素粒子論研究・電子版 Vol. 47 (2026) No. 2

一般化対称性の破れた相における分配関数のふるまいについて

京都大学大学院　理学研究科
物理学・宇宙物理学専攻　素粒子論研究室

前田　潤

目次

1 **イントロダクション** 4

1.1 イントロダクション 4
1.2 対称性演算子 6
1.3 一般化対称性 12

2 **ゲージ場** 15

2.1 対称性演算子のネットワーク 15
2.2 離散ゲージ場 17
2.3 $U(1)$ ゲージ場 17
2.4 $\mathbb{Z}_N$ ゲージ場 19

3 **高次形式対称性** 21

3.1 遮蔽 21
3.2 電気的 1-形式対称性 22
3.3 磁気的 $(d-3)$-形式対称性 27
3.4 ソリトン的対称性 29

4 **アノマリー** 33

4.1 't Hooft アノマリー 33
4.2 アノマリー流入 33
4.3 各次元のアノマリー 35
4.4 場の理論における具体例 39
4.5 Dijkgraaf-Witten 理論 43
4.6 円周上の量子力学 45
4.7 ゲージ理論 51

5 **ゲージ化** 54

5.1 ゲージ化 54
5.2 $U(1)$ Maxwell 理論 56
5.3 G ゲージ理論 57
5.4 混合アノマリーがある場合のゲージ化 58

6 **非可逆対称性** 63

6.1 フュージョン圏 63
6.2 双対欠陥 70
6.3 トポロジカルインターフェース 72
6.4 二次元コンパクトボソン 73
6.5 カイラル対称性 77

6.6 混合アノマリーがある場合のゲージ化 80

7 SymTFT 82
7.1 SymTFT 82
7.2 $\mathcal{C}$ 対称性 83
7.3 $\mathbb{Z}_N$ 対称性 84
7.4 SPT がある場合 87
7.5 TY($\mathbb{Z}_N$) 対称性の SymTFT 88
7.6 連続対称性 90

8 **自発的対称性の破れと分配関数** 92
8.1 自発的対称性の破れ 92
8.2 SSB と SPT 94
8.3 連続対称性 100
8.4 混合アノマリーと背景ゲージ場付きの分配関数 103

9 **まとめと今後の展望** 106

付録 A 幾何学 108
A.1 微分形式 108
A.2 de Rham コホモロジー 109
A.3 デルタ関数形式とリンク数 109

付録 B 代数トポロジー 111
B.1 基本的事項 111
B.2 単体的複体 113
B.3 Čech 複体 115
B.4 Bockstein 写像 115
B.5 ホモトピー群 116
B.6 分類空間 117

付録 C 群コホモロジー 118
C.1 群コホモロジーの定義 118
C.2 2 次の群コホモロジーと群の拡大 118
C.3 群コホモロジーとゲージ場 120
C.4 具体例 120

付録 D 圏論 123
D.1 基本事項 123
D.2 モジュラーテンソル圏と三次元 TQFT 123

概要

理論の相構造を解析する際に重要となる概念として対称性がある．例えば，対称性の自発的破れ (SSB) のパターンを調べることで多くの相を分類することができることが知られている．しかし，SSB パターンだけでは相が区別できない例として，対称性に保護されたトポロジカル相 (SPT 相) と呼ばれる相が発見された．SPT 相は対称性を壊すような摂動を加えると自明な相に連続的に移ることができるが，対称性を保つような摂動では自明な相に連続的に移れないような相である．SSB パターンと SPT 相を調べることで，与えられた対称性を持つ理論のギャップを持つ相の分類が可能となった．

通常，SSB は秩序変数の期待値によって調べられ，SPT は境界付きの多様体上で理論を考えた時の対称性演算子の境界への作用の仕方によって調べられる．このような SSB と SPT を同時に調べることのできる量として背景ゲージ場付きの分配関数がある．背景ゲージ場付きの分配関数は，離散対称性の SSB 相ではデルタ関数のように振る舞い，SPT 相では可逆な場の理論の分配関数によって表されることが知られている．一般のギャップを持つ相は部分群への SSB と SPT 相が混じった相になるが，その場合の背景ゲージ場付きの分配関数はこれらの積によって表される．

また，近年対称性の概念が大幅に拡張され，従来では対称性として捉えられなかったものに対しても対称性として考えることができるようになった．このような拡張された対称性を一般化対称性という．一般化対称性に対しても SSB や SPT などを考えることで，従来の対称性では調べられなかったさまざまな理論の相構造が調べられるようになった．

本修士論文の大部分はこの一般化対称性に関するレビューである．一般化対称性は主に高次形式対称性と非可逆対称性と呼ばれるものに分けられる．本論文ではこれらを理解する上で重要となるゲージ場やアノマリーなどの概念を説明し，これらの対称性を具体例を多く示しながら説明している．また近年発展してきている SymTFT と呼ばれる概念についてもレビューを行った．一般化対称性は物理では馴染みの薄い様々な数学の概念を用いるが，それらについても付録などで説明を行っている．

本修士論文の研究パートである 8 章では，一般化対称性のうち特に可逆な離散対称性の場合において，背景ゲージ場付きの分配関数が従来の対称性の場合と同様に振る舞うことを様々な観点から示した．また，連続対称性の SSB の場合は南部-Goldstone 粒子が生じギャップが閉じるため，離散対称性の場合とは異なるふるまいを示すと考えられるが，我々は $U(1)$ 対称性の SSB 相の低エネルギー有効理論において背景ゲージ場付きの分配関数を具体的に計算し，離散対称性の場合とどのような違いが現れるかについて調べた．その結果，SSB 相で創発するソリトン的対称性と元の対称性の間の混合アノマリーに着目することで，離散対称性の場合と連続対称性の場合の分配関数のふるまいが説明できることが判明した．

1 イントロダクション

1.1 イントロダクション

対称性は古くから物理系を解析する上で重要な道具の一つであったが，近年この対称性の概念が [1] によって大幅に拡張された．このような拡張された対称性を一般化対称性といい，素粒子論や原子核理論，凝縮系理論などの様々な分野で用いられ発展してきた．一般化対称性を一言で特徴づけるとトポロジカルな演算子がなす代数構造である．この演算子のトポロジカル性によって相関関数やエネルギースペクトルに制限がかけられる．対称性の拡張の仕方は大きく分けて二つあり，一つは対称性演算子の余次元を高くする方法である．この方法で拡張された一般化対称性を高次形式対称性といい[*1]，ゲージ理論などでよく現れる．もう一つの拡張は対称性演算子の合成に関する拡張である．拡張された合成は群の規則を満たさずその代数構造はフュージョン圏と呼ばれるもので記述される [2]．このような一般化対称性は逆演算子を持たない対称性演算子を含むため非可逆対称性と呼ばれる．非可逆対称性は二次元共形場理論の文脈では古くから知られていたが，近年では四次元の $U(1)$ Maxwell 理論 [3] や量子電磁力学 [4, 5] のような身近な例においても発見された．

一般化対称性を理解する上で重要な概念の一つとして背景ゲージ場がある．従来の対称性に対しても，理論が連続対称性を持つ場合は背景ゲージ場と理論を結合させることができたが，一般化対称性の発展とともに離散対称性や高次形式対称性に対する背景ゲージ場の概念も整備されてきた．理論が背景ゲージ場と結合しているとき，様々な配位の背景ゲージ場に関して分配関数を足し合わせることで対称性のゲージ化という操作が定義できる．特に離散対称性の場合のゲージ化は理論にトポロジカルな場の理論 (TQFT) を結合させていると考えることができる．TQFT は有限自由度しかないため，無限自由度である場の理論と結合させてもあまり変わらないように思えるが，実は様々な興味深い現象が起こることが知られている [6]．特に，双対欠陥と呼ばれるタイプの非可逆対称性はゲージ化の操作が非可逆性に重要な役割を果たす [7, 8].

また，理論に背景ゲージ場を結合させたときに分配関数がゲージ不変にならない場合がある．この変化分が c-数で書けるとき，'t Hooft アノマリーがあるという．'t Hooft アノマリーは繰り込み群不変量であるため，高エネルギー (UV) の理論がアノマリーを持つならば低エネルギー (IR) の理論も同じアノマリーを持たなければならない [9]．これをアノマリー整合条件という．これによる重要な帰結としては UV の理論がアノマリーを持つとき，IR では自明なギャップを持つ相が許されない[*2]．つまり，IR では基底状態が縮退するか，もしくはギャップが閉じている必要がある．この事実は強結合の理論の相構造を調べる上で強力な道具となる．

アノマリーを理解する上で重要なのがアノマリー流入という概念である [10]．これは d 次元のアノマリーが $(d+1)$ 次元の可逆な場の理論 (IFT) の境界として得られるというものである．IFT とは Hilbert 空間の次元が一次元の TQFT のことである．$d \leq 3$ のとき，$(d+1)$ 次元の可逆な離散対称性 G を持つ IFT は群コホモロジー $H^{d+1}(G;U(1))$ で分類されることが知られているため，d 次元の G 対称性のアノマリーも $H^{d+1}(G;U(1))$ で分類される [11]．アノマリー流入の考え方を推し進めると，SymTFT という概念が得られる [12, 13, 14, 15, 16]．これは d 次元の理論のアノマリーだけでなく，対称性の構造そのものが $(d+1)$ 次元の TQFT によって記述されるという考え方である．SymTFT の有効な点は理論のダイナミクスに依らずに対称性の構造だけを抜き出して議論できる点である．SymTFT を用いるとゲージ化などのトポロジカルな操

[*1] 複数の次数の高次形式対称性が組み合わさったものとして高次群対称性と呼ばれるものもある．
[*2] 自明なギャップを持つ相ではアノマリーを持てないため．

作が一つ高い次元の TQFT のトポロジカルな境界条件の取り換えとして理解できる．

対称性の実際の物理系への応用としては相の分類がある．従来の対称性の場合，自発的対称性の破れ (SSB) のパターンが異なるならば，異なる相であるということが知られている [17]．この SSB パターンによる相の分類は完全ではなく，対称性は破れていないが自明な相とは相転移で隔てられるような相が発見された [18]．このような相は対称性を破るような摂動項を加えると自明な相に連続的に移れるが，対称性を保った摂動では自明な相に移れないという性質を持っており，対称性に保護されたトポロジカル相 (SPT 相) と呼ばれる [19]．従来の離散対称性 G を持つ理論のギャップを持つ相は，破れずに残る部分群対称性 H と H-SPT によって分類される．

このような対称性を用いたギャップを持つ相の分類は一般化対称性に対しても適用することができる．一つの例としては四次元の $SU(N)$ Yang-Mills 理論のギャップを持つ相の分類 [20] がある．3.2.6 で述べるように四次元 $SU(N)$ Yang-Mills 理論には $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性があり[*3]，四次元 $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性には $k \in \mathbb{Z}_N$ でラベルされる SPT 相がある[*4]．したがって，$\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性のギャップを持つ相の分類は，破れずに残る $\mathbb{Z}_n^{(1)}$ 対称性と $\mathbb{Z}_n^{(1)}$-SPT のラベルである $k \in \mathbb{Z}_n$ によって分類される．これは Wilson-'t Hooft 分類 [21, 22, 23] という以前から知られていた結果と一致する [20]．

本研究ではこのような SSB と SPT が混じったような相の振る舞いを調べるための道具として背景ゲージ場付きの分配関数 $Z[A]$ に着目する [20, 24]．ここで A は考えている G 対称性の背景ゲージ場である．離散対称性の場合，$Z[A]$ は SSB 相ではデルタ関数的なふるまいを示し，SPT 相では IFT の分配関数で記述される．したがって，一般の相ではこれらを組み合わせることで $Z[A]$ が記述できる．本研究ではこのような $Z[A]$ の振る舞いを様々な観点から捉えなおした．さらに 連続対称性の SSB の場合の $Z[A]$ を具体的に計算し，離散対称性の場合との振る舞いの違いがアノマリーを用いて理解できることを示した．

本論文の構成について述べる．まず，1 章ではこの後，従来の対称性を復習し対称性演算子の定義について述べる．さらに対称性演算子の性質について説明し，一般化対称性の定義を述べる．次に 2 章では本論文を通して重要となる背景ゲージ場について詳しく説明する．2 章以降の議論では $U(1)$ ゲージ場と $\mathbb{R}$ ゲージ場の違いなど，ゲージ群の大域的な構造が特に重要となるのでその点について解説した．3 章では高次形式対称性について説明する．ゲージ理論における電気的対称性や磁気的対称性を様々な観点から論じた後，8 章で重要となるソリトン的対称性について述べる．4 章ではアノマリーについて説明する．アノマリー流入の概念や，各次元の場の理論におけるアノマリーを具体例とともに述べている．また，アノマリー整合条件を用いて相構造を調べる例として [25, 26] について解説した．5 章では離散対称性のゲージ化について多くの具体例とともに解説している．6 章では非可逆対称性について述べている．まず非可逆対称性の数学的構造であるフュージョン圏について説明し，その後物理でよく現れる例である双対欠陥と呼ばれるタイプの非可逆対称性について解説した．具体例としては二次元のコンパクトボソンにおける非可逆対称性や四次元 QED のカイラル対称性を利用した非可逆対称性について述べた．7 章は SymTFT についての説明である．ここでは数学的な説明については最小限に留め，具体例として $\mathbb{Z}_N$ 対称性を挙げて解説している．また，[27, 28] による $U(1)$ 対称性についても少し説明を加えた．8 章は自身の研究に関する章であり，最初に SSB の定義をレビューした後，背景ゲージ場の分配関数の性質について解説した．また，連続対称性の SSB の場合の背景ゲージ場の振る舞いを具体的に計算し，さらに離散対称性の場合との違いをアノマリーの視点から述べた．9 章はまとめと今後の展望である．

[*3] $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ の肩の (1) は高次形式対称性の次数を表す．
[*4] 多様体はスピン構造を持つと仮定している．

一般化対称性のレビューに関しては [29, 30, 31, 32] などを参考にした．また，本論文では物理では馴染みの薄い様々な数学が登場する．そのため本論文に必要な数学的事項については付録 A,B,C,D で解説してある．

1.2 対称性演算子

1.2.1 Noether の定理と対称性演算子

d 次元の理論 $S[\phi]$ が連続対称性 G を持つとする．このとき，無限小の対称性変換 $\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \varepsilon\delta\phi(x)$, ($\varepsilon$は無限小の定数) に対して作用 $S[\phi]$ は不変である．ε を時空に依存する関数 $\varepsilon(x)$ にすると作用はもはや不変ではないが，その変化分は $\partial_\mu\varepsilon(x)$ にしか依存しない．これは $\varepsilon(x)$ が定数関数のときは作用は不変にならなければならないことから分かる．したがって，作用の変化分は

$$\delta S[\phi] = \int d^d x\, \partial_\mu\varepsilon(x) j^\mu(x) + O(\varepsilon^2) \tag{1.1}$$

