することでレプリカ演算子の二点関数として $\mathrm{Tr}[\rho_A^n]$ が得られる. つまり, Rényi entropy は以下のように書くことができる.

$$S_n = \frac{1}{1-n} \log \mathrm{Tr}[\rho_A^n] = \frac{1}{1-n} \log \langle \sigma_n(u) \bar{\sigma}_n(v) \rangle \quad (3.2.77)$$

ここでは適切なツイスト演算子の共形次元を Ward identity から計算し, ツイスト演算子の二点関数を用いてエンタングルメントエントロピーの対数発散を導く [60].

部分系 A の端点を $w = u, v$ と取り, n 枚の replica sheet から構成される多様体 Σ_n を考える. この時, Σ_n 上での energy stress tensor の期待値はツイスト演算子が挿入された複素平面 $\mathbb{C}$ 上の期待値を用いて

$$\langle T(w) \rangle_{\Sigma_n} \equiv \frac{\int [d\phi] T(w) e^{-S_E(\Sigma_n)}}{\int [d\phi] e^{-S_E(\Sigma_n)}} = \frac{\langle T(w) \sigma_n(u) \bar{\sigma}_n(v) \rangle_{\mathbb{C}}}{\langle \sigma_n(u) \bar{\sigma}_n(v) \rangle_{\mathbb{C}}} \quad (3.2.78)$$

のように書ける.

ここでツイスト演算子の共形次元をそれぞれ $\Delta_n, \bar{\Delta}_n$ とおくと, 共形対称性より適切に規格化された二点関数は

$$\langle \sigma_n(u) \bar{\sigma}_n(v) \rangle = \frac{1}{|v-u|^{2\Delta_n+2\bar{\Delta}_n}} \quad (3.2.79)$$

となる. さらにツイスト演算子が挿入された複素平面 $\mathbb{C}$ 上で conformal Ward identity (2.2.140) は以下のように計算できる.

$$\begin{aligned} & \langle T(w) \sigma_n(u) \bar{\sigma}_n(v) \rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \left(\frac{\Delta_n}{(w-u)^2} + \frac{\Delta_n}{(w-v)^2} + \frac{1}{w-u} \partial_u + \frac{1}{w-v} \partial_v \right) \langle \sigma_n(u) \bar{\sigma}_n(v) \rangle_{\mathbb{C}} \quad (3.2.80) \\ &= \frac{\Delta_n}{(w-u)^2 (w-v)^2 (v-u)^{2\Delta_n-2} (\bar{v}-\bar{u})^{2\bar{\Delta}_n}} \end{aligned}$$

一方で, 共形変換

$$z = \left(\frac{w-u}{w-v} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (3.2.81)$$

を施すことで 1 枚の sheet は一枚の複素平面上の一部にマップされる. これは先ほどのツイスト演算子を挿入した複素平面とは全く別であることに注意する. この時, マップされた後の複素平面が平坦であることから $\langle T(z) \rangle_{\mathbb{C}} = 0$ であることを考慮して, energy stress tensor の変換性 (2.2.146) を用いると

$$\langle T(w) \rangle_{\Sigma_1} = \frac{c}{12} \{z; w\} = \frac{c \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{24} \frac{(v-u)^2}{(w-u)^2 (w-v)^2} \quad (3.2.82)$$

と書ける. ここで, n 枚の replica sheet Σ_n の上には n 個の CFT のコピーが住んでいることを考えると

$$\langle T(w) \rangle_{\Sigma_n} = n \langle T(w) \rangle_{\Sigma_1} = \frac{c \left(n - \frac{1}{n}\right)}{24} \frac{(v-u)^2}{(w-u)^2 (w-v)^2} \quad (3.2.83)$$

となる. よって, (3.2.80) と (3.2.83) を用いて (3.2.78) に代入すると, 共形次元が

$$\Delta_n = \bar{\Delta}_n = \frac{c}{24} \left(n - \frac{1}{n} \right) \quad (3.2.84)$$

とわかる. したがって, 次元解析から適切に UV カットオフ ϵ を挿入すると

$$\text{Tr}[\rho_A^n] = \langle \sigma_n(u) \bar{\sigma}_n(v) \rangle \propto (v-u)^{-\frac{c}{6} \left(n - \frac{1}{n}\right)} \quad (3.2.85)$$

とでき, これは (3.2.75) と一致しているので, エンタングルメントエントロピーは (3.2.76) を再現する.

Weyl anomaly を用いた再導出

節 2.2.7 で見たように偶数次元の曲がった時空における共形場理論では量子化に伴って Weyl anomaly が生じ, (2.2.168) のように energy stress tensor のトレース

スを中心電荷に比例するようなノンゼロの値を持つ. これがエンタングルメントエントロピーの対数発散を導くことを見ていこう.

前節と同様に n 枚の replica sheet からなる多様体を Σ_n とする. この時部分系 A の長さスケールを $l(=|v-u|)$ とすると,

$$\begin{aligned} l \frac{d}{dl} \log \text{Tr} \rho_A^n &= 2 \int d^2x g_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} [\log Z_{\Sigma_n} - n \log Z_{\Sigma_1}] \\ &= \left\langle \int d^2x \sqrt{g} T^\mu{}_\mu \right\rangle_{\Sigma_n} - n \left\langle \int d^2x \sqrt{g} T^\mu{}_\mu \right\rangle_{\Sigma_1}. \end{aligned} \quad (3.2.86)$$

ここで一つ目の等号では, 計量が長さスケールの二乗に比例していることを用いて

$$l \frac{\partial}{\partial l} g_{\mu\nu}(x; l) = 2 g_{\mu\nu}(x; l) \quad (3.2.87)$$

として合成関数の微分を行なった. また, energy stress tensor に対しての以下の定義を用いている

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial S}{\partial g_{\mu\nu}} \quad (3.2.88)$$

この時, (3.2.86) の第二項は平坦時空なのでゼロになることを考慮すると, エンタングルメントエントロピーは

$$\begin{aligned} l \frac{dS_A}{dl} &= -\lim_{n \rightarrow 1} l \frac{d}{dl} \left(\frac{\partial}{\partial n} \log \text{Tr} \rho_A^n \right) \\ &= -\lim_{n \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial n} \left\langle \int d^2x \sqrt{g} T^\mu{}_\mu \right\rangle_{\Sigma_n} \end{aligned} \quad (3.2.89)$$

と表せる. ここで Weyl anomaly の式 (2.2.168) を用いると

$$l \frac{dS_A}{dl} = -\lim_{n \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{c}{24\pi} \int_{\Sigma_n} d^2x \sqrt{g} R \right) = \frac{c}{3} \quad (3.2.90)$$

を得る. 積分すると

$$S_A = \frac{c}{3} \log \frac{l}{\epsilon} \quad (3.2.91)$$

となる. ここで前節と同様に $l \rightarrow 0$ の時に発散ないように積分定数として UV カットオフ ϵ を入れた. この結果は (3.2.76) と一致する. このようにしてエンタングルメントエントロピーの対数発散は Weyl anomaly からくる.

ここで (3.2.90) を導くときにオイラー数 $\chi(\Sigma_n)$ が

$$\chi(\Sigma_n) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_n} \sqrt{g} R = 2(1-n) \quad (3.2.92)$$

であることを用いた. これは 2 次元多様体上にある conical defect として, 損失角 $2\pi(1-n)$ を $x=0$ に持つような多様体はスカラー曲率が

$$R = 4\pi(1-n)\delta^2(x) \quad (3.2.93)$$

のようになることを用いて, レプリカ多様体では $x = u, v$ にこのような deficit angle が存在するので (3.2.92) のように得られることがわかる.

さらに (3.2.93) は

$$ds^2 = \frac{r^2 + n^2\xi^2}{r^2 + \xi^2} dr^2 + r^2 d\theta^2, \quad (\theta \sim \theta + 2\pi n) \quad (3.2.94)$$

のような計量を考えると求めることができる. これは $r \gg \xi$ で通常の 2 次元平面に一致し, $r \ll \xi$ で deficit angle $2\pi(1-n)$ を持つ多様体に一致するような計量である. この計量を用いた以下の計算

$$\int \sqrt{g} R = 4\pi(1-n) \quad (3.2.95)$$

は ξ に依存せずに成り立つ.

Liouville 作用を用いた再導出

2 次元量子重力理論の分配関数に対して現れる Weyl 変換に対する anomaly が Liouville 作用を用いて書かれることが知られている [61]. 具体的には $g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = e^\phi g_{\mu\nu}$ のような Weyl 変換で分配関数は

$$Z = e^{S^{(L)}} Z' \quad (3.2.96)$$

のように anomaly を獲得する. ここで現れた Liouville 作用は

$$S^{(L)} = \frac{c}{96\pi} \int d^2z \sqrt{g} [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + 2R\phi + 2\mu e^\phi] \quad (3.2.97)$$

で与えられる. $\text{Tr}[\rho_A^n]$ が経路積分による分配関数の計算で得られることを用いて Liouville 作用からエンタングルメントエントロピーの対数発散を導こう [62, 63]. ここで座標 $(w, \bar{w})$ で張られる n 枚の replica sheet Σ_n から座標 $(z, \bar{z})$ で張られる 1 枚の複素平面への変換として (3.2.81) を考える. この時,

$$ds^2 = dw d\bar{w} = \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 dz d\bar{z} \quad (3.2.98)$$

より,

$$e^\phi = \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 = \frac{n^2 |v-u|^2 |z|^{2(n-1)}}{|z^n - 1|^4} \quad (3.2.99)$$

この変換を用いて分配関数は以下のように書き直せる.

$$\frac{Z_{\Sigma_n}}{Z_{\Sigma_1}^n} = \frac{e^{S_n^{(L)}} Z_C}{e^{nS_1^{(L)}} Z_C^n} \quad (3.2.100)$$

ここで Z_C からの寄与はカットオフにのみ依存する自明な項なので無視することにして, Liouville 作用を評価していく. (3.2.99) を (3.2.97) に代入すると,

$$S_n^{(L)} = \frac{c}{24\pi} \int dz^2 \left(\frac{|(1-n) - (1+n)z^n|^2}{|z^n - 1|^2 |z|^2} + \mu \frac{n^2 |v-u|^2 |z|^{2(n-1)}}{|z^n - 1|^4} \right) \quad (3.2.101)$$

ここで変換後の計量は平坦なのでスカラー曲率の項はゼロである. これらの寄与として複素平面において被積分関数が発散する点 $z = 0, \infty$ に対して以下のようにカットオフを入れる.

$$\begin{cases} z = 0, w = u: & |z| > \left| \frac{\epsilon}{v-u} \right|^{1/n}, \\ z = \infty, w = v: & |z| < \left| \frac{v-u}{\epsilon} \right|^{1/n}. \end{cases} \quad (3.2.102)$$

これらを用いて $z \rightarrow 0$ で積分を評価すると

$$S_n^L \simeq \frac{c}{24\pi} \int_{z \simeq 0} d^2 z \frac{(1-n)^2}{|z|^2} \simeq \frac{c}{12} \frac{(1-n)^2}{n} \log \left| \frac{v-u}{\epsilon} \right| \quad (3.2.103)$$

となり, さらに $z \rightarrow \infty$ で積分を評価すると

$$S_n^L \simeq \frac{c}{24\pi} \int_{z \rightarrow \infty} d^2 z \frac{(1+n)^2}{|z|^2} \simeq \frac{c}{12} \frac{(1+n)^2}{n} \log \left| \frac{v-u}{\epsilon} \right| \quad (3.2.104)$$

と計算できる. 以上より,

$$\begin{aligned} \text{Tr}_A[\rho_A^n] &\propto e^{S_n^L - nS_1^L} \\ &= \left| \frac{v-u}{\epsilon} \right|^{\frac{c}{12} \frac{(1-n)^2}{n} + \frac{c}{12} \frac{(1+n)^2}{n} - n \cdot \frac{c}{12} \cdot 4} \\ &= \left| \frac{v-u}{\epsilon} \right|^{-\frac{c}{6} \left(n - \frac{1}{n} \right)} \end{aligned} \quad (3.2.105)$$

よって, (3.2.51) を用いると (3.2.76) と同じエンタングルメントエントロピーを得る.

Monodromy Method を用いた再導出

共形場理論で場の四点関数を求めるときには共形変換を用いて三つの演算子の座標を $0, 1, \infty$ に固定することができる. 残りの演算子の座標を z とすると, 四点関数は

$$\langle O_1(0)O_2(z)O_3(1)O_4(\infty) \rangle = \sum_p a_p \mathcal{F}(c, h_p, h_i, z) \mathcal{F}(c, \bar{h}_p, \bar{h}_i, \bar{z}) \quad (3.2.106)$$

のように分解することができる. ここで右辺は間で交換されるプライマリー演算子で和をとっている. a_p は CFT の OPE 係数から決まる定数である. さらに $\mathcal{F}(c, h_p, h_i, z)$ は共形ブロックといい, CFT が含む演算子によって決まる data である. この共形ブロックはあるプライマリー場に対して決まり, その descendants の寄与は全て含んでいる. h_i は各挿入した演算子 O_i の共形ウェイト, h_p はプライマリー場の共形ウェイトである.

演算子 O_2 が O_1 に近づくような極限として, $z \rightarrow 0$ の時を考える. このような四点関数の展開の仕方を s-channel といい, この時の a_p は

$$a_p = C_{12p} C_{34p} \quad (3.2.107)$$

で与えられる. 図示すると図 3.5 の左図のようになる.

次に演算子 O_2 が O_3 に近づくような極限として, $z \rightarrow 1$ の時を考える. このような四点関数の展開の仕方を t-channel といい, この時の a_p は

$$a_p = C_{14p} C_{23p} \quad (3.2.108)$$

で与えられる. 図示すると図 3.5 の右図のようになる.

このような四点関数の解析を, ツイスト演算子の四点関数に応用することで二つに分かれた部分系に対するエンタングルメントエントロピーを与える. 特に s-channel を考えるときは二つの部分系のエンタングルメントエントロピーは完全に分離され, 部分系が一つの時の (3.2.76) を再現する. さらに非自明なエンタングルメントエントロピーの寄与が t-channel から与えられることを確認し, これらが相転移として捉えられることを議論する. ここで一般に共形ブロック $\mathcal{F}(c, h_p, h_i, z)$ の計算は容易ではないが, ここでは十分大きな中心電荷 c を仮定してホログラフィック CFT における計算を進めていく [64–66].

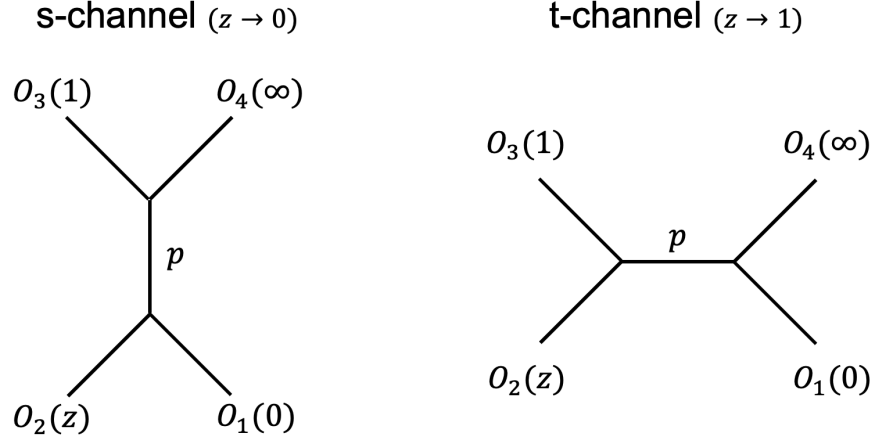


図 3.5: s-channel(左図) と t-channel(右図)

large c の CFT において共形ブロックが以下のように振る舞うことが知られている [67, 68].

$$\mathcal{F}(c, h_p, h_i, z) \simeq \exp \left[-\frac{c}{6} f \left(\frac{h_p}{c}, \frac{h_i}{c}, z \right) \right] \quad (3.2.109)$$

ここで $f \left(\frac{h_p}{c}, \frac{h_i}{c}, z \right)$ もまた未知関数ではあるが, 以下のように monodromy method で決定される.

まずは一般の共形ウェイト h_i を持つ四点演算子で議論する. まず以下のような微分方程式を考える.

$$\psi''(w) + T(w)\psi(w) = 0 \quad (3.2.110)$$

ここで, $T(z)$ は

$$T(w) = \sum_i \left(\frac{6h_i/c}{(w - z_i)^2} - \frac{c_i}{w - z_i} \right) \quad (3.2.111)$$

で与えられる. この時, 各座標は $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (0, z, 1, \infty)$ で与えられる. $c_i(z_i)$ は monodromy 条件から決まる関数であり, アクセサリーパラメータと呼ばれる. さらに, $T(z)$ が $z \rightarrow \infty$ において $1/z^4$ で抑制されるように要請すると

$$\sum_i c_i = 0, \quad \sum_i \left(c_i z_i - \frac{6h_i}{c} \right) = 0, \quad \sum_i \left(c_i z_i^2 - \frac{12h_i}{c} z_i \right) = 0 \quad (3.2.112)$$

のように係数が制限され, 結果的に

$$\frac{c}{6}T(w) = \frac{h_1}{w^2} + \frac{h_2}{(w-z)^2} + \frac{h_3}{(1-w)^2} + \frac{h_1+h_2+h_3-h_4}{w(1-w)} - \frac{c}{6} \frac{c_2 z(1-z)}{w(w-z)(1-w)} \quad (3.2.113)$$

を得る.(3.2.110) の微分方程式の二つの解を $\psi_{1,2}$ とするとそれらがある特異点周りを回ったときに獲得する monodromy は

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \longrightarrow M \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (3.2.114)$$

のように表され, ここで M は 2×2 の monodromy 行列である. この行列は微分方程式によって決まり, その微分方程式は $T(w)$ の関数形によって決まる. ここで, $c_2(z)$ はこの monodromy 行列が以下のように振る舞うことを要請することで決まる.

$$\text{Tr } M_{0z} = -2 \cos \pi \Lambda_p, \quad h_p = \frac{c}{24} (1 - \Lambda_p^2) \quad (3.2.115)$$

さらに共形ブロックを large c で書いたときに現れる $f\left(\frac{h_p}{c}, \frac{h_i}{c}, z\right)$ は以下のような微分方程式で得られる.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = c_2(z) \quad (3.2.116)$$

ここで特に挿入する全ての演算子の共形ウェイトが等しく, $h_i = h$ と書ける時, $h_p/c \rightarrow 0$ という極限を取ることができる. これは共形ブロックで展開した時の中間に飛ぶプライマリー演算子が恒等演算子である時の寄与が支配的であることに対応している. この時,

$$f_0\left(\frac{h}{c}, z\right) = f\left(0, \frac{h}{c}, z\right) \quad (3.2.117)$$

のように書くことができる. これを vacuum ブロックと呼ぶ. $h_p = 0$ の演算子に対応して, monodromy 行列のトレースは (3.2.115) より

$$\text{Tr } M_{0z} = 2 \quad (3.2.118)$$

のように求まる. これは解 $\psi_{1,2}$ が特異点 $0, z$ の周りを一周しても特別な変換を獲得しないような自明な monodromy を与える. このような monodromy を与えるようなアクセサリパラメータ $c_2(z)$ を求めると, (3.2.116) から $f_0\left(\frac{h}{c}, z\right)$ が求まる.

実際にツイスト演算子の四点関数を考えていこう. n 枚の replica sheet から複素平面に共形変換したときに, 挿入されるべきツイスト演算子の共形次元は

$$\Delta_n = \bar{\Delta}_n = \frac{c}{24}(n - \frac{1}{n}) \quad (3.2.119)$$

で与えられる. この時, 四点関数は

$$\begin{aligned} \langle \sigma_n(0) \bar{\sigma}_n(z) \sigma_n(1) \bar{\sigma}_n(\infty) \rangle &\simeq \sum_p a_p \exp \left[-\frac{c}{6} f \left(\frac{h_p}{c}, \frac{\Delta}{c}, z \right) - \frac{c}{6} f \left(\frac{\bar{h}_p}{c}, \frac{\bar{\Delta}}{c}, \bar{z} \right) \right] \\ &\simeq \exp \left[-\frac{c}{3} f_0 \left(\frac{\Delta}{c}, z \right) \right] \end{aligned} \quad (3.2.120)$$

となる. ここで第二式に移るときに恒等演算子が支配的であるという近似を用いた. さらに, ここで課される monodromy 条件は (3.2.118) であり, $T(w)$ は $w = 0, z$ で自明な monodromy を持つことが要請される. ここでエンタングルメントエントロピーを求めるときは $n \rightarrow 1$ の極限を取ることを踏まえて, $n = 1 + \alpha$ としておく. (3.2.113) の中で $w = 0, z$ 周りの特異点を持ってくると

$$T(w) = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{w^2} + \frac{1}{(w-z)^2} + \frac{2}{w} \right) + \frac{c_2(1-z)}{w} - \frac{c_2}{w-z} \quad (3.2.121)$$

のように与えられる. 解析性から要請される $c_2(z)$ の形は

$$c_2 = \frac{\alpha}{z} + O(\alpha^2) \quad (3.2.122)$$

さらに (3.2.116) を解くと,

$$f_0 \left(\frac{\alpha}{12}, z \right) = \alpha \log z + O(\alpha^2) \quad (3.2.123)$$

ここで (3.2.54) と (3.2.51) を用いて Rényi entropy からエンタングルメントエントロピーを求めると

$$\begin{aligned} S_A &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{c}{3\alpha} f_0 \left(\frac{\alpha}{12}, z \right) \\ &\simeq \frac{c}{3} \log \frac{z}{\epsilon} \end{aligned} \quad (3.2.124)$$

ここで次元解析から適切に UV カットオフ ϵ を入れた. このように s-channel では連結していない部分系の各領域に対応するエンタングルメントエントロピーが得られ, それらは (3.2.76) と一致する.

t-channel ではほとんど同様の計算である. monodromy を $w = z, 1$ の周りで考え

ることにのみ注意すると, それ以外は $z \rightarrow 1-z$ とすればよく, エンタングルメントエントロピーも

$$S_A \simeq \frac{c}{3} \log \frac{1-z}{\epsilon} \quad (3.2.125)$$

となる. このようにして求まるエンタングルメントエントロピーは $z = 1/2$ での s-channel と t-channel の切り替えに対して相転移のような振る舞いを見せる. 後に節 3.3.1 で見るようにホログラフィックエンタングルメントエントロピーを用いても同様の相転移が起こる.

また, これらの手法を用いたエンタングルメントエントロピーの導出は多体量子相関に拡張されたときに multi-entropy と非常に相性が良く, いくつかの解析がなされている [69].

3.2.2 例 2: 有限温度系の 2 次元 CFT

ここでは逆温度 $\beta = 1/T$ の有限温度系における計算を確認しておく. 周期 β として Euclid 時間を導入し, 円筒状の座標で考える [60]. この時, 円筒座標 $(z', \bar{z}')$ から複素平面 $(z, \bar{z})$ には

$$z = \exp \left[\frac{2\pi z'}{\beta} \right] \quad (3.2.126)$$

という共形変換で移ることができる. ここで z の実部は空間方向, 虚部は Euclid な時間方向である. ツイスト演算子の 2 点関数 $\langle \sigma_n(u) \bar{\sigma}_n(v) \rangle_{\text{plane}} \propto (v-u)^{-\frac{\epsilon}{6}(n-\frac{1}{n})}$ は場の変換性 (2.2.119) より,

$$\begin{aligned} \langle \sigma_n(u') \bar{\sigma}_n(v') \rangle_{\text{cylinder}} &= \left(\frac{\partial u}{\partial u'} \right)^{\Delta_n} \left(\frac{\partial v}{\partial v'} \right)^{\bar{\Delta}_n} \langle \sigma_n(u) \bar{\sigma}_n(v) \rangle_{\text{plane}} \\ &\propto \left(\frac{\beta}{\pi} \sinh \frac{\pi(v' - u')}{\beta} \right)^{-\frac{\epsilon}{6}(n-\frac{1}{n})} \end{aligned} \quad (3.2.127)$$

したがって, エンタングルメントエントロピーは

$$S_A = \frac{c}{3} \log \left[\frac{\beta}{\pi \epsilon} \sinh \frac{\pi(v' - u')}{\beta} \right] \quad (3.2.128)$$

となる. ここでも, 次元解析から適切に UV カットオフ ϵ を挿入した. ゼロ温度系の $\beta \rightarrow \infty$ の極限で (3.2.76) と一致することも確認できる.

3.2.3 例 3: 2次元 CFT における量子クエンチ (quantum quench)

絶対零度の系と有限温度系についてのエンタングルメントエントロピーをここまで見ってきたが, 最後にそれらの状態の遷移を表す熱化過程 (非平衡過程) を確認しておく. ここではその熱化現象を単純化し, 理論に含まれるパラメーターを瞬時に変化させて系を時間発展させるといった**量子クエンチ**と呼ばれるものを考えていく [70]. この節では細かい計算までは踏み込まずに, 得られている結果とその準粒子的描像に注目して紹介する.

熱化過程を記述するモデルとして大域量子クエンチと局所量子クエンチの二種類がある. 大域量子クエンチは, ハミルトニアンに対して $t = 0$ で空間全域の変化を与えることを指している. クエンチ後のエンタングルメントエントロピーの基底状態からの変化分は [71] において, 適切な共形変換で複素平面を上半平面に持っていく, 境界付き共形場理論の計算手法を用いてツイスト演算子の二点関数を計算することで以下のように得られている.

$$\Delta S_A(t) \sim \begin{cases} \frac{\pi c t}{6 \delta}, & t < l/2 \\ \frac{\pi c l}{12 \delta}, & t > l/2 \end{cases} \quad (3.2.129)$$

ここで c は中心電荷, l は部分系のサイズ, δ は状態を構成するための Euclidean 経路積分を正則化するための微小な factor である. このようにある時刻までは時間 t に線形に増大し, その後ある時刻で増大は止まり, 定数になるという振る舞いが知られている.

この時, $t = 0$ での初期状態は非常に高エネルギーであり, 各点からエンタングルした準粒子的な励起を放出していると考えることができる. 実際にそのように考えた時, (3.2.129) で表されるような時間発展を説明できる. 図 3.6 において各時間領域の準粒子の振る舞いを描いた. 時刻 $t = l/2$ までは二つの領域にいるエンタングルした準粒子のペアが増えていくが, $t = l/2$ 以降はその数が一定になることがわかる.

次に局所量子クエンチについてのエンタングルメントエントロピーの振る舞いを見ていく. こちらは時刻 $t = 0$ で局所的な励起を与える操作に対応する. こ

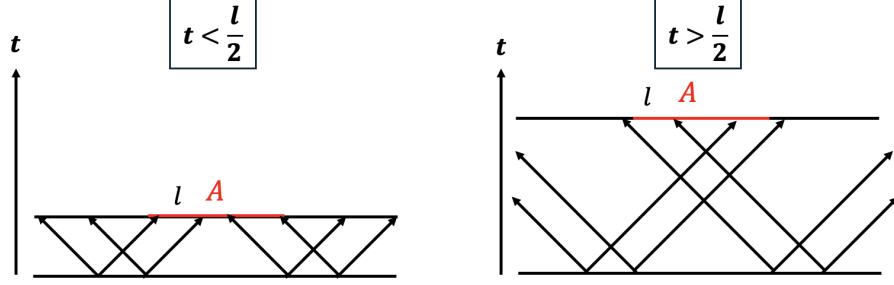


図 3.6: 大域量子クエンチにおける各時間領域に対する準粒子的励起の伝搬.

の操作は主に joining quench と operator quench の二種類の方法で実現される. joining quench は $t = 0$ で二つの半無限に伸びた系を接続することによって, 接続点で局所的に現れる励起を扱っている. 一方で operator quench は $t = 0$ において空間のある一点に演算子を挿入し, それによって現れる励起を扱っている.

この時間発展におけるエンタングルメントエントロピーの基底状態からの変化分も [72] において大域量子クエンチと同様の手法で以下のように計算されている.

$$\begin{aligned} \Delta S_A(t < |x_1|) &= \begin{cases} \frac{c}{6} \log \left(\frac{4x_2|x_1|}{\delta^2} \right) + 2C, & (x_1 < 0) \\ \frac{c}{6} \log \left(\frac{(x_2 - x_1)^2}{(x_2 + x_1)^2} \frac{4x_2x_1}{\delta^2} \right) + 2C, & (x_1 > 0) \end{cases} \\ \Delta S_A(|x_1| < t < x_2) &= \frac{c}{6} \log \left(\frac{(x_2 - x_1)(x_2 - t)}{(x_2 + x_1)(x_2 + t)} \frac{4x_2(t^2 - x_1^2)}{\delta^2} \right) + 2C \\ \Delta S_A(t > x_2) &= \frac{c}{3} \ln \left(\frac{x_2 - x_1}{\delta} \right) + 2C \end{aligned} \quad (3.2.130)$$

ここで, $x = 0$ で局所励起を考えており, 部分系 A は $x_1 \leq x \leq x_2$ としている. 大文字の C は境界条件に依存する定数である. これを数値的に図示すると図 3.7 のようになる. このプロットの結果も準粒子的な描像で非常によく理解できる. 大域量子クエンチが $t = 0$ での全領域での励起であったのに対して局所量子クエンチは空間の 1 点での励起であり, 1 点からのみ準粒子が放出されると考えられる (図 3.8). $x_1 > 0$ の部分系を取ったときは $t < |x_1|$ までは両方の準粒子が A の外側にあるが, $|x_1| < t < x_2$ では片方が A の内側に, もう片方が A の外側にあるのでエンタングルメントエントロピーが増加する. 最後に $x_2 < t$ ではまた両方の準粒子が A の外側に位置するので変化は小さくなる. このような時間変化が図 3.7 の左

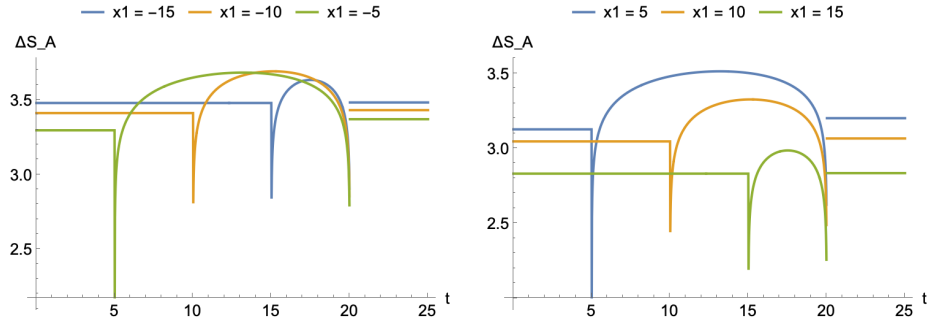


図 3.7: 局所量子クエンチにおけるエンタングルメントエントロピーの増加分の時間発展. ここで, $x_2 = 20$, $\delta = 0.001$, $c = 1$, $C = 0$ としている.

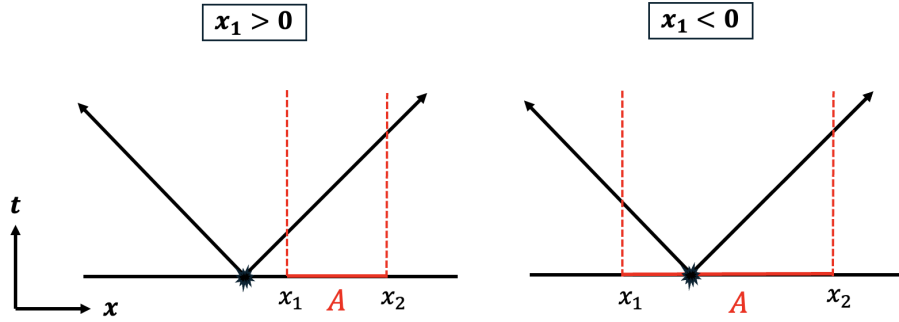


図 3.8: 局所量子クエンチにおける準粒子的励起の伝搬.

図で見えている.

$x_1 < 0$ の部分系を取ったときも同様に, $t < |x_1|$ までは両方の準粒子が A の内側にあるが, $|x_1| < t < x_2$ では片方が A の内側に, もう片方が A の外側にあるのでエンタングルメントエントロピーが増加する. 最後に $x_2 < t$ ではまた両方の準粒子が A の外側に位置するので変化は小さくなる. このような時間変化が図 3.7 の右図で見えている. このように準粒子的描像で量子クエンチにおける系の時間変化が非常にわかりやすく理解することができる.

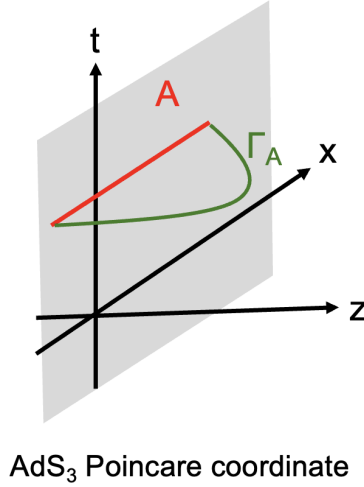


図 3.9: 3 次元 Poincaré 座標における笠-高柳面

3.3 ホログラフィックエンタングルメントエントロピー

AdS/CFT 対応の枠組みでエンタングルメントエントロピーを重力の計算で求める笠-高柳公式が 2006 年に提唱された [9].

笠-高柳公式

境界の部分領域 A のエンタングルメントエントロピー S_A は, A と同じ境界を持ち, バルク側に伸びた極小曲面 Γ_A (図 3.9) の面積を用いて,

$$S_A = \text{MinExt}_{\Gamma_A} \frac{\text{Area}(\Gamma_A)}{4G_N} \quad (3.3.131)$$

で得られる. ここで取ってくる極小曲面は部分領域 A と homologous であることを要請する.

このようにして AdS/CFT 対応を通して得られるエンタングルメントエントロピーをホログラフィックエンタングルメントエントロピーという. これはブラックホールエントロピーの面積則の一般化になっている.

この公式は [73] において共変的な公式に格上げされ, 時間依存する重力中においても適用できる形になった. さらに [74] において, AdS/CFT 対応を仮定したとき

にこの公式は replica 法を用いて証明されている.

さらにこの極小曲面と部分領域で囲まれた領域を指して**エンタングルメントウェッジ**と呼ぶ. これは部分領域 A に対する密度行列の重力双対であると考えられており [75], 量子系 A の情報を用いて再構成できる重力領域として解釈される. 実際に量子系 A の演算子を用いて重力理論におけるエンタングルメントウェッジ上の場を再構成する方法が知られている [76].

3.3.1 例 1: pure AdS_3

例として, AdS_3/CFT_2 対応を用いてエンタングルメントエントロピーを計算する.

Poincaré 座標での部分領域 A を以下のように取る.

$$t = t_* = const., \quad x_1 \leq x \leq x_2, \quad z = \epsilon \quad (3.3.132)$$

ここで UV カットオフ ϵ を導入している. この時, (ϵ, t_*, x_1) と (ϵ, t_*, x_2) を端点に持つような極小曲面 (ここで codimension 2 の極小曲面は測地線であることに注意) を考える. 対称性から決まる測地線長の公式 (2.1.21) を用いて

$$L = R_{AdS} \cosh^{-1} \left[\frac{2\epsilon^2 + (x_2 - x_1)^2}{2\epsilon^2} \right] \quad (3.3.133)$$

カットオフ ϵ が十分小さいことから

$$\frac{e^{\frac{L}{R_{AdS}}}}{2} \simeq \frac{(x_2 - x_1)^2}{2\epsilon^2} \quad (3.3.134)$$

よって,

$$L \simeq 2R_{AdS} \log \left[\frac{(x_2 - x_1)}{\epsilon} \right] \quad (3.3.135)$$

となる. この時, エンタングルメントエントロピーは

$$S_A = \frac{L}{4G_N} \simeq \frac{R_{AdS}}{2G_N} \log \left[\frac{(x_2 - x_1)}{\epsilon} \right] = \frac{c}{3} \log \left[\frac{(x_2 - x_1)}{\epsilon} \right] \quad (3.3.136)$$

ここで最後の等号に Brown-Henneaux の関係式 $c = \frac{3R_{AdS}}{2G_N}$ を用いた [45]. このエンタングルメントエントロピーは境界 CFT で求めた (3.2.76) と一致しており,

AdS/CFT 対応における強力な状況証拠の一つになっている.

さらに 3 次元 AdS 時空の global 座標 (ρ, t, θ) を用いたホログラフィックエンタングルメントエントロピーも求めておく. 以下のように部分領域を取ると,

$$t = t_* = const., \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad \rho = \rho_\infty \quad (3.3.137)$$

測地線長の距離公式 (2.1.7) から

$$L \simeq R_{AdS} \cosh^{-1} \left[\frac{e^{2\rho_\infty} \sin^2 \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right)}{2} \right] \quad (3.3.138)$$

ここで UV カットオフ ρ_∞ は十分大きいので

$$\frac{e^{\frac{L}{R_{AdS}}}}{2} \simeq \frac{e^{2\rho_\infty} \sin^2 \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right)}{2} \quad (3.3.139)$$

よって,

$$L \simeq 2R_{AdS} \log \left[e^{\rho_\infty} \sin \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right) \right] \quad (3.3.140)$$

ここで UV カットオフを $e^{\rho_\infty} = \frac{1}{\epsilon}$ と結びつけると,

$$L \simeq 2R_{AdS} \log \left[\frac{\sin \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right)}{\epsilon} \right] \quad (3.3.141)$$

この時, エンタングルメントエントロピーは

$$S_A = \frac{L}{4G_N} \simeq \frac{R_{AdS}}{2G_N} \log \left[\frac{\sin \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right)}{\epsilon} \right] = \frac{c}{3} \log \left[\frac{\sin \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right)}{\epsilon} \right] \quad (3.3.142)$$

ここで再度 Brown-Henneaux の関係式 $c = \frac{3R_{AdS}}{2G_N}$ を用いた. 3 次元 Euclidean AdS 時空においても同様の計算を行うことができ, 結果としては同じ値を得ることを注意しておく.

さらにこれらの結果を用いて部分領域が二つで, それらが隣接していない時のホログラフィックエンタングルメントエントロピーの相転移を見ていこう [73, 77]. Poincaré 座標においてある時間一定面を考え, その中の部分領域 A, B のサイズをそれぞれ l_A, l_B とし, それらの距離を l_d とする (図 3.10 参照).

この時, AB 間のエンタングルメントエントロピーを考える. 笠-高柳公式で考え

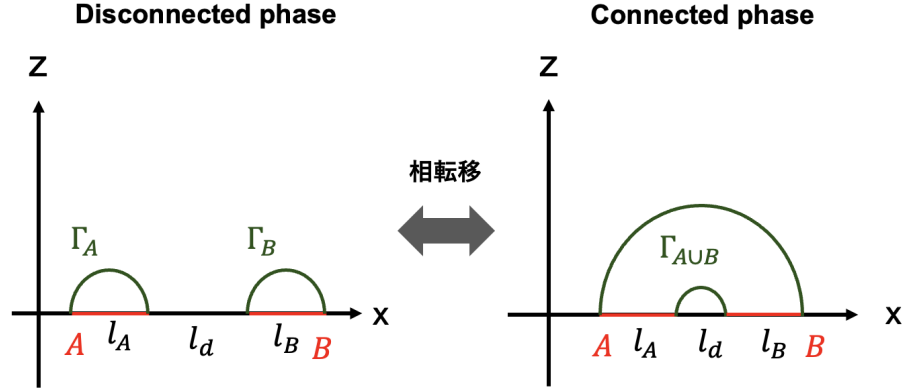


図 3.10: 隣接していない部分領域 A, B のホログラフィックエンタングルメントエントロピーの相転移

るべき測地線の候補は A, B に対して分離したものと A, B を結びつけるようなものの二種類あり, これらの中でより小さい値を取るものを取ってくる必要がある. 結果として以下のような相転移が存在する.

- **Disconnected phase:** それぞれの部分領域 A, B が分離した測地線を持つ.

このような phase は以下のような条件で実現される.

$$l_d(l_A + l_B + l_d) \geq l_A l_B. \quad (3.3.143)$$

この時, (3.3.136) より,

$$S_{A \cup B} = \frac{c}{3} \log \left[\frac{l_A}{\epsilon} \right] + \frac{c}{3} \log \left[\frac{l_B}{\epsilon} \right] \quad (3.3.144)$$

- **Connected phase:** 部分領域 A, B を繋ぐような測地線を持つ.

このような phase は以下のような条件で実現される.

$$l_d(l_A + l_B + l_d) \leq l_A l_B. \quad (3.3.145)$$

この時, (3.3.136) より,

$$S_{A \cup B} = \frac{c}{3} \log \left[\frac{l_A + l_B + l_d}{\epsilon} \right] + \frac{c}{3} \log \left[\frac{l_d}{\epsilon} \right] \quad (3.3.146)$$

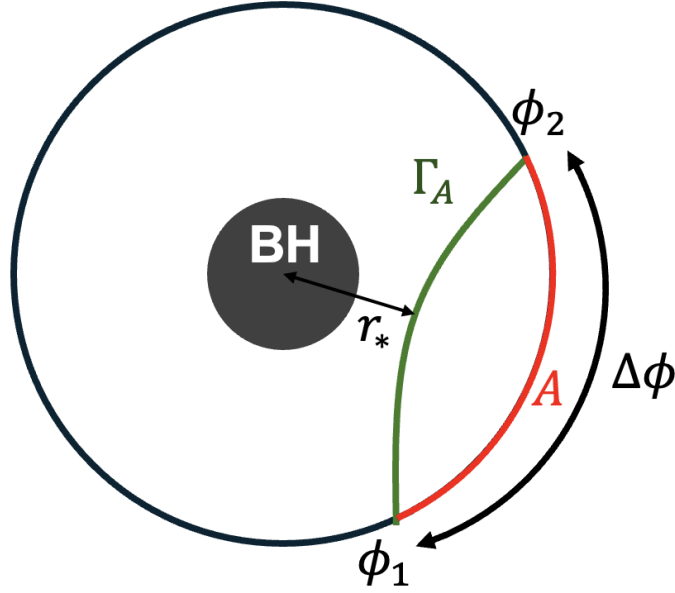


図 3.11: BTZ ブラックホールの時間一定面における RT 面

これらの相転移は節 3.2.1 の monodromy method を用いたツイスト演算子の四点関数の計算の際に現れた s-channel と t-channel の相転移と対応している.

3.3.2 例 2: 3 次元ブラックホール

以下では 3 次元 (BTZ) ブラックホール時空を用いてホログラフィックエンタングルメントエントロピーを計算し, 有限温度系のエンタングルメントエントロピーの結果と一致することを確認する [78, 79].

時間一定面における部分領域を $\phi_1 \leq \phi \leq \phi_2$ とする. さらに部分領域の大きさ $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ に対して測地線が折り返される時の動径座標を r_* とする (図 3.11 参照). 計量 (2.1.51) を用いて測地線方程式を計算すると以下のように得られる.

$$r'^2 = \left(\frac{r^2}{R_{AdS}^2} - M \right) \left(\frac{r^4}{r_*^2} - r^2 \right) \quad (3.3.147)$$

ここで $r' = \frac{dr}{d\phi}$ としている. 上式を用いて r_* と $\Delta\phi$ の関係を計算することができ,

$$\Delta\phi = \frac{2}{\sqrt{M}} \operatorname{arctanh} \left(\frac{R_{AdS} \sqrt{M}}{r_*} \right) \quad (3.3.148)$$

のようになる. これらを用いて得られる測地線長 $L(\Delta\phi)$ は

$$L(\Delta\phi) \simeq 2R_{AdS} \log \left(\frac{2r_\infty}{R_{AdS}\sqrt{M}} \sinh \left(\frac{\sqrt{M}}{2} \Delta\phi \right) \right) \quad (3.3.149)$$

である. ここで r_∞ は動径方向の UV カットオフである. BTZ ブラックホールの熱的性質 (2.1.42) より,

$$\beta = \frac{2\pi R_{AdS}}{\sqrt{M}} \quad (3.3.150)$$

であり, UV カットオフ $\epsilon = \frac{R_{AdS}^2}{r_\infty}$ と物理長 $l = R_{AdS}\Delta\phi$ を用いると

$$S_A = \frac{c}{3} \log \left[\frac{\beta}{\pi\epsilon} \sinh \frac{\pi l}{\beta} \right] \quad (3.3.151)$$

となり, 有限温度系での 2 次元 CFT の計算 (3.2.128) と一致することが確認できる. ブラックホール半径が 0 に近づくような $M \rightarrow 0 (\beta \rightarrow \infty)$ の極限で (3.3.136) と一致することも確認できる.

3.3.3 例 3: 量子クエンチに対する重力双対

節 3.2.3 で量子クエンチという操作による基底状態から励起状態への系の遷移を紹介した. 以下では, その重力理論における解釈を紹介し, 実際に CFT と同じようなエンタングルメントエントロピーの振る舞いが得られることを見ていく.

まずは系に対する大域量子クエンチであるが, 有限温度系の励起状態がブラックホールの幾何に対応することから, 重力崩壊によるブラックホールの形成過程が重力双対であると推察される. 実際に [79] において笠-高柳公式を用いてブラックホールの幾何で極小曲面の面積を計算した結果, ホログラフィックエンタングルメントエントロピーの増加分が (3.2.129) と同じ振る舞いをすることが確認されている.

次に局所量子クエンチについては joining quench と operator quench の二種類があることが知られている. joining quench に関しては境界付きの共形場理論における計算手法に倣って $AdS/BCFT$ 対応 (節 4.2 参照) を用いた重力双対が提案されている [80]. この計算においても実際にホログラフィックエンタングルメン

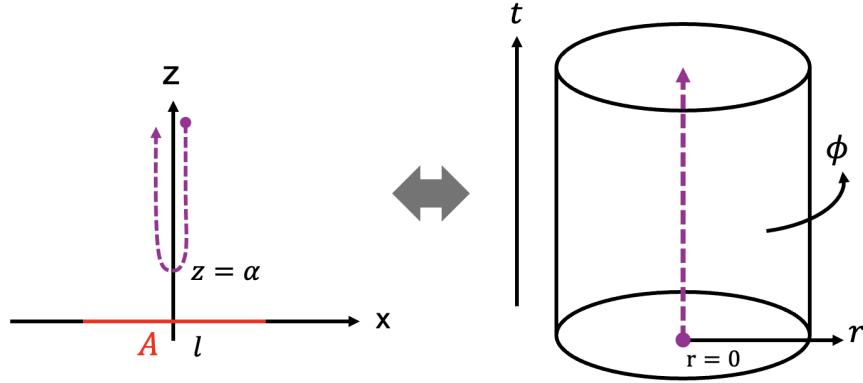


図 3.12: 局所量子クエンチに対する重力双対としての自由粒子の落下 (紫色の点線). 左図は Poincaré 座標での軌跡で右図は global 座標に変換した時の軌跡.