のように書くことができる．ただし，$j^\mu(x)$ は $\phi(x)$ や $\partial_\mu\phi(x)$ の関数として表される．ϕ が運動方程式の解となるとき，ϕ の任意の変分に対して作用は不変とならなければならない．つまり，このとき任意の $\varepsilon(x)$ に対して

$$0 = \int d^d x\, \partial_\mu\varepsilon(x) j^\mu(x) = -\int d^d x\, \varepsilon(x) \partial_\mu j^\mu(x) \tag{1.2}$$

が成り立つ．したがって，$\partial_\mu j^\mu(x) = 0$ という電流の保存則が導かれる．

時刻 $t = t_0$ における電荷は，電流の時間成分の空間積分として

$$Q(t_0) = \int_{t_0} d^{d-1} x\, j^0 \tag{1.3}$$

のように書け，電流の保存則から時間不変であることが分かる．また，電荷は無限小の対称性変換を表しており，有限変換を得るには電荷を指数の肩に乗せればよい．

$$U_g(t_0) = \exp\left[i\alpha Q(t_0)\right], \qquad (g = e^{i\alpha}) \tag{1.4}$$

この U_g は対称性演算子と呼ばれ，対称性変換を引き起こす Hilbert 空間上のユニタリ演算子である．具体的には場の演算子 $\hat{\phi}$ に対し

$$\hat{U}_g(t_0)\hat{\phi}(t_0, \boldsymbol{x})\hat{U}_g^\dagger(t_0) = e^{i\alpha}\hat{\phi}(t_0, \boldsymbol{x}) \tag{1.5}$$

のように作用する．経路積分表式では

$$\left\langle U_g(t_0)\phi(t_0, \boldsymbol{x})U_g^\dagger(t_0)\right\rangle = e^{i\alpha}\left\langle\phi(t_0, \boldsymbol{x})\right\rangle \tag{1.6}$$

のように相関関数 (期待値) の意味で場が変換する[*5]．

1.2.2 一般の多様体上の対称性演算子

前節では時刻 t_0 における対称性演算子を定義したが，これは時刻一定面という $(d-1)$ 次元多様体上で定義された演算子として見ることもできる．これを一般の $(d-1)$ 次元閉多様体上の演算子に拡張することを考える．一般の多様体上で対称性演算子を定義するには微分形式を用いると便利である．微分形式を用いると，電流 j^μ は次のような 1-形式として書くことができる．

$$j = j_\mu dx^\mu \tag{1.7}$$

[*5] 以下では主に経路積分形式で議論するため，紛らわしい場合を除き期待値の記号を省略する．

このように書いたとき，電流の保存則は

$$d * j = 0 \tag{1.8}$$

と書ける．ただし，$*$ は Hodge 作用素である．一般の $(d-1)$ 次元閉多様体 $M^{(d-1)}$ 上[*6]の電荷は

$$Q(M^{(d-1)}) = \int_{M^{(d-1)}} *j \tag{1.9}$$

と定義される．$M^{(d-1)}$ を時刻一定面に取ると (1.3) が得られる．また式 (1.3) が時間に依存しないという性質は，式 (1.9) の言葉では $Q(M^{(d-1)})$ がトポロジカルであるという性質で表現することができる．電荷 $Q(M^{(d-1)})$ がトポロジカルであるとは $Q(M^{(d-1)})$ が多様体 $M^{(d-1)}$ の連続変形で不変であるということである．これは次のようにして示すことができる．$M^{(d-1)}$ が $M'^{(d-1)}$ に連続変形するとし，$M^{(d-1)}, M'^{(d-1)}$ で囲まれた領域を $V^{(d)}$ と書く (図 1)．$\partial V^{(d)} = M'^{(d-1)} - M^{(d-1)}$ であることと電流の保存則を用いると

$$\begin{aligned} Q(M'^{(d-1)}) - Q(M^{(d-1)}) &= \int_{M'^{(d-1)} - M^{(d-1)}} *j \\ &= \int_{\partial V^{(d)}} *j \\ &= \int_{V^{(d)}} d * j \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1.10}$$

となり，電荷がトポロジカルであることが示される．また，逆に電荷がトポロジカルであるならば電流が保存することもすぐに分かる．したがって，電荷のトポロジカル性は電流が保存することと等価である．

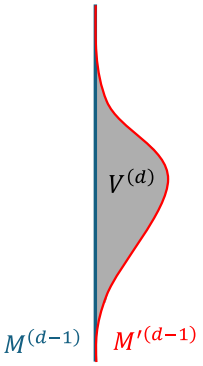


図 1: 多様体の変形

$M^{(d-1)}$ 上の電荷が定義できたので，$M^{(d-1)}$ 上の対称性演算子は

$$U_g(M^{(d-1)}) = \exp\Big[i\alpha Q(M^{(d-1)})\Big], \qquad (g = e^{i\alpha}) \tag{1.11}$$

と定義できる．電荷がトポロジカルなので対称性演算子もトポロジカルである．

一般の多様体上で定義された対称性演算子 U_g の場 ϕ への作用は次のように表される．

$$U_g(M^{(d-1)})\phi(x) = e^{i\alpha}\phi(x) \tag{1.12}$$

これは図 2 のように，対称性演算子が場 ϕ とリンクしていると，それを解く際に場に作用すると解釈できる．また，この描像では式 (1.6) は図 3 のような図で表されるが[*7]，対称性演算子はトポロジカルであるため，こ

[*6] 以下，$M^{(d-1)}$ と書いたときの括弧の中の数字が多様体の次元を表すとする．

[*7] (1.6) の左辺は時間順序積として解釈するべきであることに注意．

れは図 2 と同じことを表していると解釈できる．

また，対称性演算子は変換の合成に関して

$$U_{g_1}(M^{(d-1)})U_{g_2}(M^{(d-1)}) = U_{g_1 g_2}(M^{(d-1)}) \tag{1.13}$$

を満たす．これをフュージョン則という．

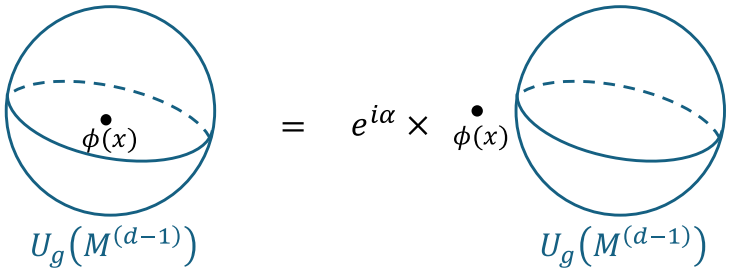


図 2: 対称性演算子の作用

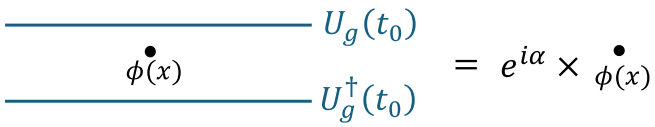


図 3: ユニタリ演算子としての対称性演算子

1.2.3 対称性演算子の別の定義

前節では一般の多様体上で対称性演算子を定義したが，その定義には電流を用いていたため連続対称性にしか適用できない．本節では，離散対称性に対しても適用可能な対称性演算子の定義を述べ，トポロジカル性やフュージョン則などの性質がどのように導かれるかを見る[*8]．本節の内容は今後の議論には関わらないため，読者は飛ばしてもよい．

対称性 G を持つ理論 $S[\phi] = \int d^d x\, \mathcal{L}(\phi)$ を考える．ここで G は離散でも連続でもよい．対称性変換を $\phi(x) \to g\phi(x)$, $(g \in G)$ と書くと，この変換に対して作用は不変なので，Lagrangian 密度 $\mathcal{L}$ は全微分だけ変換する．つまり，適当な $(d-1)$ 形式 $s(\phi, g)$ を用いて

$$\mathcal{L}(g\phi)\, d^d x = \mathcal{L}(\phi)\, d^d x + ds(\phi, g) \tag{1.14}$$

と書ける．

$M^{(d-1)}$ によって時空が $X_{\mathrm{L}}, X_{\mathrm{R}}$ に分けられているとき[*9]，$M^{(d-1)}$ 上の対称性演算子は次の二つのステップで構成される．

1. 場 ϕ を図 4 のように X_{L} 上の場 ϕ_{L} と X_{R} 上の場 ϕ_{R} に分ける[*10]．

[*8] 本節の内容は 2023 年 11 月に基礎物理学研究所で行われた大森氏による集中講義 [33] を基にしている．

[*9] $M^{(d-1)}$ によって時空が二つの領域に分けられていないときでも対称性演算子は構成可能だが，ここでは簡単のためにそのような仮定を置く．

[*10] このように場を二つの領域上の場に分けるには場の理論の局所性が必要である．

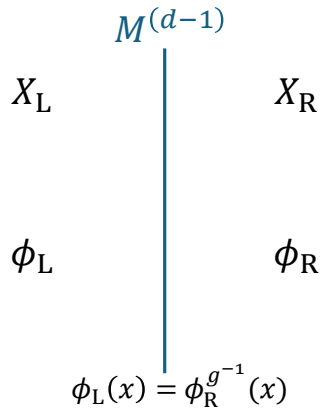


図 4: 対称性演算子の構成

2. 二つの場 $\phi_{\mathrm{L}}, \phi_{\mathrm{R}}$ を $M^{(d-1)}$ 上で接続条件 $\phi_{\mathrm{L}}(x) = g^{-1}\phi_{\mathrm{R}}(x)$ によって接続する．

具体的に式で書くと次のようになる．

$$\left\langle U_g(M^{(d-1)}) \right\rangle = \int \mathcal{D}\phi_{\mathrm{L}} \mathcal{D}\phi_{\mathrm{R}} \left(\prod_{x \in M^{(d-1)}} \delta(\phi_{\mathrm{L}}(x) - g^{-1}\phi_{\mathrm{R}}(x)) \right) e^{iS_{\mathrm{L}}[\phi_{\mathrm{L}}] + iS_{\mathrm{R}}[\phi_{\mathrm{R}}] + i\int_{M^{(d-1)}} s(g^{-1}\phi_{\mathrm{R}}, g)} \tag{1.15}$$

ここで $S_{\mathrm{L}}, S_{\mathrm{R}}$ はそれぞれ $X_{\mathrm{L}}, X_{\mathrm{R}}$ 上の作用である．指数の肩の最後の $M^{(d-1)}$ 上の積分は，トポロジカル性などの対称性演算子が満たすべき性質を満たすために必要な項である．デルタ関数の部分は $M^{(d-1)}$ 上の $(d-1)$-形式 λ を用いて次のように書ける．

$$\prod_{x \in M^{(d-1)}} \delta(\phi_{\mathrm{L}}(x) - g^{-1}\phi_{\mathrm{R}}(x)) = \int \mathcal{D}\lambda \, \exp\left[i \int_{M^{(d-1)}} \lambda(\phi_{\mathrm{L}}(x) - g^{-1}\phi_{\mathrm{R}}(x)) \right] \tag{1.16}$$

λ は接続条件を課すための Lagrange 未定乗数と思ってもよい[*11]．したがって，式 (1.15) は次のように書き直すことができる．

$$\left\langle U_g(M^{(d-1)}) \right\rangle = \int \mathcal{D}\phi_{\mathrm{L}} \mathcal{D}\phi_{\mathrm{R}} \mathcal{D}\lambda \, e^{iS_{\mathrm{L}}[\phi_{\mathrm{L}}] + iS_{\mathrm{R}}[\phi_{\mathrm{R}}] + iW[\phi_{\mathrm{L}}, \phi_{\mathrm{R}}, \lambda, g; M^{(d-1)}]} \tag{1.17}$$

ただし，W は $M^{(d-1)}$ 上の作用で

$$W[\phi_{\mathrm{L}}, \phi_{\mathrm{R}}, \lambda, g; M^{(d-1)}] = \int_{M^{(d-1)}} \left[\lambda(\phi_{\mathrm{L}} - g^{-1}\phi_{\mathrm{R}}) + s(g^{-1}\phi_{\mathrm{R}}, g) \right] \tag{1.18}$$

である．

このようにして定義された対称性演算子に対してトポロジカル性，場 ϕ への作用，フュージョン則を見ていく．そのためにはまず $s(\phi, g)$ が変換の合成に対してどのようにふるまうかを調べる必要がある．変換

[*11] デルタ関数の Fourier 表示の一般化とも言える．

$\phi \to g_1 g_2 \phi$ は $\phi \to g_2\phi$ と $g_2\phi \to (g_1 g_2)\phi$ の合成とみなせるので

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(g_1 g_2 \phi)\, d^d x &= \mathcal{L}(\phi)\, d^d x + ds(\phi, g_1 g_2) \\ \mathcal{L}(g_1 g_2 \phi)\, d^d x &= \mathcal{L}(g_2\phi)\, d^d x + ds(g_2\phi, g_1) \\ &= \mathcal{L}(\phi)\, d^d x + ds(\phi, g_2) + ds(g_2\phi, g_1)\end{aligned} \tag{1.19}$$

が成り立つ．したがって，適当な $(d-2)$-形式 $s^{(1)}(\phi, g_1, g_2)$ を用いて

$$s(g_2\phi, g_1) + s(\phi, g_2) = s(\phi, g_1 g_2) + ds^{(1)}(\phi, g_1, g_2) \tag{1.20}$$

と書ける．

まずトポロジカル性を示す．そのためには図 5 の等式を示せばよい．$M^{(d-1)}, M'^{(d-1)}$ によって時空が $X_{\mathrm{L}}, X_{\mathrm{M}}, X_{\mathrm{R}}$ に分けられているとし，それぞれの上に住む場を $\phi_{\mathrm{L}}, \phi_{\mathrm{M}}, \phi_{\mathrm{R}}$ とする．図 5 の左辺は

$$\int \mathcal{D}\phi_{\mathrm{L}} \mathcal{D}\phi_{\mathrm{M}} \mathcal{D}\phi_{\mathrm{R}} \mathcal{D}\lambda_1 \mathcal{D}\lambda_2\, e^{iS_{\mathrm{L}}[\phi_{\mathrm{L}}] + iS_{\mathrm{M}}[\phi_{\mathrm{M}}] + iS_{\mathrm{R}}[\phi_{\mathrm{R}}] + iW[\phi_{\mathrm{L}}, \phi_{\mathrm{M}}, \lambda_1, g; M^{(d-1)}] + iW[\phi_{\mathrm{M}}, \phi_{\mathrm{R}}, \lambda_2, 1_G; M'^{(d-1)}]} \tag{1.21}$$

と書ける．$\tilde{\phi}_{\mathrm{M}}(x) = g^{-1}\phi_{\mathrm{M}}(x)$ という変数変換を行うと $S_{\mathrm{M}}[\phi_{\mathrm{M}}]$ は

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{M}}[\phi_{\mathrm{M}}] &= S_{\mathrm{M}}[g\tilde{\phi}_{\mathrm{M}}] \\ &= \int_{X_{\mathrm{M}}} \Big(d^d x\, \mathcal{L} + ds(\tilde{\phi}_{\mathrm{M}}, g) \Big) \\ &= S_{\mathrm{M}}[\tilde{\phi}_{\mathrm{M}}] + \int_{M'^{(d-1)}} s(\tilde{\phi}_{\mathrm{M}}, g) - \int_{M^{(d-1)}} s(\tilde{\phi}_{\mathrm{M}}, g)\end{aligned} \tag{1.22}$$

となる．また，W についての項は

$$\begin{aligned}W[\phi_{\mathrm{L}}, \phi_{\mathrm{M}}, \lambda_1, g; M^{(d-1)}] &= \int_{M^{(d-1)}} [\lambda_1(\phi_{\mathrm{L}} - \tilde{\phi}_{\mathrm{M}}) + s(\tilde{\phi}_{\mathrm{M}}, g)] \\ W[\phi_{\mathrm{M}}, \phi_{\mathrm{R}}, \lambda_2, 1_G; M'^{(d-1)}] &= \int_{M'^{(d-1)}} [\lambda_2(g\tilde{\phi}_{\mathrm{M}} - \phi_{\mathrm{R}}) + s(\phi_{\mathrm{R}}, 1_G)]\end{aligned} \tag{1.23}$$

となる．これらをまとめると，$M^{(d-1)}$ 上の作用は

$$\int_{M^{(d-1)}} \lambda_1(\phi_{\mathrm{L}} - \tilde{\phi}_{\mathrm{M}}) = W[\phi_{\mathrm{L}}, \tilde{\phi}_{\mathrm{M}}, \lambda_1, 1_G; M^{(d-1)}] \tag{1.24}$$

となり，$M'^{(d-1)}$ 上の作用は

$$\begin{aligned}\int_{M'^{(d-1)}} [\lambda_2(g\tilde{\phi}_{\mathrm{M}} - \phi_{\mathrm{R}}) + s(\phi_{\mathrm{R}}, 1_G) + s(\tilde{\phi}_{\mathrm{M}}, g)] &= \int_{M'^{(d-1)}} [\lambda_2(g\tilde{\phi}_{\mathrm{M}} - \phi_{\mathrm{R}}) + s(\phi_{\mathrm{R}}, 1_G) + s(g^{-1}\phi_{\mathrm{R}}, g)] \\ &= \int_{M'^{(d-1)}} [\lambda_2(g\tilde{\phi}_{\mathrm{M}} - \phi_{\mathrm{R}}) + s(g^{-1}\phi_{\mathrm{R}}, g)] \\ &= W[\tilde{\phi}_{\mathrm{M}}, \phi_{\mathrm{R}}, \lambda_2, g; M'^{(d-1)}]\end{aligned} \tag{1.25}$$

となる．ただし二つ目の等号で式 (1.20) において $\phi = g^{-1}\phi_{\mathrm{R}}$，$g_1 = 1_G$，$g_2 = g$ としたものを用いた．以上より，式 (1.21) は次のように書き直すことができる．

$$\int \mathcal{D}\phi_{\mathrm{L}} \mathcal{D}\tilde{\phi}_{\mathrm{M}} \mathcal{D}\phi_{\mathrm{R}} \mathcal{D}\lambda_1 \mathcal{D}\lambda_2\, e^{iS_{\mathrm{L}}[\phi_{\mathrm{L}}] + iS_{\mathrm{M}}[\tilde{\phi}_{\mathrm{M}}] + iS_{\mathrm{R}}[\phi_{\mathrm{R}}] + iW[\phi_{\mathrm{L}}, \tilde{\phi}_{\mathrm{M}}, \lambda_1, 1_G; M^{(d-1)}] + iW[\tilde{\phi}_{\mathrm{M}}, \phi_{\mathrm{R}}, \lambda_2, g; M'^{(d-1)}]} \tag{1.26}$$

これはまさしく図 5 の右辺であるのでこれで対称性演算子のトポロジカル性が示された．

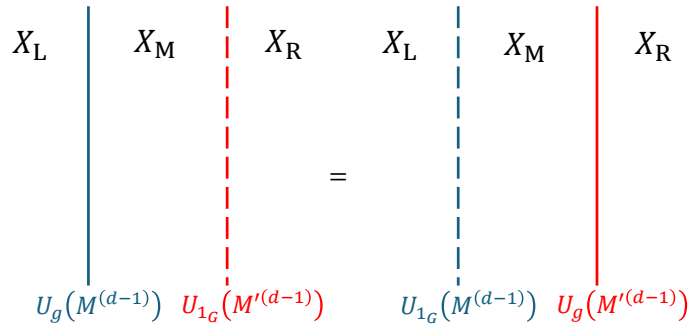


図 5: 対称性演算子のトポロジカル性

次に場 ϕ への作用を求める．これは図 6 の等式を示せばよい．左辺は式 (1.21) に ϕ_{M} を挿入すればよい．トポロジカル性を示した際と同様に変形すると，ϕ_{M} の挿入は $g\tilde{\phi}_{\mathrm{M}}$ の挿入とみなせる．したがって，

$$\langle U_g(M^{(d-1)})\phi(x)\rangle = \langle g\phi(x)U_g(M'^{(d-1)})\rangle \tag{1.27}$$

が成り立ち，場 ϕ への作用が求まる．

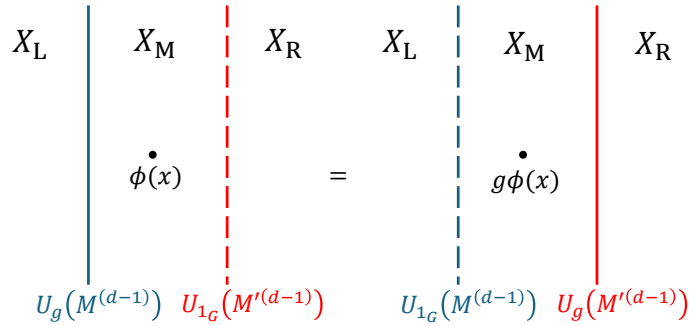


図 6: 対称性演算子の作用

最後にフュージョン則を示す．これは図 7 の等式を示せばよい．図 7 の左辺は式で書くと

$$\int \mathcal{D}\phi_{\mathrm{L}}\mathcal{D}\phi_{\mathrm{M}}\mathcal{D}\phi_{\mathrm{R}}\mathcal{D}\lambda_1\mathcal{D}\lambda_2\, e^{iS_{\mathrm{L}}[\phi_{\mathrm{L}}]+iS_{\mathrm{M}}[\phi_{\mathrm{M}}]+iS_{\mathrm{R}}[\phi_{\mathrm{R}}]+iW[\phi_{\mathrm{L}},\phi_{\mathrm{M}},\lambda_1,g_2;M^{(d-1)}]+iW[\phi_{\mathrm{M}},\phi_{\mathrm{R}},\lambda_2,g_1;M'^{(d-1)}]} \tag{1.28}$$

となる．ここでも同様に $\tilde{\phi}_{\mathrm{M}} = g_2^{-1}\phi_{\mathrm{M}}$ とおくと $M^{(d-1)}$ 上の作用は式 (1.24) となる．$M'^{(d-1)}$ 上の作用は

$$\begin{aligned}
&\int_{M'^{(d-1)}} [\lambda_2(g_2\tilde{\phi}_{\mathrm{M}} - g_1^{-1}\phi_{\mathrm{R}}) + s(g_1^{-1}\phi_{\mathrm{R}}, g_1) + s(\tilde{\phi}_{\mathrm{M}}, g_2)] \\
&\qquad = \int_{M'^{(d-1)}} [\lambda_2(g_2\tilde{\phi}_{\mathrm{M}} - g_1^{-1}\phi_{\mathrm{R}}) + s(g_1^{-1}\phi_{\mathrm{R}}, g_1) + s(g_2^{-1}g_1^{-1}\phi_{\mathrm{R}}, g_2)] \\
&\qquad = \int_{M'^{(d-1)}} [\lambda_2(g_2\tilde{\phi}_{\mathrm{M}} - g_1^{-1}\phi_{\mathrm{R}}) + s(g_2^{-1}g_1^{-1}\phi_{\mathrm{R}}, g_1g_2)] \\
&\qquad = W[\tilde{\phi}_{\mathrm{M}}, \phi_{\mathrm{R}}, \lambda_2, g_1g_2; M'^{(d-1)}]
\end{aligned} \tag{1.29}$$

となる．ただし，式 (1.20) において $\phi = g_2^{-1}g_1^{-1}\phi_{\mathrm{R}}$ としたものを用いた．これを式 (1.28) に代入すると図 7 の右辺が得られるため，フュージョン則 (1.32) が示されたこととなる．

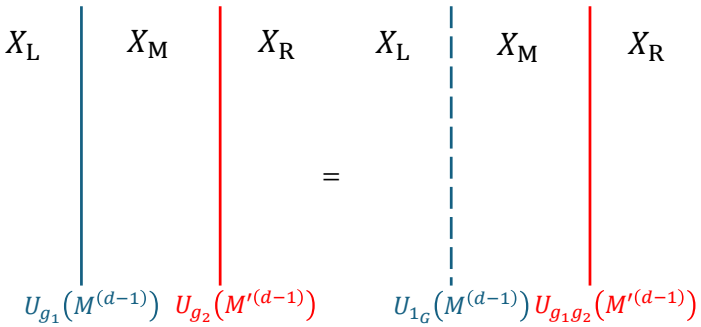


図 7: 対称性演算子のフュージョン則

次の節に入る前に一つだけ補足しておく．この節では一般の多様体上で対称性演算子を定義したが，厳密にいえば Hilbert 空間上の演算子となるのは $(d-1)$ 次元多様体を時刻一定面に取ったときだけである．例えば $(d-1)$ 次元多様体 $M^{(d-1)}$ として空間一定面をとると，場は $M^{(d-1)}$ 上で対称性変換によってツイストされた境界条件をとる．したがって，このような $U_g(M^{(d-1)})$ を挿入して時刻一定面で正準量子化を行うと，対称性変換によってツイストされた Hilbert 空間が得られる．このように一般の $(d-1)$ 次元多様体上での対称性演算子は演算子というより欠陥とみなすべきであるが，経路積分形式で扱う際にはその違いはあまり気にしなくてよい．以下では主に経路積分形式で議論するため，対称性演算子と対称性欠陥という言葉は同様の意味で用いる．

1.3 一般化対称性

前節で議論したように対称性演算子は $(d-1)$ 次元閉多様体上で定義され，以下の性質を満たす．

- トポロジカル性
$$U_g(M^{(d-1)}) = U_g(M'^{(d-1)}) \tag{1.30}$$
- 荷電演算子への作用
$$U_g(M^{(d-1)})\phi(x) = g\phi(x) \tag{1.31}$$
- フュージョン則
$$U_{g_1}(M^{(d-1)})U_{g_2}(M^{(d-1)}) = U_{g_1g_2}(M^{(d-1)}) \tag{1.32}$$

このうち，トポロジカル性は保存則と等価であった．したがってトポロジカル性を満たす演算子を対称性とみなすことができると考えられる．このようにして定義した対称性を一般化対称性という．つまり，

$$\text{一般化対称性} = \text{トポロジカル演算子のなす代数} \tag{1.33}$$

ということである．

1.3.1 高次形式対称性

従来の対称性を一般化する方向性としては二つの方向性があり，一つは対称性演算子を定義する多様体の余次元を高次化するというものである．対称性演算子が余次元 $(p+1)$，つまり次元が $(d-p-1)$ の閉多様体上で定義されるとき，p-形式対称性といい，特に $p>0$ のときを高次形式対称性という．この言葉を用いると従

来の対称性は 0-形式対称性ということになる．以下では $G^{(p)}$ 対称性と書いたときには群 G の p-形式対称性を表すものとする．

p-形式対称性における荷電演算子は 0-形式のときのような点演算子ではなく p 次元の広がりをもった演算子となる[*12]．$G^{(p)}$ の表現 ρ に従う荷電演算子を $W_\rho(\gamma^{(p)})$ とすると，対称性演算子 $U_g(M^{(d-p-1)})$ の荷電演算子への作用は図 8 のように $M^{(d-p-1)}$ と $\gamma^{(p)}$ がリンクしているとき，それを解くことで対称性演算子が作用するという形で与えられる．

$$U_g(M^{(d-p-1)})W_\rho(\gamma^{(p)}) = \rho(g)^{\mathrm{Link}(M^{(d-p-1)},\gamma^{(p)})}W_\rho(\gamma^{(p)}) \tag{1.34}$$

ここで，$\mathrm{Link}(M^{(d-p-1)},\gamma^{(p)})$ は $M^{(d-p-1)}$ と $\gamma^{(p)}$ のリンク数を表す[*13]．

高次形式対称性は必ず可換となる．これは対称性演算子の余次元が高いために図 9 のような変形をすることが可能だからである．

理論に複数の次数の高次形式対称性があるとき，それらが単純な直積ではなく非自明に作用しあう場合がある．このような一般化対称性を高次群対称性と言う．高次群対称性については本論文では詳しく扱わない．

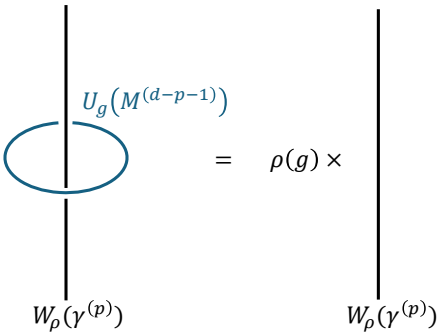


図 8: p-形式対称性の作用

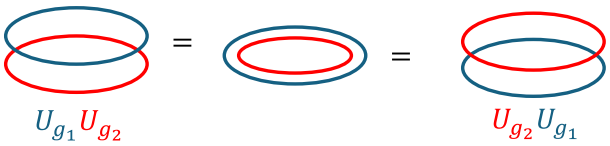


図 9: 高次形式対称性の可換性

1.3.2 非可逆対称性

もう一つの一般化はフュージョン則の一般化である．フュージョン則 (1.32) は群の演算規則を表しているが，一般にはトポロジカルな演算子がなす代数は群のようになるとは限らない．群の演算規則を満たさない一般化対称性では対称性演算子の逆演算子が存在しない場合がある．つまり，対称性演算子 $U_a(M)$ に対して

$$U_a(M)U_b(M) = U_b(M)U_a(M) = U_{\mathrm{id}}(M) \tag{1.35}$$

[*12] 一般には p より高い次元の演算子にも作用する場合もあるが，多くの例では p-形式対称性は p 次元の演算子に作用する．
[*13] リンク数の定義は A.3 を参照．

となる b が存在しないということである．このような一般化対称性を非可逆対称性と言う．非可逆な対称性演算子は Hilbert 空間上の演算子として表したときにユニタリ演算子として書けない．非可逆対称性の代数構造は数学の圏論の言葉を用いて記述されるため圏論的対称性と言う場合もある．特に 2 次元の有限な非可逆対称性はフュージョン圏を用いて記述される．