トエントロピーの増加分は CFT の計算と同じような振る舞いを与えている. 以下では, 「AdS 時空中における粒子の自由落下」が operator quench に対して双対な重力幾何であることを具体的にホログラフィックエンタングルメントエントロピーを計算して確認していく [81].

まずは 3 次元の Poincaré 座標 (2.1.19) を考えて自由粒子の軌跡を求める. 粒子の軌跡を $x = 0$ に固定した時の質量 m の粒子に対する作用は

$$S = -mR_{AdS} \int dt \frac{\sqrt{1 - \dot{z}(t)^2}}{z(t)} \quad (3.3.152)$$

で与えられる. この時に運動方程式を解いて得られる粒子の軌跡は

$$z(t) = \sqrt{t^2 + \alpha^2} \quad (3.3.153)$$

となる. したがって $t < 0$ では漸近境界 $z = 0$ に向かって落ち込み, $t = 0$ の時に $z = \alpha$ の点で折り返し, $t > 0$ では漸近境界から離れていくような軌跡になっている (図 3.12 参照).

ここで AdS 時空中の粒子によって引き起こされるバックリアクションによって新たに時空の幾何がどのように変化するかを求めたいのだが, まともに Einstein 方程式を解き直すのは非常に大変なので [82] で導入された考え方をを用いる. まず

は Poincaré 座標 (2.1.19) を global 座標 (2.1.11) に移るための座標変換として以下を導入する.

$$\begin{aligned} r^2 + R_{AdS}^2 &= R_{AdS}^2 \frac{(\alpha^2 + z^2 - t^2 + x^2)^2 + 4\alpha^2 t^2}{4\alpha^2 z^2} \\ \tan \frac{\tau}{R_{AdS}} &= \frac{2\alpha t}{\alpha^2 + z^2 - t^2 + x^2} \\ \tan \phi &= \frac{2\alpha x}{-\alpha^2 + z^2 - t^2 + x^2} \end{aligned} \quad (3.3.154)$$

α は $SO(2, 2)$ 対称性における boost に対応しており, これによってこの座標変換で粒子の軌跡は (3.3.153) から $r = 0$ に移る.

ここで, global 座標において $r = 0$ で質量を持った粒子のバックリアクションは AdS の BTZ ブラックホール座標 (2.1.51) で得られることが知られている [12]. したがってこの座標を (3.3.154) でもう一度変換することで粒子のバックリアクションを含んだ Poincaré 座標の摂動が得られる. パラメータ $M+1$ は元の粒子の質量に比例している. したがって質量 m が十分に小さい時を考えると, $M = -1 + \delta$, ($\delta \rightarrow 0$) として摂動計算を行うことができる. この時 M の取りうる値から上記の座標はブラックホールというよりは $r = 0$ に conical defect を持った時空を張ることがわかる.

このようにして得られた摂動後の計量を

$$\begin{aligned} ds^2 &= G_{\mu\nu}^{(0)} dx^\mu dx^\nu + G_{\mu\nu}^{(1)} dx^\mu dx^\nu + O(\delta^2) \\ &= R_{AdS}^2 \frac{dz^2 - dt^2 + dx^2}{z^2} + G_{\mu\nu}^{(1)} dx^\mu dx^\nu + O(\delta^2) \end{aligned} \quad (3.3.155)$$

として δ の 1 次摂動で表す. 具体的な表記は非常に複雑なので省略する.

この重力幾何から得られるホログラフィックエナジーストレステンソルを計算すると, 境界上の CFT においては大きさ α の準粒子的な振る舞いをすることが調べられており, このような AdS 時空における自由粒子が正しい重力双対であることが確認できる [81].

この計量の摂動を用いてホログラフィックエンタングルメントエントロピーの変化分を計算しよう. 部分領域 A に対して得られる測地線上の誘導計量を $g_{\mu\nu}$ とすると, 長さの変化分は

$$\Delta S_A = \frac{R_{AdS}}{8G_N} \int d\zeta \sqrt{g^{(0)}} g_{\alpha\beta}^{(1)} g^{(0)\alpha\beta} \quad (3.3.156)$$

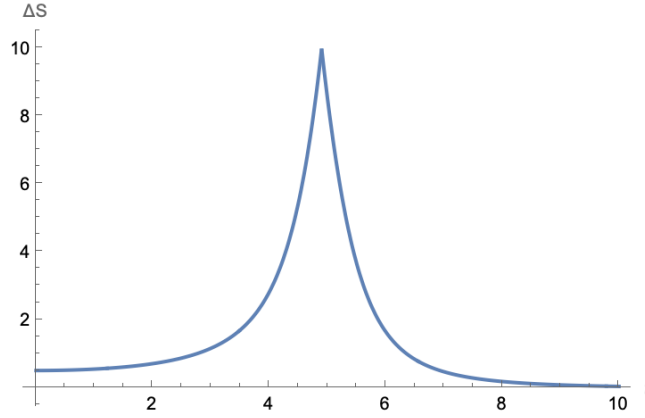


図 3.13: 摂動計算による局所量子クエンチにおけるホログラフィックエンタングルメントエントロピーの増加分. ここで $l/2 = 5, \alpha = 1, \delta = 1, R_{AdS} = 1$ とした.

のように書けることが知られている. ここで ζ は測地線に張られた座標である. ここで測地線であることから 1 次の摂動に対して大きさは変わるが, 積分すべき面自体は変化しないことに注意する.

簡単のために部分領域 A を $-l/2 \leq x \leq l/2$ とする. この時測地線は

$$z = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - x^2} \quad (3.3.157)$$

で与えられる. これを用いて ΔS_A を求めると

$$S_A = \delta \times R_{AdS} \frac{\alpha l - \left(\alpha^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 + t^2\right) \arctan\left(\frac{\alpha l}{\alpha^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 + t^2}\right)}{4l\alpha G_N} \quad (3.3.158)$$

となる. これを図 3.13 にてプロットした. ここから $t = 5 (= l/2)$ に幅 $\alpha = 1$ のピークが立っていることから, 実際に大きさ α の準粒子が部分領域の端を通過したタイミングで ΔS_A が増加していることがわかる. 部分領域の中心を ξ だけずらした時には $\frac{l}{2} - \xi \leq t \leq \frac{l}{2} + \xi$ でピークが立つことが確認でき, これらは全て CFT の計算で得られている結果と同じ振る舞いをしていることがわかる.

次に 3 次元 AdS 時空の厳密な座標変換を用いて, M を摂動的に扱うのではなく厳密に計算していく. 部分領域 A として $x_1 \leq x \leq x_2, t = const.$ を取り, それを global 座標に map した時のホログラフィックエンタングルメントエントロピー

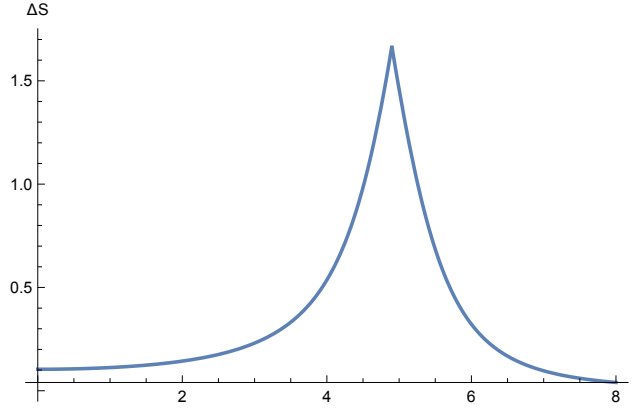


図 3.14: 厳密計算による局所量子クエンチにおけるホログラフィックエンタングルメントエントロピーの増加分. ここで $l/2 = 5, \alpha = 1, M = 1, R_{AdS} = 1$ とした.

の変化分は前節と同様の計算で

$$\Delta S_A = \frac{R_{AdS}}{4G_N} \log \left(\frac{\cosh(\sqrt{M}(\phi_1 - \phi_2)) - \cosh(\sqrt{M}(t_2 - t_1))}{M(\cos(t_2 - t_1) - \cos(\phi_1 - \phi_2))} \right) \quad (3.3.159)$$

と得られる. ここで map した後の BTZ ブラックホール座標では部分領域が時間一定面上ではなくことに注意する. またここで部分領域サイズに合わせてブラックホールに対して巻き付きを考慮した測地線を選ぶ必要があり, $\phi_1 - \phi_2$ を $\phi_1 - \phi_2 + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) で置き換えた上で長さが最小のものを取ってくる必要がある. これらを考慮した上でのホログラフィックエンタングルメントエントロピーの結果を図 3.14 に図示する. $t = 5$ でピークを持っており, 図の概形も摂動計算と一致していることがわかる.

3.4 その他の量子相関とその重力双対

エンタングルメントエントロピー以外にも様々な量子相関が AdS/CFT 対応の文脈で調べられているので, それらの性質と重力理論における解釈を紹介していく. 以下の節では表記の簡略化のために極小曲面に対するラベル Γ を面積としても扱うが混同しないように注意されたい.

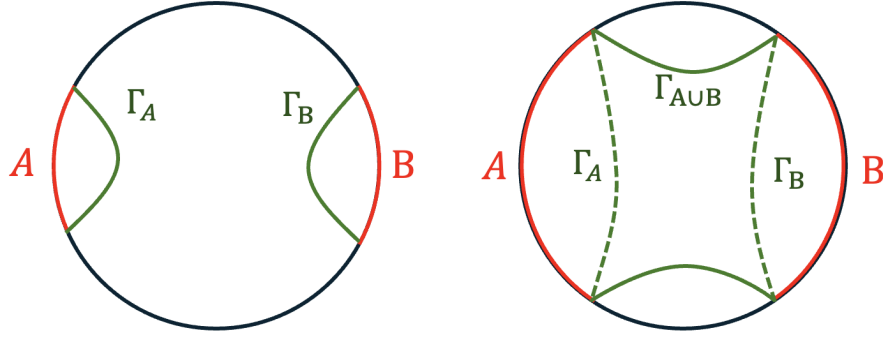


図 3.15: 3 次元 globalAdS 時空における時間一定面における相互情報量の重力双対. 左図は $\Gamma_{A \cup B}$ が Γ_A と Γ_B に一致しており, 自明な場合である. 右図は実線が $\Gamma_{A \cup B}$ で点線が Γ_A と Γ_B であり, 相互情報量がノンゼロの値を持つ.

3.4.1 相互情報量 (Mutual Information)

相互情報量は量子情報理論において, 相対エントロピーを用いて合成系の密度行列 ρ_{AB} が積状態 $\rho_A \otimes \rho_B$ からどれだけ隔たっているかを表す情報量として定義されていた. ここではそれを式変形して得られる (3.1.24) の式を定義として議論を進める. 以下に相互情報量 $I(A : B)$ の定義を再掲する.

$$I(A : B) = S_A + S_B - S_{A \cup B} \quad (3.4.160)$$

これは特に $A \cup B$ が全領域 (純粋状態) であるような自明な状況においては $I(A : B) = 2S_A$ になるが, そうでない場合に部分領域 A, B に対して量子相関が存在するかを表す重要な指標である. さらに, 定義から明らかに場の理論や重力理論での計算において現れるエンタングルメントエントロピーの UV 発散が打ち消しあっていることがわかる.

重力理論においては図 3.15 のように描かれ, 部分領域 A, B の大きさによって相転移が存在することがわかる. 実際に左図では $S_A + S_B = S_{A \cup B}$ より $I(A : B) = 0$ という自明な場合である. 一方で, 右図では

$$I(A : B) = \frac{\Gamma_A}{4G_N} + \frac{\Gamma_B}{4G_N} - \frac{\Gamma_{A \cup B}}{4G_N} \quad (3.4.161)$$

となり, $O(1/G_N)$ としてホログラフィでも重要な寄与を持つことがわかる. ここでホログラフィとは重力双対を持つような古典極限を取った重力理論, さらにはその

双対な共形場理論のことを指す. 以上のような振る舞いは節 3.2.1 の monodromy method を用いた二領域のエンタングルメントエントロピーや, 節 3.3.1 の pure AdS の計算例における二領域のホログラフィックエンタングルメントエントロピーと全く同様の相転移である.

さらに, 笠-高柳公式の規則のもとで $\Gamma_{A \cup B}$ は極小曲面なので必ず

$$\Gamma_A + \Gamma_B \geq \Gamma_{A \cup B} \quad (3.4.162)$$

が成立することがわかる. ここからホログラフィにおいて

$$I(A : B) \geq 0 \quad (3.4.163)$$

であることが示され, これは量子情報理論においてエンタングルメントエントロピーの劣加法性からくる, 相互情報量の非負性として知られている性質である (節 3.1.2 参照).

さらにホログラフィにおいて重力の幾何から

$$\frac{1}{2}I(A : B) \leq \min\{S_A, S_B\} \quad (3.4.164)$$

が示される. これは一般性を失わずに, $S_B \leq S_A$ とした時に

$$\min\{S_A, S_B\} - \frac{1}{2}I(A : B) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma_B + \Gamma_{A \cup B} - \Gamma_A}{4G_N} \geq 0 \quad (3.4.165)$$

となるからである. 最後の不等式においては, 相互情報量が自明な時には右辺は 0 になり, $\Gamma_A \cup \Gamma_B \neq \Gamma_{A \cup B}$ の非自明な時には $\Gamma_B \cup \Gamma_{A \cup B}$ が部分領域 A と homologous である条件を満たすので, 極小曲面である Γ_A の方が小さいことがわかる.

3.4.2 純粋化エンタングルメント (Entanglement of Purification) と Entanglement Wedge Cross Section

エンタングルメントエントロピーは純粋状態に対するエンタングルメント測度であることから, 混合状態に対する量子エンタングルメントを測ることはできず, 混合状態に対する適切なエンタングルメント測度は量子情報理論においてもまだ完全には確立されていない. その一つの候補として純粋化エンタングルメント (Entanglement of Purification) を紹介し, さらにその重力双対として提唱され

ている Entanglement Wedge Cross Section について見ていく [83].

ある密度行列 ρ_{AB} で表される混合状態に対して, 節 3.1.1 で見た純粋化の操作を行う. ある補助系 A', B' を持ってきて純粋状態 $|\psi\rangle_{ABA'B'} \in \mathcal{H}_{AA'} \otimes \mathcal{H}_{BB'}$ を作る. この時,

$$\rho_{AB} = \text{Tr}_{A'B'} |\psi\rangle \langle \psi| \quad (3.4.166)$$

が成り立つように取ってくる. ここで純粋化の操作は持ってくる補助系によって一意ではないことに注意する. このようにして得られた純粋状態に対して純粋化エンタングルメント $E_P(\rho_{AB})$ は以下のように定義される.

$$E_P(\rho_{AB}) = \min_{|\psi\rangle_{AA'BB'}} S_{AA'} \quad (3.4.167)$$

ここで右辺は全ての純粋化に対して最小値を取っている. ρ_{AB} が純粋状態の時には純粋化エンタングルメントはエンタングルメントエントロピーに一致することは明らかである.

さらにこの重力理論における対応物は図 3.16 のように描かれ, Entanglement Wedge Cross Section $E_W(A : B)$ と呼ばれている. 節 3.3 で言及したように, A, B とその極小曲面 Γ_{AB} で囲まれる領域をエンタングルメントウェッジ M_{AB} と呼ぶ. この時, M_{AB} の境界 ∂M_{AB} は

$$\partial M_{AB} = A \cup B \cup \Gamma_{AB} \quad (3.4.168)$$

と表され, これを以下のような A', B' を用いて分ける.

$$\partial M_{AB} = A \cup A' \cup B \cup B' \quad (3.4.169)$$

この時, 分割の仕方は一意ではないことに注意する. このようにして得られた部分領域 A, A', B, B' に対して Entanglement Wedge Cross Section $E_W(A : B)$ は以下のように定義される.

$$\begin{aligned} E_W(A : B) &= \min_{\partial M_{AB} = A \cup A' \cup B \cup B'} S_{AA'} \\ &= \min_{\sigma_{AB}} \frac{\sigma_{AB}}{4G_N} \end{aligned} \quad (3.4.170)$$

ここで $\sigma_{AB} = \Gamma_{AA'}$ であり, さらに右辺では $A'B'$ の分割の仕方について最小化を取っている. 図から明らかにこの量も $r \rightarrow \infty$ で現れる UV 発散を含まないことが

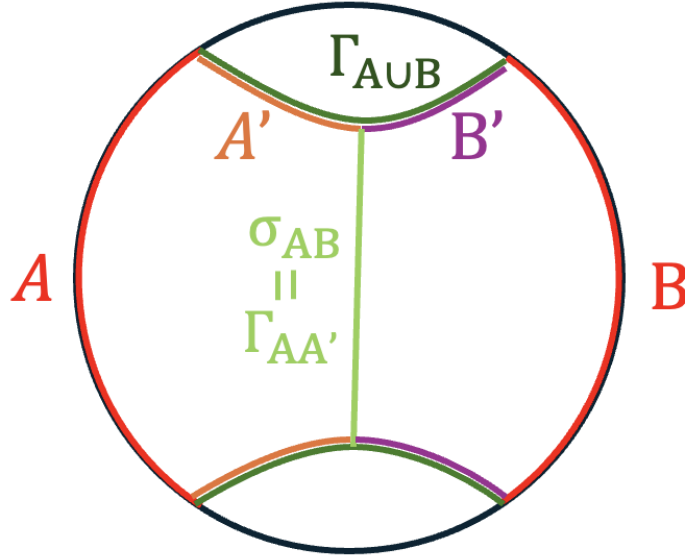


図 3.16: 3 次元 global AdS 時空における時間一定面における Entanglement Wedge Cross Section.

わかる.

また, エンタングルメントエントロピーや相互情報量と比較したときに成り立つ不等式が以下のように知られている.

$$\frac{1}{2}I(A : B) \leq E_W(A : B) \leq \min\{S_A, S_B\} \quad (3.4.171)$$

この不等式もまた, 量子情報理論においてもホログラフィにおいても成り立つことが示されている.

3.4.3 Reflected Entropy

混合状態の純粋化において (3.1.12) で見た正準純粋化を採用する. つまり, 補助系として A, B をそれぞれコピーした A^*, B^* を用いて純粋状態 $|\psi\rangle_{ABA^*B^*} \in \mathcal{H}_{AA^*} \otimes \mathcal{H}_{BB^*}$ を作る. このようにして得られた純粋状態に対して reflected entropy $S_R(A : B)$ は以下のように与えられる [84].

$$S_R(A : B) = S_{|\psi\rangle_{ABA^*B^*}}(AA^*) \quad (3.4.172)$$

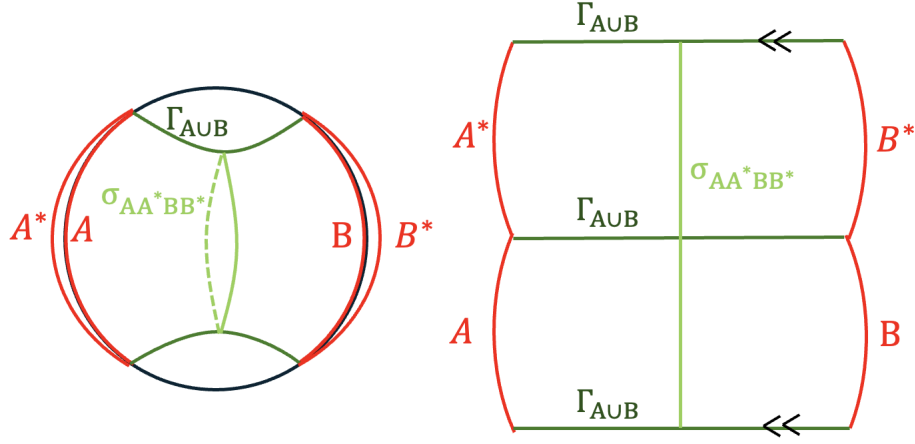


図 3.17: 3 次元 globalAdS 時空における時間一定面における Reflected Entropy の重力双対. 左図は一つの図に重ねて書いたものであり, 円筒と同じ topology を持つことがわかる. 右図はそれを展開したものである.

さらにこの重力理論における対応物は図 3.17 のように描かれる. 部分領域 A^*, B^* を A, B のコピーとして取ってきて, 貼り付けたものであり, reflected entropy は重力の計算で以下のように与えられる.

$$S_R(A : B) = \min_{\sigma_{AA^*BB^*}} \frac{\sigma_{AA^*BB^*}}{4G_N} = 2E_W(A : B) \quad (3.4.173)$$

ここで, 定義から明らかに entanglement wedge cross section の二倍と一致する. また, 相互情報量と比べたときの不等式として (3.4.171) から明らかに

$$S_R(A : B) \geq I(A : B) \quad (3.4.174)$$

が成立する.

さらに節 3.1.2 で見た条件付き相互情報量 $I(A : C|B)$ と以下のような関係にあることもわかる.

$$\begin{aligned} S_R(A : B) - I(B : A^*) &= S(AA^*) + S(BA^*) - S(A^*) - S(B) \\ &= I(A : B | A^*) = I(A : B | B^*) \end{aligned} \quad (3.4.175)$$

これは後に Markov gap として解釈され, 三体量子相関を示唆する量として用いられる.

3.5 多体量子相関

ここまで見てきたようにエンタングルメントエントロピーは量子情報理論の根幹的な概念であるだけでなく, AdS/CFT 対応において重要な役割を果たす. しかし, この量は定義から明らかに二体の量子状態にしか用いることができない. 多体状態は二体状態と比べてより豊富な量子相関を持ち, 実際に量子重力理論において無視できない寄与を与えることが調べられている [85–87].

多体量子相関の例として三体量子相関である GHZ 状態や W 状態

$$|\text{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle), \quad (3.5.176)$$

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle) \quad (3.5.177)$$

が知られている [88, 89]. これらの状態は局所操作と古典通信 (LOCC) を用いて移り変わることができない (もしくは, 密度行列の rank が異なる) という点で全く異なる種類の三体量子相関である.

こういった多体量子相関の存在や重要性は既に知られているが, それを適切に測るための測度は量子情報理論においてもまだ十分に確立されていない. 以下では, 多体量子相関の測度に対する幾つかの候補とそれらの AdS/CFT 対応での解釈を見ていく.

3.5.1 Genuine Multipartite Entanglement Measure

量子情報理論において多体量子相関を正確に測る測度として Genuine Multipartite Entanglement Measure という概念が提唱されている [90–92].

まずは節 3.1.3 でも見たように二体系の純粋状態 $|\psi\rangle_{AB}$ が, 以下のように表される時に separable という.

$$|\psi\rangle_{AB} = |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle. \quad (3.5.178)$$

ここで $|\phi_A\rangle$ および $|\phi_B\rangle$ は, それぞれヒルベルト空間 $\mathcal{H}_A$ および $\mathcal{H}_B$ に属する量子状態である. このような形で表せない任意の状態を二体エンタングル状態と

呼ぶ.

さらに多体系の文脈では separable の概念はより複雑になる. これを説明するために, N 体系の純粋状態 $|\psi\rangle$ を考える. この状態が以下のように完全に分解された形で書けるとき, fully separable であるという.

$$|\psi\rangle_{A_1, A_2, \dots, A_N} = |\phi_1\rangle_{A_1} \otimes |\phi_2\rangle_{A_2} \otimes |\phi_3\rangle_{A_3} \cdots |\phi_N\rangle_{A_N}. \quad (3.5.179)$$

しかし, 分離可能性はこれだけに限られない. 状態が k -separable であるとは, 以下のように書ける場合を指す.

$$|\psi\rangle_{A_1, A_2, \dots, A_N} = |\phi_1\rangle_{B_1} \otimes |\phi_2\rangle_{B_2} \otimes |\phi_3\rangle_{B_3} \cdots |\phi_k\rangle_{B_k}. \quad (3.5.180)$$

ここで $\cup_j B_j = \cup_i A_i$ であり, 左辺には各 A_i は一度だけ現れる. N 体系の状態が真の多体量子エンタングル状態であるとは, N 個の部分系の任意の二分割に関して, 積状態に分解できないことを指す.

$$|\psi\rangle_{A_1, A_2, \dots, A_N} \neq |\phi_1\rangle_{B_1} \otimes |\phi_2\rangle_{B_2}, \quad (3.5.181)$$

ここで $B_1 \cup B_2 = \cup_i A_i$ である.

この定義は, すべての k -separable は真の多体量子エンタングル状態でないことを示唆している. 例えば, 三体系の純粋状態 $|\psi\rangle_{ABC}$ は, 以下の四つのいずれの形で表せないとき, 真の三体エンタングルメントを持つと言われる.

$$|\psi\rangle_{ABC} = |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle \otimes |\phi_C\rangle, \quad (3.5.182)$$

$$|\psi\rangle_{ABC} = |\phi_{AB}\rangle \otimes |\phi_C\rangle, \quad (3.5.183)$$

$$|\psi\rangle_{ABC} = |\phi_A\rangle \otimes |\phi_{BC}\rangle, \quad (3.5.184)$$

$$|\psi\rangle_{ABC} = |\phi_{AC}\rangle \otimes |\phi_B\rangle. \quad (3.5.185)$$

最初の場合は fully separable 状態と呼ばれ, それ以外の場合は bi-separable 状態と呼ばれる. 例えば, 上の二番目の場合では, 状態は bi-separable であり, 部分領域 A と B の間には二体エンタングルメントが存在するが, 部分領域 C とはエンタングルメントを持たない.

これらの概念を用いて, Genuine Multipartite Entanglement Measure $\mathcal{E}$ は, 以下の性質によって定義される:

1. $\mathcal{E}$ は, 任意の fully separable 状態に対してゼロでなければならない. この条件によって, エンタングルメントを持たない状態を正しく識別することができる.
2. $\mathcal{E}$ は, 任意の bi-separable 状態に対してもゼロでなければならない. これによって, 測度が真の多体量子エンタングル状態と, 二つに分離した場合にのみエンタングルメントを持つ状態とを区別できる.
3. $\mathcal{E}$ は, すべての non-separable 状態に対して厳密に正でなければならない. これは, 真の多体量子エンタングルメントを示すすべての状態に感度を持つという点で重要である.
4. $\mathcal{E}$ は, 局所操作と古典通信 (LOCC) の下で, 平均的に非増加でなければならない. この性質を満たす測度は, LOCC monotone, あるいは entanglement monotone と呼ばれる.

3.5.2 多体相互情報量 (multi-mutual information)

多体量子相関を測る量として多体相互情報量を紹介する [93].

二体の相互情報量は (3.4.160) で与えられた. この式を三体に拡張し, 以下のよう
に三体相互情報量 $I(A : B : C)$ を定義する.

$$\begin{aligned} I_3(A : B : C) &= S(A) + S(B) + S(C) - S(AB) - S(AC) - S(BC) + S(ABC) \\ &= I(A : B) + I(A : C) - I(A : BC) \end{aligned} \quad (3.5.186)$$

定義から明らかに, 場の理論や重力の計算で現れる UV 発散は打ち消していることがわかる. さらにこれを n 体相互情報量まで拡張すると以下のように書ける.

$$I_n(A_1, \dots, A_n) = \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|-1} S(\sigma) \quad (3.5.187)$$

ここで σ は $\{A_1, \dots, A_n\}$ に対する部分集合であり, $|\sigma|$ はその集合のサイズを表す.

以下では三体相互情報量に対するホログラフィックな重力の計算から不等式

$$I_3(A : B : C) \leq 0 \quad (3.5.188)$$

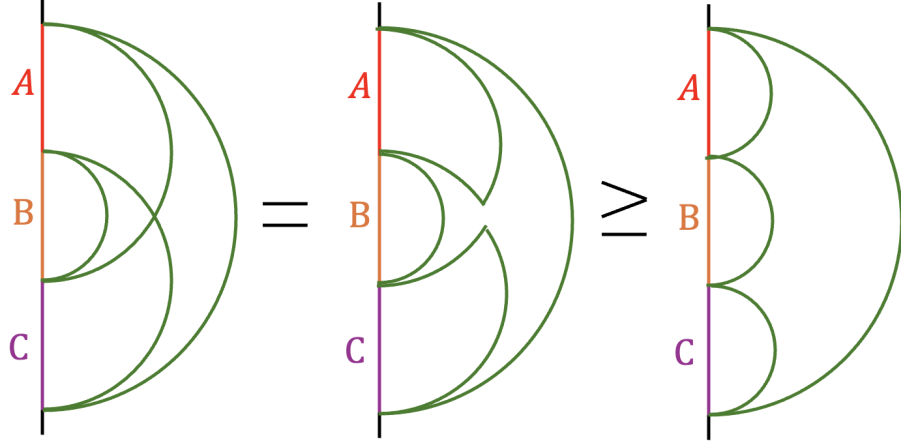


図 3.18: 3 次元 Poincaré 座標における時間一定面上の三体相互情報量の幾何的な計算.

が示されることを見ていこう. 上式は定義を用いると

$$S(AB) + S(AC) + S(BC) \geq S(A) + S(B) + S(C) + S(ABC) \quad (3.5.189)$$

と変形できる. ここで図 3.18 を見ると, 笠-高柳公式における最小化条件から明らかに上式が成り立つことがわかる. この時, 相互情報量を用いると

$$I(A : B) + I(A : C) \leq I(A : BC) \quad (3.5.190)$$

のように書くことができる. これは「ある量子系 A, B が最大エンタングル状態である時に, これらはその他の量子系 C とはエンタングルできない」という

$$E(A : B) + E(A : C) \leq E(A : BC) \quad (3.5.191)$$

で与えられる monogamy 性を反映していることがわかる. ここで E はエンタングルメント測度である. このようにして, ホログラフィで示された不等式は monogamy of mutual information と呼ばれる [93].

また, 四体 GHZ 状態

$$|GHZ_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1111\rangle) \quad (3.5.192)$$

に対する三体相互情報量が $I_3(|GHZ_4\rangle) = 1$ であることからホログラフィにおいて GHZ 状態は実現できない, つまり GHZ 状態は古典的な重力双対として実現できないことが知られている.

3.5.3 Markov Gap

三体相関を示唆する量として Markov gap を紹介する [85, 86].

ある二体状態 ρ_{AB} から三体状態 ρ_{ABC} を構成する方法を Markov recovery map という. この時, 量子通信路 $\mathcal{R}_{B \rightarrow BC}$ は以下のように表される.

$$\rho_{ABC} = \mathcal{R}_{B \rightarrow BC}(\rho_{AB}) \quad (3.5.193)$$

このようにして完全に状態が構成できる状態 ρ_{ABC} を quantum Markov chain と呼ぶ. さらに, ある三体状態が quantum Markov chain であるかどうかは節 3.1.2 で見た条件付き相互情報量 $I(A : C|B)$ を用いて判定できることが知られている. $I(A : C|B) = 0$ の時には ρ_{ABC} は quantum Markov chain であり, $I(A : C|B) \neq 0$ の時にはそうでない. このように条件付き相互情報量は三体状態の quantum Markov chain からの隔たりを表すので Markov gap と呼ばれる.

さらに, (3.4.175) で見たように条件付き相互情報量の特別な場合には reflected entropy $S_R(A : B)$ と相互情報量 $I(A : B)$ の差で表される. したがってホログラフィの分野ではしばしば $S_R - I$ が Markov gap と呼ばれる. また, ホログラフィにおいて (3.4.174) が成り立つことから, 三体相関の存在を示唆していることがわかる [86].

しかしここで Markov gap は GHZ 状態 (3.5.176) に対して 0 の値を与えるので, 節 3.5.1 で見た genuine multipartite entanglement measure の条件 3 を満たさないことにも注意しておく [91].

3.5.4 Multi-Entropy

多体量子相関 (multi-partite entanglement) を測る測度として, 二体量子相関であるエンタングルメントエントロピーの場の理論における計算方法であるレプリカ法 (節 3.2) を多体の場合に自然に拡張した, multi-entropy について紹介する [63, 69, 87, 94–97].

Multi-Entropy の定義

これまで見てきたレプリカ法を複数の部分領域の場合に拡張することで多体量子相関を測る multi-entropy を定義する.

まず, 二体相関の場合を少し復習しておく. 部分領域 A, B に対して Hilbert 空間 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ を考えると, 密度行列は以下のように書ける.

$$\rho_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} = |\alpha\rangle |\beta\rangle \langle\alpha| \langle\beta| \quad (3.5.194)$$

ここで, bra の添え字は分かりやすさのためにプライムをつけている. この時, 部分領域 A についての縮約密度行列 ρ_A は

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB} = |\alpha\rangle \langle\alpha| (= \rho_{\alpha}^{\alpha'}) \quad (3.5.195)$$

となる. さらに密度行列の n 個の積のトレースを取ると,

$$\begin{aligned} \text{Tr} \rho_A^n &= \rho_{\alpha_1}^{\alpha_2} \rho_{\alpha_2}^{\alpha_3} \cdots \rho_{\alpha_n}^{\alpha_1} \\ &= \rho_{\alpha_1}^{\alpha_{\sigma(1)}} \rho_{\alpha_2}^{\alpha_{\sigma(2)}} \cdots \rho_{\alpha_n}^{\alpha_{\sigma(n)}} \end{aligned} \quad (3.5.196)$$

のようになる. ここで σ は巡回群 $\mathbb{Z}_n$ の元であり, ここではレプリカ対称性 $\mathbb{Z}_n$ を反映してこれらの置換で不変であることを要請している.

ここで実は σ は巡回群の任意の元を取ってきていいわけではない. トレース操作の中に全ての密度行列が入っていることから, path integral においては replica の全てのシートを回る必要があるので, σ は巡回群の生成元である必要がある. つまり, 巡回群の元で $(123)(456)$ などのように分解されるものは除かれる.

図 3.19 に例として $n = 3$ の巡回群の元として $\sigma = (132)$ を取った時の上の関係式をレプリカ多様体で表した.

このようにして得られる $\text{Tr}[\rho_A^n]$ を用いて (3.2.54) から Rényi エントロピーが求まり, $n \rightarrow 1$ の極限でエンタングルメントエントロピーを得る.

ここから q 個の部分領域 $A_1, \dots, A_q$ に対する Hilbert 空間 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \cdots$ を考える. 密度行列は以下のように書ける.

$$\rho_{\alpha\beta\cdots}^{\alpha'\beta'\cdots} = |\alpha\rangle |\beta\rangle \cdots \langle\alpha| \langle\beta| \cdots \quad (3.5.197)$$

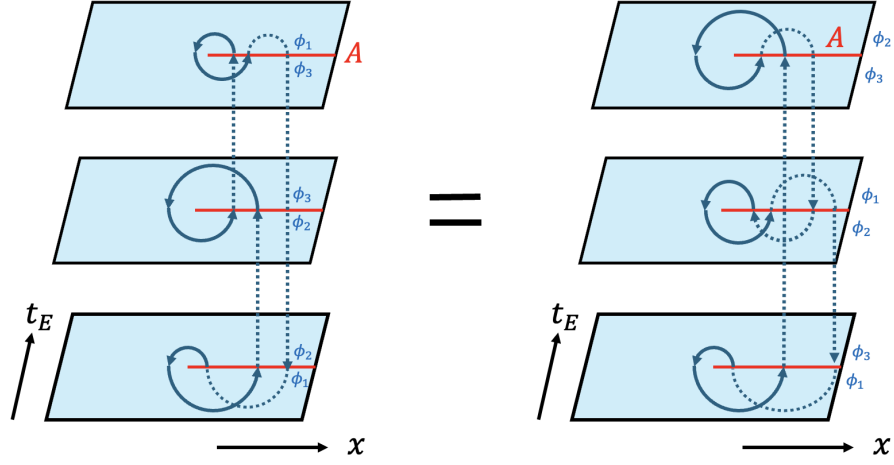


図 3.19: $\sigma = (132) \in \mathbb{Z}_3$ として添え字を置換した際の replica 対称性から要請される等式

ここで Rényi multi-entropy が以下のように定義される.

$$S_n^{(q)} = \frac{1}{1-n} \frac{1}{n^{q-2}} \log \left[\frac{\text{Tr}[\rho^{n^{q-1}}]}{(\text{Tr}[\rho])^{n^{q-1}}} \right] \quad (3.5.198)$$

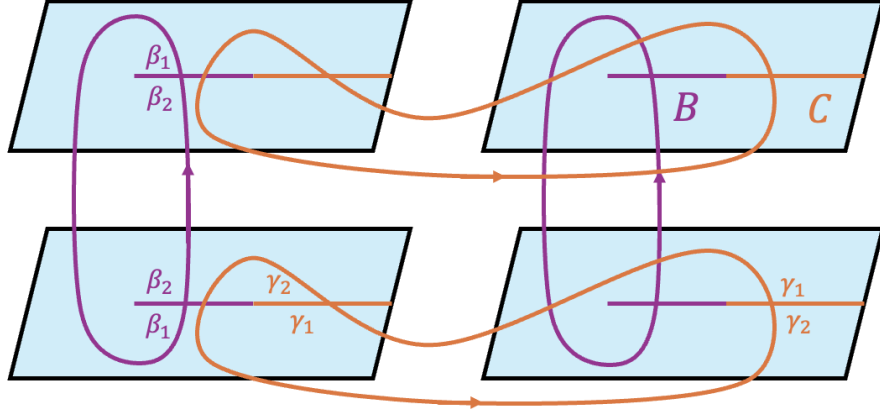
ここで ρ が適切に規格化されているときは右辺の対数の中の分母は 1 になる. さらに $n \rightarrow 1$ の極限を取ることで multi-entropy を得る.

$$S^{(q)} \equiv \lim_{n \rightarrow 1} S_n^{(q)} \quad (3.5.199)$$

定義から明らかに $q = 2$ の時にはそれぞれ元の Rényi entropy (3.2.54) とエンタングルメントエントロピー (3.2.51) に帰着することを注意しておく. ここで問題となるのは $\text{Tr} \rho^{n^{q-1}}$ におけるトレースの取り方である. n 個の replica を考えた時の replica 対称性は $\mathbb{Z}_n^q$ であり, これらに対応して $\sigma_A, \sigma_B, \dots \in \mathbb{Z}_n$ で与えられる巡回群の元を各添え字に作用させることができる. この時, 巡回群の元のラベルは全体として入れ替えが可能なので置換群 $\mathbb{S}_n$ に埋め込んだ時に同値関係として

$$(\sigma_A, \sigma_B, \dots) \sim (\sigma_A, \sigma_B, \dots)g, \quad g \in \mathbb{S}_n \quad (3.5.200)$$

が存在する. したがって $g = \sigma_A^{-1}$ を取ると, このトレースは σ_B 以降の $(q-1)$ 個の巡回群で決まる. この操作は部分領域 A に対してのみトレースを取って縮約密

図 3.20: $q = 3, n = 2$ における replica 多様体

密度行列を作る作業と同じである. ここで n^{q-1} 個の密度行列, もしくは replica 多様体を考えるのは各部分領域毎に n 個の replica を考えるからである.

例として, $q = 3$ として三つの部分領域 A, B, C を考える.

まずは, $n = 2$ の Rényi multi-entropy を求めよう. その時 $\sigma_A = e$ として単位元になるように取ると, 残った replica 対称性は $\mathbb{Z}_2^{(B)} \times \mathbb{Z}_2^{(C)}$ である. これらはそれぞれ部分領域 B, C に対する replica 対称性の直積で与えられている.

$$\mathbb{Z}_2 = \{a \mid a^2 = e\} = \{e, r\} \quad (3.5.201)$$

ここで e は単位元であり, r は反転操作を表す元である ($r^2 = e$). この時, r は $\mathbb{Z}_2$ の生成元であるのでトレースを取る際に作用させることができる. したがって, 密度行列の積は

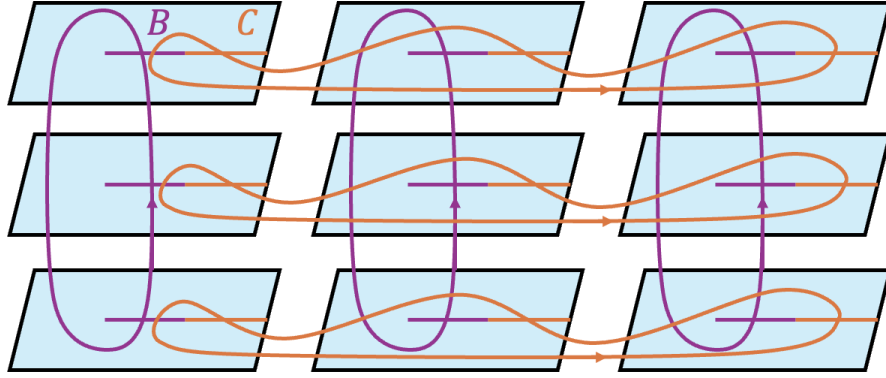
$$\text{Tr}[\rho^4] = \rho_{\beta_1\gamma_1}^{\beta_2\gamma_2} \rho_{\beta_2\gamma_1}^{\beta_1\gamma_2} \rho_{\beta_1\gamma_2}^{\beta_2\gamma_1} \rho_{\beta_2\gamma_2}^{\beta_1\gamma_1} \quad (3.5.202)$$

のように書くことができ, この時 4 つの replica 多様体を図示すると図 3.20 のようになる. これを用いて Rényi multi-entropy は

$$S_{n=2}^{(q=3)} = -\frac{1}{2} \log \left[\frac{\text{Tr}[\rho^4]}{(\text{Tr}[\rho])^4} \right] \quad (3.5.203)$$

と書ける.

次に, $q = 3, n = 3$ を考えるとこれは $3^{3-1} = 9$ 個の replica を考える必要がある.

図 3.21: $q = 3, n = 3$ における replica 多様体

この時, replica 対称性は $\mathbb{Z}_3^{(B)} \times \mathbb{Z}_3^{(C)}$ である.

$$\mathbb{Z}_3 = \{a \mid a^3 = e\} = \{e, (123), (132) = (123)^2\} \quad (3.5.204)$$

ここで (123) のような表記は $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ のような変換であることを表している. $(123), (132)$ は共に生成元であるのでトレースを取る際に作用させることができる. どちらを作用させても等価なので (123) を作用させると図 3.21 のように 9 個の密度行列のトレースが計算される. これを用いて同様に Rényi multi-entropy $S_{n=3}^{(q=3)}$ が得られる.

最後に, $q = 3, n = 4$ を考えるとこれは $4^{3-1} = 16$ 個の replica を考える必要がある. この時, replica 対称性は $\mathbb{Z}_4^{(B)} \times \mathbb{Z}_4^{(C)}$ である.

$$\mathbb{Z}_4 = \{a \mid a^4 = e\} = \{e, \tau = (1234), \tau^2 = (13)(24), \tau^3 = (1432)\} \quad (3.5.205)$$

ここで, 生成元は群の全ての元を生成できるものであるので, τ^k の中で k と n が互いに素でないものは除かれる. つまり, $\tau^2 = (13)(24)$ はトレースの中に作用させるものとして適していない. $\tau = (1234), \tau^3 = (1432)$ は共に生成元であるのでトレースを取る際に作用させることができる. どちらを作用させても等価なので (1234) を作用させる. 今までと同様に 16 個の密度行列のトレースが計算され, これを用いて同様に Rényi multi-entropy $S_{n=4}^{(q=3)}$ が得られる.

$q = 4$ の時は replica の数は n^3 になり, ここで考えるべき replica 多様体は各辺に n 個の replica sheet が並んだ立方体になる. このように部分領域が増えれば増え

るほど次元をあげて replica 多様体を並べると考えると良い.

ここでは密度行列のトレースの取り方に注目して例を見たが, 実際に計算する際には扱うモデルに依存した経路積分を行う必要がある.

Genuine Multi-Entropy

ここまで見てきたように multi-entropy は二体相関のエンタングルメントエントロピーを自然に拡張するように定義されており, 多体量子相関を捉えることができていると考えられるが, これは二体相関を持つような多体系でもノンゼロの値を出すので Genuine Multipartite Entanglement Measure ではない. ここで N 体相関を真に測ることができるような multi-entropy として, 以下のように genuine multi-entropy を定義する [63, 87].

まず, $q = 3$ の三体相関についての genuine multi-entropy (GM) は以下の genuine Rényi multi-entropy の $n \rightarrow 1$ の極限として定義される.

$$GM_n^{(3)}(A : B : C) \equiv S_n^{(3)}(A : B : C) - \frac{1}{2} \left(S_n^{(2)}(A : BC) + S_n^{(2)}(B : CA) + S_n^{(2)}(C : AB) \right) \quad (3.5.206)$$

ここで $S_n^{(2)}$ は二体相関に対する Rényi multi-entropy であるが, これは通常の Rényi entropy と一致する. 上式で定義される $GM_n^{(3)}(A : B : C)$ は任意の bi-separable 状態に対してゼロの値を与え, さらに後に見るような重力双対を用いて少なくともホログラフィックには正であることが示されている.

次に, $q = 4$ の四体相関についての genuine multi-entropy (GM) は以下のような genuine Rényi multi-entropy の $n \rightarrow 1$ の極限として定義される.

$$\begin{aligned} GM_n^{(4)}(A : B : C : D) &\equiv S_n^{(4)}(A : B : C : D) \\ &- \frac{1}{3} \left(S_n^{(3)}(AB : C : D) + S_n^{(3)}(AC : B : D) + S_n^{(3)}(AD : B : C) \right. \\ &\quad \left. + S_n^{(3)}(BC : A : D) + S_n^{(3)}(BD : A : C) + S_n^{(3)}(CD : A : B) \right) \\ &+ a \left(S_n^{(2)}(AB : CD) + S_n^{(2)}(AC : BD) + S_n^{(2)}(AD : BC) \right) \\ &+ b \left(S_n^{(2)}(ABC : D) + S_n^{(2)}(ABD : C) + S_n^{(2)}(ACD : B) + S_n^{(2)}(BCD : A) \right) \end{aligned} \quad (3.5.207)$$

ここで係数の a, b は

$$a + b = \frac{1}{3} \quad (3.5.208)$$

を満たす任意の実数である. さらに三体の genuine multi-entropy を用いて書き直すと,

$$\begin{aligned} GM_n^{(4)}(A : B : C : D) & \equiv S_n^{(4)}(A : B : C : D) \\ & - \frac{1}{3} \left(GM_n^{(3)}(AB : C : D) + GM_n^{(3)}(AC : B : D) + GM_n^{(3)}(AD : B : C) \right. \\ & \quad \left. + GM_n^{(3)}(BC : A : D) + GM_n^{(3)}(BD : A : C) + GM_n^{(3)}(CD : A : B) \right) \\ & + \tilde{a} \left(S_n^{(2)}(AB : CD) + S_n^{(2)}(AC : BD) + S_n^{(2)}(AD : BC) \right) \\ & + \tilde{b} \left(S_n^{(2)}(ABC : D) + S_n^{(2)}(ABD : C) + S_n^{(2)}(ACD : B) + S_n^{(2)}(BCD : A) \right) \end{aligned} \quad (3.5.209)$$

ここで係数 $\tilde{a}, \tilde{b}$ は以下のような関係式を満たす.

$$\tilde{a} = a - \frac{1}{3}, \quad \tilde{b} = b - \frac{1}{2}, \quad \tilde{a} + \tilde{b} = -\frac{1}{2} \quad (3.5.210)$$

このようにして定義された $GM_n^{(4)}(A : B : C : D)$ は純粋な二体相関や三体相関のみで構成されたエンタングル状態に対してはゼロの値を与え, $GM_n^{(3)}$ の時と同様にホログラフィックには正になることが示されている. 実際に

$$|\psi_1\rangle_{ABC} \otimes |\psi_2\rangle_D, \quad |\psi_1\rangle_{AB} \otimes |\psi_2\rangle_{CD} \quad (3.5.211)$$

のような bi-separable 状態に対して値がゼロになることが確認されている [87].