2 ゲージ場

理論が対称性を持つとき背景ゲージ場と結合することができる．まず理論が従来の連続対称性を持つときにどのように背景ゲージ場と結合するかについて述べる．ここでは簡単のために可換な連続対称性を考える．1.2.1 節でも述べたように対称性変換 $\phi \to \phi + \varepsilon\delta\phi$ を局所的にする，つまり ε を時空に依存する関数とすると作用は不変にならず，変化分は保存電流 j を用いて

$$\delta S = \int *j \wedge d\varepsilon \tag{2.1}$$

のように書ける．局所的な変換で作用を不変にするためには

$$A \to A - d\varepsilon \tag{2.2}$$

と変換する背景ゲージ場 A を導入し，背景ゲージ場付きの作用

$$S[\phi, A] = S[\phi] + \int *j \wedge A \tag{2.3}$$

とすればよい．ただしここで注意が必要で，このように背景ゲージ場と電流を結合させただけでは ε の高次では不変にならないことがある．そのようなときは打ち消すように A の高次の項を加える[*14]．

例えば Dirac 場や複素スカラー場の位相を回す $U(1)$ 対称性を局所的な変換に書き換える際には微分 ∂_μ を共変微分 $\partial_\mu - iA_\mu$ に書き換えればよい．Dirac 場の場合は作用は 1 階の微分しか含まないため背景ゲージ場付きの作用はゲージ場の一次の項しかない．したがってこの場合は電流と背景ゲージ場を結合させるだけでよい．しかし，複素スカラー場の場合は作用は 2 階の微分を含むため背景ゲージ場付きの作用は A^2 の項を含む．つまり，この場合は (2.3) だけでなく A^2 の項を加えなければならない[*15]．

連続対称性に対しては以上のように保存電流とゲージ場を結合させることができる．しかし，離散対称性に対しては保存電流が存在しないため，このように結合を書き表すことはできず，離散対称性のゲージ場は存在しないように思える．しかし，実際には離散対称性のゲージ場は存在し，さらに一般化対称性を議論する上では離散対称性のゲージ場に対する理解が重要となる．また，もう一つ重要となるのが，ゲージ群の大域的な構造に対する理解である．例えば，$\mathbb{R}$ と $U(1)$ は同じ Lie 代数を持つが Lie 群としては異なる．これらの違いがゲージ場の言葉でどのように表されるのかについて理解する必要がある．そのため，本章では離散対称性のゲージ場や $U(1)$ ゲージ場について詳しく解説する．

2.1 対称性演算子のネットワーク

本節ではまず準備として，通常の連続対称性のゲージ場が平坦なとき，ゲージ場は対称性演算子のネットワークと等価であることについて説明する．ただし，ゲージ場が平坦とは場の強さが 0 となることである．時空の開被覆 $\{U_i\}$ を取り，$U_{ij} = U_i \cap U_j, U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$ のように表すとする．連続対称性 G に対するゲージ場は U_i 上のリー代数に値を取る局所 1-形式 A_i と U_{ij} 上の G に値を取る変換関数 g_{ij} のデータからなる (図 10)．U_{ij} 上では A_i, A_j は変換関数 g_{ij} を用いて

$$A_j = g_{ij}^{-1} A_i g_{ij} - i g_{ij}^{-1} dg_{ij} \tag{2.4}$$

[*14] 本章では 't Hooft アノマリーはないものとする．

[*15] この項は複素スカラー場を ϕ として $|\phi|^2 A^2$ のような形をしており，ダイアグラムを書くとかもめのように見えることからかもめ項 (Seagull term) と呼ばれる．

のように関係付く．また，U_{ijk} 上ではコサイクル条件

$$g_{ij}g_{jk}g_{ki} = 1_G \tag{2.5}$$

が成り立つ．ゲージ変換は各 U_i 上の G に値を取る関数 $\xi_i(x)$ を用いて

$$\begin{aligned} A_i &\to \xi_i^{-1}A_i\xi_i - i\xi_i^{-1}d\xi_i \\ g_{ij} &\to \xi_i^{-1}g_{ij}\xi_j \end{aligned} \tag{2.6}$$

と表される．また，対称性変換を受ける場 ϕ についても正しくは各 U_i 上の場 ϕ_i の集まりとみなすべきであり，U_{ij} 上では ϕ_i と ϕ_j は

$$\phi_i = g_{ij}\phi_j \tag{2.7}$$

として関係付いている．

ここで開被覆として，各 U_i や U_{ij}, U_{ijk} などの有限個の開集合の共通部分がすべて可縮となっているような開被覆を考えるとする．このような開被覆をよい被覆という．このとき，ゲージ場が平坦であるならば各 A_i は 0 とゲージ同値となる．したがって，各 U_i 上で $A_i = 0$ とし，U_{ij} 上で変換関数 g_{ij} は定数としてよい．U_{ij} を十分細くとると，余次元 1 の多様体と思うことができ，場 ϕ はその余次元 1 の多様体を飛び越える際に g_{ij} だけ変換を受けると解釈できる．したがって，平坦な背景ゲージ場は各 U_{ij} 上に g_{ij} でラベルされた対称性演算子が挿入されているという配位と等価である．ただし，対称性演算子のネットワークのジャンクションでは $g_{ij}g_{jk}g_{ki} = 1$ という平坦条件が課されている (図 10)．

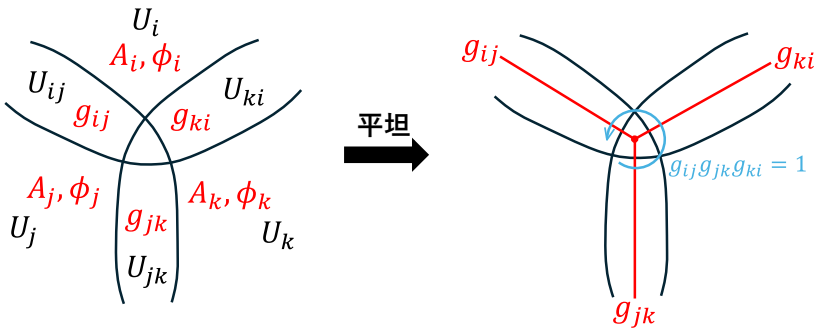


図 10: 背景ゲージ場

ゲージ場と対称性演算子のネットワークの対応は数学的には Poincaré 双対性というもので解釈できる．これは向き付け可能な d 次元多様体 X に対して

$$H^k(X) \simeq H_{d-k}(X) \tag{2.8}$$

が成り立つというものである．ただし，$H^k(X)$ は k 次のコホモロジー群，$H_{d-k}(X)$ は $(d-k)$ 次のホモロジー群を表す[*16]．平坦なゲージ場は $dA = 0$ であることから 1-コサイクルとみなせるので 1 次のコホモロジーの元が定まる．また，ゲージ変換で移りあう配位は同一視することはコバウンダリーだけの違いを無視することを意味しているので，平坦ゲージ場の物理的な配位は 1 次のコホモロジーと 1 対 1 に対応している．したがって，Poincaré 双対性を用いるとゲージ場 A に対応する $(d-1)$-サイクル $M^{(d-1)}$ が存在する．これ

[*16] Poincaré 双対性，ホモロジー，コホモロジーについては付録 A，付録 B を参照．

が対称性演算子のネットワークに対応する．ゲージ場 A に対応する $(d-1)$-サイクル $M^{(d-1)}$ を $\mathrm{PD}(A)$ と表し，逆に $(d-1)$-サイクル $M^{(d-1)}$ に対応する微分形式をデルタ関数形式と呼び，$\delta(M^{(d-1)})$ と表すこととする．この言葉ではゲージ不変性が対称性演算子のトポロジカル性に対応していることが分かる．

このデルタ関数形式を用いると対称性演算子 $U_{e^{i\alpha}}(M^{(d-1)})$ に対応するゲージ場の配位は

$$A = \alpha\delta(M^{(d-1)}) \tag{2.9}$$

と書ける．これは具体的に計算で確認することもでき，デルタ関数形式の定義から

$$\int *j \wedge A = \alpha \int_{M^{(d-1)}} *j = \alpha Q(M^{(d-1)}) \tag{2.10}$$

となる．したがって背景ゲージ場付きの分配関数を計算すると

$$Z[A] = \int \mathcal{D}\phi\, e^{iS[\phi]+i\alpha Q(M^{(d-1)})} = \int \mathcal{D}\phi\, U_{e^{i\alpha}}(M^{(d-1)}) e^{iS[\phi]} \tag{2.11}$$

となり，対称性演算子 $U_{e^{i\alpha}}(M^{(d-1)})$ が挿入されていることが分かる．

2.2 離散ゲージ場

本節では，離散対称性に対するゲージ場について解説する．離散対称性は Lie 代数がないために離散ゲージ場はないように思える．しかし，前節で述べたようにゲージ場のデータは局所 1-形式と変換関数からなる．局所 1-形式は Lie 代数がないことから 0 であるが，変換関数は G に値を取るため離散群の場合も存在する．つまり離散群の場合は定義から自明に平坦であり，対称性演算子のネットワークと等価であると言える．また，数学的には $H^1(X;G)$ の元であると言える．1 次のコホモロジーの元となることは前節で述べたようにゲージ場が平坦であることからも分かるが，様々な見方で理解すると便利であるため，ここではホロノミーを用いた方法と Čech コホモロジーを用いた方法について解説する．

まずホロノミーを用いた方法について解説する．ホロノミー，つまり Wilson ラインは 1-チェインから G への写像とみなせるので $C^1(X;G)$ の元である．さらに離散ゲージ場は平坦であるため，Wilson ラインは 1-コサイクルとみなすことができる．また，ゲージ変換を行うと Wilson ラインは 1-コバウンダリーだけ変化するので，離散ゲージ場は $H^1(X;G)$ の元と思うことができる．

次に Čech コホモロジーを用いた方法について述べる．G が離散群のとき，変換関数は開集合 U_{ij} に対して定数 $g_{ij} \in G$ を割り当てる写像である．これはまさしく Čech 1-コチェインの定義である．さらに U_{ijk} 上でのコサイクル条件

$$g_{ij}g_{jk}g_{ki} = 1 \tag{2.12}$$

は Čech 1-コチェインとしてのコサイクル条件と一致していることが分かる．また，ゲージ変換 (2.6) は Čech 1-コバウンダリーだけ変化させることに対応していることが分かるので，離散ゲージ場は Čech 1-コホモロジーの元であることが分かる．

2.3 $U(1)$ ゲージ場

本節では $U(1)$ ゲージ場と $\mathbb{R}$ ゲージ場の違いについて詳しく解説する．これらの違いは 3 章で Maxwell 理論の高次形式対称性を議論する際に非常に重要となる．

$U(1)$ と $\mathbb{R}$ は Lie 代数が同じであるため局所 1-形式 A_i には違いが現れないが，変換関数には違いが現れる．具体的に確かめるには $U(1)$ ゲージ場の変換関数 g_{ij} を $g_{ij} = e^{if_{ij}}$ というように $\mathbb{R}$ 値関数 f_{ij} で表すとよい．するとコサイクル条件は f_{ij} の言葉で

$$f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = 2\pi m_{ijk} \tag{2.13}$$

と書ける．ただし，$m_{ijk} \in \mathbb{Z}$ である．この右辺の $2\pi m_{ijk}$ は $U(1) = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ であり，$2\pi\mathbb{Z}$ の違いは同一視されるところから来ている．したがって，$\mathbb{R}$ ゲージ場にはこのような m_{ijk} の自由度は存在しない．以上をまとめると，$U(1)$ ゲージ場の変換関数のデータ g_{ij} は $\mathbb{R}$ 値関数 f_{ij} と $\mathbb{Z}$ 値の m_{ijk} によって記述される．

では，この整数値の自由度は物理的にはどのような意味を表しているのだろうか．m_{ijk} は定義から Čech 2-コチェインであることが分かる．さらに 4 つの開集合の共通部分を考えるとこの 2-コチェインが 2-コサイクルとなることが分かる．つまり，m_{ijk} は整数係数の 2 次のコホモロジー $H^2(X;\mathbb{Z})$ の元を与えていることが分かる．これは実は 1 次の Chern 類に対応している[*17]．つまり

$$\int_{M^{(2)}} \frac{F}{2\pi} \tag{2.14}$$

と m_{ijk} を 2-サイクル $M^{(2)}$ に沿って足し合わせた値が一致する．これは $M^{(2)}$ を貫く磁束の量を測っており，この値が 0 でないということはモノポールが存在することを意味する．つまり，$U(1)$ ゲージ場は $\mathbb{R}$ ゲージ場と違ってモノポールが存在する．これは $U(1)$ ゲージ場は Dirac 量子化条件を満たすと言ってもよい．以上より，$U(1)$ ゲージ場の配位はモノポールの数によって決まる 1 次の Chern 類と $\mathbb{R}$ ゲージ場によるゆらぎの項によって表されることが分かる．

また，ゲージ変換についても $U(1)$ ゲージ場と $\mathbb{R}$ ゲージ場で違いが現れる．これは変換関数の言葉を明示的に用いずとも次のようにして理解できる．$U(1)$ ゲージ場 A のゲージ変換

$$A \to A - i\xi^{-1}d\xi \tag{2.15}$$

は $\xi = e^{i\lambda}$ と書くと

$$A \to A + d\lambda \tag{2.16}$$

と書ける．ここで ξ が $U(1) = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 値であることから，(2.13) のときと同様に $\lambda \sim \lambda + 2\pi$ でなければならない．つまり，λ は普通のスカラー関数ではなくコンパクトスカラーのように振舞うということである．コンパクトスカラーは通常のスカラー関数と違い，$\frac{d\lambda}{2\pi}$ の周期が 0 になるとは限らず，様々な整数の値を取りうる[*18]．この整数値は物理的には λ の巻き付き数を表す．つまり，コンパクトスカラーはスカラーと違って巻き付き数を持つことができる．したがって $\mathbb{R}$ ゲージ場と違って，$U(1)$ ゲージ場に対しては巻き付き数を持つような λ によるゲージ変換が可能である．このような変換を大域的ゲージ変換と呼ぶ．

また $U(1)$ ゲージ場のゲージ変換は次のように書くことができる．

$$A \to A + \epsilon, \qquad (d\epsilon = 0, \int \frac{\epsilon}{2\pi} \in \mathbb{Z}) \tag{2.18}$$

[*17] 例えば [34] などを参照．

[*18] ここで，一般の p-形式 ω の周期とは p-サイクル上での積分値

$$\int_{\gamma(p)} \omega \tag{2.17}$$

のことである．

これは表式 (2.16) において $d\lambda = \epsilon$ としたものである．ϵ は通常の 1-形式であるが，もとはコンパクトスカラーの微分であったために，条件として閉形式であり，かつ周期の量子化が課されている．この表式は 3 章でよく使われる便利な表式である．

本節の最後に高次形式対称性に対するゲージ場についてコメントしておく．p-形式対称性に対するゲージ場は $(p+1)$-形式によって表される．例えば $U(1)^{(p)}$ 対称性の背景ゲージ場は $U(1)$ 値 $(p+1)$-形式ゲージ場 $A^{(p+1)}$ によって表される．また高次ゲージ場に対しても本節で述べたような $\mathbb{R}$ ゲージ場との違いは存在する．ゲージ変換は

$$A^{(p+1)} \to A^{(p+1)} + d\lambda^{(p)} \tag{2.19}$$

と書けるが，このとき，$\lambda^{(p)}$ は $\mathbb{R}$ 値の p-形式ではなく，$U(1)$ 値 p-形式として扱わなければならない．また，

$$\int_{M^{(p+2)}} \frac{dA^{(p+1)}}{2\pi} \in \mathbb{Z} \tag{2.20}$$

という条件が成り立ち，この量は高次ゲージ場の場合のモノポールを表している．高次 $U(1)$ ゲージ場の配位もモノポールによって決まる $H^{p+2}(X;\mathbb{Z})$ の元と高次 $\mathbb{R}$ ゲージ場によるゆらぎによって記述される．

2.4 $\mathbb{Z}_N$ ゲージ場

本章の最後に，離散ゲージ場の中でも最も基本的でよく現れる $\mathbb{Z}_N$ ゲージ場についてより詳しく解説する．2.2 節で述べたように $\mathbb{Z}_N^{(0)}$ 対称性に対する背景ゲージ場は $H^1(X;\mathbb{Z}_N)$ の元であり，Poincaré 双対を取ると対称性演算子のネットワークとして表される．また，高次形式対称性の背景ゲージ場を表すには $U(1)$ の場合と同様にコホモロジーの次数を上げればよい．つまり，$\mathbb{Z}_N^{(p)}$ 対称性の背景ゲージ場は $H^{p+1}(X;\mathbb{Z}_N)$ の元である．Poincaré 双対を取ると $H_{d-p-1}(X;\mathbb{Z}_N)$ となるが，これは $\mathbb{Z}_N^{(p)}$ 対称性の対称性演算子のネットワークの集合を表している．

$H^{p+1}(X;\mathbb{Z}_N)$ の元は 単体的コホモロジーや Čech コホモロジーなどを用いて表すことができるが，ここでは $U(1)$ ゲージ場を用いた表現方法について説明する [6]．$(p+1)$-形式 $\mathbb{Z}_N$ ゲージ場は平坦でホロノミーが $\mathbb{Z}_N$ 値を取る $(p+1)$-形式 $U(1)$ ゲージ場，つまり

$$dA^{(p+1)} = 0, \qquad \frac{N}{2\pi}\int_{\gamma^{(p+1)}} A^{(p+1)} \in \mathbb{Z}_N \tag{2.21}$$

という条件を満たす $(p+1)$-形式 $A^{(p+1)}$ と見なすことができる．ただし通常は $\mathbb{Z}_N = \{0, 1, \cdots, N-1\}$ と取るため，厳密には $A^{(p+1)}$ ではなく $\frac{N}{2\pi}A^{(p+1)}$ を $\mathbb{Z}_N$ ゲージ場とみなすべきであることに注意が必要である．

条件 (2.21) を課すためには p-形式 $U(1)$ ゲージ場 $\widetilde{A}^{(p)}$ を用いて

$$NA^{(p+1)} = d\widetilde{A}^{(p)} \tag{2.22}$$

と表せばよい．実際，このように表される $A^{(p+1)}$ が条件 (2.21) を満たすことはすぐに分かる．

$\mathbb{Z}_N$ ゲージ場を背景ゲージ場としてではなくダイナミカルな自由度として入れる場合は，Lagrange 未定乗数として $\mathbb{R}$ 値 $(d-p-1)$-形式 $H^{(d-p-1)}$ を導入して

$$\frac{i}{2\pi}\int H^{(d-p-1)} \wedge (NA^{(p+1)} - d\widetilde{A}^{(p)}) \tag{2.23}$$

を作用に加えればよい．

また，ダイナミカルな $\mathbb{Z}_N$ ゲージ場を表す別の表式として

$$\frac{iN}{2\pi}\int B^{(d-p-2)}\wedge dA^{(p+1)} \tag{2.24}$$

がある．ただし，$B^{(d-p-2)}$ は $(d-p-2)$-形式の $U(1)$ ゲージ場である．作用 (2.24) で表される理論を BF 理論と呼ぶ．この作用が条件 (2.21) を導くことを見るには次のようにすればよい．まず，$U(1)$ ゲージ場をコホモロジーの元 $h\in H^{d-p-1}(X;\mathbb{Z})$ と $\mathbb{R}$ ゲージ場 α の微分の和に分解する．

$$dB^{(d-p-2)}=2\pi h+d\alpha \tag{2.25}$$

すると，(2.24) は

$$\frac{iN}{2\pi}\int\left[(-1)^{(d-p-1)}2\pi h\wedge A^{(p+1)}+\alpha\wedge dA^{(p+1)}\right] \tag{2.26}$$

となる．h は Poincaré 双対性から $(p+1)$-サイクルの生成元 $\{\gamma_i\}$ を用いて

$$h=\sum_i n_i\delta(\gamma_i),\qquad (n_i\in\mathbb{Z}) \tag{2.27}$$

のように表すことができるため，$U(1)$ ゲージ場 $B^{(d-p-2)}$ についての積分は $\mathbb{R}$ ゲージ場 α についての積分と各 n_i についての離散和に書き直すことができる．

$$\begin{aligned}&\int\mathcal{D}B^{(d-p-2)}\exp\left[\frac{iN}{2\pi}\int B^{(d-p-2)}\wedge dA^{(p+1)}\right]\\&\qquad=\sum_{\{n_i\}}\int\mathcal{D}\alpha\exp\left[\frac{iN}{2\pi}\int\left((-1)^{(d-p-1)}2\pi h\wedge A^{(p+1)}+\alpha\wedge dA^{(p+1)}\right)\right]\end{aligned} \tag{2.28}$$

α の積分を実行すると平坦条件 $dA^{(p+1)}=0$ が課される．n_i についての和を実行すると

$$\begin{aligned}\sum_{\{n_i\}}\exp\left[(-1)^{(d-p-1)}iN\int\sum_i n_i\delta(\gamma_i)\wedge A^{(p+1)}\right]&=\sum_{\{n_i\}}\exp\left[(-1)^{p(d-p-1)}\sum_i in_iN\int_{\gamma_i}A^{(p+1)}\right]\\&=\prod_i\delta_1\left(\frac{N}{2\pi}\int_{\gamma_i}A^{(p+1)}\right)\end{aligned} \tag{2.29}$$

となる．ただし，$\delta_1(x)$ は $x=0\ (\mathrm{mod}\ 1)$，つまり $x\in\mathbb{Z}$ という条件を課すデルタ関数である．二行目の等号はこのデルタ関数に関する離散 Fourier 変換を行っていると思えばよい．したがって，各 n_i についての和をとることで (2.21) のゲージ場の周期についての条件が課される．

また，(2.23) から (2.24) を導くには $d\widetilde{A}^{(p)}$ に対して (2.25) と同様の分解を行い積分するとよい．すると $H^{(d-p-1)}$ は平坦かつ周期が $2\pi\mathbb{Z}$ であるという条件が課される．これは $H^{(d-p-1)}$ が $U(1)$ ゲージ場の微分として書けることを意味するので (2.24) が導かれる．

3　高次形式対称性

高次形式対称性には主にゲージ理論で現れる電気的対称性と磁気的対称性，さらにはシグマ模型に現れるソリトン的対称性がある．本章ではこれらについて順番に解説していくが，まずその準備として遮蔽と呼ばれる概念について次節で説明する．

3.1　遮蔽

高次形式対称性を調べる際に遮蔽という概念が有効になる場合がある [35, 29]．p 次元の演算子 V_p が別の p 次元の演算子 V_p' によって遮蔽されるとは，図 11 の左図のように V_p と V_p' の間に $(p-1)$ 次元の演算子 W_{p-1} を挿入できることを言う．また，図 11 の右図のように V_p が恒等演算子によって遮蔽される場合，V_p は完全に遮蔽されるという．

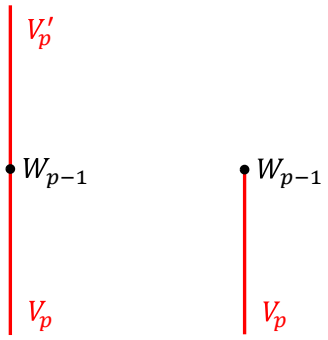


図 11: 遮蔽

遮蔽の性質として，V_p, V_p' が対称性の荷電演算子のとき，V_p が V_p' によって遮蔽される場合 V_p と V_p' の電荷は同じであるという性質がある．これは図 12 のように対称性演算子を変形したときに同じ結果を与えなければならないことから従う．また，このことから V_p が完全に遮蔽される場合は電荷は 0 にならなければならないことが分かる．

遮蔽は荷電演算子の間の同値関係を与える．荷電演算子全体の集合をこの同値関係で割ることで電荷の集合 $\mathcal{C}_p$ が得られる．$\mathcal{C}_p$ には演算子積展開によって積構造が入るが，多くの場合 $\mathcal{C}_p$ はこの演算に関して可換群となる．その場合，p-形式対称性の群構造は $\mathcal{C}_p$ の Pontryagin 双対 $\widehat{\mathcal{C}_p}$ で与えられる．Pontryagin 双対とは

$$\widehat{\mathcal{C}_p} = \mathrm{Hom}(\mathcal{C}_p, U(1)) \tag{3.1}$$

で定義される．これは $\mathcal{C}_p$ の指標全体の集合，つまり既約表現全体の集合とも言える．よく出てくる群に対する Pontryagin 双対は

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{Z}_N} &\simeq \mathbb{Z}_N \\ \widehat{U(1)} &\simeq \mathbb{Z} \\ \widehat{\mathbb{Z}} &\simeq U(1) \end{aligned} \tag{3.2}$$

となる．また，二回 Pontryagin 双対を取ると元の群に戻る．

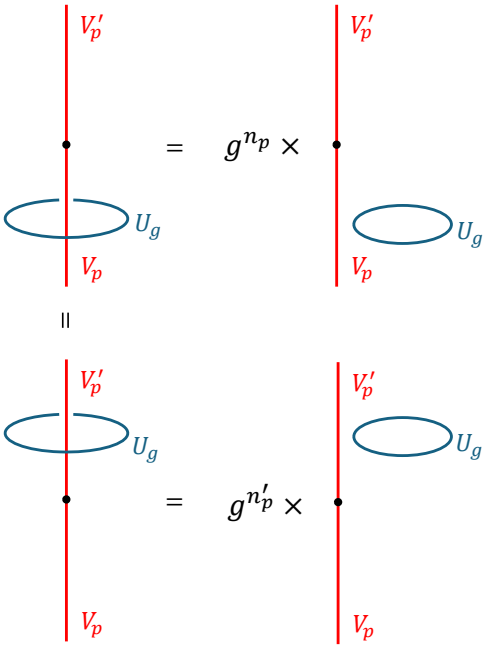


図 12: 遮蔽と電荷の関係

3.2 電気的 1-形式対称性

ゲージ理論には電気的 1-形式対称性と呼ばれる高次形式対称性が存在する [1]．この対称性の群はゲージ群が G の純粋ゲージ理論では G の中心 $Z(G)$ となるため中心対称性と呼ばれることもある．この中心対称性は閉じ込め・非閉じ込め相転移などで重要な役割を果たす．電気的 1-形式対称性に関しては様々な視点で捉えることができるが，ここでは三通りの見方を解説する．前半二つについては $U(1)$ Maxwell 理論における電気的 1-形式対称性の見方であり，非可換ゲージ理論に拡張することは困難であるが，最後の一つについては一般のゲージ群 G で考えることができる．

3.2.1 運動方程式を用いた見方

まず，運動方程式を用いた見方について説明する．$U(1)$ Maxwell 理論の作用は

$$S = \frac{1}{2e^2}\int f \wedge *f \tag{3.3}$$

として与えられる．ただし，a を $U(1)$ ゲージ場とし，$f = da$ は場の強さとする．運動方程式は

$$d * f = 0 \tag{3.4}$$

である．この式は

$$*j_e = \frac{1}{e^2} * f \tag{3.5}$$

を電流とする保存則と見なすことができるため，対応する対称性が存在する[*19]．$*f$ は $(d-2)$-形式なのでこの保存則に対応する対称性は 1-形式対称性となる．これを電気的 $U(1)^{(1)}$ 対称性といい，電束の保存に対応する．対称性演算子は

$$U^e_{e^{i\alpha}}(M^{(d-2)}) = \exp\left[\frac{i\alpha}{e^2}\int_{M^{(d-2)}} *f\right] \tag{3.6}$$

となる[*20]．

この対称性の荷電演算子は Wilson ループ

$$W_n(\gamma^{(1)}) = \exp\left(in\int_{\gamma^{(1)}} a\right), \qquad (n\in\mathbb{Z}) \tag{3.7}$$

であり，対称性演算子は

$$U^e_{e^{i\alpha}}(M^{(d-2)})W_n(\gamma^{(1)}) = e^{in\alpha\,\mathrm{Link}(M^{(d-2)},\gamma^{(1)})}W_n(\gamma^{(1)}) \tag{3.8}$$

のように作用する．

3.2.2 シフト対称性による見方

次にシフト対称性としての見方について説明する．ゲージ場を閉 1-形式 ϵ だけシフトすることを考える．

$$a \to a+\epsilon, \qquad (d\epsilon = 0) \tag{3.9}$$

ϵ は閉形式であることからこの変換に対して場の強さ $f = da$ は不変である．したがって作用も不変となりこれは対称性である．この対称性に対する電流を求めるには局所的な変換を考えればよい．そのためには ϵ が閉形式であるという条件を外せばよい[*21]．このとき，作用の変化分は

$$\delta S = \frac{1}{e^2}\int *f\wedge d\epsilon + O(\epsilon^2) \tag{3.10}$$

となる．したがって，保存電流は係数込みで (3.5) に決まる．

この対称性が $\mathbb{R}^{(1)}$ 対称性ではなく $U(1)^{(1)}$ 対称性であることを理解するためには変換パラメータの取りうる値を見ればよい．対称性変換のパラメータ ϵ の周期は一般に様々な実数値を取りうるため一見 $\mathbb{R}^{(1)}$ 対称性のように思えるが，周期が $2\pi\mathbb{Z}$ のときは (2.18) と一致するためゲージ変換となる．ゲージ変換は物理的状態を変えない自明な変換なので ϵ の周期が $2\pi\mathbb{Z}$ のときの対称性変換は自明な変換といえる．以上より対称性の群は $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = U(1)$ となる．

このシフト対称性の見方を用いると対称性演算子の作用 (3.8) を導出することができる．シフト対称性としての見方では $U^e_{e^{i\alpha}}(M^{(d-2)})$ の挿入は場の強さ f を

$$f \to f + \alpha\delta(M^{(d-2)}) \tag{3.11}$$

と変換することに対応する．ここで，$\partial M^{(d-1)} = M^{(d-2)}$ を満たす $(d-1)$ 次元多様体 $M^{(d-1)}$ を取ってくると，

$$\delta(M^{(d-2)}) = \delta(\partial M^{(d-1)}) = d\delta(M^{(d-1)}) \tag{3.12}$$