さらに高次の q 体相関に関しても同様に, 任意の bi-separable 状態に対してゼロを与えるような線型結合として genuine multi-entropy は構成される.

GHZ 状態での例

以下でも, $q = 3$ として 3 つの部分領域 A, B, C を考える.

2 準位系の GHZ 状態

$$|\text{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle) \quad (3.5.212)$$

に対して, $n = 2$ の Rényi multi-entropy を求める. 部分領域 C をトレースアウトすると縮約密度行列は

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) \quad (3.5.213)$$

となる. (3.5.198) で与えられる定義に入れると $\text{Tr}[\rho_{AB}^4]$ は全てが $|00\rangle$ か $|11\rangle$ で構成された項のみ残る. したがって

$$S_{2|GHZ}^{(3)} = \frac{3}{2} \log 2 \quad (3.5.214)$$

となる. 一般に d 準位系の n -Rényi multi-entropy で

$$S_{n|GHZ}^{(3)} = \frac{n+1}{n} \log 2 \quad (3.5.215)$$

となることも計算されている [87, 98]. ここで $n \rightarrow 1$ の極限を取ると multi-entropy は

$$S_{|GHZ}^{(3)} = 2 \log 2 \quad (3.5.216)$$

さらに, GHZ 状態では各 bi-partite 状態に対して $\log 2$ のエンタングルメントエントロピーを与えるので, (3.5.206) より genuine multi-entropy は

$$GM^{(3)} = 2 \log 2 - \frac{1}{2}(\log 2 + \log 2 + \log 2) = \frac{1}{2} \log 2 > 0 \quad (3.5.217)$$

となる. ここで genuine multi-entropy は GHZ 状態に対して正の値を与えることがわかる.

2 次元 CFT での例 [63]

multi-entropy は replica 法を自然に拡張したものであり, 節 3.2 で見た 2 次元 CFT におけるエンタングルメントエントロピーの導出方法をナイーブに拡張することで値を得られるが, いくつかの注意点を明記するだけに留めておく.

- エンタングルメントエントロピーの計算の際は, 部分領域一つに対して二つの端点にツイスト演算子を挿入し, ツイスト演算子の二点関数を計算することで Rényi entropy が計算できた. ここで Rényi multi-entropy の計算では部分領域が二つあるので, これらが隣接している場合は三つのツイスト演算子を各端点に挿入して三点関数を計算する. これらが隣接していない場合は

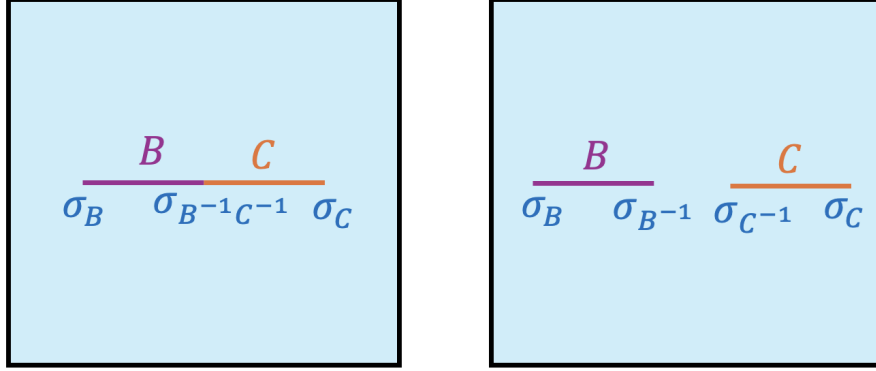


図 3.22: multi-entropy を考える際のツイスト演算子の挿入. 隣接した部分領域 (左図) と隣接していない部分領域 (右図).

各端点に四つのツイスト演算子を挿入し, 四点関数を計算する必要がある (図 3.22 参照).

- 挿入すべきツイスト演算子はそれぞれ各場をどの replica 場に移すかを決めるので, ここではその性質は replica 対称性 $\mathbb{Z}_n^{(A)} \times \mathbb{Z}_n^{(B)} \times \dots$ に依存する. 各領域の端点は $\mathbb{Z}_n$ の生成元 a に対応するツイスト演算子の挿入が必要である. さらに場が部分領域を一周した時に不要な位相を獲得しないために, ある端点で a に対応するツイスト演算子を入れた時, もう片方の端点には $a^{-1} = a^{n-1}$ に対応するツイスト演算子を挿入する必要がある (図 3.22 参照). ここで a は $\mathbb{Z}_n$ の元なので $a^n = e$ であることに注意. 一般の q, n に対して挿入すべきツイスト演算子の共形次元は

$$\Delta = \frac{cn^{q-2}}{12} \left(n - \frac{1}{n} \right) \quad (3.5.218)$$

で与えられる.

- 一般に q 個の部分領域や n 個の replica で Rényi multi-entropy を厳密に計算することは非常に困難である. したがって, n についての一般形を得ることはできず, $n \rightarrow 1$ の極限を取って multi-entropy を求めることも難しい. 技術的に複雑なので本修士論文では取り扱わないが, $q = 3$ かつ $n = 2$ の時

の隣接する部分領域に対する計算結果は [63] で与えられており,

$$S_2^{(3)} \simeq \frac{c}{8} \log \left[\frac{x_{12}x_{23}x_{13}}{\epsilon^3} \right] + \frac{c}{4} \log 2 \quad (3.5.219)$$

となる. ここで各領域の端点を $x = x_1, x_2, x_3$ としており, $x_{ij} = |x_j - x_i|$ と表している. ここで第一項は二体相関で現れる Rényi entropy と考えられるので, それを除いた第二項が, 三体相関に対する genuine multi-entropy に対応すると考えられる.

また, 第一項の座標依存するところは共形対称性から一般の n に対して求めることを見ておく. 上記の通り, Rényi multi-entropy はツイスト演算子の三点関数を用いて

$$S_n^{(3)} = \frac{1}{1-n} \frac{1}{n} \log[\langle \sigma_B(x_1) \sigma_{B^{-1}C^{-1}}(x_2) \sigma_C(x_3) \rangle] \quad (3.5.220)$$

のように書ける. さらに共形対称性から $q = 3$ で共形次元 $\Delta = \frac{c}{12}(n^2 - 1)$ を持つツイスト演算子の三点関数について (2.2.126) より

$$\langle \sigma_B(x_1) \sigma_{B^{-1}C^{-1}}(x_2) \sigma_C(x_3) \rangle = \frac{C_n}{(x_{12}x_{23}x_{13})^{\frac{c}{12}(n^2-1)}} \quad (3.5.221)$$

と書ける. ここで C_n はどの CFT を扱うかによって決まる演算子積展開の係数である. したがって,

$$S_n^{(3)} = \frac{c}{12} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \log[x_{12}x_{23}x_{13}] + \frac{1}{1-n} \frac{1}{n} \log[C_n] \quad (3.5.222)$$

で与えられる. よって, multi-entropy は

$$S^{(3)} = \frac{c}{6} \log[x_{12}x_{23}x_{13}] - \partial_n \log[C_n]|_{n=1} \quad (3.5.223)$$

で与えられる. 第二項が genuine multi-entropy に対応する部分であるが, 上記の通り一般の形で求めるのは難しい.

Holographic Multi-Entropy

エンタングルメントエントロピーにホログラフィ原理の文脈で笠-高柳公式で与えられる重力双対があったように, multi-entropy にも同様に重力双対が提案されている. 各領域の端点からバルクに伸ばした面 γ を繋ぎ, 最終的な曲面が各領域

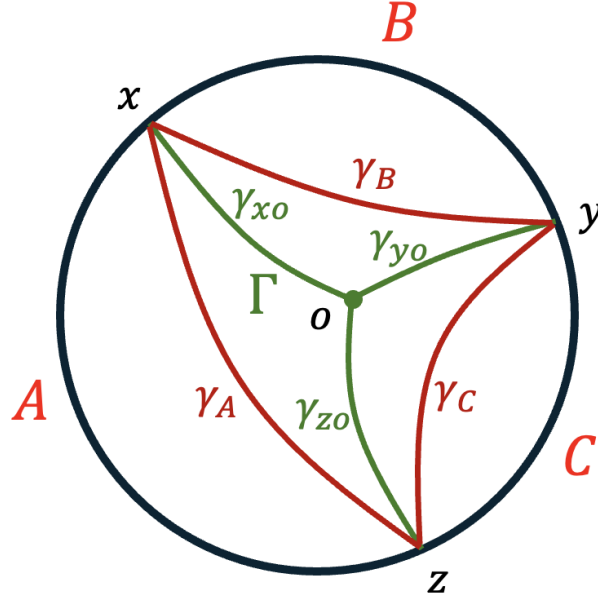


図 3.23: 3 次元 AdS 時空の時間一定面上における $q = 3$ の Holographic Multi-Entropy

と homologous になるように取ってくる. その時の曲面を Γ とすると holographic multi-entropy は

$$S^{(q)} = \text{MinExt}_{\Gamma} \frac{\text{Area}(\Gamma)}{4G_N} \quad (3.5.224)$$

で与えられる.

簡単のために 3 次元 AdS 時空を扱う. まず, $q = 3$ の三体相関から扱うことにすると, multi-entropy $S^{(3)}$ の重力双対は図 3.23 のように与えられる. ここで図の Γ は homologous 条件を満たしていることを確認されたい. さらに極小曲面であることからこれらは全て測地線で構成されていることに注意すると,

$$\Gamma = \gamma_{xo} + \gamma_{yo} + \gamma_{zo} \quad (3.5.225)$$

として Γ を定義している. さらに genuine multi-entropy は (3.5.206) を用いると上記の値から $\gamma_A, \gamma_B, \gamma_C$ を 2 で割った値を引けば良い.

$$\begin{aligned} GM^{(3)}(A : B : C) &= \frac{\gamma_{xo} + \gamma_{yo} + \gamma_{zo}}{4G_N} - \frac{1}{2} \frac{1}{4G_N} (\gamma_A + \gamma_B + \gamma_C) \\ &= \frac{1}{8G_N} (\gamma_{xo} + \gamma_{zo} - \gamma_A) + \frac{1}{8G_N} (\gamma_{yo} + \gamma_{xo} - \gamma_B) \\ &\quad + \frac{1}{8G_N} (\gamma_{zo} + \gamma_{yo} - \gamma_C) \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.5.226)$$

ここで γ_A は x, z を結ぶ極小曲面なので $\gamma_{xo} + \gamma_{zo} - \gamma_A \geq 0$ であり, 他の項も正であることから全体として holographic genuine multi-entropy は必ず正になることがわかる.

実際に対称性の強い 3 次元 AdS 時空では具体的に $GM_n^{(3)}(A : B : C)$ を求めることができる. 一般の部分領域を対照的な共形変換で対称的な部分領域に移すことができ (図 3.24), この時それぞれの測地線の長さは変わるが, 測地線の線型結合で表される $GM_n^{(3)}(A : B : C)$ はその変化分が打ち消しあって変わらない.

3 次元 AdS 時空上の三点 i, j, k を結ぶ測地線で構成された三角形を考え, 点 k における角度が ϕ の時,

$$\cosh(\gamma_{ij}) = \cosh(\gamma_{ik}) \cosh(\gamma_{jk}) - \sinh(\gamma_{ik}) \sinh(\gamma_{jk}) \cos \phi \quad (3.5.227)$$

という関係式が成り立つ. さらに 2 点 i, j を境界に近づける極限を取った時,

$$\gamma_{ij} + 2 \log \left(\frac{1}{\sin \frac{\phi}{2}} \right) = \gamma_{ik} + \gamma_{jk} \quad (3.5.228)$$

という関係式に変わる. この時, $GM_n^{(3)}(A : B : C)$ はそれぞれの三角形 xoy, yoz, zox が o での角度 $\frac{2\pi}{3}$ であることから

$$GM^{(3)}(A : B : C) = \frac{c}{2} \log \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (3.5.229)$$

となる. ここで Brown-Henneaux 関係式を用いてニュートン定数を中心電荷 c で書き換えた. これは holography においては三体相関が $O(1/G_N)$ で存在することを示唆しており, 多体相関の重要性を読み取ることができる.

次に, $q = 4$ の四体相関については holographic multi-entropy を与える重力双対の候補が二つあり, 図 3.25 の左図のような場合には二体相関の寄与を引くと

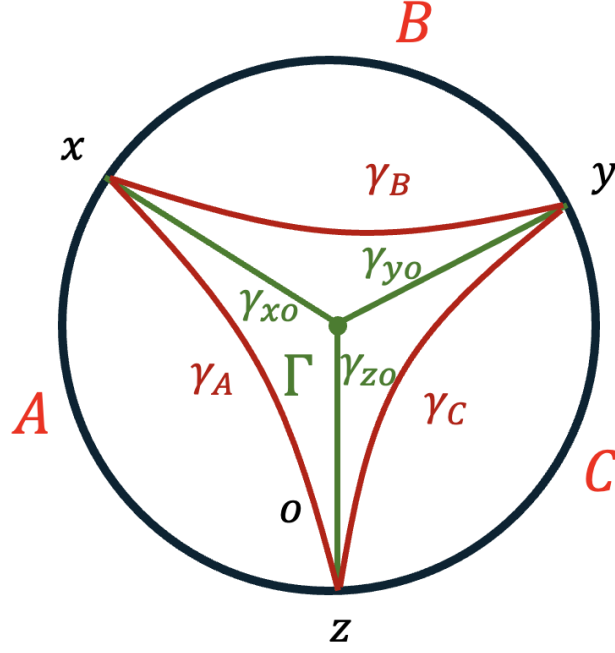
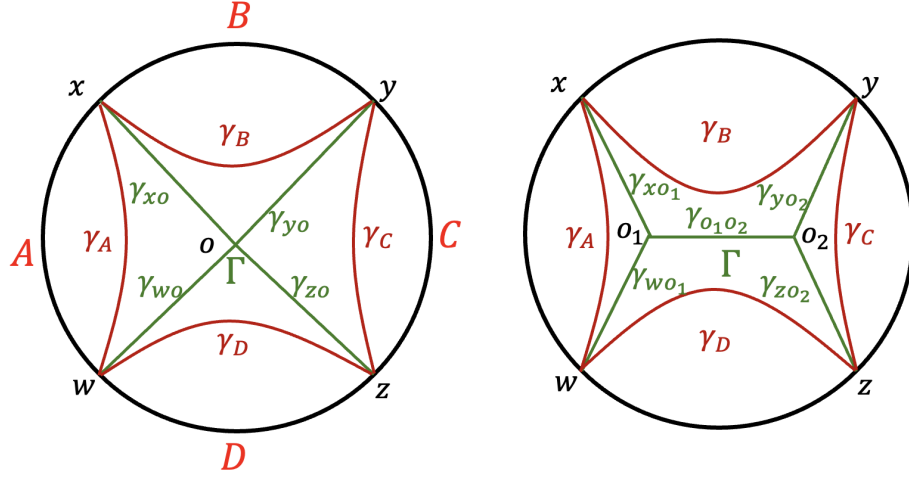


図 3.24: 共形変換によって対称的な部分領域に移された場合の Holographic Multi-Entropy

$$\begin{aligned}
 & S^{(4)}(A : B : C : D) \\
 & - \frac{1}{2} \left(S^{(2)}(A : BCD) + S^{(2)}(B : ACD) + S^{(2)}(C : ABD) + S^{(2)}(D : ABC) \right) \\
 & = \frac{1}{8G_N} (\gamma_{xo} + \gamma_{yo} - \gamma_A) + \frac{1}{8G_N} (\gamma_{yo} + \gamma_{zo} - \gamma_B) \\
 & \quad + \frac{1}{8G_N} (\gamma_{zo} + \gamma_{wo} - \gamma_C) + \frac{1}{8G_N} (\gamma_{wo} + \gamma_{xo} - \gamma_D) \\
 & > 0
 \end{aligned}
 \tag{3.5.230}$$

図 3.25: $q = 4$ の Holographic Multi-Entropy

となり, 図 3.25 の右図のような場合には

$$\begin{aligned}
 & S^{(4)}(A : B : C : D) \\
 & - \frac{1}{2} \left(S^{(2)}(A : BCD) + S^{(2)}(B : CDA) + S^{(2)}(C : DAB) + S^{(2)}(D : ABC) \right) \\
 & = \frac{1}{8G_N} (\gamma_{xo2} + \gamma_{o1o2} + \gamma_{yo1} - \gamma_A) + \frac{1}{8G_N} (\gamma_{yo1} + \gamma_{zo1} - \gamma_B) \\
 & + \frac{1}{8G_N} (\gamma_{zo1} + \gamma_{o1o2} + \gamma_{wo2} - \gamma_C) + \frac{1}{8G_N} (\gamma_{wo2} + \gamma_{xo2} - \gamma_D) > 0.
 \end{aligned} \tag{3.5.231}$$

のようにして多体量子相関が holography で重要な寄与を与えることがわかる. ここでは三体量子相関の寄与を引いていないことに注意する.

局所クエンチを用いた multi-entropy の解析

節 3.3.3 で局所クエンチに対して自由落下する粒子が重力理論における対応物であることを確認した [81]. 以下では同様のセットアップで holographic multi-entropy がどのように変化するかを計算しよう [99].

自由粒子の落下によって得られるバックリアクションを考慮した Poincaré 座標を求め, (3.3.155) のように書き, 測地線に対して (3.3.156) の公式を用いて変化分を

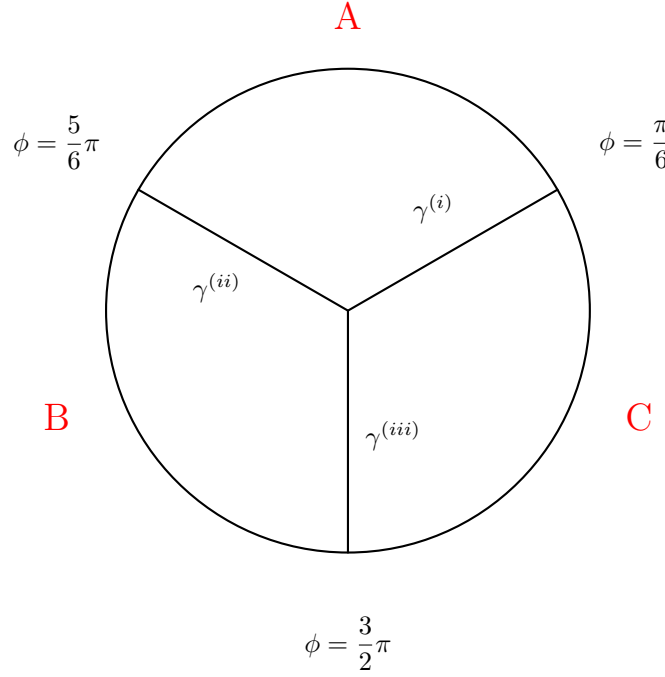


図 3.26: 考える部分領域と tripartite multi-entropy の局所曲面.

計算する. ここで簡単のために部分領域 A, B, C は global 座標で対称的であるが Poincaré 座標では非対称になるようなものとして図 3.26 のように取る.

この時, Poincaré 座標における部分領域はそれぞれ

$$\begin{aligned}
 A : z = \epsilon, t = t_P, (2 - \sqrt{3})R \leq x \leq (2 + \sqrt{3})R, \\
 B : z = \epsilon, t = t_P, -R \leq x \leq (2 - \sqrt{3})R, \\
 C : z = \epsilon, t = t_P, x \leq -R, (2 + \sqrt{3})R \leq x.
 \end{aligned} \tag{3.5.232}$$

となり, 測地線は $t = 0$ の時間一定面で以下のような三つの部分として表せる.

$$\begin{aligned}
 (i) : t = t_P, z^2 + (x - \sqrt{3}R)^2 &= 4R^2, \\
 (ii) : t = t_P, z^2 + (x + \sqrt{3}R)^2 &= 4R^2, \\
 (iii) : t = t_P, z^2 + x^2 &= R^2.
 \end{aligned} \tag{3.5.233}$$

この測地線は図 3.27 に図示した.

この測地線を用いて計算した holographic multi-entropy の増加分 $\Delta S_A^{(3)}$ は非

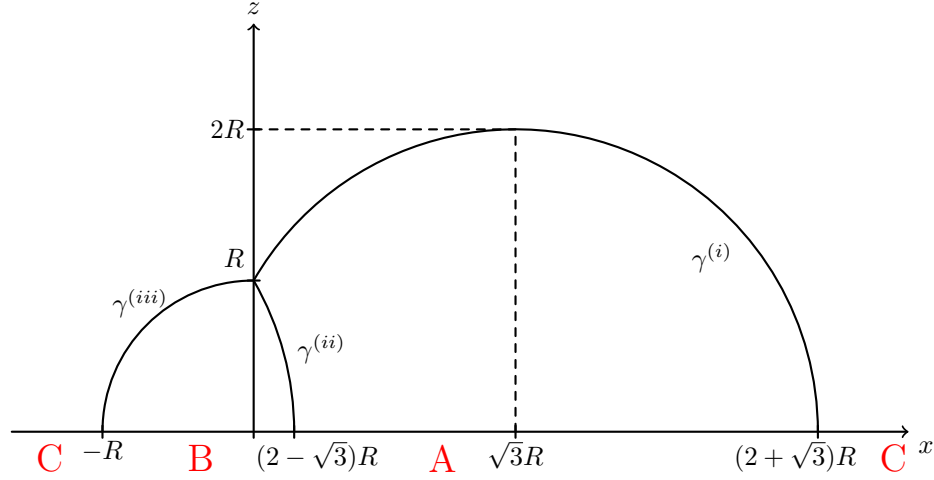


図 3.27: Poincaré 座標に変換した極小曲面.

常に複雑ではあるが解析的に得られ, プロットしたものを図 3.28 に図示する. ここで genuine multi-entropy が消えることから, 測地線の変化分だけを見ているような摂動計算では multi-entropy の寄与は bipartite の寄与しか捉えられないことがわかる. つまり, 巻き付きを考慮しない一つの測地線だけを見ていることが原因である. このように摂動計算で genuine tri-entropy がゼロになることは任意の部分領域の取り方に対して示される [99].

次に, 3 次元 AdS 時空において厳密な計算を見ていく. BTZ ブラックホール座標 (2.1.51) を用いると holographic tripartite multi-entropy は

$$S^{(3)} = \frac{3R}{4G_N} \log \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \right] + \frac{R}{8G_N} \sum_{1 \leq i \leq j \leq 3} \log[-2r_\infty^{(i)} r_\infty^{(j)} P_i \cdot P_j] \quad (3.5.234)$$

と書けることが知られている [100]. ここで $X_i = r_\infty P_i + \mathcal{O}(r_\infty^0)$ である. これを摂動計算の時と同様に (3.3.154) を用いて変換すると有限の M に対しても holographic multi-entropy を計算することができる. また, 摂動計算と違ってブラックホールに対しての測地線の巻き付きを考慮して計算することによって非自明な genuine multi-entropy を計算することができる.

BTZ ブラックホール座標を用いて, 二体相関と三体相関に対応するそれぞれの測

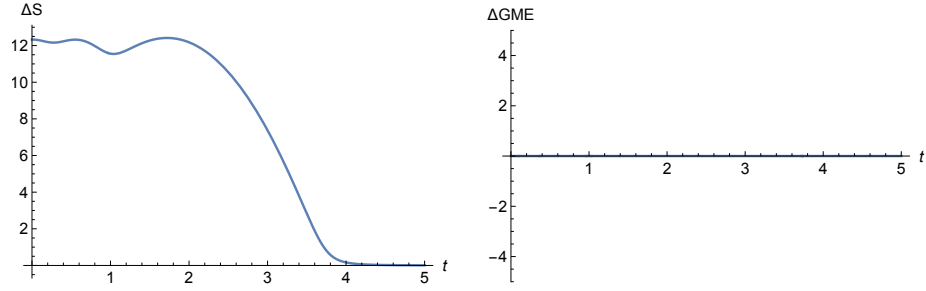


図 3.28: 摂動的に計算した局所量子クエンチにおける holographic tri-entropy (左図) と holographic genuine tri-entropy (右図) の増加分. ここで $8G_N = 1$, $\delta = 1$, $R = 1$ とした.

地線長は以下のように与えられる.

$$L^{(2)}(m_{ij}) = R \log \left[\frac{2r_\infty^{(i)} r_\infty^{(j)}}{R^2 - M} I_{ij}(m_{ij}) \right], \quad (3.5.235)$$

$$L^{(3)}(\mathbf{m}) = \frac{R}{2} \log [I_{12}(\mathbf{m}) I_{23}(\mathbf{m}) I_{31}(\mathbf{m})] + R \sum_{i=1}^3 \log \left[\frac{r_\infty^{(i)}}{\sqrt{R^2 - M}} \right] + \frac{3R}{2} \log \left[\frac{8}{3} \right]. \quad (3.5.236)$$

ここで I_{ij} は不変長さであり以下で与えられる.

$$I_{ij} = \cos \left(\sqrt{R^2 - M} (t_i - t_j) \right) - \cos \left(\sqrt{R^2 - M} (\phi_i - \phi_j + 2\pi m_{ij}) \right) \quad (3.5.237)$$

さらにここで, 境界の部分領域の端点を $i = 1, 2, 3$ でラベルし, m_{ij} は $i - j$ 間の測地線の巻き付き数を表す. また, m_{ij} は二体の測地線を最小化するように選び, 一方で $\mathbf{m}$ は三体の測地線を最小化するように選ばれることに注意する. 最終的に, 真空からの差に注目した genuine tri-entropy は以下のように与えられる.

$$\Delta GM^{(3)} = \frac{R}{8G_N} \log \frac{I_{12}(\mathbf{m}) I_{23}(\mathbf{m}) I_{31}(\mathbf{m})}{I_{12}(m_{12}) I_{23}(m_{23}) I_{31}(m_{31})} \quad (3.5.238)$$

ここから, genuine tri-entropy が二体と三体の測地線の巻き付き数の差から生じることがわかる.

摂動計算の時と同様に部分領域 A, B, C を取り, bipartite と tripartite の multi-entropy と, それらの差分で表される genuine multi-entropy を計算した結果を図 3.29 に図示する. 自明な巻き付きのみを考えた時には bipartite の極小曲面と

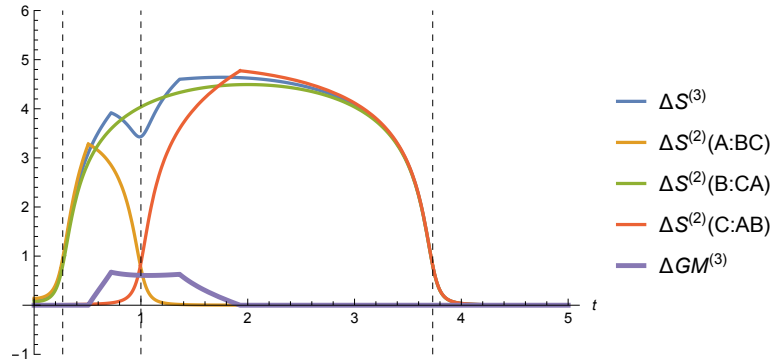


図 3.29: 厳密に計算した holographic multi-entropy. ここで $4G_N = 1$, $R = 1$, $\alpha = 0.1$, $M = 1$ とした.

tripartite の極小曲面の巻き付き数が一致するので genuine multi-entropy の値はゼロになり, 摂動計算と一致する. 図 3.29 では genuine multi-entropy がノンゼロになっていることから, 非自明な tripartite entanglement が存在していることがわかる. AdS 時空で genuine tri-entropy の振る舞いに対応する自由落下粒子とブラックホールは図 3.30 で表される. ここから, genuine tri-entropy はバルク内部の Entanglement Wedge Polygon に対応する部分をより詳細に調べることができる [101].

局所クエンチを用いた genuine tri-entropy の時間発展はホログラフィック CFT を用いても計算することができ, 結果は解析的に (3.5.238) に一致することが確認できる. 具体的には二次元 Euclidean 共形場理論において Heavy 演算子二つと Light なツイスト演算子を三つ挿入し, large c の極限で Heavy-Light Vacuum Block 近似を用いることで, これらの 5 点相関関数を計算することで得られる [64]. 詳しい計算と結果については [99] を参照.

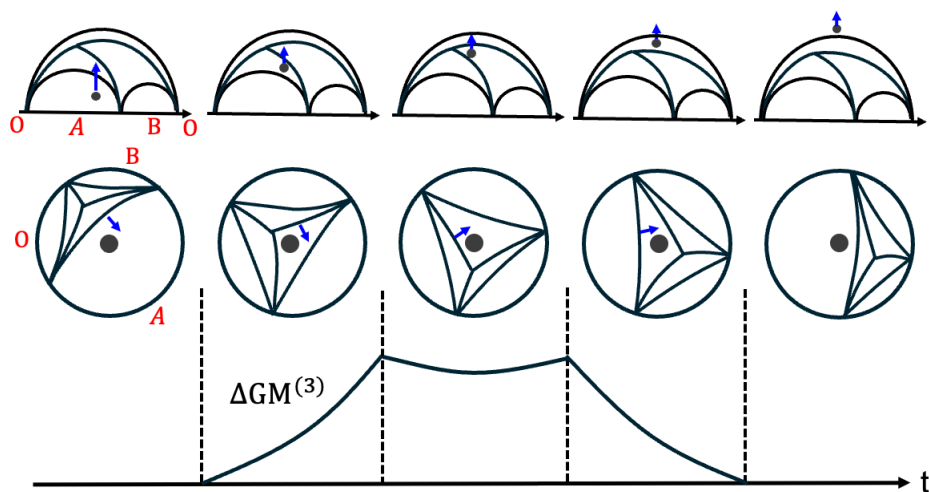


図 3.30: Genuine tri-entropy の振る舞いに対する重力の幾何的解釈. Genuine tri-entropy の始点と終点が二体測地線との交差に対応し, 二つのカスプの点が三体測地線との交差に対応する.

第4章

AdS/BCFT 対応

本章では境界付き共形場理論 (BCFT) の基礎を整理した後に, それに対応する重力理論の幾何として end-of-the-world (EOW) ブレーンを導入し, それらが成す双対性として AdS/BCFT 対応を紹介する.

4.1 境界付き共形場理論 (Boundary Conformal Field Theory)

通常のフルな複素平面で定義された CFT (以下ではバルク CFT と呼ぶ) に対して境界を導入することで領域を上半平面 (Upper Half Plane) に制限し, さらに適切な境界条件を課すことで高い対称性を保った共形場理論を境界付き共形場理論 (Boundary Conformal Field Theory, BCFT) という [102–105]. 図 4.1 を参照.

本節では, BCFT がどのように構成され, 特徴づけられるかを通常の CFT と比較しながら見ていく [106, 107].

4.1.1 高い対称性を保つ境界条件

BCFT の局所的な性質はほとんど元のフルな複素平面での CFT の性質を引き継いでいる. 境界を導入したことにより変わることとして, 元の CFT が持っていた対称性が破れてしまうという事実があるが, ここでは最も高い対称性を保つよう

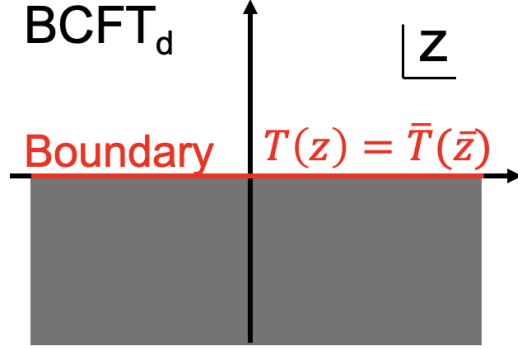


図 4.1: Boundary Conformal Field Theory

な条件を課す. 考慮すべき共形変換も, 上半平面から上半平面にマップするようなもので, 境界の形は変えないように制限する.

$$f : \text{UHP} \rightarrow \text{UHP}, \quad f(x) \in \mathbb{R} \text{ (for } x \in \mathbb{R}) \quad (4.1.1)$$

これは (2.2.102) で $f(z) = \bar{f}(\bar{z})$ を課すことに対応する. この条件は $SL(2, \mathbb{R})$ の対称性を保つことになり, 元の CFT の対称性の半分を保っている. また, この条件は境界上でエネルギーの流れがないことに対応しており, $z = x + iy$ とすると

$$T_{xy}(x, y = 0) = 0 \quad (4.1.2)$$

を課することになる. また複素座標で書くと

$$T(z) = \bar{T}(\bar{z}) \quad (4.1.3)$$

となり, 元の CFT における正則パートと反正則パートを繋げる条件になっている. ここで新たな energy stress tensor を以下のように定義すると, 元々上半平面に定義されていた正則パートと反正則パートの energy stress tensor を, フルな複素平面の正則パートのみの energy stress tensor として解釈できる.

$$\mathcal{T}(z) = \sum_n \mathcal{L}_n z^{-n-2} = \begin{cases} T(z) & (\text{Im } z \geq 0) \\ \bar{T}(\bar{z}) & (\text{Im } z < 0) \end{cases} \quad (4.1.4)$$

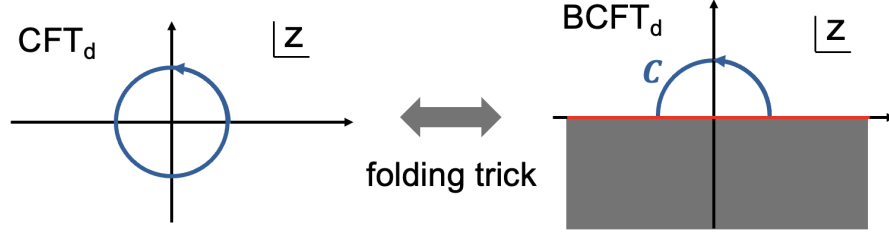


図 4.2: folding trick

この時, Virasoro 生成子は以下のように定義される.

$$\mathcal{L}_n = \int_C \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z) - \int_C \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \bar{z}^{n+1} \bar{T}(\bar{z}) = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} \mathcal{T}(z) \quad (4.1.5)$$

このように, 境界条件 (4.1.3) をうまく用いて上半平面にのみ定義された BCFT の正則パートと反正則パートを繋げてフルな複素平面で解釈し直すことを **folding trick** という (図 4.2 参照).

BCFT における一点関数

バルク CFT に住む場は節 2.2.2 で見たように二つの独立な Virasoro 代数の直積を取ったものの表現として与えられる. 正則パートと反正則パートの Hilbert 空間を明示的に区別し, フルな複素平面上での Hilbert 空間を以下のように表す.

$$\mathcal{H}^{(P)} = \bigoplus_{(i, \bar{i}) \in \mathcal{I}^{(P)}} Z_{i\bar{i}} \mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_{\bar{i}} \quad (4.1.6)$$

ここで (P) は BCFT の上半平面と区別するためにバルク CFT のフルな複素平面上で定義されていることを表す. また, $\mathcal{I}^{(P)}$ は二つの Virasoro 代数の規約表現の集合であり, $i, \bar{i}$ はそれらのラベルである.

ここでフルの CFT を考えると一点関数はゼロになるが, BCFT においてはノンゼロの値を出すことを見ていこう. BCFT において (4.1.6) に住むバルク場 $\phi_{i\bar{i}}$ は folding trick によってフルの面で二点 $z, \bar{z}$ に住む $\phi_i(z)$ と $\phi_{\bar{i}}(\bar{z})$ に分けられる (図 4.3 参照). このようにして BCFT の一点関数はバルク CFT の二点関数に書き換

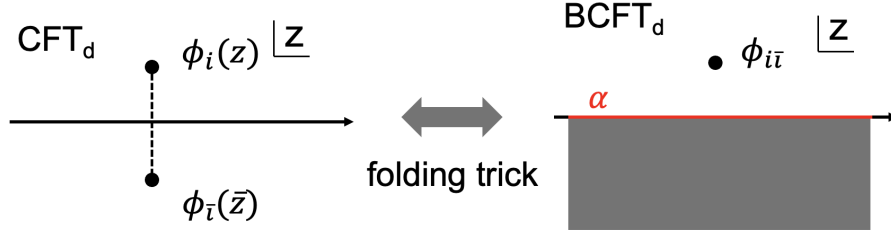


図 4.3: folding trick による一点関数の表現

えることができ, 以下のような期待値を持つ.

$$\langle \phi_{i\bar{i}}(z, \bar{z}) \rangle_\alpha = \langle \phi_i(z) \phi_{\bar{i}}(\bar{z}) \rangle_\alpha = \frac{A_{i\bar{i}}^\alpha d_{ii+}}{|z - \bar{z}|^{2h_i}} \delta_{\bar{i}, i+} \quad (4.1.7)$$

ここで α は Dirichlet や Neumann を区別するような境界条件のラベルである. また, 節 2.2.2 では自己共役な表現にのみ制限していたので現れなかったが, $i+$ は i でラベルされた表現に対して共役な表現を指す. $\bar{i} = i+$ が必要なのは二点関数の二つの演算子の表現が一致するという対称性から来る制約である. さらに d_{ii+} はバルク場の規格化を行うのに用いられ, しばしば恒等演算子の二点関数に対して $d_{00} = 1$ と規格化する. 一方で, $A_{i\bar{i}}$ は BCFT を特徴づける新たな量であり, d_{ii+} の規格化を妨げるので自由に規格化できる定数ではない.

ここから, BCFT においてバルク場の恒等演算子もノンゼロの期待値を持つと推察され, 以下のように定義される.

$$\langle \mathbf{1}^{(P)} \rangle_\alpha = A_{00}^\alpha = g \quad (4.1.8)$$

これはしばしば g 関数 (g -function), または g 因子 (g -factor) と呼ばれ, 境界上の繰り込み群フローで重要な役割を果たす. 後に節 4.1.4 でより詳しく見る.

4.1.2 境界場 (boundary field)

境界場はバルク場と全く異なり, (4.1.5) で生成される Virasoro 代数の表現からなる. 実際にどの表現が選ばれるかは境界条件とバルク場の spectrum に依存し,

Hilbert 空間は以下のように与えられる.

$$\mathcal{H}_\alpha = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{H}_i^{\oplus n_\alpha^i} \quad (4.1.9)$$

この空間に住む境界場 ψ は境界上に制限されており, BCFT を考える際に新たに現れる自由度である.

バルク場を境界に近づけた時 ($\text{Im } z \rightarrow 0$) に以下のように境界場で書き直すことができ, これを bulk-boundary OPE という.

$$\phi_{i\bar{i}}(z, \bar{z}) = \sum_k C_{(i\bar{i})k}^\alpha |z - \bar{z}|^{h_k - h_i - h_{\bar{i}}} \psi_k(x) \quad (4.1.10)$$

ここで $C_{(i\bar{i})k}^\alpha$ もまた BCFT で新たに登場する係数である. しばしば便利のために

$$C_{(00)k}^\alpha = \delta_{k,0} \quad (4.1.11)$$

を課すことでバルク場の恒等演算子と境界場の恒等演算子が (4.1.10) で一致する. ここで境界場の一点関数は恒等演算子の時のみノンゼロなので $\langle \psi_k \rangle_\alpha = \Lambda^\alpha \delta_{k,0}$ であることがわかる. バルク場の一点関数の計算に, (4.1.7) と (4.1.10) を用いると

$$\langle \mathbf{1}^{(P)} \rangle_\alpha = A_{00}^\alpha d_{00} = \sum_k C_{(00)k}^\alpha |z - \bar{z}|^{h_k} \langle \psi_k(x) \rangle_\alpha = C_{(00)0}^\alpha \Lambda^\alpha \quad (4.1.12)$$

であり, ここで規格化 $d_{00} = C_{(00)0}^\alpha = 1$ を用いると

$$\langle \psi_k(x) \rangle_\alpha = A_{00}^\alpha \delta_{k,0} \quad (4.1.13)$$

がわかる. さらに一般の一点関数に代入すると

$$\langle \phi_{i\bar{i}+}(z, \bar{z}) \rangle_\alpha = \frac{A_{i\bar{i}+}^\alpha}{|z - \bar{z}|^{2h_i}} = \sum_k C_{(i\bar{i}+)k}^\alpha |z - \bar{z}|^{h_k - 2h_i} \langle \psi_k(x) \rangle_\alpha = \frac{C_{(i\bar{i}+)0}^\alpha A_{00}^\alpha}{|z - \bar{z}|^{2h_i}} \quad (4.1.14)$$

ここから,

$$C_{(i\bar{i}+)0}^\alpha = \frac{A_{i\bar{i}+}^\alpha}{A_{00}^\alpha} \quad (4.1.15)$$

と関係づけられる.

Boundary Condition Changing Operator

さらに二つの異なった境界を導入することもでき, 円筒座標では $\sigma_1 = 0$, π に存在する α, β でラベルされる境界を, 共形変換を用いて複素平面に移した時に, $\text{Re } z = 0$

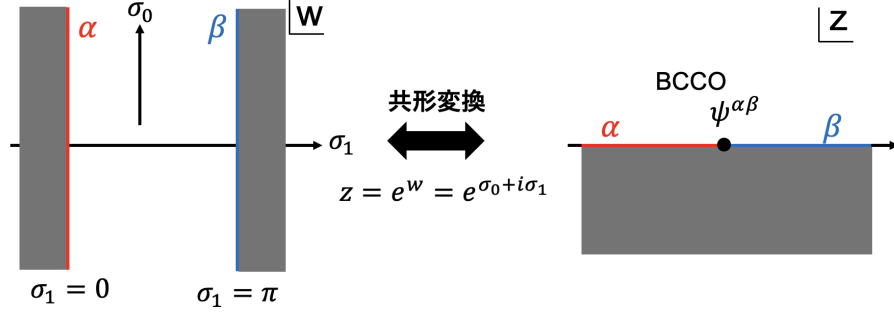


図 4.4: 異なる二つの境界を持つ BCFT

に異なる境界が並ぶことになる (図 4.4). この境界の変化を生成する演算子として Boundary Condition Changing Operator (BCCO) $\psi^{\alpha\beta}$ を考えることができる.

4.1.3 境界状態の構成 (Ishibashi state, Cardy state)

BCFT において様々な計算を可能にする境界状態という概念を導入する. 有限温度系で考えるために時間方向を β_0 で周期化する. この時 CFT におけるモジュラー不変性 (弦理論においては開弦と閉弦を入れ替える双対性) を用いて, 空間方向の端として存在した境界 α, β を時間方向の端にある始状態, 終状態 $||\alpha\rangle\rangle, ||\beta\rangle\rangle$ として考える (図 4.5 参照). このようにして定義される時間一定面上の状態を境界状態 (boundary state) という [103].

さらに BCFT における相関関数も境界状態を用いて書き直していく. $(z, \bar{z})$ 座標平面上で時刻 $|z| = 1, e^{\beta_0}$ に時間の同一視を与え, 共形変換で円筒座標 $(w, \bar{w})$ に移る. さらにモジュラー不変性を用いて時間座標と空間座標を入れ替えて $(w', \bar{w}')$ 座標に移る. その際に新たな時間方向の周期を 2π に変える. 最後に共形変換でまた複素平面 $(\xi, \bar{\xi})$ で移る. 以上の変換を行うことで複素平面上に境界状態を定義できる (図 4.6 参照).

以上より, BCFT における相関関数が境界状態を用いて以下のように表せる.

$$\begin{aligned} & \langle\langle \Theta_\alpha | e^{-\frac{2\pi^2}{\beta_0} H^{(P)}} \phi_1^{(P)}(\xi_1, \bar{\xi}_1) \cdots \phi_N^{(P)}(\xi_N, \bar{\xi}_N) | | \beta \rangle\rangle \\ &= \mathcal{J}(\xi, z) \text{Tr}_{\mathcal{H}_{\alpha\beta}} \left(e^{-\beta_0 H^{(H)}} \phi_1^{(H)}(z_1, \bar{z}_1) \cdots \phi_N^{(H)}(z_N, \bar{z}_N) \right) \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

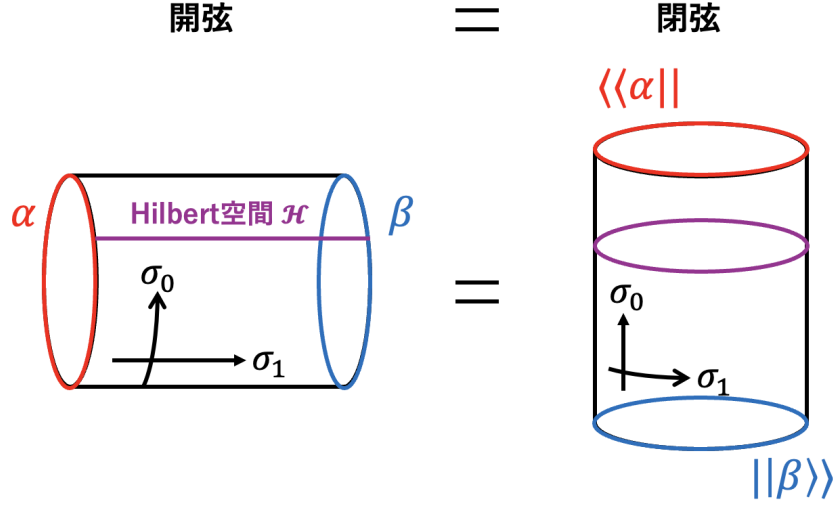


図 4.5: モジュラー不変性から定義される境界状態

ここで (H) はフルの複素平面で定義された CFT と区別するために上半平面で定義されたものにラベルしている. $\mathcal{J}(\xi, z)$ は上記で説明した $(z, \bar{z})$ 平面から $(\xi, \bar{\xi})$ 平面への変換のヤコビアンを表しており以下のようなファクターをまとめたものである.

$$\begin{aligned}\phi^{(P)}(\xi, \bar{\xi}) &= \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^h \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\xi}}\right)^{\bar{h}} \phi^{(H)}(z, \bar{z}) \\ T^{(P)}(\xi) &= \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2 T^{(H)}(z) + \frac{c}{12} \{z; \xi\}\end{aligned}\tag{4.1.17}$$

ここで $\{z; \xi\}$ は Schwarz 微分であり,

$$\{z; \xi\} = \frac{z'''(\xi)}{z'(\xi)} - \frac{3}{2} \left(\frac{z''(\xi)}{z'(\xi)}\right)^2\tag{4.1.18}$$

で定義される. この変換の際に境界の向きづけが逆になってしまうことから CPT 演算子 Θ を終状態に作用させている.