[*19] 電流の係数については保存則からは決まらないが，次節のシフト対称性による見方では具体的に計算から求まる．

[*20] この対称性の例は背景ゲージ場との結合を考える際にゲージ場の 2 次の項が必要な例である．したがって，厳密には対称性演算子を定義する際にゲージ場の 2 次の項に対応する項が必要である．

[*21] 通常の対称性の場合，大域的な対称性変換のパラメータは定数であり，局所的な変換では時空に依存する関数となる．パラメータを 0-形式とみなしたとき，大域的な変換であるための条件は閉 0-形式であることであるから，この拡張は自然である．

と書けるので，この変換はゲージ場を

$$a \to a + \alpha\delta(M^{(d-1)}) \tag{3.13}$$

と変換していることを意味する．したがって，Wilson ループ は

$$\begin{aligned} W_n(\gamma^{(1)}) &\to \exp\left[in\int_{\gamma^{(1)}}(a+\alpha\delta(M^{(d-1)}))\right] \\ &= \exp\left[in\alpha\int\delta(\gamma^{(1)})\wedge\delta(M^{(d-1)})\right]W_n(\gamma^{(1)}) \\ &= \exp\left[in\alpha\,\mathrm{Int}(\gamma^{(1)},M^{(d-1)})\right]W_n(\gamma^{(1)}) \\ &= \exp\left[in\alpha\,\mathrm{Link}(\gamma^{(1)},M^{(d-2)})\right]W_n(\gamma^{(1)}) \end{aligned} \tag{3.14}$$

のように変換する．ここで，$\mathrm{Int}(A,B)$ は A,B の交点数を表し，$\mathrm{Link}(A,\partial B)$ と等しくなる．以上より式 (3.8) が成り立つことが分かる．

3.2.3 中心対称性としての見方

最後に中心対称性としての見方を説明する [6]．この見方はゲージ群を $U(1)$ に制限せずとも一般のゲージ群 G で議論することが可能である．電気的 1-形式対称性を中心対称性として見るためには 2.1 節のようにゲージ場を開集合上の局所 1-形式と変換関数の集まりとして見るのがよい．次に，各 U_{ij} に対して定数 C_{ij} という G の中心 $Z(G)$ に値をとるパラメータを考える．C_{ij} は三つの開集合の共通部分 U_{ijk} 上ではコサイクル条件

$$C_{ij}C_{jk}C_{ki} = 1 \tag{3.15}$$

を満たしているとする．ここで次のような変換を考える．

$$g_{ij} \to C_{ij}g_{ij} \tag{3.16}$$

$C_{ij} \in Z(G)$ であることと，C_{ij} が定数であることからこの変換は局所 1-形式のデータを変えない変換である．場の強さは局所 1-形式を用いて定義されるため場の強さも不変であり，そのため Yang-Mills 作用も不変となる．したがって，この変換は対称性変換である．C_{ij} は $Z(G)$ に値をとる Čech 1-コサイクルとして見ることができるため，この対称性は $Z(G)^{(1)}$ 対称性であることが分かる．

3.2.4 対称性演算子の構成

$U(1)$ Maxwell 理論の場合の電気的 1-形式対称性の場合は連続対称性であったため保存電流が存在し，対称性演算子を具体的に場の言葉で書き表すことが可能であった．しかし，一般に $Z(G)$ は連続とは限らないため保存電流は存在せず，場の言葉で書くのは困難である．ここでは前節と同様に開被覆を取り，ゲージ場を局所 1-形式と変換関数のデータに分けることで対称性演算子を構成できることを見る．

唐突ではあるが，変換関数のコサイクル条件を次の形まで緩めるということを考える．

$$g_{ij}g_{jk}g_{ki} = C_{ijk} \in Z(G) \tag{3.17}$$

ただし，C_{ijk} は U_{ijk} 上で定数とする．ここで各 U_{ijk} で自由にコサイクル条件を緩めてしまうと，四つの開集合の共通部分 U_{ijkl} 上でゲージ場の変換が整合しないという問題が出てきてしまうため，C_{ijk} には制限を付

けなければならない．$U_{jkl}, U_{ikl}, U_{ijl}, U_{ijk}$ それぞれにおいて (3.17) は

$$\begin{aligned} g_{jk}g_{kl}g_{lj} &= C_{jkl} \\ g_{ik}g_{kl}g_{li} &= C_{ikl} \\ g_{ij}g_{jl}g_{li} &= C_{ijl} \\ g_{ij}g_{jk}g_{ki} &= C_{ijk} \end{aligned} \tag{3.18}$$

と書ける．C_{ijk} などはすべて $Z(G)$ の元なので

$$\begin{aligned} g_{lj}g_{jk}g_{kl} &= C_{jkl} \\ g_{li}g_{ik}g_{kl} &= C_{ikl} \\ g_{li}g_{ij}g_{jl} &= C_{ijl} \\ g_{jk}g_{ki}g_{ij} &= C_{ijk} \end{aligned} \tag{3.19}$$

と書き換えることができる．$C_{jkl}C_{ikl}^{-1}C_{ijl}$ を計算すると

$$C_{jkl}C_{ikl}^{-1}C_{ijl} = g_{lj}g_{jk}g_{ik}^{-1}g_{ij}g_{jl} \tag{3.20}$$

となる．左から g_{jl}，右から g_{jl}^{-1} をかけると

$$C_{jkl}C_{ikl}^{-1}C_{ijl} = g_{jk}g_{ik}^{-1}g_{ij} \tag{3.21}$$

となる．最後に右から式 (3.19) の C_{ijk}^{-1} をかけることによって

$$C_{jkl}C_{ikl}^{-1}C_{ijl}C_{ijk}^{-1} = 1 \tag{3.22}$$

が得られる．つまり，式 (3.17) のようにコサイクル条件を緩めたときに，C_{ijk} は条件 (3.22) を満たさなければならないということである．この条件は C_{ijk} が $Z(G)$ に値をとる Čech 2-コサイクルと見なせることを表している．この 2-コサイクルを Stiefel-Whitney 類といい，w_2 と表す[*22]．この Stiefel-Whitney 類は電気的 1-形式対称性の背景ゲージ場と思うことができる．したがって，電気的 1-形式対称性の対称性演算子は w_2 の Poincaré 双対で与えられる．より具体的には U_{ijk} は余次元 2 の曲面と見ることができ，C_{ijk} が 1 でない U_{ijk} をつなげると余次元 2 の曲面で構成された閉じたネットワークが構成できる．これが電気的 1-形式対称性の対称性演算子である[*23]．実際にこの余次元 2 の曲面 U_{ijk} にリンクする 1 次元のループを考えると，コサイクル条件が緩められていることから Wilson ループを計算すると余分な位相 C_{ijk} を出すことが分かる．

3.2.5 QED

次に，電気的 1-形式対称性が物質場があるときにはどのように変更を受けるのかについて調べる．例えば具体的に電荷 N の物質場 ϕ が $U(1)$ ゲージ場 a と結合している場合を考えると，電気的 $U(1)^{(1)}$ 対称性は $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性に破れる．これについて遮蔽を用いた方法と上述の三通りの見方を用いた方法について解説する．

- 遮蔽を用いた方法
  電荷 N の物質場があるため，Wilson ライン W_n は W_{n+kN} によって遮蔽される．実際，点演算子として ϕ^k を挿入することでゲージ不変にすることができるため，W_n は W_{n+kN} によって遮蔽される．したがって遮蔽による同値関係で割って得られる電荷の集合は $\mathbb{Z}_N$ となる．Pontryagin 双対をとることで，電荷 N の物質場があるときの電気的 1-形式対称性は $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ となることが分かる．

[*22] 通常の Stiefel-Whitney 類はゲージ群としてスピン群を取ったときのもののことを言うが，構成は同じであるためここではこの 2-コサイクルも Stiefel-Whitney 類と呼ぶ．

[*23] このように構成される演算子を Gukov-Witten 演算子という [36, 37].

- 運動方程式を用いた方法

  電荷 N の物質場がある場合，a についての運動方程式は

  $$\frac{1}{e^2} d*f = *j \tag{3.23}$$

  と修正される．ここで電気的 1-形式対称性の対称性演算子のトポロジカル性について考える．対称性演算子を定義する多様体を $M^{(d-2)}$ から $M'^{(d-2)} = M^{(d-2)} + \partial V^{(d-1)}$ に変形したとき，対称性演算子 $U^e_{e^{i\alpha}}$ の変化分は

  $$\begin{aligned} \exp\left[\frac{i\alpha}{e^2}\int_{\partial V^{(d-1)}} *f\right] &= \exp\left[\frac{i\alpha}{e^2}\int_{V^{(d-1)}} d*f\right] \\ &= \exp\left[i\alpha\int_{V^{(d-1)}} *j\right] \end{aligned} \tag{3.24}$$

  となる．ここで $*j$ の積分は $V^{(d-1)}$ 中の電荷の総量を測っており，さらに物質場の電荷は N であることからこの値は N の倍数とならなければならない．したがって，一般の α に対して対称性演算子 $U^e_{e^{i\alpha}}$ はトポロジカルではない．対称性演算子がトポロジカルとなるのは $\alpha = \frac{2\pi k}{N}$, $(k = 0, 1, \cdots, N-1)$ のときである．これは電気的 $U(1)^{(1)}$ 対称性が $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性に破れていることを意味する．

- シフト対称性としての見方を用いた方法

  電荷 N の物質場 ϕ があることによって作用は共変微分 $D\phi = d\phi + iNa\phi$ を含むこととなる．そのためゲージ場のシフト変換 (3.9) と同時に物質場も変換しなければならない．物質場の電荷は N なので，共変微分を不変にするには $N\epsilon = d\lambda$ となるコンパクトスカラー λ を用いて

  $$\phi \to e^{-i\lambda}\phi \tag{3.25}$$

  と変換させればよい．このような λ が存在するのは ϵ の周期が $\frac{2\pi}{N}\mathbb{Z}$ のときのみであるため，電気的 1-形式対称性の群は $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ であることが分かる．

- 中心対称性としての見方を用いた方法

  この方法では $U(1)$ ゲージ場は局所 1-形式 a_i と変換関数 g_{ij} によって表されたが，物質場 ϕ についても各開集合 U_i 上で定義された ϕ_i を張り合わせることで構成される．U_{ij} 上での張り合わせ条件は

  $$\phi_i = \rho(g_{ij})\phi_j \tag{3.26}$$

  となる．ここで ρ は ϕ が属するゲージ群の表現であり，今の場合は $\rho(g) = g^N$ である．U_{ijk} 上で場が一意に定義されるための条件から

  $$\rho(g_{ij}g_{jk}g_{ki}) = 1 \tag{3.27}$$

  が導かれる．今の場合は，

  $$g_{ij}g_{jk}g_{ki} = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}n\right), \qquad n = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{3.28}$$

  となる．つまり，電気的 1-形式対称性の対称性演算子を挿入することはコサイクル条件を緩めることであったが，電荷 N の物質場がある場合は (3.28) を満たさなければならないということである．したがって，中心対称性としての見方からも $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性となることが分かる．

3.2.6 $SU(N)$ Yang-Mills 理論

$SU(N)$ の中心は $\mathbb{Z}_N$ なので $SU(N)$ Yang-Mills 理論の電気的 1-形式対称性は $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性である．これは遮蔽の考え方からも次のように理解することができる．$SU(N)$ の表現は Lie 代数 $\mathfrak{su}(N)$ の表現と同じであり，ウェイト格子 Λ_w 上の点として表される．物質場がいない場合にも Yang-Mills 理論にはグルーオンがいるため，グルーオンによる遮蔽からくる同一視が入る．グルーオンは随伴表現に従うため，これはルート格子 Λ_r による同一視を考えることと等価である．Λ_w/Λ_r は中心 $\mathbb{Z}_N$ と同型になることが知られているため，$SU(N)$ Yang-Mills 理論には $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性があることが分かる．また $SU(N)$ の表現は Young 図形で表すこともできるが，随伴表現で割ることは Young 図形の箱の数を mod N で数えることに対応する．この数を N-ality と呼ぶ.

また，N-ality が n の物質場を入れた場合には，$\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性は $\mathbb{Z}_{\gcd(N,n)}^{(1)}$ 対称性まで破れる．したがって，基本表現に従う物質場を入れた場合は電気的 1-形式対称性は完全に破れることが分かる．

3.3 磁気的 $(d-3)$-形式対称性

ゲージ理論には重要な高次形式対称性がもう一つある．それは磁気的 $(d-3)$-形式対称性である．電気的 1-形式対称性が電束の保存に対応していたように，磁気的 $(d-3)$-形式対称性は磁束の保存に対応する．また，電気的 1-形式対称性の荷電演算子である Wilson ラインはテスト電荷の軌跡を表していたが，磁気的 $(d-3)$-形式対称性の荷電演算子は 't Hooft 演算子と呼ばれ，テスト磁荷，つまりモノポールの軌跡を表す.

3.3.1 モノポールと 't Hooft 演算子

磁気的 $(d-3)$-形式対称性の話に入る前に，モノポールと 't Hooft 演算子について説明する．話を具体的にするために，$U(1)$ Maxwell 理論における原点に静止したモノポールを考える．モノポールを取り囲む小さな二次元球面 S^2 を考え，北半球 U_N と南半球 U_S に分ける．それぞれの半球上のゲージ場を $a_\mathrm{N}, a_\mathrm{S}$ とし，赤道 S^1 上の変換関数を $g = e^{i\lambda}$ とする (図 13)．すると，S^1 上では

$$a_\mathrm{N} = a_\mathrm{S} + d\lambda \tag{3.29}$$

となる．このとき，S^2 を貫く磁束を計算すると，

$$\begin{aligned}\int_{S^2} \frac{f}{2\pi} &= \int_{U_\mathrm{N}} \frac{da_\mathrm{N}}{2\pi} + \int_{U_\mathrm{S}} \frac{da_\mathrm{S}}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{S^1} (a_\mathrm{N} - a_\mathrm{S}) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{S^1} d\lambda\end{aligned} \tag{3.30}$$

となり，λ の巻き付き数に一致する．つまり，巻き付き数 n のゲージ変換によって張り合わされるようなゲージ場の配位を考えると，磁荷 n のモノポールを考えることとなる.