Ishibashi State

BCFT において課される境界条件 (4.1.3) を考えるために, (4.1.16) に対して

$$\phi^{(H)}(z, \bar{z}) = T^{(H)}(z) - \bar{T}^{(H)}(\bar{z})\tag{4.1.19}$$

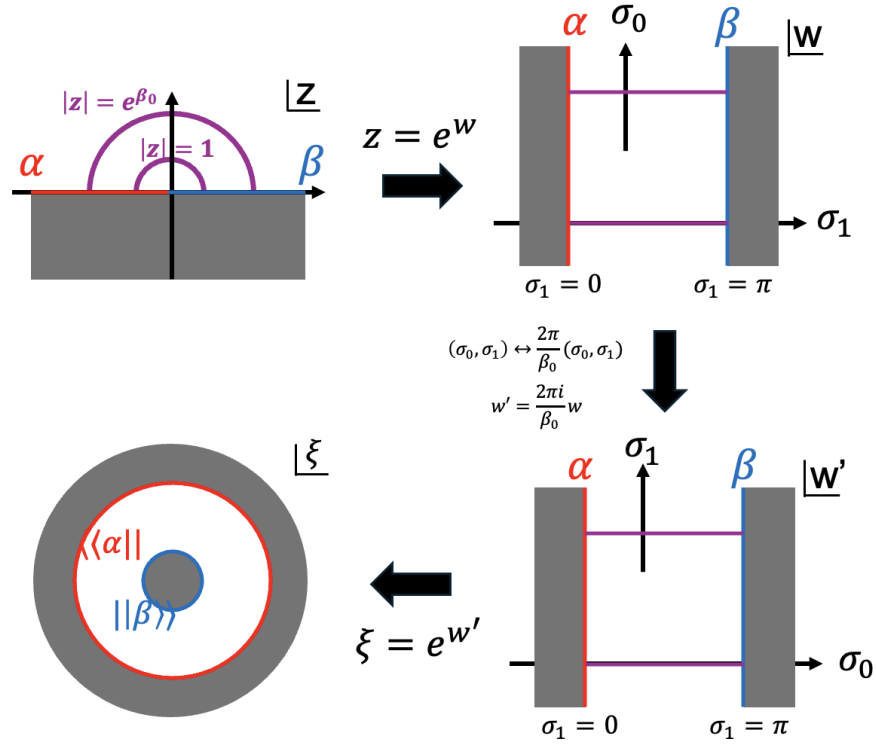


図 4.6: 相関関数を境界状態で記述するための変換

を考える. この時, 境界 $\text{Im } z = 0$ で課されていた境界条件は境界状態に対する

$$\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 T^{(P)}(z) - \left(\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{z}} \right)^2 \bar{T}^{(P)}(\bar{\xi}) \right] \|\alpha\rangle\rangle = 0 \quad (4.1.20)$$

のような条件に変わる. さらに, フルの複素平面で定義された energy stress tensor を Laurent 展開した

$$T^{(P)}(\xi) = \sum_n \xi^{-n-2} L_n^{(P)}, \quad \bar{T}^{(P)}(\bar{\xi}) = \sum_n \bar{\xi}^{-n-2} \bar{L}_n^{(P)} \quad (4.1.21)$$

を用いて, 条件は

$$(L_n^{(P)} - \bar{L}_{-n}^{(P)}) \|\alpha\rangle\rangle = 0 \quad (4.1.22)$$

と書き換えられ, これは **Ishibashi 条件**として知られる.

さらにこの条件を満たす状態を Virasoro 代数の既約表現を用いて以下のように得

られ, これを **Ishibashi state** という [108, 109].

$$|i\rangle\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} |i, N\rangle \otimes U|i, N\rangle \in \mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_{i+} \quad (4.1.23)$$

ここで, $|i, N\rangle$ ($N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) は Hilbert 空間 $\mathcal{H}_i$ における正規直交基底である. また, U は反ユニタリ演算子であり, $U|i, N\rangle \in \mathcal{H}_{i+}$ を満たす.

Cardy State

一般の境界状態は以下のように Ishibashi state の線型結合で与えられる.

$$|\alpha\rangle\rangle = \sum_{i \in \mathcal{I}^{(H)}} B_{\alpha}^i |i\rangle\rangle \quad (4.1.24)$$

ここで, (4.1.16) に対して bulk-boundary OPE(4.1.10) を用いて分配関数を計算することで

$$C_{(ii^+)0}^{\alpha} = \frac{B_{\alpha}^{i^+}}{B_{\alpha}^0} \quad (4.1.25)$$

が得られ, さらに (4.1.15) を用いると

$$B_{\alpha}^{i^+} = \kappa A_{ii^+}^{\alpha} \quad (4.1.26)$$

が得られる. さらにこの B_{α}^i を求めるための物理的な制約として Cardy 条件を見ていく. これは CFT におけるモジュラー不変性を課したものであり, 弦理論の見方では開弦と閉弦の計算で分配関数が一致することを課すものである. 開弦の計算では

$$Z_{\alpha\beta}(q) = \text{Tr} e^{-\beta_0 H^{(H)}} = \sum_{i \in \mathcal{I}} n_{\alpha\beta}^i \chi_i(q) \quad (4.1.27)$$

のように結果が得られる. ここで $q = e^{-\beta_0}$ である. また, $H^{(H)}$ は上半平面で定義されたハミルトニアン, さらに $\chi_i(q)$ は Virasoro 代数の表現 i に対する指標を表す. 閉弦 (境界状態を用いた) の計算では

$$Z_{\alpha\beta}(q) = \langle\langle \Theta\beta | \tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0^{(P)} + \bar{L}_0^{(P)} - \frac{c}{12})} | \alpha \rangle\rangle = \sum_{i \in \mathcal{I}^{(P)}} B_{\alpha}^{i^+} B_{\beta}^i \chi_i(\tilde{q}) \quad (4.1.28)$$

となる. これらを比較することで以下の **Cardy 条件**を得る.

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{j \in \mathcal{I}^{(H)}} B_{\alpha}^{j^+} B_{\beta}^j S_{ji} \chi_i(q) &= \sum_{i \in \mathcal{I}} n_{\alpha\beta}^i \chi_i(q) \\ \Rightarrow \sum_{j \in \mathcal{I}^{(H)}} B_{\alpha}^{j^+} B_{\beta}^j S_{ji} &= n_{\alpha\beta}^i \in \mathbb{N}_0 \end{aligned} \quad (4.1.29)$$

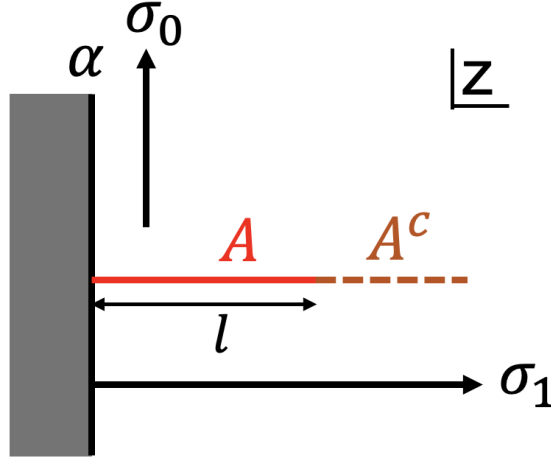


図 4.7: BCFT におけるエンタングルメントエントロピー

ここで S_{ji} はモジュラー S 変換である. この条件を満たすような B_α^i からなる Ishibashi 状態の線型結合が物理的な状態として得られ, これを **Cardy state** という [103].

4.1.4 g 関数と g 定理

(4.1.8) で見たように恒等演算子の一点関数はノンゼロの期待値を持ち, それは共形変換によって上半平面から disk に持っていくことで disk amplitude として以下のように考えられる [110, 111].

$$g_\alpha = \langle 0 | B_\alpha \rangle \quad (4.1.30)$$

ここで α は境界条件に対するラベルであり, $|B_\alpha\rangle$ は境界上で定義された境界状態である. さらにこの量はエンタングルメントエントロピーを BCFT で計算したときに得られる境界の寄与として

$$S_A = \frac{c}{6} \log \frac{2l}{\epsilon} + \log g_\alpha \quad (4.1.31)$$

のように与えられる [60](図 4.7 参照). この時, 右辺第一項は上半平面に限ってい

るので元の CFT の半分の値になっており, 第二項が境界エントロピーと呼ばれる境界の寄与である.

$$S_{bdy} = \log g_\alpha \quad (4.1.32)$$

さらにこの量は境界上の繰り込み群フローに対して単調減少するということが知られており, g 定理という [110]. この定理の証明はいくつかの文脈で与えられているが, ホログラフィックな g 定理の証明を節 4.2.3 で紹介する.

4.2 $AdS/BCFT$ 対応

これまで見てきた BCFT に対する重力双対を AdS 時空に対する End-of-the-World (EOW) ブレーンの挿入によって実現する [112, 113]. その際 EOW ブレーンは AdS 時空の境界として扱う.

4.2.1 End-of-the-World(EOW) ブレーン

AdS 時空を M , 漸近境界を Σ , EOW ブレーンを Q とする (図 4.8). 重力作用として以下のものを考える.

$$\begin{aligned} I_{EH+GHY+brane} = & \frac{1}{16\pi G_N} \int_M d^{d+1}x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \\ & + \frac{1}{8\pi G_N} \int_\Sigma d^d x \sqrt{-h} K + \frac{1}{8\pi G_N} \int_Q d^d x \sqrt{-h} (K - L_m) \end{aligned} \quad (4.2.33)$$

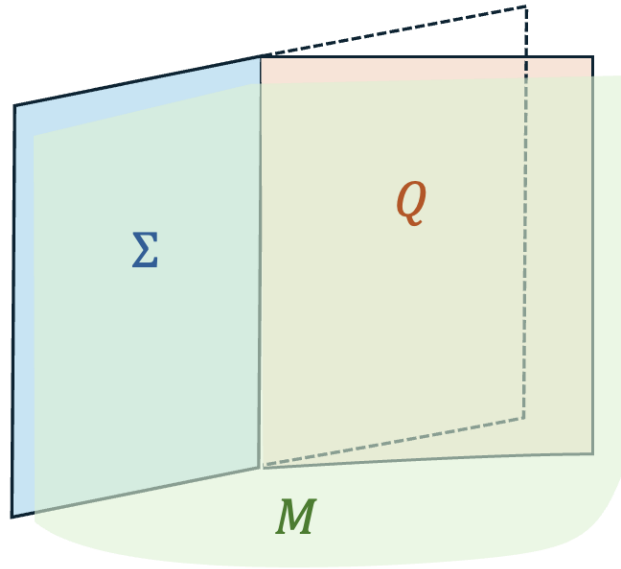
第一項はバルクの Einstein-Hilbert 項, 第二項は漸近境界の Gibbons-Hawking-York 項, 第三項は EOW ブレーンに対する同様の境界項とブレーンに局在した物質項 L_m を含んでいる.

ここで K_{ab} は外的曲率で以下のように与えられる.

$$K_{ab} = \nabla_a n_b \quad (4.2.34)$$

ここで n_a は codimension 1 surface Σ と Q の法線ベクトルを表す. ここで作用の変分は

$$\delta I = \frac{1}{16\pi G_N} \int_Q d^d x \sqrt{-h} \delta h^{ab} \left[K_{ab} - h_{ab} K - T_{ab}^Q \right] \quad (4.2.35)$$

図 4.8: $BCFT$ に対する重力双対

で与えられ, ここでは漸近境界 Σ に通常の Dirichlet 境界条件を, EOW ブレーン Q に Neumann 境界条件を課す. そこから得られる式は,

$$K_{ab} - h_{ab}K = T_{ab}^Q \quad (4.2.36)$$

となる. この式は左辺がブレーンの配位に関する微分方程式で, 右辺が物質場の振る舞いに依存する式になっており, ブレーンの配位がブレーン上の物質場と関係していることが分かる. 実際に物質の作用を決めてこの Neumann 境界条件を解くことでブレーンの配位が求まるようになっている. 右辺の物質の energy stress tensor は以下で与えられる.

$$T_{ab}^Q = \frac{-2}{\sqrt{-h}} \frac{\delta S_m}{\delta h^{ab}} \quad (4.2.37)$$

ここで右辺の S_m は物質作用である.

4.2.2 対称性を保った EOW ブレーンの挿入

BCFT の重力双対を構成するために高い対称性を保つような定数の物質項を考え、以下のようなブレーン上の作用を考える.

$$I_{\text{brane}} = \frac{1}{8\pi G_N} \int_Q d^d x \sqrt{-h} (K - T) \quad (4.2.38)$$

この時, Neumann 境界条件は

$$K_{ab} - h_{ab} K = h_{ab} T \quad (4.2.39)$$

となり, この解として超平面の EOW ブレーンが得られる. この時, $d+1$ 次元 AdS 時空が元々持っていた isometry $SO(d, 2)$ は高い対称性を保って破れ, $SO(d-1, 2)$ となる. これは BCFT が持つ対称性と一致している. 実際に 2 次元の BCFT の対称性は節 4.1.1 で見たように $SO(1, 2) \simeq SL(2, R)$ である.

具体的にこの定数の物質項に対する解を構成すると,

$$ds^2 = d\rho^2 + \cosh^2 \left(\frac{\rho}{R_{AdS}} \right) \left(R_{AdS}^2 \frac{dy^2 - dt^2 + d\mathbf{w}^2}{y^2} \right) \quad (4.2.40)$$

であり, 時空は $-\infty \leq \rho \leq \rho_*$ の範囲で定義されたものになる. ここで $\mathbf{w} = \{w_1, \dots, w_{d-1}\}$ である. この時 EOW ブレーンは $\rho = \rho_*$ に位置する超平面である (図 4.9 参照).

実際にこの時外的曲率は

$$K_{ab} = \frac{1}{R_{AdS}} \tanh \left(\frac{\rho}{R_{AdS}} \right) h_{ab} \quad (4.2.41)$$

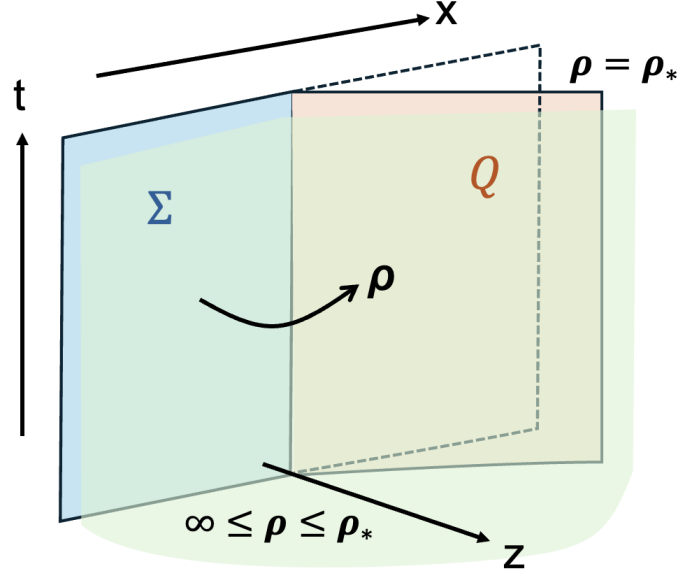
となり, Neumann 境界条件 (4.2.39) を満たす. さらにこの条件から

$$T = \frac{d-1}{R_{AdS}} \tanh \left(\frac{\rho_*}{R_{AdS}} \right). \quad (4.2.42)$$

のように定数の物質項と EOW ブレーンの配位が結びつき, このような事実から定数 T はブレーンのテンションと呼ばれる.

ここで (4.2.40) は

$$z = \frac{y}{\cosh \left(\frac{\rho}{R_{AdS}} \right)}, \quad x = y \tanh \left(\frac{\rho}{R_{AdS}} \right), \quad (4.2.43)$$

図 4.9: EOW プレーンの超平面解 ($\rho = \rho_*$)

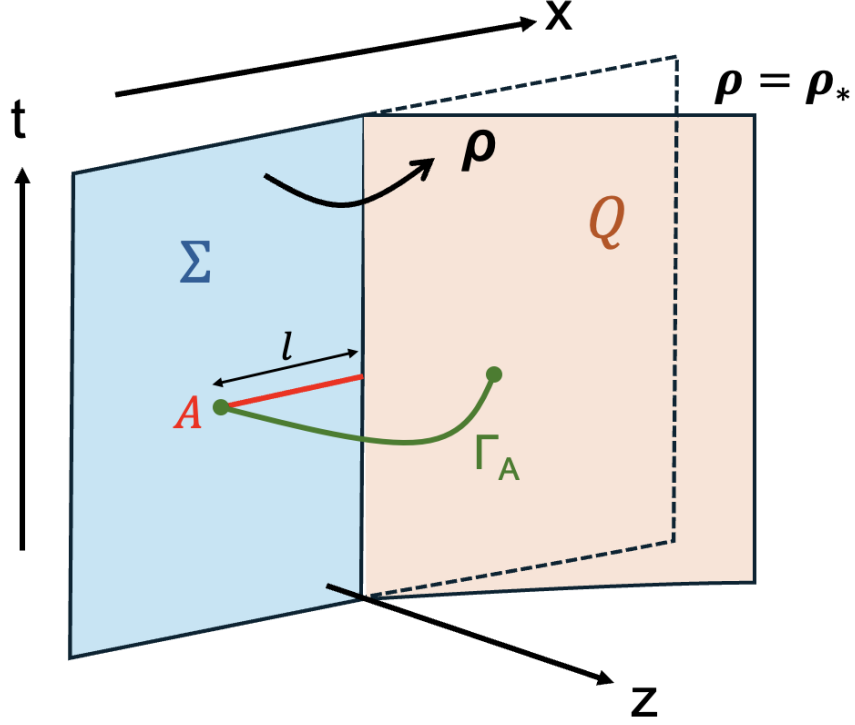
の座標変換によって

$$ds^2 = R_{AdS}^2 \frac{dz^2 - dt^2 + dx^2 + d\mathbf{w}^2}{z^2} \quad (4.2.44)$$

となることがわかり, $d+1$ 次元の AdS Poincaré 座標としてバルク時空の運動方程式の解にもなっていることを確認しておく.

4.2.3 ホログラフィック境界エントロピー

節 4.1.4 で扱った g 関数 (もしくは境界エントロピー) と g 定理について AdS/BCFT の観点からホログラフィックな議論を紹介する [113]. 節 3.3 で見たように CFT のエンタングルメントエントロピーは双対な重力理論において笠-高柳公式を用いて計算することができた. これは AdS/BCFT 対応においても自然に拡張され, 双対な EOW プレーンを含んだ時空において同様に計算することができる. ここで EOW プレーンは笠-高柳公式における極小曲面の端点を置くことができる境界として働く.

図 4.10: $AdS_3/BCFT_2$ 対応における境界エントロピー

実際に, $AdS_3/BCFT_2$ 対応のセットアップで以下のように部分領域 A を取り,

$$-l \leq x \leq 0, \quad t = t_* = \text{const.} \quad (4.2.45)$$

(4.2.40) の座標を用いてホログラフィックエンタングルメントエントロピーを計算する. 図 4.10 のように笠-高柳面 Γ_A が得られ, 測地線の長さは以下のように求まる.

$$S_A = \frac{1}{4G_N} \int_{-\rho_\infty}^{\rho_*} d\rho = \frac{\rho_* + \rho_\infty}{4G_N}. \quad (4.2.46)$$

(4.2.43) より, UV カットオフ ρ_∞ は $\rho_\infty = R_{AdS} \log \frac{2l}{\epsilon}$ となり, Brown-Henneaux 関係式を用いると

$$S_A = \frac{c}{6} \log \frac{2l}{\epsilon} + \frac{\rho_*}{4G_N} \quad (4.2.47)$$

が得られる. したがって, 境界エントロピーは

$$S_{bdy} = \log g_\alpha = \frac{\rho_*}{4G_N} \quad (4.2.48)$$

となる.

さらにホログラフィックな g 定理の証明も見ていく. ここで定数の物質項を入れた場合は (4.2.48) のように定数の境界エントロピーになるので g 定理を満たしている. 以下では, 任意の物質場に対して null energy condition (NEC) を課した際に g 定理が成り立つことを見ていく. まずは簡単のために時間方向に並進対称性を課し, その時のブレーン配位を

$$x = X(z) \quad (4.2.49)$$

とおく. NEC は

$$T_{ab}^Q N^a N^b \geq 0 \quad (4.2.50)$$

で与えられ, null ベクトルとして

$$N^t = \pm 1, \quad N^z = \frac{1}{\sqrt{1 + (X'(z))^2}}, \quad N^x = \frac{X'(z)}{\sqrt{1 + (X'(z))^2}}. \quad (4.2.51)$$

を取ってきて, Neumann 境界条件 (4.2.36) を用いると,

$$(K_{ab} - K h_{ab}) N^a N^b = -\frac{R_{AdS} X''(z)}{z (1 + (X'(z))^2)^{3/2}} \geq 0. \quad (4.2.52)$$

と書き直せる. よって NEC から

$$X''(z) \leq 0 \quad (4.2.53)$$

が得られ, これはブレーンの曲がり方を制限する. さらに, (4.2.48) に対して (4.2.43) を用いてナイーブに任意のブレーン配位に対して拡張すると,

$$\log g(z) = \frac{R_{AdS}}{4G_N} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{X(z)}{z} \right) \quad (4.2.54)$$

となる. ここで $BCFT$ における長さスケールは部分領域の長さ l のみであり, この l に対してもう片方の EOW ブレーン上の端点の z 座標も単調増加することを考えると, l を大きくすることによって得られる系のスケールを粗視化するようなフ

ローは z を大きくすることと同じである. したがって上記の境界エントロピーを z で微分してその変化を見ると以下の式を得る.

$$\frac{\partial \log g(z)}{\partial z} \propto \frac{X'(z)z - X(z)}{\sqrt{z^2 + X^2}} \quad (4.2.55)$$

この時, 分子が $z = 0$ でゼロになり, 分子の微分は $(X'z - X)' = X''z \leq 0$ のように負であることから, $\frac{\partial \log g(z)}{\partial z} \leq 0$ であることがわかる. つまり, 境界エントロピーが z に対して単調減少するので, g 定理が示された.

ここで再度, g 定理がブレーンに対する NEC から導出されたことを強調しておく. これは節 2.3.5 のホログラフィックな c 定理の証明においてバルク時空における NEC を考えたのと同じである.

さらに, 本修士論文では扱わないがホログラフィックエンタングルメントエントロピーの強劣加法性を用いて g 定理を証明することもできる [114].

第5章

dS/CFT 対応

本章ではド・ジッター (dS) 時空の基礎を整理した後に, dS 時空におけるホログラフィ原理として dS/CFT 対応を紹介する. その際に AdS/CFT 対応からの解析接続による構成方法や, その問題点にも言及する.

5.1 dS 時空

ド・ジッター (dS) 時空は正の宇宙定数を持った真空アインシュタイン方程式の極大対称解である [115–117]. 本節では埋め込み多様体を通して dS 時空を張る様々な座標を紹介していく. ここでも真空解であるにも関わらずブラックホール解などが存在しており, そこから多くの物理的な示唆が得られる. さらに AdS 時空と異なり, 膨張宇宙を表すことができるので, 新たに観測者に依存した cosmological event horizon なども現れる. これもまた熱力学的な解釈が可能である. さらに dS 時空上の場の量子論に特有な非ユニタリー性や真空の不定性についても本節で議論しておく.

5.1.1 埋め込み多様体

$d+1$ 次元の dS 座標は $d+2$ 次元の幾何に埋め込まれた双曲面として得られる. この埋め込み多様体として以下のような $d+2$ 次元多様体を考える:

$$-(X_0)^2 + (X_1)^2 + \cdots + (X_{d+1})^2 = R_{dS}^2. \quad (5.1.1)$$

ここで R_{dS} は dS 時空の半径である.

この多様体上の計量を以下のように指定する:

$$ds^2 = -dX_0^2 + dX_1^2 + \cdots + dX_{d+1}^2. \quad (5.1.2)$$

このような埋め込み多様体は定義から明らかに $SO(d+1, 1)$ の対称性を持つ.

また, 埋め込み座標を用いた時の測地線の長さもこの対称性を保つ形であり, 実際に二点 $P = (X_0, X_1, \cdots, X_{d+1})$, $P' = (X'_0, X'_1, \cdots, X'_{d+1})$ を結ぶ測地線長は以下のように与えられる:

$$\frac{L(P, P')}{R_{dS}} = \cos^{-1} \left[\frac{-X_0 X'_0 + X_1 X'_1 + \cdots + X_{d+1} X'_{d+1}}{R_{dS}^2} \right]. \quad (5.1.3)$$

5.1.2 global 座標

(5.1.1) を満たすように, 以下の座標変換を考える.

$$\begin{aligned} X_0 &= R_{dS} \sinh t, \\ X_i &= R_{dS} \cosh t \Omega_i \quad (i = 1, 2, \cdots, d+1), \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

ここで Ω_i は S^d の単位ベクトルであり, 以下を満たす.

$$\sum_i \Omega_i^2 = 1 \quad (5.1.5)$$

このとき, 埋め込み計量 (5.1.2) は

$$ds^2 = R_{dS}^2 (-dt^2 + \cosh^2 t d\Omega_d^2) \quad (5.1.6)$$

のように変換される. 上式から明らかなように, global 座標 t は $(-\infty, \infty)$ を取る時間座標であり, これらの座標は dS 時空を大域的に覆っている. dS_3 の場合には

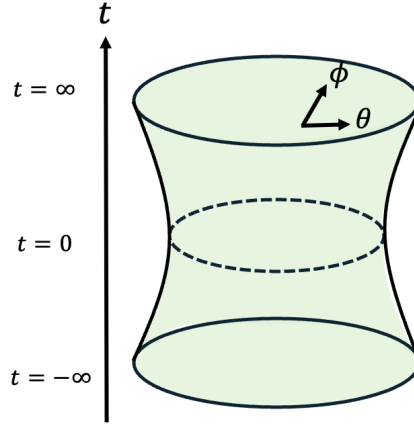


図 5.1: 3 次元 global 座標

図 5.1 のように描ける.

また, 埋め込み座標を用いた測地線長 (5.1.3) に global 座標の変換 (5.1.4) を代入すると, 測地線長は次のように与えられる:

$$\frac{L(P, P')}{R_{dS}} = \cos^{-1} \left[-\sinh t \sinh t' + \cosh t \cosh t' \sum_{i=1}^{d+1} \Omega_i \Omega'_i \right]. \quad (5.1.7)$$

$d+1$ 次元の Euclidean dS 時空に対する座標も求めておく. 埋め込み座標で X_0 を解析接続して

$$(X_0)^2 + (X_1)^2 + \cdots + (X_d)^2 + (X_{d+1})^2 = R_{dS}^2, \quad (5.1.8)$$

$$ds^2 = dX_0^2 + dX_1^2 + \cdots + dX_d^2 + dX_{d+1}^2 \quad (5.1.9)$$

が得られ,

$$X_0 = R_{dS} \sin t, \quad (5.1.10)$$

$$X_i = R_{dS} \cos t \Omega_i \quad (i = 1, \dots, d+1)$$

の埋め込みによって

$$ds^2 = R_{dS}^2 (dt^2 + \cos^2 t d\Omega_d^2) \quad (5.1.11)$$

が得られる. これは $d+1$ 次元球面の計量と一致している. Euclidean dS 時空は計量の符号が全て正なので測地線が必ず存在し, 実際に任意の二点を通るように

$d+1$ 次元球面の半径と同じ大きさの半径の円を描くと測地線になる. この時の測地線長は

$$\frac{L^{Euclidean}(P, P')}{R_{dS}} = \cos^{-1} \left[\sin t \sin t' + \cos t \cos t' \sum_{i=1}^{d+1} \Omega_i \Omega'_i \right]. \quad (5.1.12)$$

で与えられる.

5.1.3 Conformal 座標

因果関係を明確にするために, (5.1.6) に

$$\cos T = \frac{1}{\cosh t} \quad (5.1.13)$$

という座標変換を施すと,

$$ds^2 = \frac{R_{dS}^2}{\cos^2 T} (-dT^2 + d\Omega_d^2) = \frac{R_{dS}^2}{\cos^2 T} (-dT^2 + d\theta^2 + \cos^2 \theta d\Omega_{d-1}^2) \quad (5.1.14)$$

となる. ここで $-\frac{\pi}{2} \leq T \leq \frac{\pi}{2}$ である. 共形ファクター $\frac{1}{\cos^2 T}$ を除く共形変換では null 構造は保たれるので null な測地線は T - θ 座標を 45 度の線で貫く. この事実を考慮して T - θ 座標だけ取り出した Penrose ダイアグラムを描くと図 5.2 のようになる. ここでは $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ としている. 球面の North pole と South pole に対応する $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ を除いて, 各点は $d-1$ 次元球面に対応する. 上辺と底辺はそれぞれ future infinity $\mathcal{I}^+$ と past infinity $\mathcal{I}^-$ に対応し, 共形ファクターが発散する無限体積の slice である.

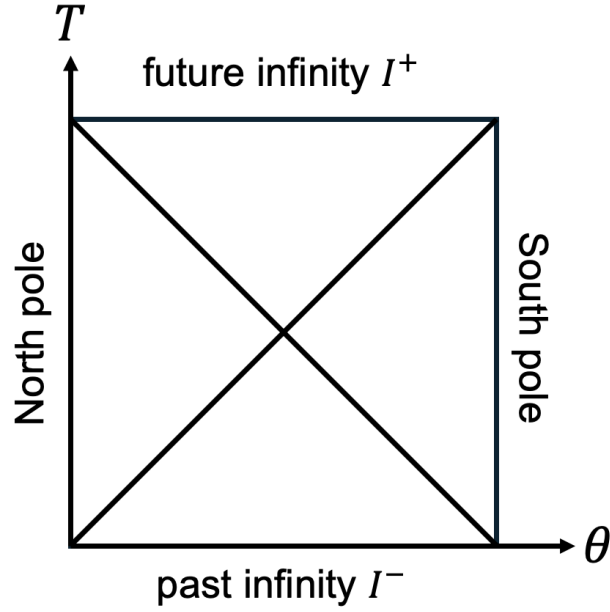
5.1.4 Poincaré (Planar) 座標

(5.1.1) を満たすような以下の座標変換を考える.

$$\begin{aligned} X_0 &= -\frac{1}{2\eta} (R_{dS}^2 - \eta^2 + \mathbf{x}^2), \\ X_i &= -\frac{R_{dS} x_i}{\eta} \quad (i = 1, 2, \dots, d), \\ X_{d+1} &= -\frac{1}{2\eta} (R_{dS}^2 + \eta^2 - \mathbf{x}^2) \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

ここで $\mathbf{x}$ は d 次元ベクトルを表す. この時 (5.1.2) は

$$ds^2 = R_{dS}^2 \left(\frac{-d\eta^2 + d\mathbf{x}^2}{\eta^2} \right) \quad (5.1.16)$$

図 5.2: dS 時空の Penrose ダイアグラム

のように変換される. これら座標が張る時空は 3 次元の時には図 5.3 のように描かれる.

また, Poincaré 座標と global 座標は (5.1.4) と (5.1.15) を用いて以下のように結びつく.

$$\begin{aligned} x &= R_{dS} \frac{\cosh t \sin \theta \cos \phi}{\sinh t + \cosh t \cos \theta}, \\ y &= R_{dS} \frac{\cosh t \sin \theta \sin \phi}{\sinh t + \cosh t \cos \theta}, \\ \eta &= \frac{R_{dS}}{\sinh t + \cosh t \cos \theta} \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

以上の関係式から Poincaré 座標は dS 時空の一部しか覆えていないことが分かる. Poincaré 座標が覆う領域を global 座標に埋め込む形で図 5.4 の左図に図示した. さらに, Penrose ダイアグラムにおいて Poincaré 座標が覆う領域も図 5.4 の右図に図示した.

また, 埋め込み座標を用いた測地線長 (5.1.3) に Poincaré 座標の座標変換 (5.1.15)

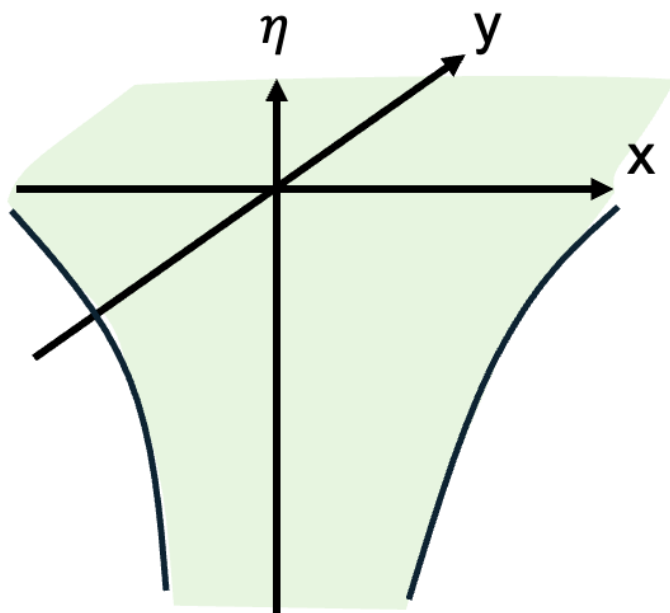


図 5.3: 3 次元 Poincaré 座標

*Poincaré*座標が張る領域

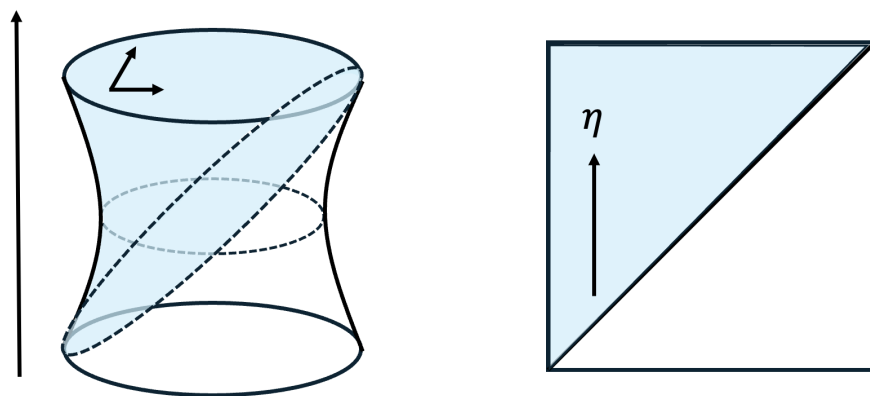


図 5.4: global 座標と Penrose ダイアグラムに埋め込まれた Poincaré 座標が張る領域

を代入すると, 測地線長は

$$\frac{L(P, P')}{R_{dS}} = \cos^{-1} \left[\frac{\eta^2 + \eta'^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}{2\eta\eta'} \right] \quad (5.1.18)$$

となる.

5.1.5 Static 座標

(5.1.1) を満たすような以下の座標変換を考える.

$$\begin{aligned} X_0 &= \sqrt{R_{dS}^2 - r^2} \sinh \frac{t}{R_{dS}}, \\ X_i &= r \Omega_i \quad (i = 1, 2, \dots, d), \\ X_{d+1} &= \sqrt{R_{dS}^2 - r^2} \cosh \frac{t}{R_{dS}} \end{aligned} \quad (5.1.19)$$

ここで Ω_i は $d-1$ 次元球面上の単位ベクトルである. この時 (5.1.2) は

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r^2}{R_{dS}^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r^2}{R_{dS}^2} \right)} + r^2 d\Omega_{d-1}^2 \quad (5.1.20)$$

のように変換される. $d\Omega_{d-1}$ は $d-1$ 次元球の計量である. さらに $0 \leq r \leq R_{dS}$ で定義される. 明らかに計量は時間に依存しないので static であり, ∂_t は timelike Killing vector になる. これらの座標が張る領域を Penrose ダイアグラム上に図示すると図 5.5 のようになる. 図から明らかなようにこれらが張る領域は future/past infinity $\mathcal{I}^\pm$ から情報を送信, もしくは受け取れるような領域である. ここで dS 時空では 1 人の観測者では時空全体にアクセスすることができないことに注意する.

$r = R_{dS}$ は timelike Killing vector が消えるような null 面であり, cosmological event horizon と呼ばれる. 物理的には dS 時空が加速膨張しているために, 観測者が観測し得ない領域が存在していることから現れる event horizon である. ブラックホールの event horizon とほとんど同じように解析することができ, 性質も非常に似ている. しかし, cosmological event horizon の存在自体が観測者に依存するという点では異なっている.

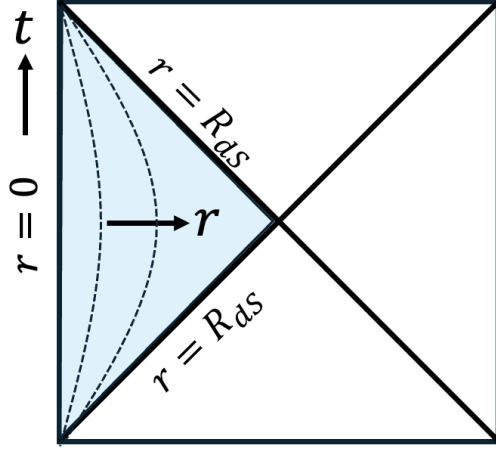


図 5.5: Penrose ダイアグラムに埋め込まれた static 座標が張る領域

Cosmological Horizon の熱的性質

cosmological horizon に対してもブラックホールの時 (節 2.1.4) と同様の解析を行うことで熱的性質を求めることができる.

時空の計量を Euclid 化して, 幾何が smooth であるという要請から (2.1.42) を得られ, Static 座標の計量 (5.1.20) を代入することで

$$T = \frac{1}{2\pi R_{dS}} \quad (5.1.21)$$

と得られる. ここでブラックホールと違って温度は dS 半径でのみ決まることに注意する. 実際に現在の膨張宇宙に対する宇宙定数の値から読み取れる dS 半径は $R_{dS} = 160$ 億光年であり, そこから概算される温度は $T \simeq 10^{-30} K$ となっている.

次にエントロピーを考える. これも節 2.1.4 の時と同様に Euclid 化した時空に対して重力の on-shell 作用を計算し, 熱力学的関係式を用いて導出される.

4 次元の dS 時空 ($d = 3$) において, on-shell 作用は

$$S_E[g_{static}] = -\frac{\pi R_{dS}^2}{G_N} \quad (5.1.22)$$

となる. ここで, 自由エネルギー F は

$$F \simeq -\frac{R_{dS}}{2G_N} \quad (5.1.23)$$

と与えられる. ここで dS 時空は空間の境界を持たないのでエネルギー E はゼロである [118]. したがってエントロピー S は

$$S = \frac{1}{T}(E - F) \simeq \frac{\pi R_{dS}^2}{G_N} \quad (5.1.24)$$

ここでも, cosmological horizon (CH) の面積が $\text{Area}(\text{CH}) = 4\pi R_{dS}^2$ であることから, 面積則

$$S = \frac{\text{Area}(\text{CH})}{4G_N} \quad (5.1.25)$$

が確認できる. 同様に実際の宇宙における観測データから得られる値は $S \simeq 10^{122} k_B$ であることが知られている.

5.1.6 Schwarzschild-dS 座標

dS 時空にも AdS 時空の時 (節 2.1.4) と同様に Einstein 方程式の真空解としてのブラックホール解が存在し, 以下のように与えられる.

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{d-1}^2, \quad f(r) = 1 - \frac{r^2}{R_{dS}^2} - \frac{\mu}{r^{d-2}} \quad (5.1.26)$$

ここでも μ はブラックホール質量と関係した定数である. $\mu = 0$ で pure dS の static 座標 (5.1.20) に一致することを注意しておく. Killing vector が null になるような event horizon では, $g_{tt} = 0$ となるので

$$f(r) = 1 - \frac{r^2}{R_{dS}^2} - \frac{\mu}{r^{d-2}} = 0 \quad (5.1.27)$$

を考えれば良い. ここでこの方程式の解として実数かつ正であるものが二つ存在することがわかる. これらはそれぞれ cosmological horizon と blackhole horizon に対応する. $d = 3$ の 4 次元 Schwarzschild-dS ブラックホールに対するそれぞれの解を $r = r_c, r_{bh}$ とした時の解を図 5.6 にプロットした.

この図から明らかに (5.1.27) が正の実数解を持つ条件として $\mu \leq \mu_{max}$ が存在することがわかる. したがって Schwarzschild-dS ブラックホールには質量の上限が存在する. さらに $\mu = \mu_{max}$ の時, 解は $r_c = r_{bh} = r_{max}$ となり, 二つの horizon は一致する.

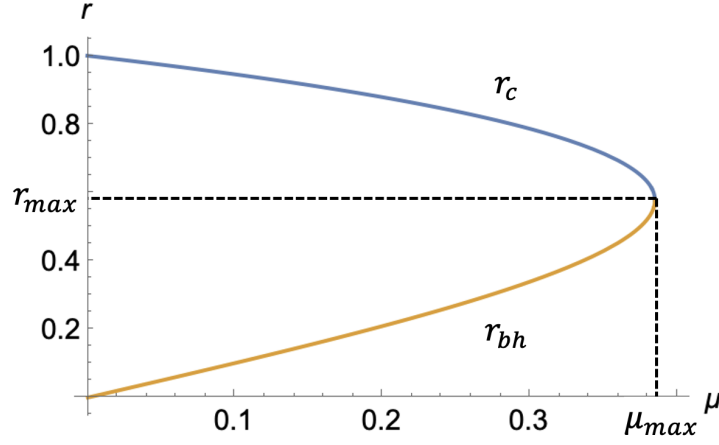


図 5.6: cosmological horizon r_c (青線) と blackhole horizon r_{bh} (黄線). ここで $d = 3$, $R_{dS} = 1$ としており, この時 $\mu_{max} = \frac{2R_{dS}}{3\sqrt{3}}$, $r_{max} = \frac{R_{dS}}{\sqrt{3}}$ となる.

Nariai limit

$\mu \rightarrow \mu_{max}$ で r_c と r_{bh} が一致するような極限を Nariai limit と呼ぶ. また, $\mu = \mu_{max}$ のブラックホール解を Nariai ブラックホールという [119].

以下, 簡単のために $d = 3$ の 4 次元 dS 時空で考える. この極限に対して $r_c = r_{max} + \epsilon R_{dS}$, $r_{bh} = r_{max} - \epsilon R_{dS}$ とおき, 微小な ϵ を考える. そこで以下のように座標を取り替えると

$$r = r_{max} + \epsilon \rho, \quad t = \frac{\tau}{\epsilon} \quad (5.1.28)$$

Nariai limit の horizon 近傍の幾何として ϵ の leading order を求めると

$$f(r) = 3\epsilon^2 \left(1 - \frac{\rho^2}{R_{dS}^2} \right) + O(\epsilon^3) \quad (5.1.29)$$

であり, 最終的に以下のような計量が得られる.

$$ds^2 = -3 \left(1 - \frac{\rho^2}{R_{dS}^2} \right) d\tau^2 + \frac{d\rho^2}{3 \left(1 - \frac{\rho^2}{R_{dS}^2} \right)} + \frac{R_{dS}^2}{3} d\Omega_2^2 \quad (5.1.30)$$

ここから明らかに horizon 近傍の幾何が $dS_2 \times S^2$ で表されることがわかる.

5.1.7 dS 時空上の場の量子論

以下では dS 時空におけるスカラー場やその二点関数の振る舞いを考え, さらには曲がった時空に特有の真空の不定性を見ていく [120–122].

$d+1$ 次元 dS 時空上の場の量子論として以下のような質量 m を持つスカラー場の作用を考える.

$$S_{\text{scalar}} = -\frac{1}{2} \int_{dS} d^{d+1}x \sqrt{-g} (g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + m^2 \phi^2) \quad (5.1.31)$$

この時, 節 2.3.2 における AdS 時空のスカラー場と同様に Poincaré 座標 (5.1.16) を用いて計算する. スカラー場の運動方程式は

$$\partial_\eta^2 \phi - \frac{d-1}{\eta} \partial_\eta \phi - \partial_x^2 \phi + \frac{m^2 R_{\text{dS}}^2}{\eta^2} \phi = 0 \quad (5.1.32)$$

となる. ここで空間方向のフーリエ変換を導入すると

$$\partial_\eta^2 \phi - \frac{d-1}{\eta} \partial_\eta \phi + \left(k^2 + \frac{m^2 R_{\text{dS}}^2}{\eta^2} \right) \phi = 0 \quad (5.1.33)$$

となる. ここで漸近境界 $\eta = 0$ 付近でのスカラー場の振る舞いを $\phi \propto |\eta|^\Delta$ と仮定して上式に代入すると

$$\Delta(\Delta - d) = -m^2 R_{\text{dS}}^2 \quad (5.1.34)$$

となり, 解として

$$\Delta_\pm = \frac{d}{2} \pm \sqrt{-m^2 R_{\text{dS}}^2 + \frac{d^2}{4}} \quad (5.1.35)$$

が得られる. ここから明らかなように軽い粒子 ($m < \frac{d}{2R_{\text{dS}}}$) ではスケーリング次元 Δ は実数になり, 重い粒子 ($m > \frac{d}{2R_{\text{dS}}}$) ではスケーリング次元 Δ は虚数になる. これらは dS 時空の対称性である $SO(d+1, 1)$ のユニタリー既約表現であり, 軽い粒子 ($\Delta \in \mathbb{R}$) は Complementary Series, 重い粒子 ($\Delta \in \mathbb{C}$) は Principal Series として知られている.

次に二点関数についても考えていく [115]. Wightman 関数

$$G(x, y) = \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \quad (5.1.36)$$

は $d+1$ 次元時空のラプラシアンを用いて

$$(\partial^2 - m^2)G(x, y) = 0 \quad (5.1.37)$$

の解として与えられる. この二点関数は dS 時空の対称性を保っているので測地線長の計算にも登場した $SO(d+1, 1)$ 不変な長さ P の関数となる. ここで P は埋め込み座標を用いて

$$P_{X,Y} \equiv \frac{\eta_{IJ} X^I Y^J}{R_{dS}^2}, \quad \eta_{IJ} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1) \quad (5.1.38)$$

で与えられる. つまり, $G(x, y) = G(P_{x,y})$ で表される.

この P を用いて微分方程式を書き直すと

$$(1 - P^2) \partial_P^2 G - (d+1) P \partial_P G - m^2 R_{dS}^2 G = 0 \quad (5.1.39)$$

さらに $z = \frac{1+P}{2}$ を用いて書き直すと

$$z(1-z) G'' + \left(\frac{d+1}{2} - (d+1)z \right) G' - m^2 R_{dS}^2 G = 0 \quad (5.1.40)$$

となり, この解はガウスの超幾何関数を用いて

$$G = \frac{\Gamma(\Delta_+) \Gamma(\Delta_-)}{(4\pi)^{\frac{d+1}{2}} \Gamma(\frac{d+1}{2})} {}_2F_1\left(\Delta_+, \Delta_-, \frac{d+1}{2}, \frac{1+P}{2}\right) \quad (5.1.41)$$

と書ける. ここで解の係数は, 二点 x, y が十分近い時に Minkowski 時空での二点関数に一致するように合わせている. また, $\Delta_{\pm}$ は (5.1.35) で与えられるスケーリング次元である. この時, ガウスの超幾何関数は $z = 1$ つまり $P = 1$ であるような x, y の二点が null であるような時に発散する.

さらに (5.1.39) が $P \rightarrow -P$ の変換で対称であることから $G(-P)$ も解であることがわかる. つまり, 以下のガウス超幾何関数を用いた二点関数も解である.

$${}_2F_1\left(\Delta_+, \Delta_-, \frac{d+1}{2}, \frac{1-P}{2}\right) \quad (5.1.42)$$

この時, ガウスの超幾何関数は $P = -1$ であるような x が対蹠点と null の関係にあるような時に発散する. これは通常は物理的でない発散であるが, dS 時空の対蹠点が常に cosmological horizon によって隠されていることから, ある観測者を固定した時にその人が観測し得ない発散になるので許容される. これらの解は 1 つのパラメータ α を用いて線型結合で書かれる. さらにこの二点関数 $G_{\alpha}(x, y)$ に対応して

$$G_{\alpha}(x, y) = \langle \alpha | \phi(x) \phi(y) | \alpha \rangle \quad (5.1.43)$$

として dS 時空における真空もパラメータ α で表される. このようにして構成される真空を α 真空という.

上記で現れた非物理的な二点関数を考えずに (5.1.41) を用いる時の真空を **Bunch-Davies 真空** もしくは **Euclidean 真空** と呼ぶ. これは Euclidean 経路積分で dS 時空を Euclid 化した時の球面で得られる唯一の二点関数からの解析接続で得られるものである. さらにこの考え方は宇宙の波動関数を Euclidean 経路積分で構成した Hartle-Hawking 状態と同じであることを注意しておく [123].

5.2 dS/CFT 対応

量子重力理論がそれより次元低い共形場理論と等価であると主張するホログラフィ原理において, 節 2.3 で見たように AdS 時空における双対性は超弦理論から発案された. これまで見てきたようにこの対応は様々な側面で確認されており, 非常に成功した理論であることがわかる. しかし, AdS 時空は宇宙定数が負の時空であり, 我々が実際に住んでいる膨張宇宙を記述することはできない. したがって, 正の宇宙定数を持つようなド・ジッター (dS) 時空における双対性を調べる必要がある. 実際に AdS/CFT 対応から自然に拡張されるようなものとして dS/CFT 対応が提唱されている [124]. しかし, dS 時空に双対な共形場理論がユニタリーでないなどの様々な問題が存在し, まだまだ発展段階の分野である. また, 最初に提唱されたもの以外にも dS 時空の双対性に対する様々な候補が存在する. 本節ではその一つとして static patch holography を紹介する [125].

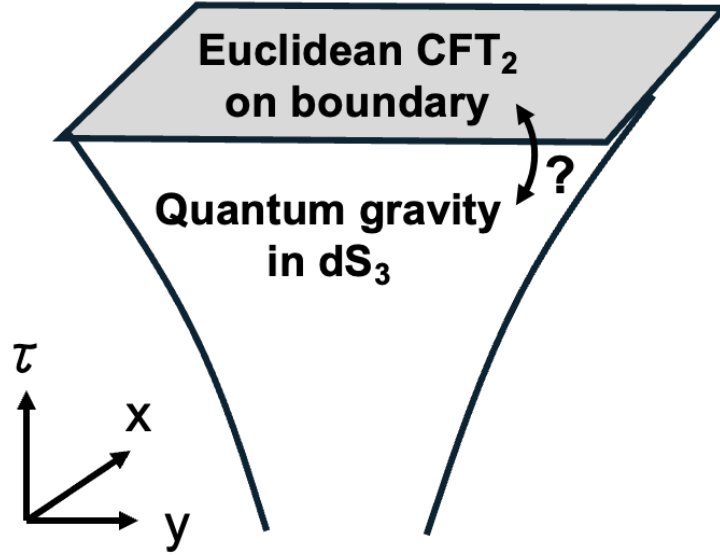
5.2.1 dS/CFT 対応

2001 年に Strominger によって dS/CFT 対応が提唱された [124]. その主張は以下の通りである.

dS/CFT 対応

$d + 1$ 次元ド・ジッター (dS_{d+1}) 時空の量子重力理論が, 境界上の d 次元 Euclidean 共形場理論 (CFT_d) と等価である (図 5.7).

dS 時空が AdS 時空からの解析接続で得られるという事実から, dS 時空に双対

図 5.7: dS/CFT 対応

な場の理論も AdS 時空に双対な CFT からの解析接続で得られると考えられる．
具体的には 3 次元 Poincaré 座標で

$$R_{AdS} = iR_{dS}, \quad z = i\eta, \quad t = iy \quad (5.2.44)$$

とおくと AdS の座標 (2.1.19) から dS の座標 (5.1.16) に

$$ds^2 = R_{AdS}^2 \frac{dz^2 - dt^2 + dx^2}{z^2} \rightarrow ds^2 = R_{dS}^2 \frac{-d\eta^2 + dx^2 + dy^2}{\eta^2} \quad (5.2.45)$$

のように移ることができる．さらに 3 次元 global 座標では

$$R_{AdS} = iR_{dS}, \quad \rho = t - \frac{\pi}{2}i \quad (5.2.46)$$

とおくと Euclidean AdS の座標 (2.1.17) から dS の座標 (5.1.6) に

$$\begin{aligned} ds^2 &= R_{AdS}^2 (d\rho^2 + \sinh^2 \rho (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)) \\ &\rightarrow ds^2 = R_{dS}^2 (-dt^2 + \cosh^2 t (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)) \end{aligned} \quad (5.2.47)$$

のように移れる．このように解析接続して得られる量として, 双対な CFT の中心電荷は Brown-Henneaux 関係式 $c = \frac{3R_{AdS}}{2G_N}$ を解析接続して得られる

$$c = i \frac{3R_{dS}}{2G_N} = ic_{dS} \quad (5.2.48)$$

で与えられることがわかる. さらに, UV カットオフに対する解析接続 $\epsilon_{AdS} = i\epsilon_{dS}$ も用いると真空状態でのエンタングルメントエントロピーも Poincaré 座標で (3.3.136) のように得られていたものが

$$S_A = \frac{c}{3} \log \frac{x_2 - x_1}{\epsilon} \rightarrow S_A = i \frac{c_{dS}}{3} \log \frac{x_2 - x_1}{\epsilon_{dS}} + \frac{\pi c_{dS}}{6} \quad (5.2.49)$$

となり, global 座標では (3.3.142) のように得られていたものが

$$S_A = \frac{c}{3} \log \frac{\sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)}{\epsilon} \rightarrow S_A = i \frac{c_{dS}}{3} \log \frac{\sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)}{\epsilon_{dS}} + \frac{\pi c_{dS}}{6} \quad (5.2.50)$$

のように変化する.

また, バルクの場の質量と境界 CFT の演算子の共形次元に対する AdS/CFT 対応における関係式 $\Delta = \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2 R_{AdS}^2}$ は

$$\Delta = \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} - m^2 R_{dS}^2} \quad (5.2.51)$$

となる. これは dS 時空中のスカラー場を考えた時に得られた (5.1.35) と一致している. このように中心電荷や共形次元, エンタングルメントエントロピーなどが虚数になり得るというのはユニタリー性を破った系に特有であり, dS 時空に双対な CFT が非常に特殊であることがわかる.

このように対応する CFT がよくわかっていないことにより, dS/CFT 対応は AdS/CFT 対応と違って二つの理論の等価性を確認する例は少ない. この意味でも dS/CFT 対応というのは発展途上の分野である.

5.2.2 dS/CFT 対応におけるエンタングルメントエントロピー (Pseudo エントロピー)

dS/CFT 対応の枠組みでエンタングルメントエントロピーを重力の計算で求める公式が提唱されている [126, 127].

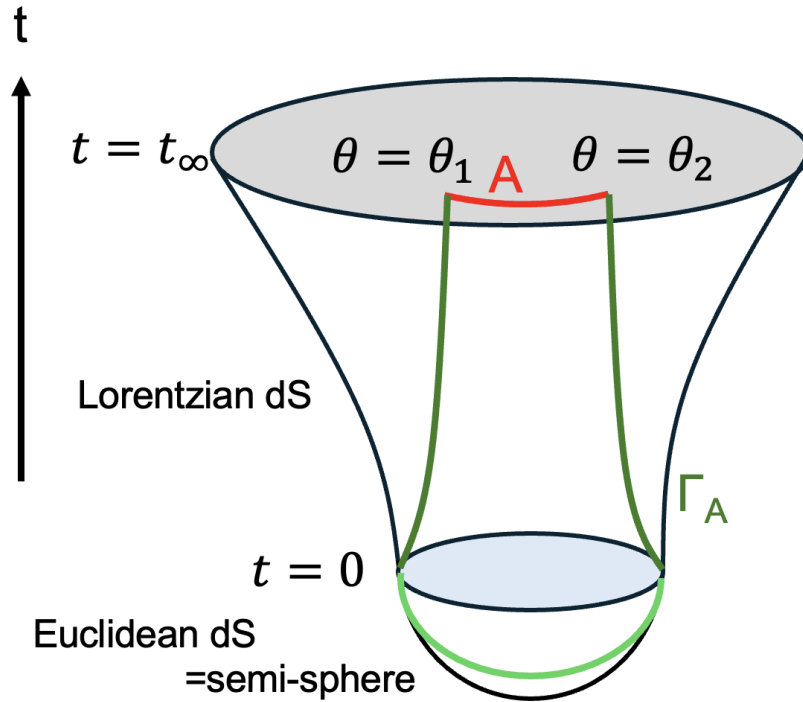


図 5.8: 3次元 dS 時空の global 座標における笠-高柳面

笠-高柳公式の dS 時空への拡張

時間無限遠に位置する境界の部分領域 A のエンタングルメントエントロピー S_A は, A と同じ境界を持ち Lorentzian dS 時空に伸びた極小曲面と, それを $t = 0$ で Euclidean dS 時空に解析接続した多様体において得られる極小曲面を繋げることによって得られる Γ_A (図 5.8) の面積を用いて,

$$S_A = \text{MinExt}_{\Gamma_A} \frac{\text{Area}(\Gamma_A)}{4G_N} \quad (5.2.52)$$

で与えられる.

Lorentzian dS 時空において時間無限遠の二点から出発する極小曲面はバルク側に進むにつれて離れていってしまうので普通なら繋がることはないが, ここで $t = 0$ で Euclidean dS 時空に繋げるという Hartle-Hawking の宇宙描像 [123] と同

様の考え方を取り入れることによって極小曲面を繋げることができる.

例: pure dS_3

実際に 3 次元 dS 時空の global 座標を用いて重力の計算によって対応するエンタングルメントエントロピーを求めてみる. 以下のように部分領域を取る.

$$t = \infty, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \quad \phi = \phi_* = \text{const.} \quad (5.2.53)$$

ここで球面座標の ϕ を Euclidean の時間座標とみなして時間一定面を取っている. また, 簡単のために部分領域の中心を $\theta = \frac{\pi}{2}$ と仮定する.

まずは Lorentzian dS 時空における測地線の長さを求める. ここで部分領域の端点から伸びた測地線はそれぞれ

$$(t, \theta, \phi) = (0, 0, \phi_*), (0, \pi, \phi_*) \quad (5.2.54)$$

に向かって伸びることを用いて測地線長の距離公式 (5.1.7) を使うと

$$L_{\text{Lorentzian}} = R_{dS} \left(\cos^{-1} \left[\frac{e^{t_\infty}}{2} \cos \theta_1 \right] + \cos^{-1} \left[-\frac{e^{t_\infty}}{2} \cos \theta_2 \right] \right) \quad (5.2.55)$$

ここで timelike に離れた二点は右辺括弧内の対称性不変量が 1 より大きくなることが知られているので, 測地線は虚数になる [115]. よって正しくは以下の通りである.

$$L_{\text{Lorentzian}} = iR_{dS} \left(\cosh^{-1} \left[\frac{e^{t_\infty}}{2} \cos \theta_1 \right] + \cosh^{-1} \left[-\frac{e^{t_\infty}}{2} \cos \theta_2 \right] \right) \quad (5.2.56)$$

UV カットオフ t_∞ は十分大きいことを用いると

$$\begin{aligned} L_{\text{Lorentzian}} &\simeq iR_{dS} (\log [e^{t_\infty} \cos \theta_1] + \log [-e^{t_\infty} \cos \theta_2]) \\ &\simeq 2iR_{dS} \log \left[e^{t_\infty} \sin \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.2.57)$$

となる. ここで三角関数の和積の公式と, 部分領域の中心が $\theta = \frac{\pi}{2}$ であることから $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ を使った. また, UV カットオフを $e^{t_\infty} = \frac{1}{\epsilon}$ と取り直すと,

$$L_{\text{Lorentzian}} \simeq 2iR_{dS} \log \left[\frac{\sin \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right)}{\epsilon} \right] \quad (5.2.58)$$

が得られる.

さらに, 3 次元 Euclidean dS 時空は 3 次元の半球と見なせるので対蹠点を通る測地線は半円となり, 大きさは

$$L_{\text{Euclidean}} = \pi R_{dS} \quad (5.2.59)$$

である. これらをまとめて (5.2.52) を用いると, 部分領域 A のエンタングルメントエントロピーは

$$\begin{aligned} S_A^{dS} &= \frac{L_{\text{Lorentzian}} + L_{\text{Euclidean}}}{4G_N} \\ &\simeq i \frac{R_{dS}}{2G_N} \log \left[\frac{\sin \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right)}{\epsilon} \right] + \frac{\pi R_{dS}}{4G_N} \\ &= i \frac{c_{dS}}{3} \log \left[\frac{\sin \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right)}{\epsilon} \right] + \frac{\pi c_{dS}}{6} \end{aligned} \quad (5.2.60)$$

ここで最後の式に dS/CFT 対応に解析接続した Brown-Henneaux 関係式 (5.2.48) を用いた. 得られた結果は $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ 対応で得られるエンタングルメントエントロピーの結果を適切に解析接続した (5.2.50) と一致していることに注目されたい.

Pseudo エントロピー

ここまで見てきたように dS/CFT 対応におけるエンタングルメントエントロピーは虚数を取るような量であり, その際には通常のエンタングルメントエントロピーではなく一般化された Pseudo エントロピーと考える必要がある. この節では Pseudo エントロピーに対する定義や性質を詳しく見ていく [126–128].

Pseudo エントロピーは二つの異なる量子状態 $|\psi\rangle$ と $|\phi\rangle$ の間に定義される量子情報量であり, 通常のエンタングルメントエントロピーの自然な一般化として位置づけられる.

二つの純粋状態 $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ に対し, 遷移行列を

$$\tau^{\psi|\phi} = \frac{|\psi\rangle \langle \phi|}{\langle \phi|\psi\rangle} \quad (5.2.61)$$

で定義する. $\tau^{\psi|\phi}$ は一般にエルミートでない. これによって後に定義する Pseudo エントロピーは複素数値を取り得る.

系を部分領域 A と B に分割し, 部分トレース

$$\tau_A^{\psi|\phi} = \text{Tr}_B \tau^{\psi|\phi} \quad (5.2.62)$$

を取ることで, Pseudo エントロピーは

$$S_{\text{pseudo}} = -\text{Tr} \left[\tau_A^{\psi|\phi} \log \tau_A^{\psi|\phi} \right] \quad (5.2.63)$$

のように定義される. 経路積分における表示は

$$\tau_A^{\psi|\phi} = \frac{|\psi\rangle\langle\phi|}{\langle\phi|\psi\rangle} = \text{A} \frac{\text{final state } \langle\phi|}{\text{initial state } |\psi\rangle} \quad \begin{array}{c} t_E = \infty \\ \downarrow \\ t_E = 0 \\ \uparrow \\ t_E = -\infty \end{array} \quad (5.2.64)$$

で与えられる.

特に $|\psi\rangle = |\phi\rangle$ のときには

$$\tau^{\psi|\phi} = |\psi\rangle\langle\psi| \Rightarrow S_{\text{pseudo}} = S_{\text{EE}}, \quad (5.2.65)$$

となり, 通常のエンタングルメントエントロピーに一致する.

また同様に Rényi pseudo エントロピーも

$$S_{\text{pseudo}}^{(n)} = \frac{1}{1-n} \log \text{Tr} \left[\left(\tau_A^{\psi|\phi} \right)^n \right] \quad (5.2.66)$$

で定義され, これもまた $|\psi\rangle = |\phi\rangle$ の時に通常 Rényi エントロピーに帰着する. この時, 境界条件 $|\psi\rangle$ を構成する多様体と境界条件 $\langle\phi|$ を構成する多様体を周期的につなげることでレプリカ法を用いることもできる.

以下に Pseudo エントロピーの基本的な性質を羅列しておく.

- $\tau^{\psi|\phi} = [\tau^{\phi|\psi}]^\dagger$ が成立

- $S_{\text{pseudo}}(\tau_A^{\psi|\phi}) = S_{\text{pseudo}}(\tau_B^{\psi|\phi})$ が成立
- 一般にエンタングルメントエントロピーに期待されていた強劣加法性は成り立たない.

5.2.3 dS₃/CFT₂ 対応における Bañados map

節 2.3.6 では 3 次元 AdS 時空の任意の座標を局所的に pure に持っていくための座標変換である Bañados map を見た. これは 2 次元共形場理論の共形変換に対する重力双対であることを注意しておく. このような事実は 3 次元時空の重力の自由度がないことに起因しており, 3 次元 dS 時空にも拡張できると考えられる. 以下では Euclidean AdS 時空における Bañados map に対して解析接続を行うことで dS 時空における Bañados map を導く [11].

(2.3.257) に対して $\eta = iT$ および $R_{dS} = iR_{AdS}$ と解析接続し, 座標 $(\eta, \xi, \bar{\xi})$ を $(T, \xi, \bar{\xi})$ へ変換すると, 3 次元 dS 時空の Poincaré 座標

$$ds^2 = R_{dS}^2 \frac{-dT^2 + d\xi d\bar{\xi}}{T^2}. \quad (5.2.67)$$

を得られる. 同様に $z = i\tau$ として $(z, w, \bar{w})$ の座標を $(\tau, w, \bar{w})$ へと変換する. これらの解析接続を (2.3.259) と (2.3.260) に用いると, dS 時空の Bañados map は

$$\begin{aligned} \xi &= f(w) + \frac{2\tau^2(f')^2(\bar{f}'')}{4|f'|^2 - \tau^2|f''|^2}, \\ \bar{\xi} &= \bar{f}(\bar{w}) + \frac{2\tau^2(\bar{f}')^2(f'')}{4|f'|^2 - \tau^2|f''|^2}, \\ T &= \frac{4\tau(f'\bar{f}')^{3/2}}{4|f'|^2 - \tau^2|f''|^2}. \end{aligned} \quad (5.2.68)$$

となり, 計量は以下のように変化する.

$$ds^2 = R_{dS}^2 \left(-\frac{d\tau^2}{\tau^2} - T(w)(dw)^2 - \bar{T}(\bar{w})(d\bar{w})^2 + \left(\frac{1}{\tau^2} + \tau^2 T(w)\bar{T}(\bar{w}) \right) dw d\bar{w} \right). \quad (5.2.69)$$

ここで, $T(w)$, $\bar{T}(\bar{w})$ は

$$T(w) = \frac{3(f'')^2 - 2f'f'''}{4f'^2}, \quad \bar{T}(\bar{w}) = \frac{3(\bar{f}'')^2 - 2\bar{f}'\bar{f}'''}{4\bar{f}'^2}. \quad (5.2.70)$$

で与えられる. このようにして得られた dS 時空の Bañados map は節 7.2.4 の中で Einstein 方程式とエンタングルメントエントロピーの第一法則を dS/CFT 対応において示す際に, 強力な役割を果たしている.

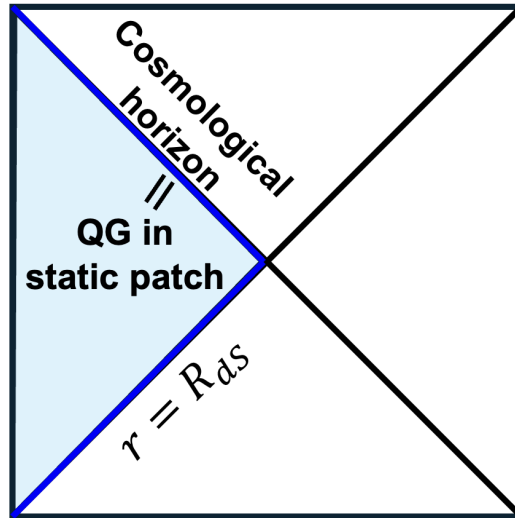


図 5.9: static patch holography

5.2.4 Static Patch Holography

以下ではこれまで見てきた Strominger によって提唱された dS/CFT 対応とは別の dS 時空におけるホログラフィ原理を見ていく. それは dS 時空の static 座標 (5.1.20) で張られる static patch において与えられる双対性であり, 2021 年に Susskind によって提案された [125, 129].

static patch holography

static patch における量子重力理論が, cosmological horizon に位置する量子論と等価である (図 5.9).

Bousso bound [130] などの考え方によって, 適切なホログラフィックスクリーンは双対な時空のすべての情報を復元できる必要があるとされ, 双対な量子論は cosmological horizon に位置するとされている. 実用上は null 面である cosmological horizon ではなく $r = R_{dS} - \epsilon$ で与えられるような r 一定面の stretched horizon に量子系が住んでいるとして扱う.

これまで見てきた Strominger によって提唱された dS/CFT 対応では双対な共形

場理論が時間方向を持たないことによる様々な問題が生じていたが, この双対性では双対な量子論が時間方向を含んでいることに注意されたい. また, それに付随して static patch では timelike Killing vector が定義できるので対応する保存量なども考えることができる.

このような static patch holography が提唱されたのは非常に最近であり, 具体的に双対な量子論が何であるか, また観測者の依存性はどのように扱うべきかなど様々な問題が残されている.

第6章

局在したスカラー場によって摂動されたdSブレーンの解析

節 4.2 では BCFT に双対な重力理論として EOW ブレーンを挿入した AdS 時空を紹介した. そこでは BCFT として高い対称性を保つために定数の物質作用を入れていたが, 一般にはブレーンに任意の物質場を入れて BCFT からの変形 (特に境界繰り込み群フロー) を考えることができる. この章では最も扱いやすいスカラー場を EOW ブレーン上に局在させ, そのスカラー場が生み出す EOW ブレーンのダイナミクスを解析していく. AdS ブレーンに対しては既に解析されている [131]. 著者らはそれを dS ブレーンで考え直すことによって, ブレーン上で実現される dS/CFT 対応への新たな制限や timelike な部分領域を取った時の g 定理, さらに宇宙論への応用も行なった [10].

本章では, これらの解析についてそれぞれ詳しく見ていく. この章では簡単のために $\text{AdS}_3/\text{BCFT}_2$ 対応のセットアップに制限して考える. さらに AdS 半径を $R_{\text{AdS}} = 1$ とおく.

6.1 ブレーン上で実現される dS/CFT 対応のスペクトラムへの制限

本節では timelike に挿入した dS ブレーンに対する摂動を解析していく. いくつかのモデルで例を見た後に, 一般の漸近 dS₂ において dS/CFT 対応の spectrum に制限がつけられることを見る.

6.1.1 dS ブレーン

節 4.2 で解析したブレーンは BCFT に対応した AdS ブレーンであった. ここで AdS ブレーンとは誘導計量が AdS 時空と一致するようなブレーンのことである. この節ではブレーンを timelike に挿入することで誘導計量が dS 時空と一致するような dS ブレーンを考える. その境界理論での対応物はある時刻で時空が終わるような final state projection された状態である [10].

AdS ブレーンの時も同様であるが, dS ブレーンが実現できるのは物質項が定数の時である. このような場合は定数の物質項 T をブレーンのテンションという. また, 節 4.2 と同様に解析することでそれらのブレーンの傾きとテンションが結びつき, その傾きは誘導計量に落とし込んだ時にそれぞれの時空の大きさを決める. またテンションの大きさによってどのような種類のブレーンが実現されるかも決まる. 実際に AdS ブレーンを解析した際の (4.2.42) から, $|T| < 1$ という条件が得られ, 後に見るように dS ブレーンを形成するようなブレーンテンションは $|T| > 1$ を満たす. また, その境界にあたる $|T| = 1$ の場合には, $z = \text{const.}$ で配位が決まるような flat ブレーンが得られることも知られている. これらの定数物質項の場合のテンションを用いた分類は図 6.1 にまとめている.

dS ブレーンについては次節でも詳しく見ていく.

6.1.2 dS ブレーンの摂動に対する条件

以下では 3 次元 AdS 時空上に埋め込まれた dS ブレーンに局在したスカラー場を導入し, そこから誘発されるブレーンの摂動を解析していく. ブレーン上の作用と

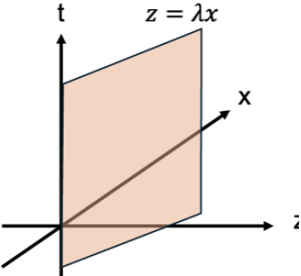
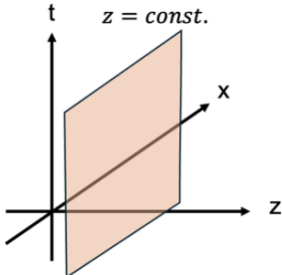
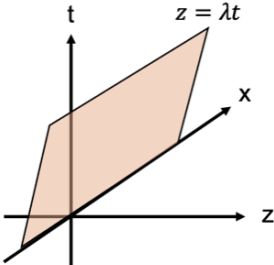
Tension	Type of EOW brane
$ T < 1$	AdS brane $ds_Q^2 = \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2} \frac{-dt^2 + dx^2}{x^2}$ 
$ T = 1$	Flat brane $ds_Q^2 = \frac{1}{\lambda^2} (-dt^2 + dx^2)$ 
$ T > 1$	dS brane $ds_Q^2 = \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2} \frac{-dt^2 + dx^2}{t^2}$ 

図 6.1: 定数の物質項に対するブレーンの分類

して以下のような物質項を考える.

$$I_{\text{brane}} = \frac{1}{8\pi G_N} \int_Q d^2x \sqrt{-h} (K - h^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi - V(\phi)) \quad (6.1.1)$$

この時, 作用の変分は

$$\begin{aligned} \delta I = & \frac{1}{16\pi G_N} \int_Q d^2x \sqrt{-h} \delta h^{ab} \\ & [K_{ab} - h_{ab} K - 2\partial_a \phi \partial_b \phi + h_{ab} (h^{cd} \partial_c \phi \partial_d \phi + V(\phi))] \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

で与えられる. したがって Neumann 境界条件は

$$\begin{aligned} K_{ab} - h_{ab} K &= T_{Qab}, \\ T_{Qab} &\equiv 2\partial_a \phi \partial_b \phi - h_{ab} (h^{cd} \partial_c \phi \partial_d \phi + V(\phi)) \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

となる.

以下では具体例として, 3 次元 AdS 時空の Poincaré 座標

$$ds^2 = \frac{dz^2 - dt^2 + dx^2}{z^2} \quad (6.1.4)$$

に対して物質場によって変形された timelike なブレーン配位 $z = Z(t)$ の埋め込みを考える. ここで簡単のために x 方向への並進対称性を仮定している. ここでブレーンによって切り取られたバルクのどちら側を考えるかによって

$$\begin{aligned} \text{type I: } & 0 \leq z \leq Z(t), \\ \text{type II: } & z \geq Z(t). \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

のように分類することができる (図 6.2 参照).

さらにこのブレーンの誘導計量は

$$ds^2 = \frac{-(1 - \dot{Z}^2)dt^2 + dx^2}{Z^2}, \quad (6.1.6)$$

で与えられる. ここで $\dot{Z} = \frac{dZ(t)}{dt}$ のように時間微分を表している. ブレーンが timelike であるという条件から

$$\dot{Z}^2 < 1 \quad (6.1.7)$$

が得られる.

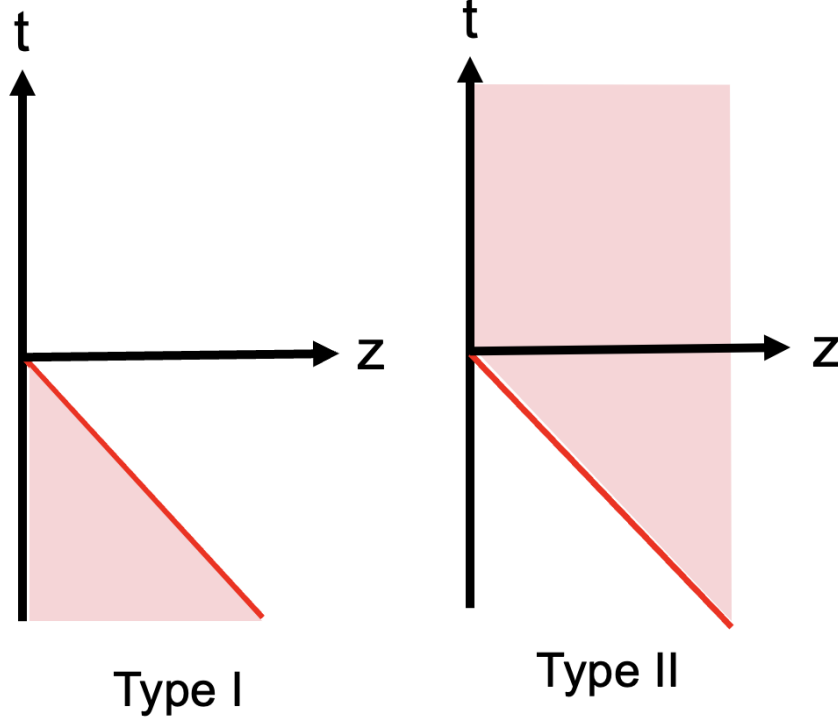


図 6.2: type I ブレーン (左図) と type II ブレーン (右図). ここでは x 軸方向を省略している.

Null Energy Condition (NEC)

さらにこのブレーン上で null energy condition を課す. ここでは 2 次元の誘導計量が対角的になるような一般の場合に考えていく.

$$ds^2 = h_{tt}dt^2 + h_{xx}dx^2. \quad (6.1.8)$$

この計量に対して null ベクトルを $N^a = (N^t, N^x)$ のように考えると

$$h_{ab}N^aN^b = h_{tt}N^{t^2} + h_{xx}N^{x^2} = 0. \quad (6.1.9)$$

のような条件を満たす. よって, 規格化を除いて

$$N^a = \left(\sqrt{h_{xx}}, \sqrt{-h_{tt}} \right). \quad (6.1.10)$$

のように null ベクトルを取ることができる. ここで (6.1.3) から

$$T_{tt}^Q = \dot{\phi}^2 - h_{tt}V(\phi) \quad (6.1.11)$$

$$T_{xx}^Q = -h_{xx}(h^{tt}\dot{\phi}^2 + V(\phi)) \quad (6.1.12)$$

が得られるので NEC は

$$\begin{aligned} T_{ab}^Q N^a N^b &= h_{xx}\dot{\phi}^2 - h_{tt}V(\phi) + h_{tt}h_{xx}(h^{tt}\dot{\phi}^2 + V(\phi)) \\ &= 2h_{xx}\dot{\phi}^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (6.1.13)$$

のようになる. よって $h_{xx} \geq 0$ が成り立つ時 NEC として

$$\dot{\phi}^2 \geq 0 \quad (6.1.14)$$

を考えれば良い. これは Poincaré 座標への埋め込みの時だけでなく, 後に見るような global 座標への埋め込みの時も同様に考えられる.

6.1.3 様々な dS ブレーンの摂動

以下に, いくつかの場合の Neumann 境界条件の解を構成していく. ここで本来はスカラー場のポテンシャルを決めた後に微分方程式を解いてブレーンの配位を求めるが, この計算はやや難解なので逆にブレーンの配位を決めてからそれを実現するようなスカラー場の配位を解析していく.

type I 一般論

type I ブレーンは法線ベクトルとして

$$N_a = \frac{1}{Z\sqrt{1-\dot{Z}^2}}(1, -\dot{Z}, 0), \quad N^a = \frac{Z}{\sqrt{1-\dot{Z}^2}}(1, \dot{Z}, 0) \quad (6.1.15)$$

を取ることができ, その時の外的曲率は以下のようなになる.

$$K_{tt} = -\frac{-1 + \dot{Z}^2 + Z\ddot{Z}}{Z^2\sqrt{1-\dot{Z}^2}}, \quad K_{xx} = \frac{-1}{Z^2\sqrt{1-\dot{Z}^2}}, \quad K_{tx} = 0 \quad (6.1.16)$$

Neumann 境界条件 (6.1.3) は

$$\begin{aligned} -\frac{\sqrt{1-\dot{Z}^2}}{Z^2} &= \dot{\phi}^2 + \frac{1-\dot{Z}^2}{Z^2}V(\phi), \\ \frac{1-\dot{Z}^2-Z\ddot{Z}}{Z^2(1-\dot{Z}^2)^{3/2}} &= \frac{\dot{\phi}^2}{1-\dot{Z}^2} - \frac{V(\phi)}{Z^2}. \end{aligned} \quad (6.1.17)$$

となり, さらにこれらを整理すると

$$\dot{\phi}^2 = -\frac{\ddot{Z}}{2Z\sqrt{1-\dot{Z}^2}}, \quad (6.1.18)$$

$$V(\phi) = -\frac{Z^2\dot{\phi}^2}{1-\dot{Z}^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\dot{Z}^2}} \quad (6.1.19)$$

を得る. ここで NEC は (6.1.14) より, $\ddot{Z} \leq 0$ となり, ここからブレーンの曲がり方が制限される. ここから type I ブレーンは必ず漸近境界に端を持つことがわかる. さらにブレーンが漸近境界と交わる点でブレーン上の 2 次元 dS 時空に双対な 1 次元の CFT が存在すると期待することができ, ブレーン上に dS_2/CFT_1 対応を考えられる.

type I の例 1 : dS ブレーン

自明な解として $Z(t) = \lambda t$ で与えられる dS ブレーンを考えることができる. ブレーンが timelike である条件から $0 < \lambda < 1$ が課される. この時, 誘導計量は

$$ds_Q^2 = \frac{-(1-\lambda^2)dt^2 + dx^2}{\lambda^2 t^2} = \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2} \frac{-dt^2 + dx'^2}{t^2}, \quad x' = \frac{x}{\sqrt{1-\lambda^2}} \quad (6.1.20)$$

のように書き換えることができ, dS 半径が

$$R_{dS} = \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda} \quad (6.1.21)$$

で与えられるような dS ブレーンになることがわかる. さらに Neumann 境界条件は

$$\phi = \text{const.}, V = -\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} = \text{const.} \quad (6.1.22)$$

のように与えられ, スカラー場の運動項がゼロになり, ポテンシャルが定数なのでブレーンのテンションと解釈できることがわかる. この時 $V = T < -1$ であることも確認できる.

type I の例 2 : $Z = \beta(T^p - t^p)$

例として, 以下の関数を選ぶ.

$$Z(t) = \beta(T^p - t^p) \quad (6.1.23)$$

EOW ブレーンが timelike であるためには $1 - (\beta p T^{p-1})^2 \geq 0$ が要求される.

Neumann 境界条件は以下ようになる.

$$\dot{\phi}^2 = \frac{p(p-1)t^{p-2}}{2(T^p - t^p)\sqrt{1 - (\beta p t^{p-1})^2}} \quad (6.1.24)$$

$$V(\phi) = -\frac{1}{\sqrt{1 - (\beta p t^{p-1})^2}} + \frac{\beta^2 (T^p - t^p) p(p-1) t^{p-2}}{2(1 - (\beta p t^{p-1})^2)^{1/4}} \quad (6.1.25)$$

$p \in \mathbb{Z}$ を考えると, 奇数の値は $t < 0$ 領域で NEC が破れるため禁止され, したがって偶数のみが許される. 数値的挙動は 図 6.3 に示されている. AdS 境界付近 $z \rightarrow 0$ かつ $t \rightarrow T$ では, (6.1.24) は以下のように解ける.

$$\phi \simeq \phi_* - \frac{\sqrt{2(p-1)(T-t)}}{\sqrt{T}(1 - (\beta p T^{p-1})^2)^{1/4}} \quad (6.1.26)$$

ポテンシャルの振る舞いは (6.1.25) から

$$V \simeq -\frac{1}{\sqrt{1 - (\beta p T^{p-1})^2}} + \frac{(\beta p T^{p-1})^2}{4(1 - (\beta p T^{p-1})^2)}(\phi - \phi_*)^2 \quad (6.1.27)$$

であり, $t = T$ 付近で誘導計量は

$$ds^2 \simeq \frac{-(1 - (\beta p T^{p-1})^2)d\varepsilon^2 + dx^2}{(\beta p T^{p-1})^2\varepsilon^2} \quad (6.1.28)$$

となる. ただし $T - t = \varepsilon$ とした. これより $t = T$ における dS 半径を読み取ると

$$R_{dS}^2 = \frac{1 - \beta^2 p^2 T^{2p-2}}{\beta^2 p^2 T^{2p-2}}. \quad (6.1.29)$$

したがって, ポテンシャル (6.1.25) は次のようになる.

$$V \simeq -\frac{1}{\sqrt{1 - (\beta p T^{p-1})^2}} + \frac{1}{4R_{dS}^2}(\phi - \phi_*)^2 \quad (6.1.30)$$

この結果, ブレーン上のスカラー場の質量は $R_{dS}^2 M^2 = \frac{1}{4}$ となり, 双対な演算子の共形次元は

$$\Delta = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - M^2 R_{dS}^2} = \frac{1}{2}. \quad (6.1.31)$$

と求められる.

type I の例 3: $Z(t) = \beta \cos \frac{t}{T}$

例として, 以下の関数を選ぶ.

$$Z(t) = \beta \cos \frac{t}{T}. \quad (6.1.32)$$

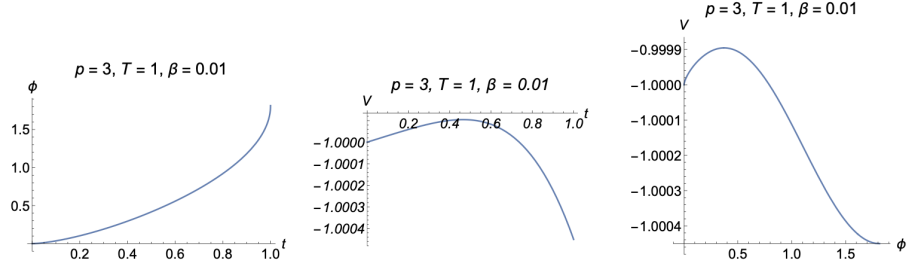


図 6.3: $Z = \beta(T^p - t^p)$ の配位に対する ϕ - t グラフ (左図), V - t グラフ (中央図), V - ϕ グラフ (右図)

EOW ブレーンが timelike であるためには $1 - \frac{\beta^2}{T^2} > 0$ が要求される.

Neumann 境界条件は以下のように解かれる.

$$\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2T^2 \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{T^2} \sin^2 \frac{t}{T}}}, \quad (6.1.33)$$

$$V(\phi) = \frac{-4 + \frac{\beta^2}{T^2} - 3\frac{\beta^2}{T^2} \cos 2\frac{t}{T}}{\sqrt{2}(2 - \frac{\beta^2}{T^2} + \frac{\beta^2}{T^2} \cos 2\frac{t}{T})^{3/2}}. \quad (6.1.34)$$

AdS 境界付近 $z \rightarrow 0$ かつ $t \rightarrow \frac{\pi}{2}T$ では, (6.1.33) は以下のように解ける.

$$\phi \simeq \phi_* - \frac{1}{\sqrt{2}T(1 - \frac{\beta^2}{T^2})^{1/4}}(\frac{\pi}{2}T - t). \quad (6.1.35)$$

ポテンシャルの振る舞いは (6.1.34) から次を得る.

$$V \simeq -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{T^2}}} - \frac{3\frac{\beta^2}{T^2}}{2(1 - \frac{\beta^2}{T^2})^{3/2}}(\phi_* - \phi)^4. \quad (6.1.36)$$

よってこの場合, スカラー場は無質量であり $M^2 = 0$ となる.

双対なスカラー演算子の共形次元は次のように求まる.

$$\Delta = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - M^2 R_{dS}^2} = 1. \quad (6.1.37)$$

ϕ - t グラフ, V - t グラフ, および V - ϕ グラフの概形は 図 6.4 に描かれている.

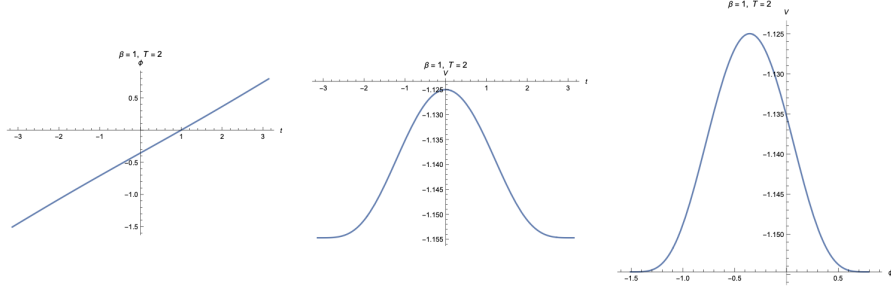


図 6.4: $Z(t) = \beta \cos \frac{t}{T}$ の配位に対する ϕ - t グラフ (左図), V - t グラフ (中央図), V - ϕ グラフ (右図)

type II ブレーン一般論

type II ブレーンは法線ベクトルとして

$$N_a = \frac{Z}{\sqrt{1 - \dot{Z}^2}} (-1, \dot{Z}), \quad N^a = \frac{1}{Z\sqrt{1 - \dot{Z}^2}} (-1, -\dot{Z}), \quad (6.1.38)$$

と取ることができ, その時の外的曲率は

$$K_{tt} = \frac{-1 + \dot{Z}^2 + Z\ddot{Z}}{Z^2\sqrt{1 - \dot{Z}^2}}, \quad K_{xx} = \frac{1}{Z^2\sqrt{1 - \dot{Z}^2}}, \quad K_{tx} = 0 \quad (6.1.39)$$

となる. Neumann 境界条件 (6.1.3) は

$$\frac{\sqrt{1 - \dot{Z}^2}}{Z^2} = \dot{\phi}^2 + \frac{1 - \dot{Z}^2}{Z^2} V(\phi), \quad (6.1.40)$$

$$\frac{-1 + \dot{Z}^2 + Z\ddot{Z}}{Z^2(1 - \dot{Z}^2)^{3/2}} = \frac{\dot{\phi}^2}{1 - \dot{Z}^2} - \frac{V(\phi)}{Z^2}. \quad (6.1.41)$$

さらにこれらを整理すると

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^2 &= \frac{\ddot{Z}}{2Z\sqrt{1 - \dot{Z}^2}}, \\ V(\phi) &= -\frac{Z^2\dot{\phi}^2}{1 - \dot{Z}^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{Z}^2}}. \end{aligned} \quad (6.1.42)$$

ここで NEC は (6.1.14) より, $\ddot{Z} \geq 0$ となり, ここからブレーンの曲がり方が制限される.

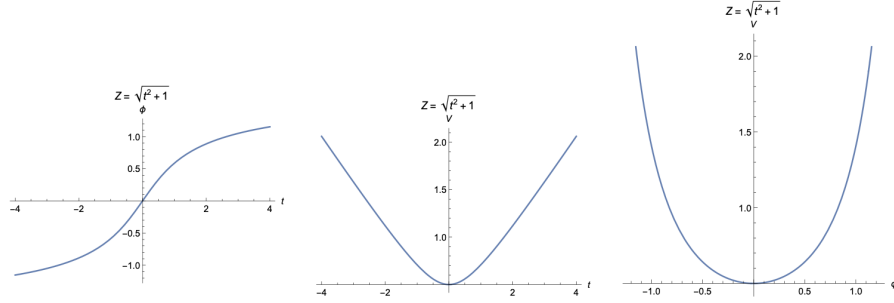


図 6.5: $Z(t) = \lambda\sqrt{t^2 + \alpha^2}$ の配位に対する ϕ - t グラフ (左図), V - t グラフ (中央図), V - ϕ グラフ (右図)

type II の例 1 : dS ブレーン

自明な解として $Z(t) = \lambda t$ で与えられる dS ブレーンを考えることができる. この時, 誘導計量は type I の dS ブレーンと全く同じである. さらに Neumann 境界条件は

$$\phi = \text{const.}, V = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} = \text{const.} \quad (6.1.43)$$

のように与えられ, type I の時と同様に定数のテンションに対応する. この時 $V = T > 1$ であることも確認できる.

type II の例 2 : $Z(t) = \lambda\sqrt{t^2 + \alpha^2}$

例として, 以下の関数を選ぶ.

$$Z(t) = \lambda\sqrt{t^2 + \alpha^2}. \quad (6.1.44)$$

この時, Neumann 境界条件は以下のように解かれる.