これを踏まえると，'t Hooft 演算子 $T_n(\gamma^{(d-3)})$ は次のように定義できる．$\gamma^{(d-3)}$ の各点において $\gamma^{(d-3)}$ にリンクする小さな二次元球面を考える．'t Hooft 演算子の挿入は，その二次元球面上で $\frac{f}{2\pi}$ を積分すると n になるという境界条件を置くという形で定義される．つまり，式で表すと

$$\langle T_n(\gamma^{(d-3)})\rangle = \int_{\int_{S^2}\frac{f}{2\pi}=n} \mathcal{D}a\, e^{iS[a]} \tag{3.31}$$

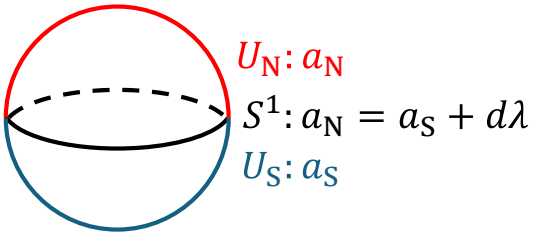


図 13: モノポールの配位

ということである．

3.3.2 磁気的 $U(1)^{(d-3)}$ 対称性

前節で 't Hooft 演算子を定義したので，本節では $U(1)$ Maxwell 理論の磁気的 $(d-3)$-形式対称性について説明する．磁気的 $(d-3)$-形式対称性は Bianchi 恒等式

$$df = 0 \tag{3.32}$$

を保存則とする対称性である．つまり，保存電流は

$$*j_m = \frac{1}{2\pi} f \tag{3.33}$$

であり，対称性演算子は

$$U^m_{e^{i\alpha}}(M^{(2)}) = \exp\left[\frac{i\alpha}{2\pi}\int_{M^{(2)}} f\right] \tag{3.34}$$

となる．対称性演算子は二次元曲面上で定義されているため，この対称性は $(d-3)$-形式対称性である．また，モノポールの磁荷は $\mathbb{Z}$ でラベルされているため，対称性の群はその Pontryagin 双対の $U(1)$ となる．対称性演算子の 't Hooft 演算子への作用は

$$U^m_{e^{i\alpha}}(M^{(2)})T_n(\gamma^{(d-3)}) = e^{in\alpha\,\mathrm{Link}(M^{(2)},\gamma^{(d-3)})}T_n(\gamma^{(d-3)}) \tag{3.35}$$

となる．これは 't Hooft 演算子の定義から明らかである．

3.3.3 G ゲージ理論

次に一般のゲージ群 G に対する磁気的 $(d-3)$-形式対称性について考える．まず，一般の G ゲージ理論におけるモノポールの磁荷はどのように表されるのか．$U(1)$ の場合は磁荷は赤道上の変換関数の巻き付き数によってラベルされていた．この巻き付き数の起源は変換関数を $g: S^1 \to U(1)$ という写像と見たときのホモトピー類である．したがって一般のゲージ群に対しても赤道上の変換関数を $g: S^1 \to G$ という写像とみることで，モノポールの磁荷は G の基本群 $\pi_1(G)$ でラベルされることが分かる．つまり，G ゲージ理論の磁気的

$(d-3)$ 対称性の群は $\pi_1(G)$ の Pontryagin 双対である[*24][*25].

3.3.4 電磁双対性

電磁双対性とはゲージ群 G の強結合のゲージ理論と，ゲージ群 G^v の弱結合の理論が等価であるというものである[*26]．この双対性の際に電気的対称性と磁気的対称性が入れ替わる．したがって，磁気的対称性は双対の理論の電気的対称性として解釈することができる．

例えば，$U(1)$ ゲージ理論の場合の電磁双対性は，ゲージ場 a と $\frac{1}{e^2} * f = d\tilde{a}$ を満たす $(d-3)$-形式 $\tilde{a}$ の入れ替えとして記述できる．元の理論における 't Hooft 演算子は双対なゲージ場 $\tilde{a}$ の Wilson ライン

$$T_n(\gamma^{(d-3)}) = \exp\left[in\int_{\gamma^{(d-3)}}\tilde{a}\right] \tag{3.36}$$

として表すことができ，磁気的対称性は $\tilde{a}$ のシフト対称性として解釈できる．

また非可換ゲージ理論の場合は，例えば四次元 $SU(N)$ ゲージ理論の電磁双対は四次元 $PSU(N)$ ゲージ理論である[*27]．$\pi_1(PSU(N)) = \mathbb{Z}_N$ なので四次元 $PSU(N)$ ゲージ理論には磁気的 $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性があり，四次元 $SU(N)$ ゲージ理論には電気的 $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性がある．これらの対称性が電磁双対によって結びつく．

3.4 ソリトン的対称性

高次形式対称性の重要な例としてソリトン的対称性と呼ばれるものがある [39, 40]．ソリトン的対称性は SSB 相で現れるトポロジカルソリトンに関する対称性であり，低エネルギーで創発する対称性である．ソリトン的対称性は場の配位空間のトポロジーによって決まる．よく知られている例としては離散対称性が SSB した際のドメインウォールや，$U(1)^{(0)}$ 対称性が破れた際の渦糸などがある．多くのソリトン的対称性は標的空間のホモトピー群によって理解することができる．

場 ϕ が標的空間 $\mathcal{M}$ に値を取るとし，k 次のホモトピー群 $\pi_k(\mathcal{M})$ が非自明であるとする．このとき，$(d-k-1)$ 次元の多様体 $\Sigma^{(d-k-1)}$ にリンクする k 次元球面 S^k を考え，ϕ を S^k に制限すると，$\pi_k(\mathcal{M})$ の元が得られる．ホモトピー群の異なる元に対応する場の配位同士は連続変形では移れないため，トポロジカルな量に保護されたソリトンが定義される．このソリトンの電荷は $\pi_k(\mathcal{M})$ でラベルされるため対応する対称性の群は Pontryagin 双対を取った $\widehat{\pi_k(\mathcal{M})}$ となる．つまり，$\pi_k(\mathcal{M})$ が非自明なとき，$\widehat{\pi_k(\mathcal{M})}^{(d-k-1)}$ 対称性があることが示唆される．ただし，ここで注意すべきなのはホモトピー群が非自明であるからと言って必ずしもトポロジカルな演算子があるとは言えないということである．例えば，$\mathbb{C}P^1$ シグマ模型は $\pi_3(\mathbb{C}P^1) \simeq \mathbb{Z}$ であるが，対応する $(d-4)$-形式対称性の群は $U(1)$ ではなく $\mathbb{Z}_2$ となることが知られている [41][*28]．このような現象はより低次のホモトピー群が非自明な場合に起こる [39, 40].

3.4.1 ドメインウォール

ドメインウォールは離散的な 0-形式対称性が SSB した際に現れるトポロジカルソリトンである．離散 $G^{(0)}$ 対称性がその正規部分群 $H^{(0)}$ に SSB したとき，低エネルギー有効理論は G/H シグマ模型となる．G/H は

[*24] Lie 群の基本群は必ず可換群となるため Pontryagin 双対を考えることができる.
[*25] 実は磁気的 $(d-3)$ 対称性はソリトン的対称性として解釈することも可能である．詳しくは 3.4 節を参照.
[*26] G^v は G の Langlands 双対，または GNO 双対などと呼ばれるものである [38].
[*27] $PSU(N) = SU(N)/\mathbb{Z}_N$ である.
[*28] 実は，代わりに非可逆な対称性があることが知られている [41].

離散であることから $\pi_0(G/H) \simeq G/H$ となるため，$(d-1)$-形式対称性があることが分かる．G/H が可換群となるときは Pontryagin 双対をとることで $\widehat{G/H}^{(d-1)}$ の対称性がある．例えば $\mathbb{Z}_N^{(0)}$ 対称性が完全に SSB した場合は $\mathbb{Z}_N^{(d-1)}$ 対称性が創発する．

G/H が非可換となる場合は Pontryagin 双対とはならず，$\mathrm{Rep}(G/H)$ という非可逆対称性となることが知られている．Rep については 6.1.3 節で詳しく説明する．

3.4.2 渦糸

連続対称性が SSB した場合には南部-Goldstone 粒子が出てくるため離散対称性の場合とは状況が大きく異なる．連続対称性が SSB した際にトポロジカルソリトンが現れる例としてもっとも簡単なものは，超流動相における渦糸である．超流動相は $U(1)^{(0)}$ 対称性が SSB した相であり，その際の低エネルギー有効理論は次のようなコンパクトボソンの理論となる．

$$S = \frac{v^2}{2} \int d\varphi \wedge *d\varphi \tag{3.37}$$

ただし，φ はコンパクトボソンを表すため $\varphi \sim \varphi + 2\pi$ であることに注意が必要である．$\pi_1(U(1)) \simeq \mathbb{Z}$ であることからコンパクトボソンには巻き付き数を定義することができる．巻き付き数の電荷は

$$\frac{1}{2\pi} \int d\varphi \tag{3.38}$$

によって測られる．この値が非自明となるような $(d-2)$ 次元の欠陥を渦糸と呼ぶ．渦糸の電荷は整数でラベルされているためこの対称性は $U(1)^{(d-2)}$ 対称性である．

3.4.3 モノポール

3.3 節では d 次元ゲージ理論における磁気的対称性について詳しく述べた．ここでは磁気的対称性がソリトン的対称性とみなせることについて説明する．ゲージ群を G としたとき，G ゲージ場は BG シグマ模型とみなせることが知られている．ここで BG は G の分類空間である[*29]．分類空間のホモトピー群に関して

$$\pi_2(BG) \simeq \pi_1(G) \tag{3.39}$$

が成り立つ．このことから，$\pi_1(G)$ が非自明なとき，G ゲージ理論には $\widehat{\pi_1(G)}^{(d-3)}$ 対称性があることが分かる．これはまさしく 3.3 節で述べた磁気的対称性である．したがって，磁気的対称性はソリトン的対称性と解釈することができる．

3.4.4 インスタントン

四次元の G ゲージ理論[*30]にはインスタントンと呼ばれるソリトン解がある．インスタントン数はゲージ場の強さを f として

$$\frac{1}{8\pi^2} \int \mathrm{Tr}(f \wedge f) \tag{3.40}$$

と表される．また，インスタントンの作用への寄与はシータ項と呼ばれ

$$S = \frac{1}{g^2} \int \mathrm{Tr}(f \wedge *f) + \frac{i\theta}{8\pi^2} \int \mathrm{Tr}(f \wedge f) \tag{3.41}$$

[*29] 分類空間については付録 B を参照.
[*30] G は単純 Lie 群とする.

のように表される．

実はインスタントンは $\pi_3(G) \simeq \mathbb{Z}$ であることからくるトポロジカルソリトンであるとみなせる．実際，モノポールの場合と同様に G ゲージ理論を BG シグマ模型と見たとき，

$$\pi_4(BG) \simeq \pi_3(G) \simeq \mathbb{Z} \tag{3.42}$$

となるため，$U(1)^{(d-5)}$ 対称性があることが分かる．ここでは $d = 4$ としているため $U(1)^{(-1)}$ 対称性となる．一見 (-1)-形式対称性など考えられないように思えるが，対称性演算子が余次元 0，つまり時空のある領域にあると解釈すると (-1)-形式対称性を考えることができる．この対称性の保存電流は

$$\frac{1}{8\pi^2}\,\mathrm{Tr}(f \wedge f) \tag{3.43}$$

であり，背景ゲージ場は $U(1)$ 値 0-形式，つまりコンパクトボソン ϕ となる．したがって，背景ゲージ場を入れた作用は

$$S = \frac{1}{g^2}\int \mathrm{Tr}(f \wedge *f) + \frac{i}{8\pi^2}\int \phi\,\mathrm{Tr}(f \wedge f) \tag{3.44}$$

と表される．この表式において $\phi(x) \equiv \theta$ と取るとシータ項付きの作用 (3.41) に一致することが分かる．つまり，シータ項は (-1)-形式対称性の背景ゲージ場として定数を取ったものとして解釈することができる [42, 43].

3.4.5 $\mathbb{C}P^1$ シグマ模型

ホモトピー群によるソリトンの分類とソリトン的対称性が異なる例として $\mathbb{C}P^1$ シグマ模型がある．$\mathbb{C}P^1$ シグマ模型は $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ を満たす二つの複素スカラー z_1, z_2 と $U(1)$ ゲージ場 a を用いて次のような作用で記述される．

$$S = \int |d\vec{z} - ia\vec{z}|^2 \tag{3.45}$$

$U(1)$ ゲージ場 a は補助場としての役割を担っており，運動方程式を解くと

$$a = -i\vec{z}^{\,\dagger} \cdot d\vec{z} \tag{3.46}$$

となる．

$\mathbb{C}P^1$ は S^2 と同相であり，ホモトピー群として非自明なのは

$$\pi_2(\mathbb{C}P^1) \simeq \mathbb{Z}, \qquad \pi_3(\mathbb{C}P^1) \simeq \mathbb{Z} \tag{3.47}$$

がある．$\pi_3(\mathbb{C}P^1) \simeq \mathbb{Z}$ は S^3 を S^2 の S^1 ファイバー束として表す表し方をラベルしており，Hopf ファイブレーションなどと呼ばれる．また，Hopf ファイブレーションに対応するようなトポロジカルソリトンを Hopfion と呼ぶ.

$\pi_2(\mathbb{C}P^1) \simeq \mathbb{Z}$ の電荷を測る演算子は $U(1)$ ゲージ場 a を用いて

$$\mathcal{V}_\alpha(S^2) = \exp\left[i\alpha\int_{S^2}\frac{da}{2\pi}\right] \tag{3.48}$$

と表される．この表式から，これは $U(1)$ ゲージ理論の磁気的対称性と同様のものであることが分かる．$\pi_3(\mathbb{C}P^1) \simeq \mathbb{Z}$ の電荷は

$$\mathcal{H}_\alpha(S^3) = \exp\left[\frac{i\alpha}{4\pi^2}\int_{S^3} a \wedge da\right] \tag{3.49}$$

という演算子で測られる．確かに，式 (3.46) から $a \wedge da$ は $S^3 = \{\vec{z} \in \mathbb{C}^2 | |\vec{z}| = 1\}$ 上の 3-形式なので $d(a \wedge da) = 0$ となり保存電流となっていることが分かる．したがってナイーブには $U(1)^{(d-4)}$ があるように思えるが，実は (3.49) の表式はゲージ不変でない．実際 (3.49) がゲージ不変となるのは $\alpha = \pi$ のときだけであり，Hopfion に関する対称性は $U(1)$ ではなく $\mathbb{Z}_2$ となることが知られている[*31]．

[*31] 実は $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$ のときは非可逆対称性として Hopfion 対称性を実現できることが知られている [41].