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^2 &= \frac{\alpha^2}{2(\alpha^2 + t^2)^{3/2} \sqrt{(1 - \lambda^2)t^2 + \alpha^2}}, \\ V(\phi) &= \frac{\sqrt{\alpha^2 + t^2} (2(1 - \lambda^2)t^2 + (2 - \lambda^2)\alpha^2)}{2((1 - \lambda^2)t^2 + \alpha^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (6.1.45)$$

数値解としては図 6.5 に描いた.

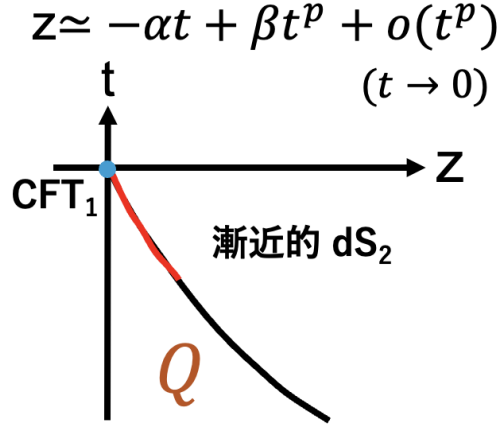


図 6.6: 摂動された dS₂ ブレーン上の dS₂/CFT₁ 対応. ここでは x 軸方向を省略している.

6.1.4 一般のブレーン上の dS/CFT 対応の解析

dS ブレーンの $t \rightarrow 0$ の漸近的な振る舞いのみを以下のように仮定する (図 6.6 参照).

$$Z(t) \simeq -\alpha t + \beta t^p + o(t^p) \quad (t \simeq 0) \quad (6.1.46)$$

この時, ブレーンの timelike 条件と NEC から

$$0 < \alpha < 1, \quad \beta > 0, \quad p > 1 \quad (6.1.47)$$

のようにパラメータが制限される. さらに, 誘導計量の漸近的な振る舞いは

$$ds_Q^2 \simeq \frac{-(1-\alpha^2)dt^2 + dx^2}{\alpha^2 t^2} \simeq \frac{1-\alpha^2}{\alpha^2} \frac{-dt^2 + dx'^2}{t^2} \quad (6.1.48)$$

となる. したがって, このブレーン上に漸近的 dS 時空が作られたことがわかり, その時の dS 半径は

$$R_{dS} = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} \quad (6.1.49)$$

となる. この時の Neumann 境界条件は

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^2 &\simeq \frac{p(p-1)\beta}{2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}} t^{p-3}, \\ V(\phi) &\simeq -\frac{\epsilon}{\sqrt{1-\alpha^2}} - \frac{p(p-3)\alpha\beta}{2(1-\alpha^2)^{3/2}} t^{p-1} \end{aligned} \quad (6.1.50)$$

となる. ここで $\epsilon = \pm 1$ であり, $\epsilon = 1$ は type I に, $\epsilon = -1$ は type II に対応する. 1 行目の微分方程式を解いて 2 行目に代入すると

$$V(\phi) \simeq -\frac{\epsilon}{\sqrt{1-\alpha^2}} + \frac{\alpha^2(p-1)(3-p)}{4(1-\alpha^2)}(\phi - \phi_*)^2 + \dots \quad (6.1.51)$$

を得る. よってスカラー場の質量を読み取ることができる. dS 半径と合わせると

$$M^2 R_{dS}^2 = \frac{(p-1)(3-p)}{4} = \frac{-(p-2)^2 + 1}{4} \leq \frac{1}{4} \quad (6.1.52)$$

のような不等式を見つけることができる. この時, 双対なスカラー演算子の共形次元は

$$\Delta_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - M^2 R_{dS}^2} = \frac{1}{2} \pm \frac{|p-2|}{2} \quad (6.1.53)$$

となる. ここで (6.1.52) から明らかに中式のルートの中身が正であることがわかる. したがって, 双対なスカラー演算子の共形次元は実になることがわかる. ここで一般の dS/CFT 対応では節 5.2 で見たように双対な演算子の共形次元が虚数になり得るというのが問題であったが, ここでは AdS 時空上に埋め込まれたブレーン上で実現される dS/CFT 対応に対して双対な演算子の共形次元が実であることを示した. これは我々のモデルにおける双対な CFT が, ある種のユニタリ性のような性質を持った扱いやすいランクに属することを示唆するものである. さらに, p が虚数などといった場合には共形次元も虚数になり得るが, これは NEC から禁止されることがわかる. このように NEC が双対な CFT のユニタリ性と結びついているというのはホログラフィックな c 定理の証明 (節 2.3.5) や g 定理の証明 (節 4.2.3) においてよく知られている結果であり, 非常に筋の通った結果であることがわかる [49, 50, 112].

6.1.5 高次元における EOW ブレーン

高次元の AdS/CFT 対応においては, EOW ブレーンのバックリアクションのため, 一般には重力解を解析的に見つけることはできない. しかし, 以下のような Poincaré AdS_{d+1} における EOW ブレーンに限って議論することで, 同様の議論を展開することが可能である.

$$ds^2 = \frac{dz^2 - dt^2 + dx_1^2 + \dots + dx_{d-1}^2}{z^2}. \quad (6.1.54)$$

ここでも EOW ブレーンの配位とブレーン上に局在したスカラー場を $z = Z(t)$ および $\phi = \phi(t)$ によって指定する. ブレーン上の誘導計量は

$$ds^2 = \frac{-(1 - \dot{Z}^2)dt^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_{d-1}^2}{Z^2} \quad (6.1.55)$$

となり, EOW ブレーンの法線ベクトルは

$$(N^z, N^t, N^{x_1}, \dots, N^{x_{d-1}}) = \frac{\epsilon Z}{\sqrt{1 - \dot{Z}^2}}(1, -\dot{Z}, 0, \dots, 0), \quad (6.1.56)$$

で与えられる. ここで $\epsilon = \pm 1$ であり, $\epsilon = 1$ は type I に, $\epsilon = -1$ は type II に対応する. この時外部曲率は以下ようになる.

$$K_{tt} - h_{tt}K = \epsilon \frac{-(d-1)\sqrt{1 - \dot{Z}^2}}{Z^2}, \quad (6.1.57)$$

$$K_{x_i x_i} - h_{x_i x_i}K = \epsilon \frac{(d-1)(1 - \dot{Z}^2) - Z\ddot{Z}}{Z^2 (1 - \dot{Z}^2)^{3/2}}, \quad (6.1.58)$$

そして Neumann 境界条件 (4.2.36) から

$$\dot{\phi}^2 = -\epsilon \frac{\ddot{Z}}{2Z\sqrt{1 - \dot{Z}^2}}, \quad (6.1.59)$$

$$V(t) = \epsilon \frac{-2(d-1)(1 - \dot{Z}^2) + Z\ddot{Z}}{2(1 - \dot{Z}^2)^{3/2}}, \quad (6.1.60)$$

が導かれる.

再び dS_d ブレーン解 $Z = -\alpha t$ のまわりの微小摂動を考える. この摂動は

$$Z(t) \simeq -\alpha t - \epsilon \beta t^p + o(t^p), \quad (6.1.61)$$

という形をしており, $t \rightarrow 0$ 極限で仮定されている. 時空が timelike であり, かつ NEC を満たすためには

$$0 < \alpha < 1, \quad \beta > 0, \quad p > 1. \quad (6.1.62)$$

が必要である. この時, 以下のような振る舞いを得る.

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^2 &\simeq \frac{p(p-1)\beta}{2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}} t^{p-3} \\ V(\phi) &\simeq -\epsilon \frac{d-1}{\sqrt{1-\alpha^2}} - \frac{p(p-2d+1)\alpha\beta}{2(1-\alpha^2)^{3/2}} t^{p-1} \end{aligned} \quad (6.1.63)$$

第一式を解くことで

$$\phi \simeq \phi_* \pm \sqrt{\frac{2p\beta}{(p-1)\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}} t^{\frac{p-1}{2}} \quad (6.1.64)$$

を得る. したがってポテンシャルは次のように書き換えられる.

$$V(\phi) \simeq -\epsilon \frac{(d-1)}{\sqrt{1-\alpha^2}} + \frac{\alpha^2(p-1)(2d-1-p)}{4(1-\alpha^2)} (\phi - \phi_*)^2 + \dots \quad (6.1.65)$$

この場合, $t = 0$ における dS 半径は $R_{dS}^2 = \frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}$ であるから

$$M^2 R_{dS}^2 = \frac{(p-1)(2d-1-p)}{4} \leq \frac{(d-1)^2}{4}. \quad (6.1.66)$$

を得る. 双対なスカラー演算子の共形次元は

$$\Delta = \frac{d-1}{2} + \frac{|d-p|}{2}. \quad (6.1.67)$$

となる. この結果は前節で解析した $d = 2$ の場合と整合的である. $d = 2$ の場合と同様に, 共形次元は実となり, このモデルにおける双対な CFT_{d-1} に対するある種のユニタリ性を示唆する.

6.2 Holographic Timelike g 定理

通常のエンタングルメントエントロピーは時間一定面に対して部分領域を取り, その領域とそれ以外の領域がどれほどエンタングルしているかを定量化する量であり, 節 3.2 で見たようにツイスト演算子の挿入で考えることができる. ここでは時間方向に伸びる部分領域を取り, 時間方向の相関 (timelike entanglement) を定量化した timelike entanglement entropy について見ていく [126, 127]. これは時間方向に離れたツイスト演算子の二点関数として考えることができる. さらに, 通常のエンタングルメントエントロピーと同様に AdS/CFT 対応の枠組みで笠-高柳公式を適用することができ, timelike な部分領域の端点を極小曲面でつなぎ, その面積から holographic timelike entanglement entropy が得られる. 近年ではこのような timelike entanglement entropy に対する幾何的な解釈を複素座標に拡張して考えることもされている [132].

以下では節 4.1.4 や節 4.2.3 で扱った g 定理について, timelike な EOW ブレーンを挿入し, さらに timelike に部分領域を取ることで同様の議論から timelike g 定理を示していく.

6.2.1 type I における g 定理

まず, 自明な例として dS₂ の EOW ブレーン $Z(t) = -\lambda t$ について考える. 前述の通り, timelike な部分領域 A を以下のようにとる (図 6.7 上図参照).

$$x = 0, \quad \tilde{t} \leq t \leq 0 \quad (6.2.68)$$

この時, 部分領域 A を通常のエンタングルメントエントロピーと同様に時間一定面 $t = \tilde{t}$ における半無限直線 $x > 0$ として選んでも同様の議論ができることを強調しておく (図 6.7 下図参照). このとき, S_A は点 $(t, z) = (\tilde{t}, \epsilon_{UV})$ と $(t, z) = (a, z(a))$ を結ぶ測地線から求められる. 測地線長を a の関数として最大化することで,

$$a = \frac{\tilde{t}}{\sqrt{1 - \lambda^2}}. \quad (6.2.69)$$

を得る. したがって, ホログラフィックエンタングルメントエントロピーは次のようになる.

$$S_A = \frac{c}{6} \log \frac{|\tilde{t}|}{\epsilon_{UV}} + \frac{c}{6} \log \left(\frac{2(1 - \sqrt{1 - \lambda^2})}{\lambda} \right). \quad (6.2.70)$$

この式の第二項が timelike な境界エントロピーとして $\log g_\alpha$ を与え, この g_α が timelike g 関数に対応する. このように dS ブレーンを考えた場合は境界エントロピーは定数になる.

次に, この計算を一般の EOW ブレーン形状 $z = Z(t)$ に, 非自明なスカラー場 $\phi(t)$ を含めて拡張する. 再び, S_A は測地線長から計算することができる (図 6.8 参照). Γ_A の長さは, 極限 $\epsilon \rightarrow 0$ において以下で与えられる.

$$L(\Gamma_A) \simeq \log \left[\frac{Z(a)^2 - (a - \tilde{t})^2}{Z(a)\epsilon_{UV}} \right], \quad (6.2.71)$$

測地線長 $L(\Gamma_A)$ を最大化する a を選ぶことで, a と $\tilde{t}$ の間に次の関係式を得る.

$$a - \tilde{t} = \frac{Z(a)}{\dot{Z}(a)} \left(1 - \sqrt{1 - \dot{Z}(a)^2} \right). \quad (6.2.72)$$

これを用いて $\log g$ の $|\tilde{t}|$ に関する微分を計算すると,

$$\frac{6}{c} |\tilde{t}| \frac{d \log g}{d |\tilde{t}|} = |\tilde{t}| \frac{d L(\Gamma_A)}{d |\tilde{t}|} - 1 = \frac{a \dot{Z}(a) - Z(a)}{Z(a) \sqrt{1 - \dot{Z}(a)^2}}, \quad (6.2.73)$$

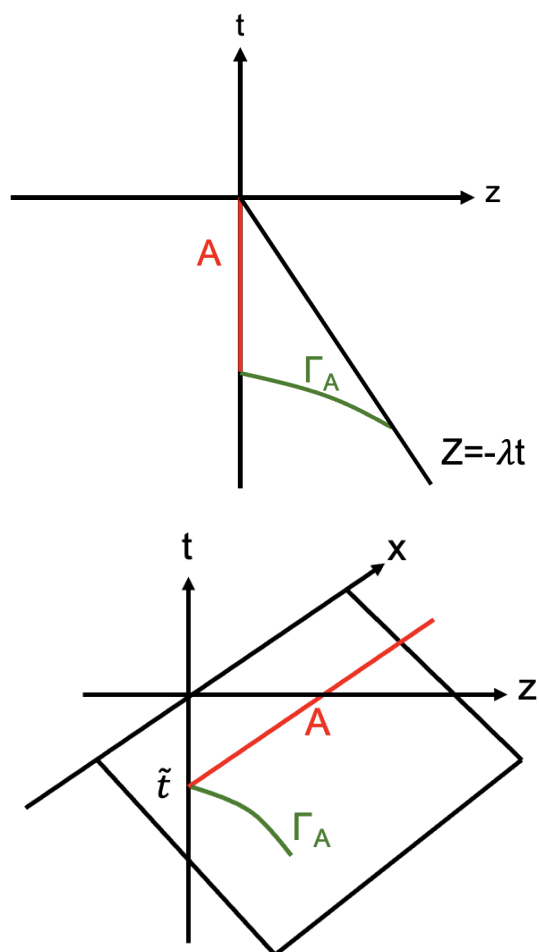


図 6.7: timelike な部分領域 A とそこから伸びる測地線 (上). ここでは x 軸方向を省略している. 通常と同様に spacelike な部分領域 A とそこから伸びる測地線 (下)

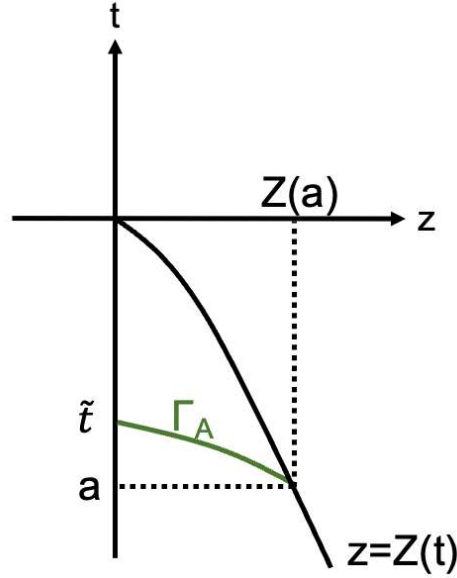


図 6.8: 一般のブレーン配位に対する測地線. ここでは x 軸方向を省略している.

を得る. 分子 $a\dot{Z}(a) - Z(a)$ は $a \rightarrow 0$ の極限で 0 になる. また, その微分 $\frac{d}{da}(a\dot{Z}(a) - Z(a)) = a\ddot{Z}(a)$ は type I の null energy condition (NEC) $\ddot{Z}(a) \leq 0$ のために正となる. これにより, $a\dot{Z}(a) - Z(a) \leq 0$ が $a \leq 0$ の範囲で成り立つことがわかる. したがって最終的に,

$$\frac{d \log g}{d|\tilde{t}|} \leq 0, \quad (6.2.74)$$

となる. ここで $|\tilde{t}|$ は双対な BCFT の唯一のスケールであり, この大きさの変化を繰り込み群フローの粗視化と見なすことができる. 以上より, timelike な g 定理がホログラフィックに示されたことになる.

6.2.2 type II における g 定理

次に type II ブレーンに移り, 同じように部分領域 A を取った時のエンタングルメントエントロピー S_A を評価したい. しかしここで, $(t, z) = (\tilde{t}, \epsilon_{UV})$ と EOW ブレーン上のある点とを結ぶ spacelike な測地線が存在しないために計算が困難であるように見える. この問題を Euclidean 時空を経由して Wick 回転を用いるこ

とで回避し, g 定理を示していく.

まずは最も簡単な dS ブレーンの挿入を図 6.9 の左図で示される Euclidean AdS 時空に対して行う. このときエンタングルメントエントロピーは

$$S_A^{(E)} = \frac{c}{6} \log \left[-\frac{2\tilde{t}_E}{\epsilon_{UV}} \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \lambda_E^2}}{\lambda_E} \right) \right]. \quad (6.2.75)$$

となる. 次に Wick 回転 $t_E = it$ を行い, $\lambda = i\lambda_E$ を導入する (図 6.9 右図). これにより Lorentzian AdS 時空でのエンタングルメントエントロピーが以下のよう
に求まる.

$$S_A^{(L)} = \frac{c}{6} \log \left[\frac{2\tilde{t}}{\epsilon_{UV}} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \lambda^2}}{\lambda} \right) \right] \quad (6.2.76)$$

$$= \frac{c}{6} \log \frac{|\tilde{t}|}{\epsilon_{UV}} + \frac{c}{6} \log \left[2 \frac{1 + \sqrt{1 - \lambda^2}}{\lambda} \right] + \frac{c}{6} \pi i. \quad (6.2.77)$$

ここで第二項と第三項が境界エントロピーに対応し, 今回の超平面の場合にはこれらが定数になっていることが確認できる. さらに第三項は虚数に値を取るが, これは部分領域を timelike に取ったことによる寄与である. 節 5.2 で見た dS 時空でのホログラフィックエンタングルメントエントロピーと同様の寄与を持ち, ここから dS/CFT 対応における Pseudo エントロピーが timelike entanglement entropy と同様の構造を持つことがわかる.

次に type II EOW ブレーンの一般的な配位について議論する. この場合 Euclidean の対応物を考えるのは困難である. むしろ, (6.2.71) を用いて直接エンタングルメントエントロピーを計算する方が便利である.

部分領域 A は図 6.7 と同様に取り. EOW ブレーンの配位は $z = Z(t)$ を考える. 前述のように, 点 $(t, z) = (\tilde{t}, \epsilon_{UV})$ から始まる測地線は EOW ブレーンに直接到達できない. これは type II の場合 (6.2.71) の対数の中身が負になるためである. このことは $\dot{Z}(t) \leq 1$ から直ちに

$$Z(a) \leq a \leq a - \tilde{t}. \quad (6.2.78)$$

を導く. ここで a は正である一方 $\tilde{t}$ は負であることに注意する.

対数の中身が負であるので, 以下のようにエンタングルメントエントロピーには虚部が現れる.

$$S_A(\tilde{t}) = \frac{c}{6} \log \left[\frac{-Z(a)^2 + (a - \tilde{t})^2}{Z(a)\epsilon_{UV}} \right] + \frac{c}{6} \pi i, \quad (6.2.79)$$

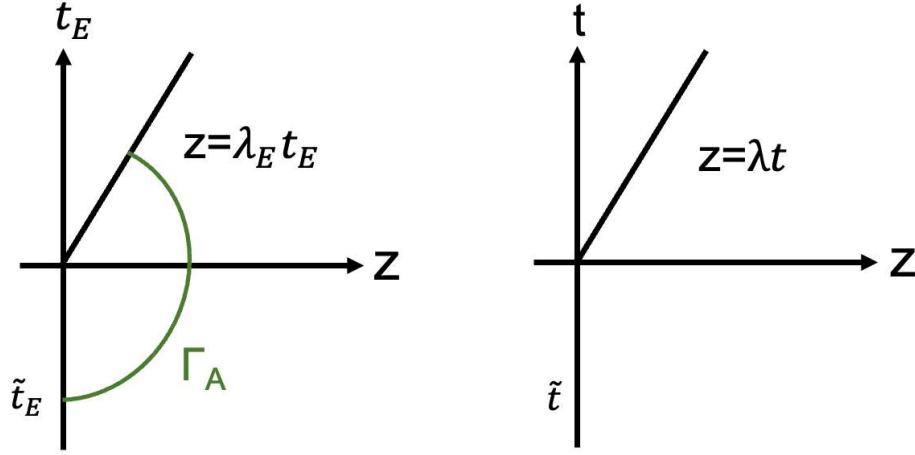


図 6.9: Euclidean(左) と Lorentzian(右) における type II 超平面. ここでは x 軸方向を省略している.

ここで a はエンタングルメントエントロピーの実部が最小となるように選ぶ. さらに, type II ブレーンに対する境界エントロピーを, 定数を除いた次のような形で定義すると,

$$\log g = S_A(\tilde{t}) - \frac{c}{6} \log \frac{|\tilde{t}|}{\epsilon_{UV}} - \frac{c}{6} \pi i = \frac{c}{6} \log \left[\frac{-Z(a)^2 + (a - \tilde{t})^2}{2Z(a)|\tilde{t}|} \right]. \quad (6.2.80)$$

境界エントロピーの微分は以下ようになる.

$$\frac{6}{c} |\tilde{t}| \frac{d \log g}{d |\tilde{t}|} = - \frac{a \dot{Z}(a) - Z(a)}{Z(a) \sqrt{1 - \dot{Z}(a)^2}}. \quad (6.2.81)$$

type I の場合と同様の議論から, type II ブレーンの NEC より $\ddot{Z} \geq 0$ が成り立つため,

$$\frac{d}{d |\tilde{t}|} \log g \leq 0, \quad (6.2.82)$$

となる. よって type II ブレーンに対する timelike g 定理が示された.

6.3 宇宙論モデルの構築

ここまで扱ってきた我々のモデルを用いて宇宙論モデルの構築をしていく. さらにそれらを境界上の理論の観点から理解し直すことが目標である. 以下では具体

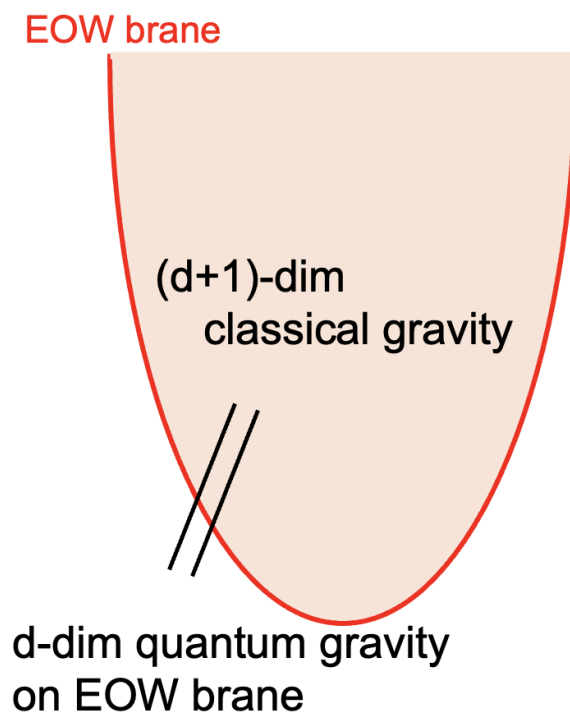


図 6.10: Brane-World Holography

的な宇宙論モデルをいくつか見ていく.

6.3.1 Brane-World Holography

高次元に埋め込まれたブレーンを用いて我々の宇宙を実現しようという試みがホログラフィ原理の文脈で開拓されている [10, 112, 133–137]. Brane-World Holography の主張は以下の通りである.

Brane-World Holography

EOW ブレーンに囲まれた $(d+1)$ 次元の古典重力理論が, 埋め込まれた EOW ブレーン上の量子重力理論 (CFT+低次元重力) と等価である.(図 6.10 参照)

このように高次元に埋め込んだブレーン上に宇宙を実現するというのは, 元々

階層性問題の解決のために提唱された [133] が, ブレーン上に重力が局在するというのが発見され [135], さらに宇宙論分野などでも広く研究されるようになっている. また, このブレーンが AdS/CFT 対応においても応用できるとして様々な解析がなされている [112, 136].

本節では, EOW ブレーン上にスカラー場を導入した我々のモデルを用いて, EOW ブレーンが漸近境界と交わるような AdS/BCFT 対応の場合も含めて様々な宇宙論モデルを構築する [10].

6.3.2 EOW ブレーンの宇宙論的解釈

以下では, ブレーン上に貼られた誘導計量を FLRW 計量に座標変換で書き換えることにより, 通常の宇宙論に沿った記述を可能にする. さらにそこからブレーン上の宇宙における Friedmann 方程式を導き, 通常の Einstein 重力のものと比較することにより量子重力の寄与を確認する.

3 次元 global 座標を用いた記述

ここでは global AdS_3 座標を用いる.

$$ds^2 = d\rho^2 - \cosh^2 \rho d\tau^2 + \sinh^2 \rho d\phi^2. \quad (6.3.83)$$

この時空に対して軌道 $\rho = R(\tau)$ に沿って EOW ブレーンを挿入する. ここで簡単のために ϕ 方向に回転対称性を課し, ブレーンは動径方向の ρ にのみ依存するとしている. global AdS_3 におけるブレーンはバルクをブレーンのどちら側に取りかによって以下の二種類に分類される.

$$\text{type I: } R(\tau) \leq \rho,$$

$$\text{type II: } 0 \leq \rho \leq R(\tau).$$

この時, 誘導計量は以下のように書ける.

$$ds^2 = -(\cosh^2 R - \dot{R}^2)d\tau^2 + \sinh^2 R d\phi^2, \quad (6.3.84)$$

ここで $\dot{R} = \frac{dR(\tau)}{d\tau}$ としている. EOW ブレーンが timelike であるという仮定から $\cosh^2 R > \dot{R}^2$ が要求される. 法線ベクトルと外部曲率は以下ようになる.

$$N = \frac{\epsilon \cosh R}{\sqrt{\cosh^2 R - \dot{R}^2}} \left(-d\rho + \dot{R} d\tau \right), \quad (6.3.85)$$

$$K_{ab} dx^a dx^b = \epsilon \frac{\sinh R (\cosh^2 R - 2\dot{R}^2) + \ddot{R} \cosh R}{\sqrt{\cosh^2 R - \dot{R}^2}} d\tau^2 - \epsilon \frac{\cosh^2 R \sinh R}{\sqrt{\cosh^2 R - \dot{R}^2}} d\phi^2. \quad (6.3.86)$$

ここで $\epsilon = 1$ が type I, $\epsilon = -1$ が type II に対応する.

さらに Neumann 境界条件 (6.1.3) は次のように書ける.

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^2 &= \epsilon \frac{(1 - \sinh^2 R) \dot{R}^2 + \cosh R (\ddot{R} \sinh R - \cosh R)}{2 \sinh R \sqrt{\cosh^2 R - \dot{R}^2}}, \quad (6.3.87) \\ V(\phi) &= -\epsilon \frac{\cosh^2 R (\cosh^2 R + \sinh^2 R) - \dot{R}^2 (2 \sinh^2 R + \cosh^2 R) + \ddot{R} \sinh R \cosh R}{2 \sinh R (\cosh^2 R - \dot{R}^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (6.3.88)$$

また, エネルギー保存則と類似した関係式として以下が書ける.

$$\frac{\sinh R}{\cosh^2 R} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{\sqrt{\cosh^2 R - \dot{R}^2}} + V(\phi) \sqrt{\cosh^2 R - \dot{R}^2} \right) = -\epsilon. \quad (6.3.89)$$

ここから宇宙膨張のトイモデルを構築するために, 新しい座標を

$$dT = \sqrt{\cosh^2 R - \dot{R}^2} d\tau \quad (6.3.90)$$

によって定義する. これにより誘導計量は FLRW 計量となり,

$$ds_Q^2 = -dT^2 + a(T)^2 d\phi^2 \quad (6.3.91)$$

を得る. ただしスケール因子は $a(T) = \sinh R(\tau(T))$ で与えられる.

次に, Friedmann 方程式に対応する式を導こう. ここで $a'(T) = \frac{da}{dT}$ と表す. $a(T)$ の一階および二階微分は以下ようになる.

$$a'(T) = \cosh R \frac{dR}{d\tau} \frac{d\tau}{dT} = \frac{\dot{R} \cosh R}{\sqrt{\cosh^2 R - \dot{R}^2}}, \quad (6.3.92)$$

$$a''(T) = \frac{d}{dT} \left(\frac{\dot{R} \cosh R}{\sqrt{\cosh^2 R - \dot{R}^2}} \right) \frac{d\tau}{dT} = \frac{\ddot{R} \cosh^3 R - \dot{R}^4 \sinh R}{(\cosh^2 R - \dot{R}^2)^2}. \quad (6.3.93)$$

ここから Friedmann 方程式を得るためには, エネルギー密度 ε と圧力 p を $R(\tau)$ の関数として表す必要がある. エネルギー密度 ε と圧力 p は

$$T_Q^{ab} := \varepsilon e_\tau^a e_\tau^b + p e_\phi^a e_\phi^b, \quad (6.3.94)$$

で定義される. この時, holographic renormalization は考慮する必要はない. なぜなら, EOW ブレーンに課しているのは Neumann 境界条件であることから, $z \rightarrow 0$ における発散を除去するカウンター項は理論そのものを変えることに対応してしまうからである. むしろこの UV 発散は一次元低い有効重力理論におけるニュートン定数に自然に現れる発散であると考えられる.

テトラド $\{e_i^a\}$ は

$$\eta_{ij} = h_{ab} e_i^a e_j^b \quad (6.3.95)$$

を満たし,

$$e_\tau^a \partial_a = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 R - \dot{R}^2}} \partial_\tau, \quad e_\phi^a \partial_a = \frac{1}{\sinh R} \partial_\phi \quad (6.3.96)$$

を満たす. また完備性関係式より,

$$h^{ab} = -e_\tau^a e_\tau^b + e_\phi^a e_\phi^b \quad (6.3.97)$$

を持つ. これより, 以下の表式が得られる.

$$\varepsilon = (-\epsilon) \frac{\cosh^2 R}{\sinh R \sqrt{\cosh^2 R - \dot{R}^2}}, \quad (6.3.98)$$

$$p = (-\epsilon) \frac{-\ddot{R} \cosh R + 2\dot{R}^2 \sinh R - \sinh R \cosh^2 R}{(\cosh^2 R - \dot{R}^2)^{3/2}}. \quad (6.3.99)$$

式 (6.3.93), (6.3.98), (6.3.99) を組み合わせると, Friedmann 方程式は以下のよう簡単な形にまとまる.

$$\begin{aligned} \frac{a''(T)}{a} &= \frac{\ddot{R} \cosh^3 R - \sinh R (2\dot{R}^2 \cosh^2 R - \cosh^4 R + (\cosh^2 R - \dot{R}^2)^2)}{\sinh R (\cosh^2 R - \dot{R}^2)^2} \\ &= -1 - \frac{\cosh^2 R}{\sinh R \sqrt{\cosh^2 R - \dot{R}^2}} \frac{-\ddot{R} \cosh R + \sinh R (2\dot{R}^2 - \cosh^2 R)}{(\cosh^2 R - \dot{R}^2)^{3/2}} \\ &= -1 - \varepsilon p \end{aligned} \quad (6.3.100)$$

これは 2 次元時空で推測される通常の Friedmann 方程式とは異なる形である. それはここで構成した宇宙の基礎方程式としてアインシュタイン方程式ではなく

Neumann 境界条件を採用したことに起因する. まさにこれが Einstein 重力を超えた量子重力効果であると期待される.

pure AdS_3 は自明に以下の方程式を満たす.

$$0 = \nabla_a (K^{ab} - h^{ab} K) = \nabla_a T_Q^{ab} \quad (6.3.101)$$

これに (6.3.94) を代入すると, 運動方程式として

$$\frac{d\varepsilon}{dT} + \frac{a'}{a}(\varepsilon + p) = 0, \quad (6.3.102)$$

が得られる. これは 2 次元時空の通常の宇宙論のエネルギー保存則と一致する. 以上の二つの式 (6.3.100) および (6.3.102) が, このブレーン上に実現される宇宙論モデルの基本的な運動方程式とみなせる. これらはバルク時空の座標に依存せず, 実際 Poincaré 座標でも同じ式が導かれる. 以下では global 座標と Poincaré 座標を用いて一般次元での計算結果を紹介する.

global 座標を用いた一般次元での記述

以下のような global AdS_{d+1} 座標に埋め込まれた EOW ブレーンを考える.

$$ds^2 = d\rho^2 - \cosh^2 \rho dt^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_{d-1}^2. \quad (6.3.103)$$

一般的なブレーン配置 $\rho = R(t)$ (回転対称性は課している) を考えると, 誘導計量は

$$ds^2 = -(\cosh^2 R - \dot{R}^2) dt^2 + \sinh^2 R d\Omega_{d-1}^2 \quad (6.3.104)$$

で与えられ, 外部曲率は以下ようになる.

$$\begin{aligned} K_{tt} - h_{tt}K &= \epsilon(-1)^{d-1} (d-1) \cosh R \coth R \sqrt{\cosh^2 R - \dot{R}^2}, \\ K_{\theta\theta} - h_{\theta\theta}K &= \epsilon(-1)^{d-1} \frac{\sinh R}{(\cosh^2 R - \dot{R}^2)^{\frac{3}{2}}} \left[-\cosh^2 R ((d-1) \cosh^2 R - 1) \right. \\ &\quad \left. + ((d-2) + d \sinh^2 R) \dot{R}^2 - \sinh R \cosh R \ddot{R} \right], \\ K_{\phi\phi} - h_{\phi\phi}K &= \sin^2 \theta (K_{\theta\theta} - h_{\theta\theta}K) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (6.3.105)$$

Neumann 境界条件 (6.1.3) より

$$\dot{\phi}^2 = \epsilon \frac{(1 - \sinh^2 R) \dot{R}^2 + \cosh R (\ddot{R} \sinh R - \cosh R)}{2 \sinh R \sqrt{\cosh^2 R - \dot{R}^2}}, \quad (6.3.106)$$

$$V(\phi) = -\epsilon \frac{1}{2 \sinh R (\cosh^2 R - \dot{R}^2)^{3/2}} \left[\cosh^2 R ((2d-3) \cosh^2 R + \sinh^2 R) \right. \\ \left. - \dot{R}^2 (2 \sinh^2 R + (2d-3) \cosh^2 R) + \ddot{R} \sinh R \cosh R \right]. \quad (6.3.107)$$

を得る. ここで, 座標変換

$$dT = \sqrt{\cosh^2 R - \dot{R}^2} dt \quad (6.3.108)$$

を取ると, ただちに 以下のような FLRW 型の計量が得られる.

$$ds^2 = -dT^2 + a(T)^2 d\Omega_{d-1}^2, \quad a(T) = \sinh R(t(T)) \quad (6.3.109)$$

さらにここからスケール因子 $a(T)$ の微分を計算できる.

$$a'(T) = \frac{\dot{R} \cosh R}{\sqrt{\cosh^2 R - \dot{R}^2}} \quad (6.3.110)$$

$$a''(T) = \frac{\ddot{R} \cosh^3 R - \dot{R}^4 \sinh R}{(\cosh^2 R - \dot{R}^2)^2} \quad (6.3.111)$$

Energy stress tensor は以下のように書かれる.

$$\varepsilon = T_{ab}^Q e_t^a e_t^b = \epsilon \frac{(-1)^{d-1} (d-1) \cosh^2 R}{\sinh R \sqrt{\cosh^2 R - \dot{R}^2}} \\ p = T_{ab}^Q e_{x_i}^a e_{x_i}^b \\ = \epsilon (-1)^{d-1} \frac{1}{\sinh R (\cosh^2 R - \dot{R}^2)^{\frac{3}{2}}} \left[-\cosh^2 R ((d-1) \cosh^2 R - 1) \right. \\ \left. + ((d-2) + d \sinh^2 R) \dot{R}^2 - \sinh R \cosh R \ddot{R} \right] \quad (6.3.112)$$

そして次の Friedmann 方程式を得る.

$$\frac{a''}{a} = \frac{\ddot{R} \cosh^3 R - \dot{R}^4 \sinh R}{\sinh R (\cosh^2 R - \dot{R}^2)^2} \\ = -1 - \frac{1}{d-1} \varepsilon p - \frac{d-2}{(d-1)^2} \varepsilon^2. \quad (6.3.113)$$

ここでもアインシュタイン方程式ではなく Neumann 境界条件を基礎方程式として用いたことによって通常の Friedmann 方程式とは異なる項が表れている. $d = 2$ の時 (6.3.100) と一致することも確認できる.

また, 保存則 $\nabla_a T_Q^{ab} = 0$ は以下のように得られる.

$$\partial_T \varepsilon + (d-1) \frac{a'}{a} (\varepsilon + p) = 0, \quad (6.3.114)$$

これは一般相対論における d 次元時空の保存則と一致する.

Poincaré 座標を用いた一般次元での記述

以下のような Poincaré AdS_{d+1} 座標に埋め込まれた EOW ブレーンを考える.

$$ds^2 = \frac{dz^2 - dt^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_{d-1}^2}{z^2}. \quad (6.3.115)$$

一般的なブレーン配置 $z = Z(t)$ ($\mathbf{x}$ 方向の並進対称性は課している) を考えると, 誘導計量は

$$ds^2 = \frac{-(1 - \dot{Z}^2)dt^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_{d-1}^2}{Z^2} \quad (6.3.116)$$

で与えられ, 外部曲率は以下ようになる.

$$K_{tt} - h_{tt}K = \epsilon \frac{-(d-1)\sqrt{1 - \dot{Z}^2}}{Z^2}, \quad (6.3.117)$$

$$K_{x_i x_i} - h_{x_i x_i}K = \epsilon \frac{(d-1)(1 - \dot{Z}^2) - Z\ddot{Z}}{Z^2 (1 - \dot{Z}^2)^{3/2}}. \quad (6.3.118)$$

Neumann 境界条件 (6.1.3) は

$$\dot{\phi}^2 = -\epsilon \frac{\ddot{Z}}{2Z\sqrt{1 - \dot{Z}^2}}, \quad (6.3.119)$$

$$V(t) = \epsilon \frac{-2(d-1)(1 - \dot{Z}^2) + Z\ddot{Z}}{2(1 - \dot{Z}^2)^{3/2}}. \quad (6.3.120)$$

と書ける. ここで, 座標変換

$$dT = \frac{\sqrt{1 - \dot{Z}^2}}{Z} dt \quad (6.3.121)$$

を取ると, ただちに以下のような FLRW 型の計量が得られる.

$$ds^2 = -dT^2 + a(T)^2 d\mathbf{x}^2, \quad a(T) = \frac{1}{Z(t(T))}. \quad (6.3.122)$$

さらにここからスケール因子 $a(T)$ の微分を計算できる.

$$a'(T) = \frac{-\dot{Z}}{Z\sqrt{1-\dot{Z}^2}}, \quad a''(T) = \frac{\dot{Z}^2(1-\dot{Z}^2) - Z\ddot{Z}}{Z(1-\dot{Z}^2)^2}. \quad (6.3.123)$$

先ほどと同様にテトラドとして $e_t^a \partial_a = \frac{Z}{\sqrt{1-\dot{Z}^2}} \partial_t$, $e_x^a \partial_a = Z \partial_x$ が得られ, energy stress tensor は以下のように書かれる.

$$\varepsilon = T_{ab}^Q e_t^a e_t^b = (-\epsilon) \frac{d-1}{\sqrt{1-\dot{Z}^2}}, \quad (6.3.124)$$

$$p = T_{ab}^Q e_{x_i}^a e_{x_i}^b = \epsilon \frac{(d-1)(1-\dot{Z}^2) - Z\ddot{Z}}{(1-\dot{Z}^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (6.3.125)$$

そして次の Friedmann 方程式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{a''}{a} &= \frac{\dot{Z}^2(1-\dot{Z}^2) - Z\ddot{Z}}{(1-\dot{Z}^2)^2} \\ &= -1 - \frac{\varepsilon}{d-1} \left(\frac{d-2}{d-1} \varepsilon + p \right) \end{aligned} \quad (6.3.126)$$

この式は (6.3.113) と一致しており, この表式が座標の貼り方によらないことが確認できる.

また, 保存則 $\nabla_a T_Q^{ab} = 0$ は次のようになる.

$$\partial_T \varepsilon + (d-1) \frac{a'}{a} (\varepsilon + p) = 0, \quad (6.3.127)$$

これも同様に (6.3.127) と一致する.

6.3.3 様々な EOW ブレーンの解

以下では 3 次元 global 座標に埋め込まれた EOW ブレーンに注目して, Neumann 境界条件 (6.3.106), (6.3.88) の解を実際に求め, 具体的な宇宙論モデルとそれを実現するスカラー場の振る舞いを確認していく.

dS ブレーン

まず, スカラー場が存在しない場合の自明な解として現れる dS₂ ブレーンを考える. そのブレーン配位は

$$R(\tau) = \text{arcosh} \left[\frac{\cosh \xi}{\cos \tau} \right] \quad (6.3.128)$$

で与えられる. この時の Neumann 境界条件は

$$\dot{\phi}^2 = 0, \quad V = -\epsilon / \tanh \xi \quad (6.3.129)$$

で与えられる. 宇宙論的に書き直した時, エネルギー密度と圧力は以下のようになる.

$$\varepsilon = \epsilon \left(1 - \frac{1}{\tanh \xi} \right), \quad p = \epsilon \left(-1 + \frac{1}{\tanh \xi} \right). \quad (6.3.130)$$

定数半径の解: $R(\tau) = b$

次に, 定数半径解 $R(\tau) = b$ を考える. この場合 $\dot{\phi}^2$ は有限の値を持つため, 取り得るバルク領域は type II のみである. この時, Neumann 境界条件 (6.3.106), (6.3.88) は次のように書ける.

$$\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2 \tanh(b)} \quad (6.3.131)$$

$$V(\phi) = \frac{1}{\tanh(2b)} \quad (6.3.132)$$

energy stress tensor は

$$T_{\tau\tau}^Q = \frac{\cosh^2 b}{\tanh b} \xrightarrow{b \rightarrow \infty} -h_{\tau\tau}, \quad (6.3.133)$$

$$T_{\phi\phi}^Q = -\sinh^2 b \tanh b \xrightarrow{b \rightarrow \infty} -h_{\phi\phi} \quad (6.3.134)$$

となる. $b \rightarrow \infty$ の極限では, EOW ブレーンは AdS 時空 の漸近境界に位置する. このとき, 宇宙論的解釈においてスケール因子は $a(T) = \sinh b$ であり, エネルギー密度と圧力は

$$\varepsilon = \frac{1}{\tanh b} - 1, \quad p = 1 - \tanh b \quad (6.3.135)$$

となる. これらは正の値を取り, EOW ブレーンが 漸近境界に近づくときゼロに収束する. 一方で $\dot{\phi}^2$ と V は消えずに残ることがわかる.

Big-Bang 解

宇宙が big-bang のような現象を通じて生成されるような解を構成する. そのために, type II ブレーンの十分小さな半径 R に注目する. さらに初期条件として $\tau = 0$

で $R(\tau) = 0$ とおく. EOW ブレーンの配位として

$$R(\tau) \simeq A\tau^\alpha, \quad (6.3.136)$$

を $\tau \rightarrow 0$ の極限で仮定する. ここでブレーンが timelike であるためには $\alpha \geq 1$ を要求する必要がある. まず $\alpha > 1$ の場合を調べる. このとき (6.3.106) より

$$\dot{\phi}^2 \simeq V(\phi) \simeq \frac{1}{2A\tau^\alpha}. \quad (6.3.137)$$

となり, これを積分すると

$$\phi(\tau) \simeq \frac{2}{\sqrt{2A}|2-\alpha|} \tau^{1-\frac{\alpha}{2}}. \quad (6.3.138)$$

を得る. したがってポテンシャルは

$$V(\phi) \simeq \frac{1}{2A} \left(\sqrt{2A} \frac{|2-\alpha|}{2} \phi \right)^{\frac{2\alpha}{\alpha-2}} \quad (6.3.139)$$

となる. このように, ポテンシャルは $\tau = 0$ で正に発散し, これはここで構成したブレーン上の宇宙における Big-bang に対応する. その後ポテンシャルは減少し, R は増加する. $\tau = 0$ においてポテンシャルが有限のままであるためには $\alpha = 1$ を考える必要があり, このとき $R(\tau) \simeq \tau$ となる.

次に $\alpha = 1$ の場合を考える. subleading な項を含めて, ブレーン配位を

$$R(\tau) \simeq \tau - A\tau^p. \quad (6.3.140)$$

と仮定する. $\tau \simeq 0$ 付近で timelike となる条件は次のとおりである.

$$A > 0 \quad (1 < p < 3) \quad (6.3.141)$$

$$1 + 6A > 0 \quad (p = 3) \quad (6.3.142)$$

$p > 3$ のとき, EOW ブレーンは自動的に $\tau = 0$ の近傍で timelike となる. (6.3.106) より

$$\dot{\phi}^2 \simeq \begin{cases} \frac{\sqrt{Ap(p+1)}}{2\sqrt{2}} \tau^{\frac{p-3}{2}} & (1 < p < 3) \\ \sqrt{1+6A} & (p = 3) \\ 1 & (3 < p) \end{cases} \quad (6.3.143)$$

を得る. したがって

$$\phi \simeq \begin{cases} \left(\frac{4\sqrt{2Ap}}{p+1} \right)^{1/2} \tau^{\frac{p+1}{4}} & (1 < p < 3) \\ (1+6A)^{1/4} \tau & (p = 3) \\ \tau & (3 < p) \end{cases} \quad (6.3.144)$$

となる. さらに (6.3.88) よりポテンシャルは

$$V(\phi) \simeq \begin{cases} \frac{3-p}{p+1} \phi^{-2} & (1 < p < 3) \\ -\frac{3A^2-14A-2}{2(1+6A)^{3/2}} - \frac{4212A^4+3024A^3-1116A^2-144A-1}{144(1+6A)^3} \phi^2 & (p = 3) \\ -\frac{Ap(p-3)}{2} \phi^{p-5} & (3 < p < 5) \\ -(5A-1) + \frac{10800A^2-480A+1}{144} \phi^2 & (p = 5) \\ 1 - \frac{Ap(p-3)}{2} \phi^{p-5} & (5 < p < 7) \\ 1 - \frac{2016A-1}{144} \phi^2 & (p = 7) \\ 1 + \frac{1}{144} \phi^2 & (7 < p) \end{cases} \quad (6.3.145)$$

と求まる. 高次の項を加えると $V(\phi)$ はわずかに変化する. ここで宇宙論的解釈におけるスケール因子は

$$a(T) \simeq \tau \simeq \begin{cases} \left(\frac{p-1}{\sqrt{4Ap}} T \right)^{\frac{2}{p+1}} & (1 < p < 3) \\ \left(\frac{2}{\sqrt{1+6A}} T \right)^{1/2} & (p = 3) \\ (2T)^{1/2} & (3 < p) \end{cases} \quad (6.3.146)$$

となる.

Poincaré 座標を用いた Inflation 解

AdS₃ Poincaré 座標に EOW ブレーンを挿入する. ブレーン上の誘導計量は

$$ds^2 = \frac{-(1-\dot{Z}^2)dt^2 + dx^2}{Z^2} \quad (6.3.147)$$

で与えられ,

$$\sqrt{1-\dot{Z}^2} dt = d\eta, \quad Z = \eta^{1+\epsilon} \quad (6.3.148)$$

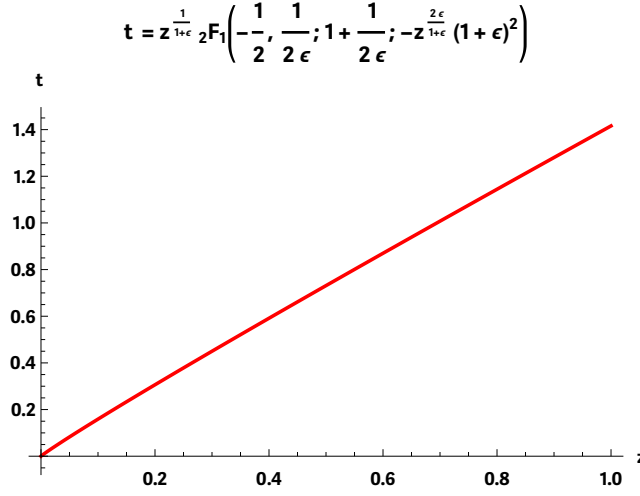


図 6.11: inflation を実現するブレーン配位

のような座標変換を用いると Poincaré 座標から

$$ds^2 = \frac{1}{\eta^{2+2\epsilon}}(-d\eta^2 + dx^2) \quad (6.3.149)$$

のように slow-roll parameter ϵ を用いた inflation の計量になる.

その時のブレーン解は以下で与えられる.

$$t = Z^{\frac{1}{1+\epsilon}} \cdot {}_2F_1\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\epsilon}, 1 + \frac{1}{2\epsilon}, -(1+\epsilon)^2 Z^{\frac{2\epsilon}{1+\epsilon}}\right]. \quad (6.3.150)$$

このブレーン配位は 図 6.11 に示されている. 図からわかるようにブレーン配位はほぼ超平面の dS ブレーンと一致するが ϵ によって少し内側に曲がっている. ϵ の一次まで展開すると

$$t = \sqrt{2}Z - \frac{1}{\sqrt{2}}Z \log Z\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (6.3.151)$$

このブレーンは内側に曲がるため, type II ブレーンの NEC を満たしている. $Z(t) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}t + \delta f(t)$ と置き, これを (6.3.151) に代入する. すると $\delta f(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}t(\log t - \frac{1}{2}\log 2)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon\delta f)$ を得る. したがって $Z(t)$ は次のように書ける:

$$Z(t) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}t + \frac{1}{2\sqrt{2}}t(\log t - \frac{1}{2}\log 2)\epsilon. \quad (6.3.152)$$

これを用いて Neumann 境界条件は

$$\dot{\phi}^2 = \frac{\ddot{Z}}{2Z\sqrt{1-\dot{Z}^2}} \quad (6.3.153)$$

$$V = -\frac{Z\ddot{Z}}{2(1-\dot{Z}^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{1-\dot{Z}^2}}. \quad (6.3.154)$$

で与えられる. これらを ϵ の一次で展開して解くと次式を得る.

$$\phi(t) - \phi_* \simeq \frac{\sqrt{\epsilon}}{2^{\frac{3}{4}}} \log t + \frac{\epsilon^{\frac{3}{2}}}{4 \cdot 2^{\frac{3}{4}}} \log t + O(\epsilon^{\frac{5}{2}}), \quad (6.3.155)$$

$$\begin{aligned} V(t) \simeq & \sqrt{2} + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \left(\log \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right) \\ & + \frac{\epsilon^2}{4\sqrt{2}} (1 - 2\log 2 + (\log 2)^2 + 4(1 - \log 2) \log t + 4(\log t)^2) + O(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (6.3.156)$$

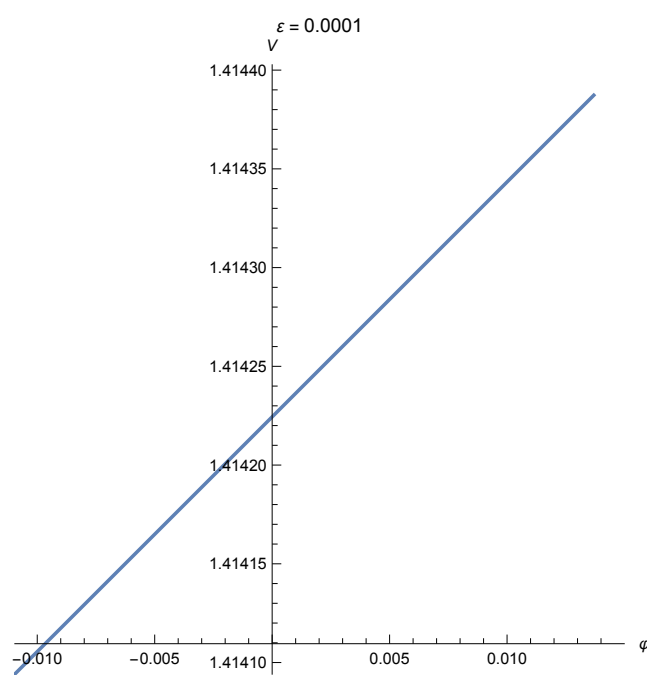
これよりすぐに

$$V(\phi) \simeq \sqrt{2} + \frac{\epsilon}{2\sqrt{2}} (1 - \log 2) + \frac{\epsilon^2}{4\sqrt{2}} (1 - 2\log 2 + (\log 2)^2) \quad (6.3.157)$$

$$+ 2^{\frac{1}{4}} \sqrt{\epsilon} \left(1 - \epsilon \left(\frac{3}{4} - \log 2 \right) \right) (\phi - \phi_*) + 2\epsilon(\phi - \phi_*)^2 + O(\epsilon^{\frac{5}{2}}) \quad (6.3.158)$$

を得る. このポテンシャルの振る舞いは標準的な inflation の結果と一致している.

さらに (6.3.153) と (6.3.154) を数値的に解き, 得られた $V - \phi$ のグラフを図 6.12 に示す.

図 6.12: inflation のブレーンモデルにおける V - ϕ グラフ

第7章

線形化アインシュタイン方程式 とエンタングルメントエントロ ピーの第一法則

ホログラフィー原理のいくつかの例において重力理論の基礎方程式であるアインシュタイン方程式に対応するものがエンタングルメントエントロピーの第一法則であることが示されている。この結果によって場の理論におけるエンタングルメントエントロピーと時空の構造に密接な関係があることが示唆される。

本章では AdS/CFT 対応, dS/CFT 対応, AdS/BCFT 対応のそれぞれに対して線形化アインシュタイン方程式とエンタングルメントエントロピーの第一法則の等価性を見ていく。

7.1 AdS/CFT 対応における等価性

重力理論と場の理論の等価性を主張するホログラフィー原理において最も成功している例は AdS/CFT 対応であり, それらの二つの理論の基礎方程式として線形化アインシュタイン方程式とエンタングルメントエントロピーの第一法則が等価であるというのが示された [138–141]. これはまだ厳密に証明されていない AdS/CFT

第 7 章. 線形化アインシュタイン方程式とエンタングルメントエントロピーの第一法則 205

対応の存在を裏付けるような強力な状況証拠の一つが見つかったというだけの話ではない. 重力理論の基礎方程式が場の理論においてエンタングルメントエントロピーに対する基礎方程式と等価であるというのは, 逆に考えるとエンタングルメントエントロピーを用いて時空を解析できるということである. このような考え方は笠-高柳公式が提唱されてから「エンタングルメントエントロピーから時空が創発する」[142, 143] という標語の下に強く支持されており, 量子情報理論が量子重力理論の解明に必要不可欠であることを示唆している.

本節では, エンタングルメントエントロピーの第一法則について説明した後に AdS/CFT 対応においてそれがどのように線形化アインシュタイン方程式と等価であるかを具体的な計算を用いて見ていく [139, 141]. 本修士論文では扱わないが共変性を保った証明も Faulkner らによってやられている [140].

7.1.1 エンタングルメントエントロピーの第一法則

ある量子系を部分系 A, B に分けた時に, その Hilbert 空間が $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ に分解できるとすると, 部分領域 A の簡約密度行列は

$$\rho_A = \text{Tr}_B |\Psi\rangle \langle \Psi| \quad (7.1.1)$$

のように与えられる. さらにエンタングルメントエントロピーは

$$S_A = -\text{Tr}_A \rho_A \log \rho_A. \quad (7.1.2)$$

である. ここで量子系 A に対するモジュラーハミルトニアン H_A を以下のように導入する.

$$H_A = -\log \rho_A \quad (7.1.3)$$

これらのエンタングルメントエントロピー (7.1.1) とモジュラーハミルトニアン (7.1.3) を用いると以下の関係式が容易に求まる.

$$\begin{aligned} \Delta S_A &= -\text{Tr}(\Delta \rho_A \log \rho_A) - \text{Tr}(\Delta \rho_A) \\ &= \text{Tr}(\Delta \rho_A H_A) \quad (\because \text{Tr} \rho_A = 1) \\ &= \Delta \langle H_A \rangle \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

この関係式をエンタングルメントエントロピーの第一法則という.

以上の関係式は微小変換に対する等式であるが, 状態の有限変換に対する ΔS_A と

第7章. 線形化アインシュタイン方程式とエンタングルメントエントロピーの第一法則206

ΔH_A に関する不等式を見ておく. 二つの量子状態を密度行列 ρ, σ として導入し, これらの距離を相対エントロピー (3.1.20) で考えると, モジュラーハミルトニアン $H_\sigma = -\log \sigma$ を用いて

$$\begin{aligned} D(\rho||\sigma) &= (\text{Tr}[\rho(-\log \sigma)] - \text{Tr}[\sigma(-\log \sigma)]) - (\text{Tr}[-\sigma \log \sigma] - \text{Tr}[-\rho \log \rho]) \\ &= \Delta \langle H_\sigma \rangle - \Delta S \end{aligned} \quad (7.1.5)$$

と表せる. よって相対エントロピーの非負性から一般の状態に対して

$$\Delta H_A \geq \Delta S_A \quad (7.1.6)$$

が成り立つことがわかる. また相対エントロピーが $\rho = \sigma$ で最小値ゼロをとることから, 状態の一次摂動に対して上式は等号になり, エンタングルメントエントロピーに対する第一法則 (7.1.4) を再現することがわかる.

場の理論におけるモジュラーハミルトニアン

ここでモジュラーハミルトニアンの場の理論における解釈を紹介し, 理解を深めておこう [138, 144, 145]. 高次元への拡張は明らかなので, 簡単のために以下では2次元の場の理論を考えていく. 時間一定面 $t = 0$ 上の $A: x > 0$ という部分領域を考え, そこでの量子状態を節 3.2 で見たように Euclidean 経路積分で構成する. その時密度行列 ρ_A の成分表示は以下のように与えられる.

$$\langle \phi_+ | \rho_A | \phi_- \rangle = \int_{\phi(t_E=0-, x>0)=\phi_-}^{\phi(t_E=0+, x>0)=\phi_+} \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]} \quad (7.1.7)$$

第7章. 線形化アインシュタイン方程式とエンタングルメントエントロピーの第一法則207

さらにそれを

$$x = r \cos \theta, \quad t_E = r \sin \theta \quad (7.1.8)$$

として極座標に座標変換すると,

$$\langle \phi_+ | \rho_A | \phi_- \rangle = \int_{\phi(\theta=0)=\phi_-}^{\phi(\theta=2\pi)=\phi_+} \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]} \quad (7.1.9)$$

とできる. ここで (3.2.56) と比較すると, t_E と θ を入れ替えて, β を 2π にすれば一致することがわかる. ここで θ を時間座標と同一視したので Lorentzian に戻す時も $\eta = i\theta$ として解析接続する. この時, 計量は

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \rightarrow dr^2 - r^2 d\eta^2 \quad (7.1.10)$$

となる. 比較すべき時間発展演算子も適切に変換すると, $\rho_A = e^{-2\pi H_\eta}$ となる. 特に, 慣習的に π を H_η の中に入れると

$$\rho_A = e^{-H_\eta} \quad (7.1.11)$$

より, (7.1.3) と整合的である.

さらに, 元の Minkowski 座標との座標変換は $x = r \cosh \eta$, $t = r \sinh \eta$ で与えられ, (7.1.10) の計量も見ると, 座標 (r, η) は Rindler wedge の座標であることがわかる. したがってこのようにして得られたモジュラーハミルトニアン H_η は Rindler 時間の時間発展演算子, つまり元の Minkowski 空間の boost 演算子であることがわかる. よって,

$$H_\eta = 2\pi \int_{x>0} d^{d-1}x \, x T_{00} \quad (7.1.12)$$

のように与えられる. 以下により共変的な記述を記しておく. 境界として $t = 0$, $x = 0$ を持つ Rindler wedge 上の任意の spacelike な面 Σ に対して

$$H_\eta = \int_{\Sigma} \eta^\mu T_{\mu\nu} \epsilon^\nu \quad (7.1.13)$$

ここで η^μ は boost 生成子の成分, ϵ は以下のように与えられる volume form である.

$$\epsilon^\mu = \epsilon_{\mu_2 \dots \mu_d}^\mu dx^{\mu_2} \dots dx^{\mu_d} \quad (7.1.14)$$

さらに, 半無限部分領域 $x > 0$ から共形変換 ([145] の式 (2.11) 参照) を用いて球形の部分領域に移ることができ, その時のモジュラーハミルトニアンは

$$H_A = 2\pi \int_{|x|<R} d^{d-1}x \, \frac{R^2 - r^2}{2R} T_{00} \quad (7.1.15)$$

で与えられる.

7.1.2 ΔS_A と ΔH_A の重力理論における記述

ΔS_A の書き換え

エンタングルメントエントロピーは AdS/CFT 対応において笠-高柳公式を用いることでホログラフィックエンタングルメントエントロピーとして重力理論によって記述することができる (節 3.3 参照). さらに重力理論において元の時空の計量 $G_{\mu\nu}$ に以下のような 1 次の摂動を考える.

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^{(0)} + G_{\mu\nu}^{(1)} \quad (7.1.16)$$

この時の極小曲面上の誘導計量を $g_{\mu\nu}$ とすると, ホログラフィックエンタングルメントエントロピーの変化分は

$$\Delta S_A = \frac{1}{8G_N} \int d^{d-1}\zeta \sqrt{g^{(0)}} g_{\alpha\beta}^{(1)} g^{(0)\alpha\beta} \quad (7.1.17)$$

のように書ける. ここで ζ は極小曲面に張られた座標である. 極小曲面であることから 1 次の摂動に対して大きさは変わるが, 積分すべき面自体は変化しないことに注意する.

ΔH_A の書き換え

計量の 1 次摂動を具体的に **Fefferman-Graham ゲージ** を取って書き下すと

$$ds^2 = R_{AdS}^2 \frac{dz^2 + (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu}{z^2}. \quad (7.1.18)$$

ここで $h_{\mu\nu}$ が計量の微小変形である.

この時節 2.3.2 で扱ったように双対な CFT における energy stress tensor を計量の摂動と結びつけることができる. このようにして得られるものを holographic stress tensor と呼ばれる. $h_{\mu\nu}$ を $z \rightarrow 0$ として AdS 時空の漸近境界に近づけると

$$h_{\mu\nu} = z^d H_{\mu\nu} + \cdots \quad (7.1.19)$$

のように展開できる. この時

$$T_{\mu\nu} = \frac{dR_{AdS}^{d-1}}{16\pi G_N} H_{\mu\nu} \quad (7.1.20)$$

第7章. 線形化アインシュタイン方程式とエンタングルメントエントロピーの第一法則209

として関係づけることができる. これを用いて (7.1.15) を書き換えると

$$\Delta H_A = \frac{dR_{AdS}^{d-1}}{8G_N} \int_{|x|<R} d^{d-1}x \frac{R^2 - r^2}{2R} H_{00}. \quad (7.1.21)$$

$d = 2$ の時には部分領域を $x_1 \leq x \leq x_2$ とすると,

$$\Delta H_A = \frac{R_{AdS}}{4G_N} \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}{x_2 - x_1} H_{00} \quad (7.1.22)$$

で与えられる.

7.1.3 重力の計算による等価性の証明

前節の計算によって元々 CFT 側の量であった ΔS_A と ΔH_A を重力理論において記述し直すことができた. また, (7.1.18) を用いてアインシュタイン方程式の一次摂動 (線形化アインシュタイン方程式) を導くことは容易にでき, それらとエンタングルメントエントロピーの第一法則 $\Delta S_A = \Delta H_A$ を重力の言葉で記述したものが等価であることは単純な計算によって示される [139].

ここでは計算の簡単のために, AdS_3/CFT_2 対応において線形化アインシュタイン方程式を満たす摂動が十分小さい部分領域 (ホログラフィックエンタングルメントエントロピーでバルク物質の寄与が無視できる極限) でエンタングルメントエントロピーの第一法則を満たすことを確認しておく.

3次元 AdS 時空で (7.1.18) は

$$ds^2 = R_{AdS}^2 \frac{dz^2 + (-1 + h_{tt})dt^2 + 2h_{tx}dtdx + (1 + h_{xx})dx^2}{z^2} \quad (7.1.23)$$

と書くことができる. これをアインシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \frac{1}{R_{AdS}^2}g_{\mu\nu} = 0 \quad (7.1.24)$$

に代入して $h_{\mu\nu}$ の一次まで残すことで線形化アインシュタイン方程式を求めると,

$$\begin{aligned} \partial_z(\partial_x h_{tx} - \partial_t h_{xx}) &= 0, \\ \partial_z(\partial_x h_{tt} - \partial_t h_{tx}) &= 0, \\ (\partial_z - z\partial_z^2)h_{xx} &= (\partial_z - z\partial_z^2)h_{tx} = (\partial_z - z\partial_z^2)h_{tt} = 0, \\ \partial_z(h_{tt} - h_{xx}) - z\partial_z^2 h_{tt} + 2z\partial_t \partial_x h_{tx} - z\partial_t^2 h_{xx} &= 0. \end{aligned} \quad (7.1.25)$$

第7章. 線形化アインシュタイン方程式とエンタングルメントエントロピーの第一法則210

z^2 のオーダーで発散しない解だけ取ってくると

$$\begin{aligned} h_{tt} &= h_{xx} = z^2 H(t, x), \\ \partial_t h_{tx} &= z^2 \partial_x H(t, x), \\ \partial_x h_{tx} &= z^2 \partial_t H(t, x), \end{aligned} \quad (7.1.26)$$

となり, $H(t, x)$ は

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)H(t, x) = 0 \quad (7.1.27)$$

を満たすような関数である.

ここで2次元 CFT の領域に以下のような部分領域 A をとる.

$$t = \text{const.}, \quad \xi - \frac{l}{2} \leq x \leq \xi + \frac{l}{2} \quad (7.1.28)$$

この時, 測地線はこの部分領域と同じ端点を持つ半円になり, 測地線上の座標を以下のように φ でパラメトライズできる.

$$x = \xi + \frac{l}{2} \sin \varphi, \quad z = \frac{l}{2} \cos \varphi \quad (7.1.29)$$

これらを図示すると図 7.1 のようになる. この時 (7.1.17) より

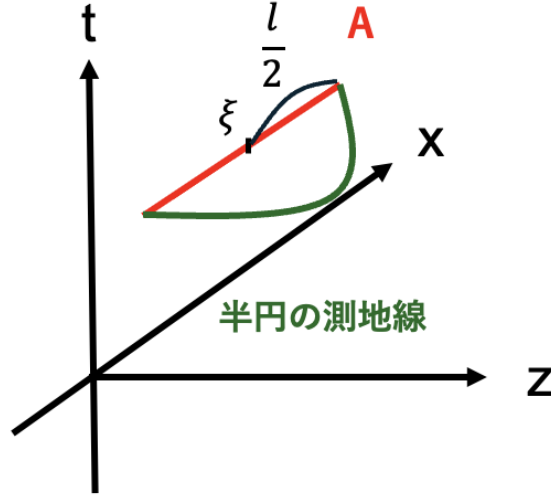
$$\begin{aligned} \Delta S_A &= \frac{R_{AdS}}{8G_N} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos \varphi h_{xx} \\ &= \frac{R_{AdS}}{8G_N} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos \varphi \left(\frac{l}{2} \cos \varphi \right)^2 H(t, x) \\ &\simeq \frac{l^2 R_{AdS}}{24G_N} H(t, \xi) \end{aligned} \quad (7.1.30)$$

ここで第二式で (7.1.26) を用いた. さらに第三式では部分領域 A が十分小さいとして $H(t, x)$ が領域の中心位置 ξ のみに依存するとして積分の外に出して計算を実行した.

モジュラーハミルトニアンの変化分は (7.1.22) に (7.1.26) を代入すると

$$\begin{aligned} \Delta H_A &\simeq \frac{R_{AdS}}{4G_N} H(t, \xi) \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}{x_2 - x_1} \\ &\simeq \frac{l^2 R_{AdS}}{24G_N} H(t, \xi) \end{aligned} \quad (7.1.31)$$

以上より, 線形化アインシュタイン方程式を満たす一次摂動の解がエンタングルメントエントロピーの第一法則を満たすことが確認できた.

図 7.1: $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ 対応における部分領域と測地線

7.2 dS/CFT 対応における等価性

ここまで AdS/CFT 対応において線形化アインシュタイン方程式とエンタングルメントエントロピーの第一法則の等価性がどのように示されるのかを見てきた. さらに, ホログラフィ原理において dS/CFT 対応が存在すると考えると同様の等価性を期待できる. 以下では実際に dS_3/CFT_2 対応の場合に具体的な計算でそれを示していく [11]. この証明の際に節 5.2.2 で見た dS/CFT 対応における笠-高柳公式を改善する必要があることに注意しておく.

7.2.1 線形化アインシュタイン方程式の解

3次元 dS 時空の global 座標に Fefferman-Graham ゲージを取って計量の一次摂動を考える.

$$ds^2 = -dt^2 + \cosh^2 t \, g_{ij} dx^i dx^j \quad (7.2.32)$$

であり, ここで $g_{\mu\nu}$ は

$$g_{\theta\theta} = 1 + h_{\theta\theta}(t, \theta, \phi), \quad g_{\theta\phi} = h_{\theta\phi}(t, \theta, \phi), \quad g_{\phi\phi} = \sin^2 \theta + h_{\phi\phi}(t, \theta, \phi) \quad (7.2.33)$$

第7章. 線形化アインシュタイン方程式とエンタングルメントエントロピーの第一法則212

で与える. $h_{\mu\nu}$ は微小な摂動である. この時アインシュタイン方程式 $R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + g_{ab} = 0$ の $h_{\mu\nu}$ に対する摂動の一次まで考えると, tt 成分から

$$h_{\phi\phi} = -\sin^2 \theta h_{\theta\theta}. \quad (7.2.34)$$

を得る. さらに ij 成分から

$$2 \tanh t \partial_t h_{ij} + \partial_t^2 h_{ij} = 0, \quad (7.2.35)$$

が得られ, $t \rightarrow \infty$ で発散しないような解は

$$h_{ij} \propto (1 - \tanh t) \quad (7.2.36)$$

を満たす. したがって, 摂動解は

$$\begin{aligned} h_{\theta\theta} &= (1 - \tanh t) \cdot H(\theta, \phi), \\ h_{\phi\phi} &= -(1 - \tanh t) \cdot \sin^2 \theta \cdot H(\theta, \phi), \\ h_{\theta\phi} &= (1 - \tanh t) \cdot J(\theta, \phi), \\ \partial_\theta [\sin \theta J(\theta, \phi)] &= \sin \theta \partial_\phi H(\theta, \phi), \\ \partial_\phi J(\theta, \phi) &= -\partial_\theta [\sin^2 \theta H(\theta, \phi)]. \end{aligned} \quad (7.2.37)$$

と書くことができ, さらに関数 $H(\theta, \phi)$, $J(\theta, \phi)$ は以下の微分方程式を満たす.

$$\begin{aligned} (\partial_\phi^2 + \sin^2 \theta \partial_\theta^2) H + 5 \sin \theta \cos \theta \partial_\theta H + (4 \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta) H &= 0, \\ (\partial_\phi^2 + \sin^2 \theta \partial_\theta^2) J + 3 \sin \theta \cos \theta \partial_\theta J + (2 \cos^2 \theta - 1) J &= 0 \end{aligned} \quad (7.2.38)$$

さらにこれらの微分方程式も厳密に解くことができ, 解は

$$\begin{aligned} H(\theta, \phi) &= H(\theta) e^{im\phi}, \quad J(\theta, \phi) = J(\theta) e^{im\phi}, \\ H(\theta) &= \frac{1}{(\sin \theta)^2} \left[A_1 \left(\tan \frac{\theta}{2} \right)^m + A_2 \frac{1}{\left(\tan \frac{\theta}{2} \right)^m} \right], \\ J(\theta) &= \frac{i}{\sin \theta} \left[A_1 \left(\tan \frac{\theta}{2} \right)^m - A_2 \frac{1}{\left(\tan \frac{\theta}{2} \right)^m} \right]. \end{aligned} \quad (7.2.39)$$

となる. ここで A_1, A_2 は積分定数である.

7.2.2 ΔH_A の書き換え

dS 時空に双対な CFT は時間無限遠に存在すると考えられ, その 2 次元球面 (θ, ϕ) において時間座標を ϕ とみなし, 以下のような部分領域 A を取る.

$$t = t_\infty, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad \phi = \phi_* = \text{const.} \quad (7.2.40)$$

ここで dS/CFT 対応における holographic stress tensor は AdS/CFT 対応における holographic stress tensor を解析接続することで得られる. dS 時空の漸近境界 $t \rightarrow \infty$ で $h_{\phi\phi}$ を

$$h_{\phi\phi} \cosh^2 t = 2 \cosh^2 t (1 - \tanh t) H_{\phi\phi} + \dots \quad (7.2.41)$$

のように展開して, 解析接続した式 $T_{\mu\nu} = \frac{iR_{dS}}{8\pi G_N} H_{\mu\nu}$ を用いると,

$$T_{\phi\phi} = \frac{-iR_{dS}}{16\pi G_N} \sin^2 \theta H(\theta, \phi) \quad (7.2.42)$$

が得られ, 同様に

$$T_{\theta\theta} = \frac{iR_{dS}}{16\pi G_N} H(\theta, \phi) \quad (7.2.43)$$

$$T_{\theta\phi} = \frac{iR_{dS}}{16\pi G_N} J(\theta, \phi) \quad (7.2.44)$$

となる. (7.1.22) に対して平面座標 (x, t) から球面座標 (θ, ϕ) に移るようなステレオグラフィック射影

$$x = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \quad (7.2.45)$$

を用いると, 以下のように ΔH_A が得られる.

$$\Delta H_A = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \frac{\tan^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot \frac{\sin \left(\frac{\theta-\theta_1}{2}\right) \sin \left(\frac{\theta_2-\theta}{2}\right)}{\sin^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) \sin \left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)} T_{\phi\phi} \quad (7.2.46)$$

$$= \frac{-iR_{dS}}{8G_N} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \frac{\tan^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot \frac{\sin \left(\frac{\theta-\theta_1}{2}\right) \sin \left(\frac{\theta_2-\theta}{2}\right)}{\sin^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) \sin \left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)} \sin^2 \theta H(\theta, \phi) \quad (7.2.47)$$

holographic stress tensor の発散に対する CFT 側からの解釈

ここで holographic stress tensor は線形化アインシュタイン方程式の解を用いると,

$$T_{\theta\theta} = \frac{iR_{dS}}{16\pi G_N} \frac{e^{im\phi}}{(\sin\theta)^2} \left[A_1 \left(\tan \frac{\theta}{2} \right)^m + A_2 \frac{1}{\left(\tan \frac{\theta}{2} \right)^m} \right] \quad (7.2.48)$$

$$T_{\theta\phi} = \frac{iR_{dS}}{16\pi G_N} \frac{ie^{im\phi}}{\sin\theta} \left[A_1 \left(\tan \frac{\theta}{2} \right)^m - A_2 \frac{1}{\left(\tan \frac{\theta}{2} \right)^m} \right] \quad (7.2.49)$$

$$T_{\phi\phi} = \frac{-iR_{dS}}{16\pi G_N} e^{im\phi} \left[A_1 \left(\tan \frac{\theta}{2} \right)^m + A_2 \frac{1}{\left(\tan \frac{\theta}{2} \right)^m} \right]. \quad (7.2.50)$$

として与えられるが, これは m を固定したモードで $\theta = 0, \pi$ で発散することがわかる. これはコンパクトな空間に対して摂動を与えた時に避けられない発散であるが, 双対な CFT 側の言葉で理解することができる.

2 次元 CFT において共形次元 $(h, \bar{h})$ を持つプライマリー演算子を挿入した場合の energy stress tensor の期待値を計算する.

energy stress tensor の Laurent 展開を用いることで, 次のように期待値を計算できる.

$$\langle O|T(z)|O\rangle = \langle O|z^{-2}L_0|O\rangle = \frac{h}{z^2} \quad (7.2.51)$$

$$\langle O|T(z)(L_{-1})^m|O\rangle = \langle O|z^{-2-m}L_m(L_{-1})^m|O\rangle = \frac{(m+1)!h}{z^{2+m}} \quad (7.2.52)$$

$$\langle O|(L_1)^mT(z)|O\rangle = \langle O|(L_1)^mL_{-m}z^{-2+m}|O\rangle = (m+1)!hz^{-2+m}.$$

(7.2.51) はプライマリー演算子による励起に対応し, (7.2.52) はディセメント場による励起に対応する.

次に, 以下のステレオグラフィック射影を用いて平面座標を球面座標へ写像する.

$$z = \frac{e^{i\phi} \sin \theta}{1 - \cos \theta}, \quad \bar{z} = \frac{e^{-i\phi} \sin \theta}{1 - \cos \theta}. \quad (7.2.53)$$

energy stress tensor の座標変換を用いることで, 次の期待値が得られる.

$$\langle O|T_{\theta\theta}|O\rangle = \left[\left(\frac{e^{i\phi}}{1 - \cos \theta} \right)^2 \langle O|T(z)|O\rangle + \left(\frac{e^{-i\phi}}{1 - \cos \theta} \right)^2 \langle O|\bar{T}(\bar{z})|O\rangle \right] = \frac{h + \bar{h}}{\sin^2 \theta} \quad (7.2.54)$$

第7章. 線形化アインシュタイン方程式とエンタングルメントエントロピーの第一法則215

$$\begin{aligned}
\langle O|T_{\theta\theta}(L_{-1})^m|O\rangle &= \left[\left(\frac{e^{i\phi}}{1-\cos\theta} \right)^2 \langle O|T(z)(L_{-1})^m|O\rangle + \left(\frac{e^{-i\phi}}{1-\cos\theta} \right)^2 \langle O|\bar{T}(\bar{z})(L_{-1})^m|O\rangle \right] \\
&= \frac{(m+1)!(h+\bar{h})}{\sin^2\theta} (e^{im\phi} + e^{-im\phi}) \left(\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \right)^{\frac{m}{2}}
\end{aligned} \tag{7.2.55}$$

$$\begin{aligned}
\langle O|(L_1)^m T_{\theta\theta}|O\rangle &= \left[\left(\frac{e^{i\phi}}{1-\cos\theta} \right)^2 \langle O|(L_1)^m T(z)|O\rangle + \left(\frac{e^{-i\phi}}{1-\cos\theta} \right)^2 \langle O|(L_1)^m \bar{T}(\bar{z})|O\rangle \right] \\
&= \frac{(m+1)!(h+\bar{h})}{\sin^2\theta} (e^{im\phi} + e^{-im\phi}) \left(\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} \right)^{\frac{m}{2}}
\end{aligned} \tag{7.2.56}$$

θ と ϕ への依存性に着目すると, 最初の式とその後の二式は (7.2.48) における m モードと $-m$ モードに対応していることがわかる.

さらに,

$$\langle O|T_{\theta\phi}|O\rangle = \left[\frac{ie^{2i\phi}\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2} \langle O|T(z)|O\rangle + \frac{-ie^{-2i\phi}\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2} \langle O|\bar{T}(\bar{z})|O\rangle \right] = \frac{i(h-\bar{h})}{\sin\theta} \tag{7.2.57}$$

$$\begin{aligned}
\langle O|T_{\theta\phi}(L_{-1})^m|O\rangle &= \left[\frac{ie^{2i\phi}\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2} \langle O|T(z)(L_{-1})^m|O\rangle + \frac{-ie^{-2i\phi}\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2} \langle O|\bar{T}(\bar{z})(L_{-1})^m|O\rangle \right] \\
&= \frac{i(m+1)!(h-\bar{h})}{\sin\theta} (e^{im\phi} + e^{-im\phi}) \left(\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \right)^{\frac{m}{2}}
\end{aligned} \tag{7.2.58}$$

$$\begin{aligned}
\langle O|(L_1)^m T_{\theta\phi}|O\rangle &= \left[\frac{ie^{2i\phi}\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2} \langle O|(L_1)^m T(z)|O\rangle + \frac{-ie^{-2i\phi}\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2} \langle O|(L_1)^m \bar{T}(\bar{z})|O\rangle \right] \\
&= \frac{i(m+1)!(h-\bar{h})}{\sin\theta} (e^{im\phi} + e^{-im\phi}) \left(\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} \right)^{\frac{m}{2}}
\end{aligned} \tag{7.2.59}$$

これらは (7.2.49) に対応する.

最後に,

$$\begin{aligned}
\langle O|T_{\phi\phi}|O\rangle &= \left[- \left(\frac{e^{i\phi}\sin\theta}{1-\cos\theta} \right)^2 \langle O|T(z)|O\rangle - \left(\frac{e^{-i\phi}\sin\theta}{1-\cos\theta} \right)^2 \langle O|\bar{T}(\bar{z})|O\rangle \right] \\
&= -\sin^2\theta \langle O|T_{\theta\theta}|O\rangle.
\end{aligned} \tag{7.2.60}$$

$$\begin{aligned}\langle O|T_{\phi\phi}(L_{-1})^m|O\rangle &= \left[-\left(\frac{e^{i\phi}\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)^2 \langle O|T(z)(L_{-1})^m|O\rangle - \left(\frac{e^{-i\phi}\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)^2 \langle O|\bar{T}(\bar{z})(L_{-1})^m|O\rangle \right] \\ &= -\sin^2\theta \langle O|T_{\theta\theta}(L_{-1})^m|O\rangle.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle O|(L_{-1})^m T_{\phi\phi}|O\rangle &= \left[-\left(\frac{e^{i\phi}\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)^2 \langle O|(L_{-1})^m T(z)|O\rangle - \left(\frac{e^{-i\phi}\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)^2 \langle O|(L_{-1})^m \bar{T}(\bar{z})|O\rangle \right] \\ &= -\sin^2\theta \langle O|(L_{-1})^m T_{\theta\theta}|O\rangle.\end{aligned}\tag{7.2.61}$$

(7.2.62)

これらは (7.2.50) に対応する.

7.2.3 ΔS_A の書き換え

エンタングルメントエントロピーについても dS/CFT 対応における笠-高柳公式を用いて重力の言葉に書き直す必要がある. ここで節 5.2.2 で見たものを使いたいところであるが, この公式はエンタングルメントエントロピーの最高次で正しい結果を与えるが, 一次摂動に対して正しく第一法則を満たす結果を与えないことがわかる.

実際に図 5.8 のような測地線は

Lorentzian:

$$\cot\left(\theta - \frac{\theta_2 + \theta_1}{2}\right) = \frac{-\sinh t}{\sqrt{1 - \cosh^2 t \left(1 - \tan^2 \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)}}, \quad \phi = \phi_* = \text{const.} \tag{7.2.63}$$

Euclidean:

$$\tau = 0, \quad \frac{\theta_2 + \theta_1}{2} - \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \leq \theta \leq \frac{\theta_2 + \theta_1}{2} + \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}, \quad \phi = \phi_* = \text{const.} \tag{7.2.64}$$

第7章. 線形化アインシュタイン方程式とエンタングルメントエントロピーの第一法則217

で与えられ, これらを用いて線形化アインシュタイン方程式の摂動解の $m = 0$ のモードを用いて計算すると ΔS_A は以下のように求まる.

$$\begin{aligned}
 \Delta S & \left(\frac{\theta_2 + \theta_1}{2}, \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}, \phi \right) \\
 &= \frac{R_{dS}}{8G_N} \int dt \sqrt{g^{(0)}} g_{ab}^{(1)} g^{(0)ab} \\
 &= \frac{R_{dS}}{8G_N} \int dt \frac{\dot{\theta}^2 \cosh^2 t (1 - \tanh t)}{\sqrt{-1 + \dot{\theta}^2 \cosh^2 t}} H\left(\theta(t, \frac{\theta_2 + \theta_1}{2}, \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}), \phi\right) \\
 &= \frac{i(A_1 + A_2)R_{dS}}{4G_N} \\
 & \quad \left[\frac{\sin \frac{\theta_2 + \theta_1}{2}}{\sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}} \left(\operatorname{arctanh} \left(\frac{1}{\sin \frac{\theta_2 + \theta_1}{2}} \right) - \operatorname{arctanh} \left(\frac{\sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}}{\sin \frac{\theta_2 + \theta_1}{2}} \right) \right) - \frac{1}{\sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}} + 1 \right] \quad (7.2.65)
 \end{aligned}$$

しかし, この結果は (7.2.47) と一致しないことがわかる.

ここでエンタングルメントエントロピー (Pseudo エントロピー) が dS/CFT 対応においても時空の幾何構造と密接に結びつき, さらに対応する CFT が AdS に双対な CFT からの解析接続で得られる性質を満たすものであると信じる立場に立つと, dS/CFT 対応における笠-高柳公式を改善する必要がある.

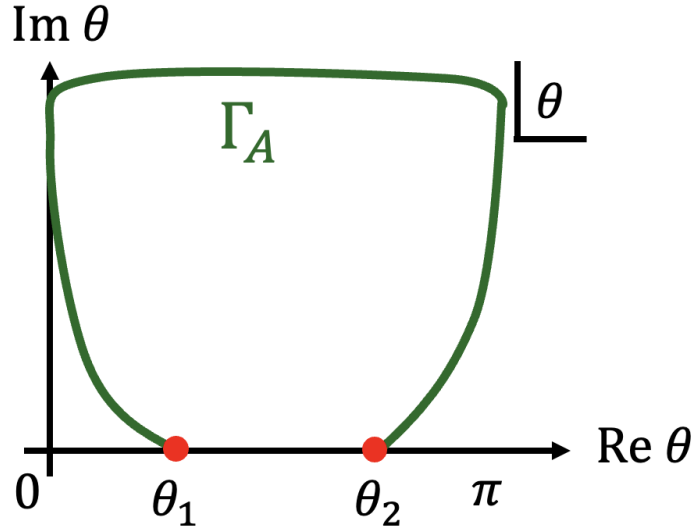
ここで問題だと考えられるのは笠-高柳公式で用いる dS 時空の global な構造が AdS 時空からの解析接続で得られるものと異なる点であり, 特に Euclidean dS を $t = 0$ から移る行為が悪さをしていると考えられる. 実際に (7.2.65) は積分の下端である $t = 0$ の寄与を除けば正しく第一法則を満たす. したがって dS/CFT 対応における笠-高柳公式を以下のように改善する.

測地線の式を以下のように書き直す.

$$\cosh t = \frac{1}{\sqrt{-\sin^2\left(\theta + \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \tan^2 \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} + \cos^2\left(\theta + \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)}} \quad (7.2.66)$$

測地線を θ でパラメトライズし, 実数として定義されていたものを複素平面まで拡張する. これによって AdS/CFT 対応での計算と解析接続で一致するようになる. 具体的な積分領域は図 7.2 のように複素平面の極である $\theta = 0, \pi$ を避けるように取る. この時線形化アインシュタイン方程式の一般解に対して測地線の変化分は

$$\Delta L = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \frac{i}{\tan \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}} \left(1 - \frac{\cos\left(\theta - \frac{\theta_2 + \theta_1}{2}\right)}{\cos \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}} \right) H(\theta, \phi) \quad (7.2.67)$$

図 7.2: 複素平面に拡張した θ の積分経路

で与えられ, したがってエンタングルメントエントロピーの変化分は

$$\Delta S_A = \frac{-iR_{dS}}{8G_N} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \frac{\tan^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)} \cdot \frac{\sin \left(\frac{\theta - \theta_1}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta_2 - \theta}{2} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right)} \sin^2 \theta H(\theta, \phi) \quad (7.2.68)$$

となる. この結果は (7.2.47) と一致しており, エンタングルメントエントロピーの第一法則が成立することが確認できる.

ここで改善した笠-高柳公式がエンタングルメントエントロピーの最高次に対しても正しい結果を与えることを確認しておく. 上記の積分経路に対して測地線距離は

$$\begin{aligned} L &= i \int_{\theta_1 - \delta}^{\theta_2 + \delta} d\theta \sqrt{\dot{t}^2 - \cosh^2 t} \\ &= i \int_{\theta_1 - \delta}^{\theta_2 + \delta} d\theta \frac{\tan \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}}{-\sin^2 \left(\theta + \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \tan^2 \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} + \cos^2 \left(\theta + \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right)} \\ &= 2it_\infty + i \log \sin^2 \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} + \pi \end{aligned} \quad (7.2.69)$$

これは節 5.2.2 で求めた測地線距離と等しく, 結果的に (5.2.60) と同じエンタングルメントエントロピーを与えることがわかる.

7.2.4 Bañados map を用いた等価性の解析

3次元時空は重力の自由度がないため, 3次元 dS 時空も AdS 時空と同様に任意の漸近的 dS 時空の計量は局所的に pure dS に変換できると期待できる. さらにそれは dS 時空に双対な CFT の共形変換に対するバルクでの対応物で実現できると考えられるので, ここでは AdS 時空で共形変換に双対な Bañados map を解析接続で dS 時空に拡張したものを用いる (節 5.2.3 参照).

この節では 3次元 dS 時空における線形化アインシュタイン方程式とエンタングルメントエントロピーの第一法則についての等価性をこの Bañados map を用いて示す.

Bañados map を用いた ΔS_A の導出

摂動を加えた 3次元 dS 時空におけるエンタングルメントエントロピーを計算する. 部分領域 A として $x_1 \leq x \leq x_2$, $y = y_* = \text{const.}$ を選ぶ. 次に, Bañados map を用いて摂動された dS 時空の座標 (τ, x, y) を Poincaré dS (T, X, Y) に変換する. このとき部分領域 A は A' に, UV カットオフ $\tilde{\epsilon}_p$ は $\tilde{\epsilon}$ に対応する. 節 5.2.3 と同様に $w = x + iy$, $\bar{w} = x - iy$, $\xi = X + iY$, $\bar{\xi} = X - iY$ とおく. 以下のような共形変換の一次摂動を考える.

$$\xi = w + \delta f(w), \quad \bar{\xi} = \bar{w} + \delta \bar{f}(\bar{w}). \quad (7.2.70)$$

この時 Bañados map は次のように書ける.

$$\begin{aligned} \xi &\simeq w + \delta f(w) + \frac{1}{2}\tau^2 \delta \bar{f}''(\bar{w}), \\ \bar{\xi} &\simeq \bar{w} + \delta \bar{f}(\bar{w}) + \frac{1}{2}\tau^2 \delta f''(w), \\ T &\simeq \tau(1 + \frac{1}{2}\delta f'(w) + \frac{1}{2}\delta \bar{f}'(\bar{w})). \end{aligned} \quad (7.2.71)$$

摂動された dS 時空でのエンタングルメントエントロピーは Poincaré dS 座標で求まるエンタングルメントエントロピーを Bañados map によって座標変換する

第7章. 線形化アインシュタイン方程式とエンタングルメントエントロピーの第一法則220

ことで以下のように計算できる.

$$\begin{aligned}
S_A(y_*, x_1, x_2) &= S_{A'}(Y_*, X_1, X_2) \\
&= \frac{i\tilde{c}}{6} \log \frac{(X_2 - X_1)^2}{\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2} + \frac{\pi \tilde{c}}{6} \\
&\simeq \frac{i\tilde{c}}{6} \log \frac{\left(\left(\frac{(w_2 + \bar{w}_2)}{2} - \frac{(w_1 + \bar{w}_1)}{2} \right) + \left(\frac{(\delta f(w_2) + \delta \bar{f}(\bar{w}_2))}{2} - \frac{(\delta f(w_1) + \delta \bar{f}(\bar{w}_1))}{2} \right) \right)^2}{\tilde{\epsilon}_{p1} \tilde{\epsilon}_{p2} \sqrt{1 + \delta f'(w_1)} \sqrt{1 + \delta \bar{f}'(\bar{w}_1)} \sqrt{1 + \delta f'(w_2)} \sqrt{1 + \delta \bar{f}'(\bar{w}_2)}} + \frac{\pi \tilde{c}}{6} \\
&\simeq \frac{i\tilde{c}}{6} \log \frac{(x_2 - x_1)^2}{\tilde{\epsilon}_{p1} \tilde{\epsilon}_{p2}} + \frac{\pi \tilde{c}}{6} \\
&\quad + \frac{i\tilde{c}}{6} \left(\frac{(\delta f(w_2) + \delta \bar{f}(\bar{w}_2)) - (\delta f(w_1) + \delta \bar{f}(\bar{w}_1))}{x_2 - x_1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} (\delta f'(w_2) + \delta \bar{f}'(\bar{w}_2) + \delta f'(w_1) + \delta \bar{f}'(\bar{w}_1)) \right) \\
&\simeq S_{0th} + \Delta S
\end{aligned} \tag{7.2.72}$$

したがって, 一次摂動によるエンタングルメントエントロピーの変化分は

$$\begin{aligned}
\Delta S_A &\simeq \frac{i\tilde{c}}{6} \left(\frac{(\delta f(w_2) + \delta \bar{f}(\bar{w}_2)) - (\delta f(w_1) + \delta \bar{f}(\bar{w}_1))}{x_2 - x_1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} (\delta f'(w_2) + \delta \bar{f}'(\bar{w}_2) + \delta f'(w_1) + \delta \bar{f}'(\bar{w}_1)) \right)
\end{aligned} \tag{7.2.73}$$

で与えられる.

Bañados map を用いた ΔH_A の導出

(7.2.70) のような一次摂動に対して

$$ds^2 = R_{dS}^2 \left[-\frac{d\tau^2}{\tau^2} - T(w)(dw)^2 - \bar{T}(\bar{w})(d\bar{w})^2 + \left(\frac{1}{\tau^2} + \tau^2 T(w) \bar{T}(\bar{w}) \right) dw d\bar{w} \right] \tag{7.2.74}$$

のように計量は変化し, その時 $T(w)$, $\bar{T}(\bar{w})$ は以下のように与えられる.

$$T(w) \simeq -\frac{1}{2} \delta f'''(w), \quad \bar{T}(\bar{w}) \simeq -\frac{1}{2} \delta \bar{f}'''(\bar{w}). \tag{7.2.75}$$

第7章. 線形化アインシュタイン方程式とエンタングルメントエントロピーの第一法則221

したがって, 計量の一次摂動は次のようになり,

$$ds^2 \simeq R_{dS}^2 \left[\frac{-d\tau^2 + dx^2 + dy^2}{\tau^2} + \frac{1}{2}(\delta f'''(w) + \delta \bar{f}'''(\bar{w}))dx^2 \right. \\ \left. - \frac{1}{2}(\delta f'''(w) + \delta \bar{f}'''(\bar{w}))dy^2 + i(\delta f'''(w) - \delta \bar{f}'''(\bar{w}))dtdy \right] \quad (7.2.76)$$

これから dS/CFT 対応における holographic stress tensor を得られる. 解析接続によって得られる dS/CFT 対応における holographic stress tensor は

$$T_{\mu\nu} = \frac{iR_{dS}}{8\pi G_N} H_{\mu\nu} \quad (7.2.77)$$

である. ここで $H_{\mu\nu}$ は計量の一次摂動である. 式 (7.2.76) から

$$H_{yy} = -\frac{1}{2}(\delta f'''(w) + \delta \bar{f}'''(\bar{w})) \quad (7.2.78)$$

と読み取れるため, 以下を得る.

$$T_{yy} \simeq -\frac{iR_{dS}}{16\pi G_N} (\delta f'''(w) + \delta \bar{f}'''(\bar{w})). \quad (7.2.79)$$

ここで, Euclidean AdS では y が Euclid 時間であったことを思い出し, dS_3 における双対 CFT においても y が時間座標であるとみなす. また, 解析接続した Brown-Henneaux 関係式 (5.2.48) を用いて部分積分を繰り返すと, 最終的に次を得る.

$$\Delta H_A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{x_2+x_1}{2}\right)^2}{x_2 - x_1} T_{yy} \\ \simeq -\frac{i\tilde{c}}{12} \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{x_2+x_1}{2}\right)^2}{x_2 - x_1} (\delta f'''(w) + \delta \bar{f}'''(\bar{w})) \\ \simeq \frac{i\tilde{c}}{6} \left(\frac{(\delta f(w_2) + \delta \bar{f}(\bar{w}_2)) - (\delta f(w_1) + \delta \bar{f}(\bar{w}_1))}{x_2 - x_1} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (\delta f'(w_2) + \delta \bar{f}'(\bar{w}_2) + \delta f'(w_1) + \delta \bar{f}'(\bar{w}_1)) \right) \quad (7.2.80)$$

この結果は式 (7.2.73) と一致しており, dS_3/CFT_2 対応 における第一法則 $\Delta S_A = \Delta H_A$ が示せた.

7.3 AdS/BCFT 対応における Bañados map を用いた等価性の解析

この節では AdS/CFT 対応や dS/CFT 対応で成り立っている線形化アインシュタイン方程式とエンタングルメントエントロピーの第一法則についての等価性を AdS/BCFT 対応の枠組みで示す. このような試みは [146] での論文で [140] で Faulkner らが用いた共変性を保ったまま重力の計算を行う形式によって行われており, ここでは線形化アインシュタイン方程式だけでなく線形化ノイマン境界条件が第一法則成立のために必要であることが議論されている.

この節では $\text{AdS}_3/\text{BCFT}_2$ 対応に議論を制限し, 3 次元 AdS 時空の強い対称性から得られる Bañados map(節 2.3.6 参照) を用いてこの等価性を示していく.

Bañados map を用いた ΔS_A の導出

摂動された 3 次元 AdS 時空中に EOW プレーンを挿入した状況を考える. この時, 境界上の $x > 0$ の領域に BCFT が実現される. この摂動された AdS 時空におけるエンタングルメントエントロピーを計算し, 摂動前と比較することで ΔS_A を求める. 部分領域 A は

$$t = t_0, \quad 0 \leq x \leq x_0 = l \quad (7.3.81)$$

とする (図 7.3 の左図). 次に, Bañados map を用いて, 摂動された AdS の (z, x, t) 座標を Poincaré AdS の (η, X, T) 座標へと変換する. このとき, 部分領域 A は A' に対応し, UV カットオフ ϵ は δ に対応させる. さらに $(u, v) = (t - x, t + x)$ および $(U, V) = (T - X, T + X)$ を導入する. 摂動前の Poincaré 座標は

$$ds^2 = R_{\text{AdS}}^2 \frac{d\eta^2 - dUdV}{\eta^2} \quad (7.3.82)$$

のように書かれる. ここで BCFT の境界 $x = 0$ が変換によって変わらないことを要請し, 一般の共形変換 $\tilde{u} = p(u)$, $\tilde{v} = q(v)$ に対して $p = q$ を要請し, その際の一次摂動は

$$\tilde{u} = u + \delta p(u), \quad \tilde{v} = v + \delta p(v) \quad (7.3.83)$$

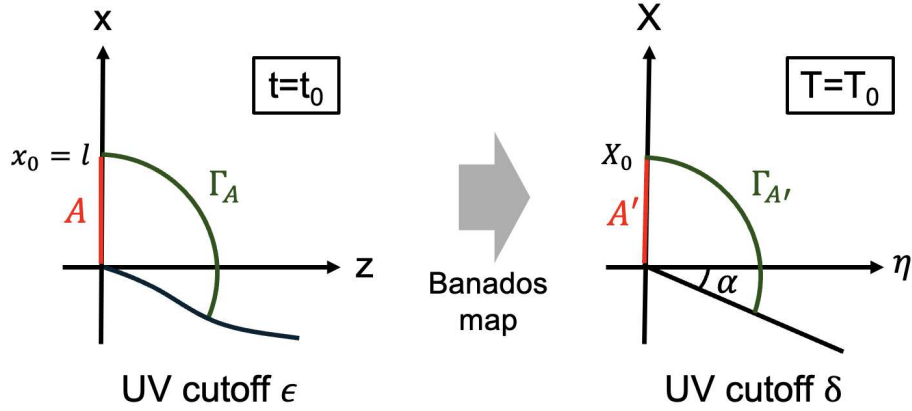


図 7.3: 摂動された AdS(左図) から Poincaré AdS(右図) への Bañados map

で与えられる. さらに対応する Bañados map による一次摂動は

$$\begin{aligned}
 U &\simeq u + \delta p(u) + \frac{1}{2}z^2\delta p''(v) \\
 V &\simeq v + \delta p(v) + \frac{1}{2}z^2\delta p''(u) \\
 \eta &\simeq z(1 + \frac{1}{2}\delta p'(u) + \frac{1}{2}\delta p'(v))
 \end{aligned}
 \tag{7.3.84}$$

となる. この時 $p'(u) = \frac{dp}{du}(u)$ と表記している. これらを用いて, 摂動された AdS 時空中でのエンタングルメントエントロピーは Poincaré 座標で得られるエンタングルメントエントロピーを Bañados map で変換することで得られ,

$$\begin{aligned}
 S_A(t_0, x_0) &= S_{A'}(T_0, X_0) \\
 &= \frac{c}{6} \log \frac{X_0}{\delta} + \frac{c}{6} \log \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} \\
 &\simeq \frac{c}{6} \log \frac{\frac{1}{2}((v_0 - u_0) + (\delta p(v_0) - \delta p(u_0)))}{\epsilon \sqrt{(1 + \delta p'(v_0))(1 + \delta p'(u_0))}} + \frac{c}{6} \log \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} \\
 &\simeq \frac{c}{6} \log \frac{x_0}{\epsilon} + \frac{c}{6} \log \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{c}{6} \left(\frac{\delta p(v_0) - \delta p(u_0)}{v_0 - u_0} - \frac{1}{2}\delta p'(v_0) - \frac{1}{2}\delta p'(u_0) \right) \\
 &\simeq S_{0th} + \Delta S
 \end{aligned}
 \tag{7.3.85}$$

を得る. したがって, エンタングルメントエントロピーの変化分は

$$\Delta S \simeq \frac{c}{6} \left(\frac{\delta p(v_0) - \delta p(u_0)}{v_0 - u_0} - \frac{1}{2}\delta p'(v_0) - \frac{1}{2}\delta p'(u_0) \right)
 \tag{7.3.86}$$

となる.

Bañados map を用いた ΔH_A の導出

Bañados map によって計量は以下のように変わることが知られている.

$$\begin{aligned} ds^2 &= R_{AdS}^2 \left[\frac{dz^2}{z^2} + T_+(u)(du)^2 + T_-(v)(dv)^2 - \left(\frac{1}{z^2} + z^2 T_+(u)T_-(v) \right) dudv \right] \\ &= R_{AdS}^2 \left[\frac{dz^2 - dt^2 + dx^2}{z^2} + (T_+ + T_- - z^2 T_+ T_-) dt^2 \right. \\ &\quad \left. + (T_+ + T_- + z^2 T_+ T_-) dx^2 - 2(T_+ - T_-) dt dx \right], \end{aligned} \quad (7.3.87)$$

ここで微小変換に対応する T_+, T_- は

$$T_+(u) \simeq -\frac{1}{2} \delta p'''(u), \quad T_-(v) \simeq -\frac{1}{2} \delta p'''(v). \quad (7.3.88)$$

となる. 結果として計量は

$$\begin{aligned} ds^2 &\simeq R_{AdS}^2 \left[\frac{dz^2 - dt^2 + dx^2}{z^2} - \frac{1}{2} (\delta p'''(u) + \delta p'''(v)) dt^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (\delta p'''(u) + \delta p'''(v)) dx^2 + (\delta p'''(u) - \delta p'''(v)) dt dx \right]. \end{aligned} \quad (7.3.89)$$

となる. ここで holographic stress tensor $T_{\mu\nu} = \frac{dR_{AdS}^{d-1}}{16\pi G_N} H_{\mu\nu}$ を考えると, (7.3.89) から

$$H_{tt} = -\frac{1}{2} (\delta p'''(u) + \delta p'''(v)) \quad (7.3.90)$$

を読み取ることができ, 以下のように得られる.

$$T_{tt} \simeq -\frac{R_{AdS}}{16\pi G_N} (\delta p'''(t+x) + \delta p'''(t-x)). \quad (7.3.91)$$

さらに Brown-Henneaux 関係式 $c = \frac{3R_{AdS}}{2G_N}$ を用いた上で, 部分積分を繰り返すと最終的に次を得る.

$$\begin{aligned} \Delta E &= 2\pi \int_0^{x_0} dx \frac{x_0^2 - x^2}{2x_0} T_{tt} \\ &\simeq -\frac{c}{12} \int_0^{x_0} dx \frac{x_0^2 - x^2}{2x_0} (\delta p'''(t_0 + x) + \delta p'''(t_0 - x)) \\ &\simeq \frac{c}{6} \left(\frac{\delta p(t_0 + x_0) - \delta p(t_0 - x_0)}{2x_0} - \frac{1}{2} \delta p'(t_0 + x_0) - \frac{1}{2} \delta p'(t_0 - x_0) \right) \end{aligned} \quad (7.3.92)$$

第7章. 線形化アインシュタイン方程式とエンタングルメントエントロピーの第一法則225

この結果は (7.3.86) と一致し, 第一法則 $\Delta S = \Delta E$ が成り立つことを示している.
この章では触れていないが $p = q$ の制約がない場合, すなわち通常の AdS/CFT 対応 の場合にも同様の Bañados map を用いた手法で第一法則が成り立つことを確認できる.

第8章

まとめと展望

本修士論文のまとめ

本修士論文では, ホログラフィ原理における様々な双対性 (AdS/CFT 対応, AdS/BCFT 対応, dS/CFT 対応) について, 特に量子情報理論との関連性を強調しながら紹介し, さらにはそれらの前提知識を用いて著者が修士課程のうちに研究した内容について紹介した.

第2章では, ホログラフィ原理の中で最も成功している例として AdS/CFT 対応の紹介をしている. AdS 時空を張る座標や AdS ブラックホールの熱的性質を整理したのちに, 共形場理論の諸性質 (対称性, 相関関数, OPE など) を見た. それらを用いて AdS/CFT 対応の主張を確認し, その具体的な使い方やいくつかの対応関係の例をまとめた.

第3章では, AdS/CFT 対応の文脈で発展している量子情報的な側面について紹介している. 量子情報理論の基礎をまとめ, エンタングルメントエントロピーの重要性に言及した. そこから場の理論と重力理論においてエンタングルメントエントロピーがどのように計算されるかを説明していくつかの例も示した. 最後には, エンタングルメントエントロピーが捉えきれない多体量子相関について最近の発展を紹介した. さらには局所量子クエンチにおける multi-entropy の時間発展を計算しており, これは著者自身の新しい結果である.

第 4 章では, AdS/CFT 対応から拡張して境界付き共形場理論 (BCFT) に関する双対性を紹介している. 境界を入れることによって現れる BCFT 特有の寄与について元の CFT と比較しながら整理した. その後には BCFT に対する重力双対を AdS 時空上に挿入した End-of-the-World (EOW) ブレーンを用いて実現できることを見た. この章でも BCFT における境界エントロピーを見て量子情報的な側面に言及している.

第 5 章では, さらに AdS/CFT 対応を拡張して dS 時空に対する双対性を紹介している. dS 時空を張る座標やそこで生じるブラックホールと Cosmological Horizon の性質, さらには dS 時空での量子論を考えた時に現れる特殊性を整理した. それらを踏まえて dS/CFT 対応の主張を確認し, AdS/CFT 対応からの解析接続を用いた構成方法とその問題点をまとめている. さらにはここでも dS/CFT 対応におけるエンタングルメントエントロピー (Pseudo エントロピー) に言及している. 最後に言及した, dS_3/CFT_2 対応における Bañados map は [11] において導入された新しい結果である.

第 6 章では, timelike に挿入した EOW ブレーンにスカラー場を挿入することで生じるダイナミクスから得られる結果をまとめている. 一つ目は, ブレーン上の dS/CFT 対応を考え, null energy condition (NEC) からその双対なスカラー演算子の共形次元を実に制限できることを見た. 二つ目は, timelike に部分領域を取った際に g 定理が成立することをホログラフィックに導出した. 最後に, ブレーン上の誘導計量を FLRW 型に持っていくことで様々な宇宙論モデルを構成した. これらは著者らによって書かれた [10] の内容がメインである. 高次元の宇宙論モデルや inflation モデルに関しては ongoing の研究の結果である.

第 7 章では, AdS/CFT 対応ですでに知られていた重力理論と量子論の基礎方程式の双対性が dS/CFT 対応でどのように成り立つのかを議論した. まずは AdS/CFT 対応において線形化アインシュタイン方程式がエンタングルメントエントロピーの第一法則と等価であるというのがどのように示されるかをレビューした. それらを用いて dS/CFT 対応で等価性が成り立つことを確認した. その際に, dS/CFT 対応におけるエンタングルメントエントロピーの公式を, 測地線を複素方向に拡張するという改善方法を提案している. さらには Bañados map を用いた証明も紹介している. これらは著者らによって書かれた [11] の内容がメインである. AdS/BCFT 対応における双対性の計算は著者独自で行なったものである.

新たなホログラフィ原理の探究に向けて

本修士論文では、ホログラフィ原理の基礎から最近の応用まで幅広く紹介した。最後にホログラフィ原理、ひいては量子重力理論探究についての今後の展望について述べておきたいと思う。

量子情報理論がホログラフィ原理において重要であるという事実を踏まえた上で、エンタングルメントエントロピーは非常に強力な武器ではあるが、実はそれだけでは不十分である。この量は二体系の純粋状態にのみ適用可能なので、多体系や混合状態の量子エンタングルメントを適切に測る事はできないのである。しかし、多体系は二体系よりも豊富な量子相関を持っていることが知られており、ホログラフィ原理で重要になってくることも明らかである。さらに混合状態は既にホログラフィ原理において多く現れており、ブラックホールの解析などには必要不可欠である。このようにエンタングルメントエントロピーでは捉えられない新たな量子相関を用いてホログラフィ原理を捉え直すことが重要であると考えられる。

現状のホログラフィ原理は最も成功してきた AdS/CFT 対応を用いて考えられることが多い。しかし、AdS 時空というのは負の宇宙定数を持つ時空のことであり、我々が住む膨張宇宙を正しく記述する事はできない。したがって、AdS 時空の双対性を、正の宇宙定数を持つ dS 時空に拡張しようという試みが盛んに行われている。dS/CFT 対応と呼ばれるこの双対性は本修士論文においてもメインピックである。しばしばこの対応は AdS/CFT 対応を解析接続することで得られるが、そこには非ユニタリー性などの dS 時空特有の問題がいくつもある。このような AdS 以外の時空へのホログラフィ原理の拡張はどこまで可能で、どのように定式化されるのかについての理解を進めていくことが重要である。

ホログラフィ原理は未知の量子重力理論を既知の量子論を用いて解析できるという点で非常に強力な武器である。しかし、現状の研究の多くは計算のしやすい古典極限を取ったものを扱っている。もちろん双対性そのものの研究という意味でこういった研究にも大きな意義はあるのだが、真に量子重力理論について理解を進めるためには古典極限に頼らずに量子重力の寄与を調べる必要がある。この

ようなアプローチはほとんどヒントがなく非常に難解であるがゆえに, 多くの研究者が興味を持っているにも関わらず具体的な進展は限られたものにとどまっている. 重力の量子効果を本質的に含むホログラフィの枠組みを構築し, 古典重力を超えた量子重力理論の性質を明らかにすることは, 現在の素粒子物理学における最も重要な課題の一つであると言える.

ここまで見てきたように, 量子重力理論の探求は非常に深遠で, 極めて挑戦的なものである. その歴史は非常に長いにも関わらず, 我々は未だに量子重力理論の核心を掴みきれておらず, 今日においても真理に魅了された多くの研究者が頭を悩ませている. このように量子重力理論探究は未だ真つ暗闇の中にあるが, その中でもホログラフィ原理というのは一筋の光として現れ, 研究者に一つの方向性を示した. 次はどこに光が照らされるのか, その光がどのようなものかは, 誰にも分からない. 今見えているわずかな光を抛り所にし, 自らの直感でその先に何かがあると信じ, 手探りで歩みを進めていくのだ.

謝辞

本修士論文の執筆,さらには二年間の修士課程の中で多くの方々に支えていただきました.この場をお借りして,感謝の意を述べさせて頂きたいと思います.

まず,修士課程の二年間を通して様々な面でお世話になり,特に研究に関して多くのご指導をいただいた,指導教員の高柳匡氏に心から感謝を申し上げます.さらには,共同研究者として幾度となく議論を重ねていただいた神田大樹氏,小原充貴氏,鈴木優樹氏,新名宏太朗氏,Jason Kristiano氏,川本大志氏,前田陵汰氏,佐藤充伎氏,Jonathan Harper氏,Nicolò Zenoni氏,田耕健也氏にはお礼を申し上げます.本修士論文におけるメインの研究が充実したものになっているのは皆様のおかげです.また,居室を同じくして生活,研究面で世話になった津田崇史氏にも感謝いたします.

修士課程に限らず,これまでに授業やゼミを通して物理学の基礎から発展まで幅広くご指導いただいた寺嶋靖治氏,伊藤悦子氏,中山優氏,宮地真路氏,橋本幸士氏,杉本茂樹氏,福間将文氏,杉下宗太郎氏,田島治氏にも深く感謝を申し上げます.研究面のみならず,生活や将来の進路に至るまで様々な場面でその他にも多くの先輩や先生方のご指導・ご助言を賜りました.その一つ一つが貴重であり,心より感謝申し上げます.

学部や修士の頃に自主ゼミを通して物理への理解を深め合った同期の小名木俊輝氏,中村七海氏,三木幸大氏,齊藤巧磨氏,中島悠翔氏,高橋駿太氏,篠田遼太郎氏,林洸樹氏,重富友汰氏,廣部佑真氏,松野なな氏にも感謝したいと思います.ここには特に多くの議論を交わし,刺激を与えあった方々の名前を挙げておりますが,他にも多くの仲間との交流があったおかげで今の自分があると思っています.本当にありがとうございました.

最後に, 研究環境を支えてくださった基礎物理学研究所と物理第二教室の事務の方々, さらに日頃から生活を支えてくださった家族と友人たちに深く感謝いたします.

参考文献

- [1] J.D. Bekenstein, *Black holes and entropy*, *Phys. Rev. D* **7** (1973) 2333.
- [2] S.W. Hawking, *Particle creation by black holes*, *Communications in Mathematical Physics* **43** (1975) 199.
- [3] G. 't Hooft, *Dimensional reduction in quantum gravity*, *Conf. Proc. C* **930308** (1993) 284 [[gr-qc/9310026](#)].
- [4] L. Susskind, *The World as a hologram*, *J. Math. Phys.* **36** (1995) 6377 [[hep-th/9409089](#)].
- [5] J.M. Maldacena, *The Large N limit of superconformal field theories and supergravity*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231 [[hep-th/9711200](#)].
- [6] J.S. Bell, *On the einstein podolsky rosen paradox*, *Physics Physique Fizika* **1** (1964) 195.
- [7] J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony and R.A. Holt, *Proposed experiment to test local hidden-variable theories*, *Physical Review Letters* **23** (1969) 880.
- [8] A. Aspect, J. Dalibard and G. Roger, *Experimental test of bell's inequalities using time-varying analyzers*, *Physical Review Letters* **49** (1982) 1804.
- [9] S. Ryu and T. Takayanagi, *Holographic derivation of entanglement*

- entropy from AdS/CFT*, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 181602 [[hep-th/0603001](#)].
- [10] K. Fujiki, H. Kanda, M. Kohara and T. Takayanagi, *Brane cosmology from AdS/BCFT*, *JHEP* **03** (2025) 135 [[2501.05036](#)].
- [11] K. Fujiki, M. Kohara, K. Shinmyo, Y.-k. Suzuki and T. Takayanagi, *Entropic interpretation of Einstein equation in dS/CFT*, *JHEP* **04** (2026) 072 [[2511.07915](#)].
- [12] E. Witten, *Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 505 [[hep-th/9803131](#)].
- [13] D. Harlow, *Jerusalem Lectures on Black Holes and Quantum Information*, *Rev. Mod. Phys.* **88** (2016) 015002 [[1409.1231](#)].
- [14] G.W. Gibbons and S.W. Hawking, *Action integrals and partition functions in quantum gravity*, *Phys. Rev. D* **15** (1977) 2752.
- [15] S.W. Hawking and D.N. Page, *Thermodynamics of black holes in anti-de sitter space*, *Commun. Math. Phys.* **87** (1983) 577.
- [16] S.W. Hawking, *Black holes and thermodynamics*, *Phys. Rev. D* **13** (1976) 191.
- [17] M. Banados, C. Teitelboim and J. Zanelli, *The Black hole in three-dimensional space-time*, *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 1849 [[hep-th/9204099](#)].
- [18] V.E. Hubeny, D. Marolf and M. Rangamani, *Hawking radiation from AdS black holes*, *Class. Quant. Grav.* **27** (2010) 095018 [[0911.4144](#)].
- [19] P.H. Ginsparg, *APPLIED CONFORMAL FIELD THEORY*, in *Les Houches Summer School in Theoretical Physics: Fields, Strings, Critical Phenomena*, 9, 1988 [[hep-th/9108028](#)].

- [20] P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*, Graduate Texts in Contemporary Physics, Springer, New York, NY (1997), [10.1007/978-1-4612-2256-9](#).
- [21] 中山優, 高次元共形場理論への招待 — 3次元臨界 *Ising* 模型を解く, サイエンス社, 東京 (2019).
- [22] F.A. Smirnov and A.B. Zamolodchikov, *On space of integrable quantum field theories*, *Nucl. Phys. B* **915** (2017) 363 [[1608.05499](#)].
- [23] A. Cavaglià, S. Negro, I.M. Szécsényi and R. Tateo, *$T\bar{T}$ -deformed 2D Quantum Field Theories*, *JHEP* **10** (2016) 112 [[1608.05534](#)].
- [24] Y. Jiang, *A pedagogical review on solvable irrelevant deformations of 2d quantum field theory*, *Communications in Theoretical Physics* **73** (2021) [057201](#).
- [25] M. Guica and R. Monten, *$T\bar{T}$ and the mirage of a bulk cutoff*, *SciPost Phys.* **10** (2021) 024 [[1906.11251](#)].
- [26] M. Guica, “ $T\bar{T}$ deformations and holography.” Lecture notes, CERN Winter School on Supergravity, Strings and Gauge Theory 2020, 2020.
- [27] T. Nishioka, *Entanglement entropy: holography and renormalization group*, *Rev. Mod. Phys.* **90** (2018) 035007 [[1801.10352](#)].
- [28] A.B. Zamolodchikov, *Irreversibility of the Flux of the Renormalization Group in a 2D Field Theory*, *JETP Lett.* **43** (1986) 730.
- [29] H. Casini and M. Huerta, *A c-theorem for the entanglement entropy*, *J. Phys. A* **40** (2007) 7031 [[cond-mat/0610375](#)].
- [30] S.S. Gubser, I.R. Klebanov and A.M. Polyakov, *Gauge theory correlators from noncritical string theory*, *Phys. Lett. B* **428** (1998) 105 [[hep-th/9802109](#)].

- [31] E. Witten, *Anti de Sitter space and holography*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 253 [[hep-th/9802150](#)].
- [32] 高柳匡, ホログラフィー原理と量子エンタングルメント, vol. 106 of *SGC ライブラリ*, サイエンス社 (2014).
- [33] M. Ammon and J. Erdmenger, *Gauge/Gravity Duality: Foundations and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge (2015), [10.1017/CBO9781139942496](#).
- [34] I.R. Klebanov, *World volume approach to absorption by nondilatonic branes*, *Nucl. Phys. B* **496** (1997) 231 [[hep-th/9702076](#)].
- [35] O. Aharony, S.S. Gubser, J.M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, *Large N field theories, string theory and gravity*, *Phys. Rept.* **323** (2000) 183 [[hep-th/9905111](#)].
- [36] I.R. Klebanov and E. Witten, *AdS / CFT correspondence and symmetry breaking*, *Nucl. Phys. B* **556** (1999) 89 [[hep-th/9905104](#)].
- [37] P. Breitenlohner and D.Z. Freedman, *Stability in Gauged Extended Supergravity*, *Annals Phys.* **144** (1982) 249.
- [38] P. Breitenlohner and D.Z. Freedman, *Positive Energy in Anti-de Sitter Backgrounds and Gauged Extended Supergravity*, *Phys. Lett. B* **115** (1982) 197.
- [39] V. Balasubramanian and P. Kraus, *A Stress tensor for Anti-de Sitter gravity*, *Commun. Math. Phys.* **208** (1999) 413 [[hep-th/9902121](#)].
- [40] S. de Haro, S.N. Solodukhin and K. Skenderis, *Holographic reconstruction of space-time and renormalization in the AdS / CFT correspondence*, *Commun. Math. Phys.* **217** (2001) 595 [[hep-th/0002230](#)].
- [41] M. Henningson and K. Skenderis, *The Holographic Weyl anomaly*, *JHEP* **07** (1998) 023 [[hep-th/9806087](#)].

- [42] C. Fefferman and C.R. Graham, *Conformal invariants*, in *Élie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui*, no. S131 in Astérisque, pp. 95–116, Société Mathématique de France (1985).
- [43] K. Skenderis and S.N. Solodukhin, *Quantum effective action from the AdS / CFT correspondence*, *Phys. Lett. B* **472** (2000) 316 [[hep-th/9910023](#)].
- [44] J.D. Brown and J.W. York, Jr., *Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action*, *Phys. Rev. D* **47** (1993) 1407 [[gr-qc/9209012](#)].
- [45] J.D. Brown and M. Henneaux, *Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity*, *Commun. Math. Phys.* **104** (1986) 207.
- [46] J.M. Maldacena, *Eternal black holes in anti-de Sitter*, *JHEP* **04** (2003) 021 [[hep-th/0106112](#)].
- [47] L. McGough, M. Mezei and H. Verlinde, *Moving the CFT into the bulk with $T\bar{T}$* , *JHEP* **04** (2018) 010 [[1611.03470](#)].
- [48] P. Kraus, J. Liu and D. Marolf, *Cutoff AdS_3 versus the $T\bar{T}$ deformation*, *JHEP* **07** (2018) 027 [[1801.02714](#)].
- [49] D.Z. Freedman, S.S. Gubser, K. Pilch and N.P. Warner, *Renormalization group flows from holography supersymmetry and a c theorem*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **3** (1999) 363 [[hep-th/9904017](#)].
- [50] R.C. Myers and A. Sinha, *Holographic c-theorems in arbitrary dimensions*, *JHEP* **01** (2011) 125 [[1011.5819](#)].
- [51] R.C. Myers and A. Sinha, *Seeing a c-theorem with holography*, *Phys. Rev. D* **82** (2010) 046006 [[1006.1263](#)].
- [52] R.C. Myers and A. Singh, *Comments on Holographic Entanglement Entropy and RG Flows*, *JHEP* **04** (2012) 122 [[1202.2068](#)].

- [53] M. Banados, *Three-dimensional quantum geometry and black holes*, *AIP Conf. Proc.* **484** (1999) 147 [[hep-th/9901148](#)].
- [54] M.M. Roberts, *Time evolution of entanglement entropy from a pulse*, *JHEP* **12** (2012) 027 [[1204.1982](#)].
- [55] T. Shimaji, T. Takayanagi and Z. Wei, *Holographic Quantum Circuits from Splitting/Joining Local Quenches*, *JHEP* **03** (2019) 165 [[1812.01176](#)].
- [56] 石坂 智, 小川 朋宏, 河内 亮周, 木村 元 and 林 正人, *量子情報科学入門*, 共立出版, 東京 (2012).
- [57] M.A. Nielsen and I.L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- [58] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, *Physical Review* **47** (1935) 777.
- [59] C. Holzhey, F. Larsen and F. Wilczek, *Geometric and renormalized entropy in conformal field theory*, *Nucl. Phys. B* **424** (1994) 443 [[hep-th/9403108](#)].
- [60] P. Calabrese and J.L. Cardy, *Entanglement entropy and quantum field theory*, *J. Stat. Mech.* **0406** (2004) P06002 [[hep-th/0405152](#)].
- [61] Y. Nakayama, *Liouville field theory: A Decade after the revolution*, *Int. J. Mod. Phys. A* **19** (2004) 2771 [[hep-th/0402009](#)].
- [62] O. Lunin and S.D. Mathur, *Correlation functions for $M^{*}N / S(N)$ orbifolds*, *Commun. Math. Phys.* **219** (2001) 399 [[hep-th/0006196](#)].
- [63] J. Harper, T. Takayanagi and T. Tsuda, *Multi-entropy at low Renyi index in 2d CFTs*, *SciPost Phys.* **16** (2024) 125 [[2401.04236](#)].
- [64] T. Hartman, *Entanglement Entropy at Large Central Charge*, [1303.6955](#).

- [65] C.T. Asplund, A. Bernamonti, F. Galli and T. Hartman, *Holographic Entanglement Entropy from 2d CFT: Heavy States and Local Quenches*, *JHEP* **02** (2015) 171 [[1410.1392](#)].
- [66] A.L. Fitzpatrick, J. Kaplan and M.T. Walters, *Universality of Long-Distance AdS Physics from the CFT Bootstrap*, *JHEP* **08** (2014) 145 [[1403.6829](#)].
- [67] A.B. Zamolodchikov, *Conformal symmetry in two-dimensional space: Recursion representation of conformal block*, *Theoretical and Mathematical Physics* **73** (1987) 1088.
- [68] A.A. Belavin, A.M. Polyakov and A.B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, *Nuclear Physics B* **241** (1984) 333.
- [69] A. Gadde, V. Krishna and T. Sharma, *Towards a classification of holographic multi-partite entanglement measures*, *JHEP* **08** (2023) 202 [[2304.06082](#)].
- [70] P. Calabrese and J. Cardy, *Entanglement entropy and conformal field theory*, *J. Phys. A* **42** (2009) 504005 [[0905.4013](#)].
- [71] P. Calabrese and J.L. Cardy, *Evolution of entanglement entropy in one-dimensional systems*, *J. Stat. Mech.* **0504** (2005) P04010 [[cond-mat/0503393](#)].
- [72] P. Calabrese and J. Cardy, *Entanglement and correlation functions following a local quench: a conformal field theory approach*, *J. Stat. Mech.* **0710** (2007) P10004 [[0708.3750](#)].
- [73] V.E. Hubeny, M. Rangamani and T. Takayanagi, *A Covariant holographic entanglement entropy proposal*, *JHEP* **07** (2007) 062 [[0705.0016](#)].

- [74] A. Lewkowycz and J. Maldacena, *Generalized gravitational entropy*, *JHEP* **08** (2013) 090 [[1304.4926](#)].
- [75] B. Czech, J.L. Karczmarek, F. Nogueira and M. Van Raamsdonk, *The Gravity Dual of a Density Matrix*, *Class. Quant. Grav.* **29** (2012) 155009 [[1204.1330](#)].
- [76] X. Dong, D. Harlow and A.C. Wall, *Reconstruction of Bulk Operators within the Entanglement Wedge in Gauge-Gravity Duality*, *Phys. Rev. Lett.* **117** (2016) 021601 [[1601.05416](#)].
- [77] M. Headrick, *Entanglement Renyi entropies in holographic theories*, *Phys. Rev. D* **82** (2010) 126010 [[1006.0047](#)].
- [78] S. Ryu and T. Takayanagi, *Aspects of Holographic Entanglement Entropy*, *JHEP* **08** (2006) 045 [[hep-th/0605073](#)].
- [79] T. Hartman and J. Maldacena, *Time Evolution of Entanglement Entropy from Black Hole Interiors*, *JHEP* **05** (2013) 014 [[1303.1080](#)].
- [80] T. Ugajin, *Two dimensional quantum quenches and holography*, [1311.2562](#).
- [81] M. Nozaki, T. Numasawa and T. Takayanagi, *Holographic Local Quenches and Entanglement Density*, *JHEP* **05** (2013) 080 [[1302.5703](#)].
- [82] G.T. Horowitz and N. Itzhaki, *Black holes, shock waves, and causality in the AdS / CFT correspondence*, *JHEP* **02** (1999) 010 [[hep-th/9901012](#)].
- [83] T. Takayanagi and K. Umemoto, *Entanglement of purification through holographic duality*, *Nature Phys.* **14** (2018) 573 [[1708.09393](#)].
- [84] S. Dutta and T. Faulkner, *A canonical purification for the entanglement wedge cross-section*, *JHEP* **03** (2021) 178 [[1905.00577](#)].
- [85] C. Akers and P. Rath, *Entanglement Wedge Cross Sections Require Tripartite Entanglement*, *JHEP* **04** (2020) 208 [[1911.07852](#)].

- [86] P. Hayden, O. Parrikar and J. Sorce, *The Markov gap for geometric reflected entropy*, *JHEP* **10** (2021) 047 [[2107.00009](#)].
- [87] N. Iizuka and M. Nishida, *Genuine multientropy and holography*, *Phys. Rev. D* **112** (2025) 026011 [[2502.07995](#)].
- [88] D.M. Greenberger, M.A. Horne and A. Zeilinger, *Going Beyond Bell's Theorem*, *Fundam. Theor. Phys.* **37** (1989) 69 [[0712.0921](#)].
- [89] W. Dur, G. Vidal and J.I. Cirac, *Three qubits can be entangled in two inequivalent ways*, *Phys. Rev. A* **62** (2000) 062314 [[quant-ph/0005115](#)].
- [90] M. Ma, Y. Li and J. Shang, *Multipartite entanglement measures: A review*, *Fund. Res.* **5** (2025) 2489 [[2309.09459](#)].
- [91] J.K. Basak, V. Malvimat and J. Yoon, *A New Genuine Multipartite Entanglement Measure: from Qubits to Multiboundary Wormholes*, [2411.11961](#).
- [92] P. Horodecki, A. Rudnicki and K. Życzkowski, *Multipartite entanglement*, [2409.04566](#).
- [93] P. Hayden, M. Headrick and A. Maloney, *Holographic Mutual Information is Monogamous*, *Phys. Rev. D* **87** (2013) 046003 [[1107.2940](#)].
- [94] A. Gadde, V. Krishna and T. Sharma, *New multipartite entanglement measure and its holographic dual*, *Phys. Rev. D* **106** (2022) 126001 [[2206.09723](#)].
- [95] G. Penington, M. Walter and F. Witteveen, *Fun with replicas: tripartitions in tensor networks and gravity*, *JHEP* **05** (2023) 008 [[2211.16045](#)].
- [96] N. Iizuka, S. Lin and M. Nishida, *More on genuine multientropy and holography*, *Phys. Rev. D* **112** (2025) 066014 [[2504.16589](#)].

- [97] N. Iizuka, A. Miyata and M. Nishida, *Multipartite Markov gaps and entanglement wedge multiway cuts*, *JHEP* **10** (2025) 148 [[2507.15262](#)].
- [98] B. Liu, J. Zhang, S. Ohyama, Y. Kusuki and S. Ryu, *Multiwavefunction overlap and multientropy for topological ground states in $(2+1)$ dimensions*, *Phys. Rev. B* **112** (2025) 125160 [[2410.08284](#)].
- [99] K. Fujiki and K. Tasuki, *Saddle Incompatibility Generates Genuine Multientropy in Heavy Local Quenches*, [2606.12526](#).
- [100] T. Anegawa, S. Suzuki and K. Tamaoka, *Black hole as a multipartite entangler: multi-entropy in AdS_3/CFT_2* , [2512.21037](#).
- [101] K. Fujiki, J. Harper, T. Takayanagi and N. Zenoni, *The Entanglement Wedge Polygon*, [2606.21081](#).
- [102] J.L. Cardy, *Conformal Invariance and Surface Critical Behavior*, *Nucl. Phys. B* **240** (1984) 514.
- [103] J.L. Cardy, *Boundary Conditions, Fusion Rules and the Verlinde Formula*, *Nucl. Phys. B* **324** (1989) 581.
- [104] D.M. McAvity and H. Osborn, *Energy Momentum Tensor in Conformal Field Theories Near a Boundary*, *Nucl. Phys. B* **406** (1993) 655 [[hep-th/9302068](#)].
- [105] D.M. McAvity and H. Osborn, *Conformal Field Theories Near a Boundary in General Dimensions*, *Nucl. Phys. B* **455** (1995) 522 [[cond-mat/9505127](#)].
- [106] A. Recknagel and V. Schomerus, *Boundary Conformal Field Theory and the Worldsheet Approach to D-Branes*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press (2013), [10.1017/CBO9781139048774](#).
- [107] C. Northe, *Young Researchers School 2024 Maynooth: lectures on CFT, BCFT and DCFT*, *J. Phys. A* **58** (2025) 103001 [[2411.03381](#)].

- [108] N. Ishibashi, *The Boundary and Crosscap States in Conformal Field Theories*, *Mod. Phys. Lett. A* **4** (1989) 251.
- [109] T. Onogi and N. Ishibashi, *Conformal Field Theories on Surfaces With Boundaries and Crosscaps*, *Mod. Phys. Lett. A* **4** (1989) 161.
- [110] I. Affleck and A.W.W. Ludwig, *Universal noninteger 'ground state degeneracy' in critical quantum systems*, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 161.
- [111] J.L. Cardy, *Boundary conformal field theory*, [hep-th/0411189](#).
- [112] T. Takayanagi, *Holographic Dual of BCFT*, *Phys. Rev. Lett.* **107** (2011) 101602 [[1105.5165](#)].
- [113] M. Fujita, T. Takayanagi and E. Tonni, *Aspects of AdS/BCFT*, *JHEP* **11** (2011) 043 [[1108.5152](#)].
- [114] J. Harper, H. Kanda, T. Takayanagi and K. Tasuki, *g Theorem from Strong Subadditivity*, *Phys. Rev. Lett.* **133** (2024) 031501 [[2403.19934](#)].
- [115] M. Spradlin, A. Strominger and A. Volovich, *Les Houches lectures on de Sitter space*, in *Les Houches Summer School: Session 76: Euro Summer School on Unity of Fundamental Physics: Gravity, Gauge Theory and Strings*, pp. 423–453, 10, 2001 [[hep-th/0110007](#)].
- [116] D.A. Galante, *Modave lectures on de Sitter space & holography*, *PoS Modave2022* (2023) 003 [[2306.10141](#)].
- [117] D. Anninos, *De Sitter Musings*, *Int. J. Mod. Phys. A* **27** (2012) 1230013 [[1205.3855](#)].
- [118] G.W. Gibbons and S.W. Hawking, *Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation*, *Phys. Rev. D* **15** (1977) 2738.
- [119] H. Nariai, *On some static solutions of einstein's gravitational field equations in a spherically symmetric case*, *Science Reports of the Tohoku University, First Series* **34** (1950) 160.

- [120] T.S. Bunch and P.C.W. Davies, *Quantum field theory in de sitter space: Renormalization by point-splitting*, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A* **360** (1978) 117.
- [121] B. Allen, *Vacuum states in de sitter space*, *Physical Review D* **32** (1985) 3136.
- [122] N.D. Birrell and P.C.W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, Cambridge (1982).
- [123] J.B. Hartle and S.W. Hawking, *Wave Function of the Universe*, *Phys. Rev. D* **28** (1983) 2960.
- [124] A. Strominger, *The dS / CFT correspondence*, *JHEP* **10** (2001) 034 [[hep-th/0106113](#)].
- [125] L. Susskind, *De Sitter Holography: Fluctuations, Anomalous Symmetry, and Wormholes*, *Universe* **7** (2021) 464 [[2106.03964](#)].
- [126] K. Doi, J. Harper, A. Mollabashi, T. Takayanagi and Y. Taki, *Pseudoentropy in dS/CFT and Timelike Entanglement Entropy*, *Phys. Rev. Lett.* **130** (2023) 031601 [[2210.09457](#)].
- [127] K. Doi, J. Harper, A. Mollabashi, T. Takayanagi and Y. Taki, *Timelike entanglement entropy*, *JHEP* **05** (2023) 052 [[2302.11695](#)].
- [128] Y. Nakata, T. Takayanagi, Y. Taki, K. Tamaoka and Z. Wei, *New holographic generalization of entanglement entropy*, *Phys. Rev. D* **103** (2021) 026005 [[2005.13801](#)].
- [129] E. Shaghoulian and L. Susskind, *Entanglement in De Sitter space*, *JHEP* **08** (2022) 198 [[2201.03603](#)].
- [130] R. Bousso, *A Covariant entropy conjecture*, *JHEP* **07** (1999) 004 [[hep-th/9905177](#)].

- [131] H. Kanda, M. Sato, Y.-k. Suzuki, T. Takayanagi and Z. Wei, *AdS/BCFT with brane-localized scalar field*, *JHEP* **03** (2023) 105 [[2302.03895](#)].
- [132] M.P. Heller, F. Ori and A. Serantes, *Geometric Interpretation of Timelike Entanglement Entropy*, *Phys. Rev. Lett.* **134** (2025) 131601 [[2408.15752](#)].
- [133] L. Randall and R. Sundrum, *A Large mass hierarchy from a small extra dimension*, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 3370 [[hep-ph/9905221](#)].
- [134] L. Randall and R. Sundrum, *An Alternative to compactification*, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 4690 [[hep-th/9906064](#)].
- [135] A. Karch and L. Randall, *Locally localized gravity*, *JHEP* **05** (2001) 008 [[hep-th/0011156](#)].
- [136] S.S. Gubser, *AdS / CFT and gravity*, *Phys. Rev. D* **63** (2001) 084017 [[hep-th/9912001](#)].
- [137] S.B. Giddings, E. Katz and L. Randall, *Linearized gravity in brane backgrounds*, *JHEP* **03** (2000) 023 [[hep-th/0002091](#)].
- [138] M. Van Raamsdonk, *Lectures on gravity and entanglement*, in *Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: New Frontiers in Fields and Strings*, pp. 297–351, 2017 [[1609.00026](#)].
- [139] N. Lashkari, M.B. McDermott and M. Van Raamsdonk, *Gravitational dynamics from entanglement 'thermodynamics'*, *JHEP* **04** (2014) 195 [[1308.3716](#)].
- [140] T. Faulkner, M. Guica, T. Hartman, R.C. Myers and M. Van Raamsdonk, *Gravitation from Entanglement in Holographic CFTs*, *JHEP* **03** (2014) 051 [[1312.7856](#)].
- [141] M. Nozaki, T. Numasawa, A. Prudenziati and T. Takayanagi, *Dynamics of Entanglement Entropy from Einstein Equation*, *Phys. Rev. D* **88** (2013) 026012 [[1304.7100](#)].

- [142] M. Van Raamsdonk, *Building up spacetime with quantum entanglement*, *Gen. Rel. Grav.* **42** (2010) 2323 [[1005.3035](#)].
- [143] B. Swingle, *Entanglement Renormalization and Holography*, *Phys. Rev. D* **86** (2012) 065007 [[0905.1317](#)].
- [144] D.D. Blanco, H. Casini, L.-Y. Hung and R.C. Myers, *Relative Entropy and Holography*, *JHEP* **08** (2013) 060 [[1305.3182](#)].
- [145] H. Casini, M. Huerta and R.C. Myers, *Towards a derivation of holographic entanglement entropy*, *JHEP* **05** (2011) 036 [[1102.0440](#)].
- [146] S. Cooper, D. Neuenfeld, M. Rozali and D. Wakeham, *Brane dynamics from the first law of entanglement*, *JHEP* **03** (2020) 023 [[1912.05746](#)].