4 アノマリー

本章では 't Hooft アノマリーについて解説する．'t Hooft アノマリーは理論の相構造に重要な制限を与える．これは，'t Hooft アノマリーが繰り込み群不変量であるためである．そのため，UV の理論でアノマリーがあれば，IR の理論でもアノマリーを持つことが分かる [9]．これをアノマリー整合条件という．自明な相，つまり基底状態が一つで質量ギャップを持つ相はアノマリーを持つことができないため，アノマリーの存在は非自明な相構造を示唆する．これについては 4.6，4.7 で具体例を議論する．

また，アノマリーは非可逆対称性の理解の上でも重要である．多くの非可逆対称性はアノマリーを持つ可逆な対称性の部分群ゲージ化によって得られることが知られている．これについては 6.6 で詳しく述べる．

4.1 't Hooft アノマリー

理論が大域的対称性を持つ場合でも，背景ゲージ場を結合させると作用がゲージ不変にならない場合がある．特にその変化分が c-数で書けるとき 't Hooft アノマリーがあるという[*32]．数式では

$$Z[A^g] = e^{i\mathcal{A}(g,A)} Z[A] \tag{4.1}$$

と書ける．ただし，A^g はゲージ場 A の $g(x)$ によるゲージ変換を表す．分配関数の中に作用は e^{iS} という形で入っているため，作用の言葉ではアノマリーは

$$S[A^g] = S[A] + \mathcal{A}(g, A) \mod 2\pi \tag{4.2}$$

と表される[*33][*34]．ただし，ここで一つ注意が必要である．一般に背景ゲージ場を結合させる際に，背景ゲージ場のみからなる相殺項を加える自由度がある．'t Hooft アノマリーとはどのような相殺項を加えても作用が不変にならないときのことを言う．

背景ゲージ場のゲージ不変性は対称性演算子のトポロジカル性を意味していたため，対称性にアノマリーがあるというのは対称性演算子のトポロジカル性が壊れていることを意味する．

't Hooft アノマリーの例の一つでよく出てくるものとして混合アノマリーと呼ばれるものがある．これは対称性が $G_1 \times G_2$ のときに G_1, G_2 の背景ゲージ場を両方入れるとゲージ不変ではなくなるようなアノマリーのことである．つまり，G_1, G_2 のゲージ場をそれぞれ A_1, A_2 とし，それぞれのゲージ変換を考えると一般には次のように作用は変換する．

$$S[A_1^{g_1}, A_2^{g_2}] = S[A_1, A_2] + \mathcal{A}_1(g_1, A_1) + \mathcal{A}_2(g_2, A_2) + \mathcal{A}_{12}(g_1, g_2, A_1, A_2) \mod 2\pi \tag{4.3}$$

このうち，$\mathcal{A}_{12}$ の部分を混合アノマリーと呼ぶ．

4.2 アノマリー流入

本節ではアノマリーを理解する上で重要となるアノマリー流入という考え方について説明する．アノマリー流入とは d 次元の場の理論のアノマリーが $(d+1)$ 次元の TQFT によって打ち消すことができるという考え

[*32] 本論文で登場するアノマリーはほとんどが 't Hooft アノマリーであるため，単にアノマリーと書いた場合は 't Hooft アノマリーを表すこととする．

[*33] ただし，$S[A^g]$ という表式は単に作用 $S[A]$ に $A = A^g$ を代入したものではなく，一般には理論に含まれる場も変換することに注意が必要である．

[*34] ゲージ変換によって積分測度が変化する場合もあるが，その場合は変化分を作用に押し付けて作用の変化と見なすこととする．

方である [10, 44]．より詳しく述べると，d 次元の作用 $S[A; X^{(d)}]$ がゲージ変換で不変でないとき，図 14 のように $\partial Y^{(d+1)} = X^{(d)}$ となるような $d+1$ 次元の多様体上の TQFT の作用 $\mathcal{A}[A; Y^{(d+1)}]$ を足し合わせた作用

$$S[A; X^{(d)}] + \mathcal{A}[A; Y^{(d+1)}] \tag{4.4}$$

を考えることでゲージ不変にすることができるということである．

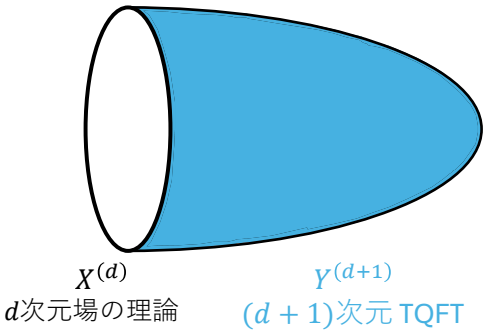


図 14: アノマリー流入

また作用 S ではなく，相殺項 $S^{\mathrm{ct}}[A; X^{(d)}] = \int_{X^{(d)}} \mathcal{L}^{\mathrm{ct}}(A)$ を加えた作用

$$\tilde{S}[A; X^{(d)}] = S[A : X^{(d)}] + S^{\mathrm{ct}}[A; X^{(d)}] \tag{4.5}$$

を考えることができるが，この作用に対するアノマリー流入の作用は

$$\tilde{\mathcal{A}}[A; Y^{(d+1)}] = \mathcal{A}[A; Y^{(d+1)}] - \int_{Y^{(d+1)}} d\mathcal{L}^{\mathrm{ct}}(A) \tag{4.6}$$

となる．

以上のことから，d 次元の背景ゲージ場付きの作用がゲージ不変でなく，かつそれが $(d+1)$ 次元の全微分では書けない作用によって打ち消されるときはアノマリーがあることが分かる[*35]．

アノマリー流入で現れる $(d+1)$ 次元の TQFT は実は可逆な場の理論 (IFT) というものになっていることが知られている．IFT とは Hilbert 空間の次元が一次元となるような TQFT であり，このとき分配関数は $\mathbb{C}^\times$ に値を取る．また，物性系の文脈では IFT は 対称性によって保護されたトポロジカル相 (SPT 相) と呼ばれることもある [19]．SPT 相とは対称性を破るような摂動項を加えることで自明な相と繋がるが，対称性を保つような摂動では自明な相と繋がらないような相のことである．対称性を考慮しなければ自明な相であるため，ギャップを持ち，かつ基底状態は縮退していない．そのため Hilbert 空間の次元は一次元となり，IFT によって記述されることが分かる．

[*35] 一般にどのような相殺項を加えてもゲージ不変にならないことを示すのは非常に困難であるが，アノマリー流入の考え方を用いるとゲージ不変性を保つための一つ高い次元の作用が全微分で書けるかどうかでアノマリーを判定することができる

4.3 各次元のアノマリー

4.3.1 量子力学におけるアノマリー

量子力学，つまり $(0+1)$ 次元の場の理論のアノマリーは射影表現と対応している．理論の可逆対称性 G にアノマリーがないとき対称性演算子は

$$U_g U_h = U_{gh} \tag{4.7}$$

というフュージョン則に従う．これは U が群 G から Hilbert 空間上の可逆な線形変換がなす群への準同型写像，つまり群 G の表現であることを意味する．しかし，対称性 G にアノマリーがある場合は対称性演算子は G の表現とはならず

$$U_g U_h = e^{i\phi(g,h)} U_{gh} \tag{4.8}$$

という式を満たす．この式は U が G の表現ではなく，射影表現となっていることを表す．U_g, U_h, U_k の合成を二通りの方法で計算すると

$$\begin{aligned} (U_g U_h) U_k &= e^{i\phi(g,h)} U_{gh} U_k = e^{i\phi(g,h)+i\phi(gh,k)} U_{ghk} \\ U_g (U_h U_k) &= e^{i\phi(h,k)} U_g U_{hk} = e^{i\phi(h,k)+i\phi(g,hk)} U_{ghk} \end{aligned} \tag{4.9}$$

となるため，ϕ に関して

$$\phi(h,k) + \phi(g,hk) = \phi(g,h) + \phi(gh,k) \tag{4.10}$$

が成り立たなければならない．これは $\phi : G \times G \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ が 2-コサイクルであることを意味する[*36]．また，$\lambda : G \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ を用いて $U_g \to e^{i\lambda(g)} U_g$ と変換すると ϕ は

$$\phi(g,h) \to \phi(g,h) + \lambda(h) + \lambda(g) - \lambda(gh) \tag{4.11}$$

と変換する．これは ϕ が 2-コバウンダリー $\delta\lambda$ だけ変化することを表す．したがって，射影表現は 2 次の群コホモロジー $H^2(G; U(1))$ で分類される．

図 15 のように U_g, U_h を挿入した分配関数 $Z[g,h]$ を考える．サイト i において h をかけるゲージ変換を考えると，U_g と U_h の合成を考えることとなり $e^{i\phi(g,h)} U_{gh}$ が得られる．つまり分配関数としては

$$Z[g,h] \to e^{i\phi(g,h)} Z[gh] \tag{4.12}$$

となり，確かに射影表現がアノマリーを表していることが分かる．

4.3.2 二次元場の理論におけるアノマリー

二次元場の理論における 0-形式対称性は一次元のトポロジカルラインによって記述され，可逆対称性のアノマリーは F-move と呼ばれる図 16 のような操作の際に生じる位相 $e^{i\omega(g,h,k)}$ として解釈することができる[*37][*38]．実際，格子理論として図 17 のような対称性演算子のネットワークの挿入を考えると，サイト i でのゲージ変換が F-move に対応していることが分かる．

[*36] 群コホモロジーについては 付録 C を参照.

[*37] ただし，トポロジカルラインは平坦なゲージ場に対応するため，場の強さで表されるようなアノマリーは F-move では表せないと考えられる.

[*38] この位相は F-symbol と呼ばれ，フュージョン圏を定める重要な情報の一つである．フュージョン圏については 6.1 で詳しく述べる.

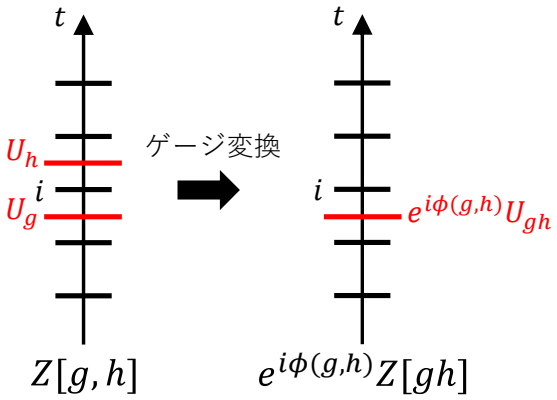


図 15: 量子力学におけるアノマリー

また，図 18 のような四つのトポロジカルラインのフュージョンを考えることで次の五角形恒等式が導かれる．

$$\omega(gh,k,l)+\omega(g,h,kl)=\omega(g,h,k)+\omega(g,hk,l)+\omega(h,k,l) \tag{4.13}$$

これは

$$\delta\omega(g,h,k,l)=0 \tag{4.14}$$

つまり，ω が 3-コサイクルであることを表す．また，各ジャンクションに対し位相 $e^{i\eta(g,h)}$ を割り当てる自由度があり，3-コサイクル ω はこの操作によって

$$\omega\to\omega+\delta\eta \tag{4.15}$$

と変化する．したがって 3-コバウンダリーの差は同一視されるので，二次元場の理論における可逆対称性のアノマリーは $H^3(G;U(1))$ によって分類されることが分かる．

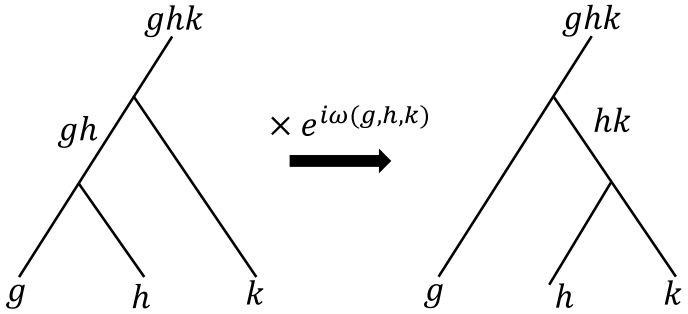


図 16: F-move

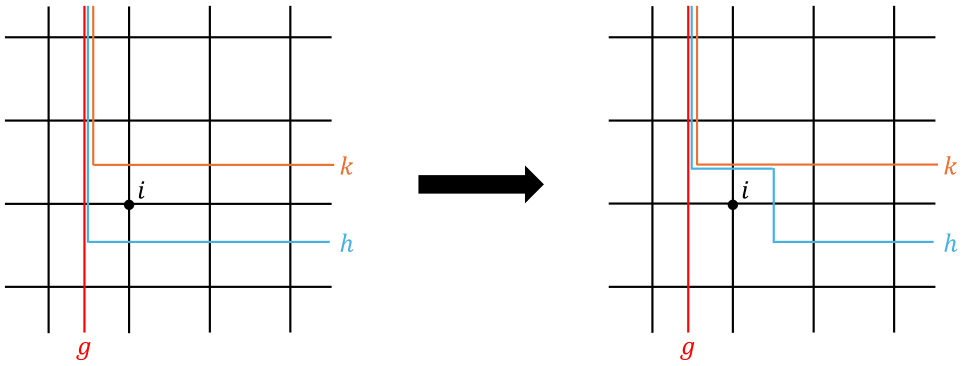


図 17: 格子理論における F-move

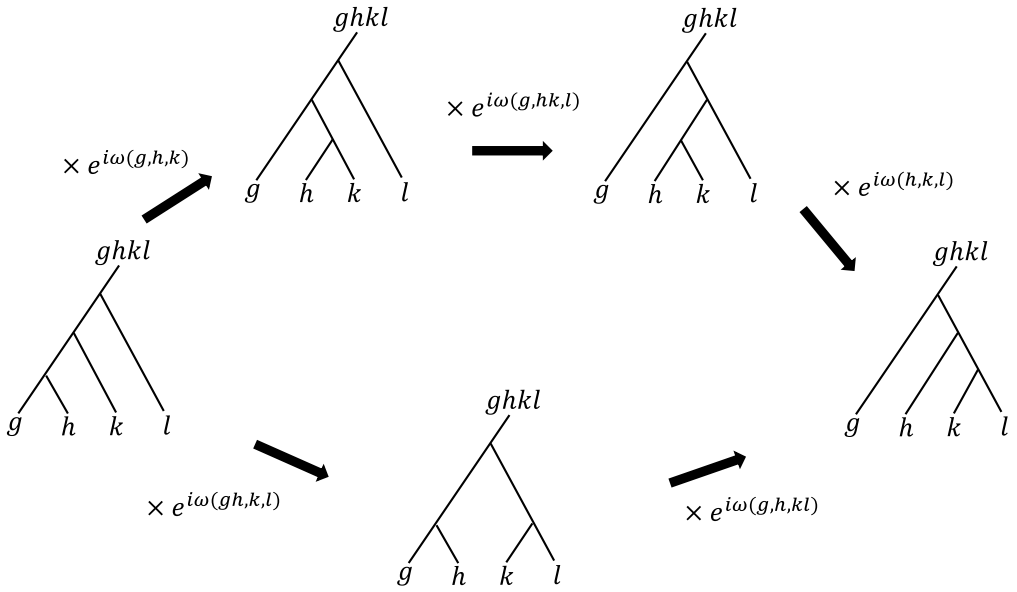


図 18: 五角形恒等式

4.3.3 三次元場の理論におけるアノマリー

三次元場の理論における 0-形式対称性の対称性演算子は二次元閉多様体上に定義される[*39]．そのため，対称性演算子のジャンクションは 1 次元となり，さらにジャンクションのジャンクションを考えると 0 次元となる．図 19 のようなジャンクションのジャンクションを $e(g,h,k)$ と表すこととする．これは図 20 のような二つのフュージョンの間の変形 (F-move) である． すると，図 21 の左から右への変換を考えた際に位相 $e^{i\omega(g,h,k,l)}$ を割り当てることができる．これは図 22 のような変換であり，

$$e^{i\omega(g,h,k,l)} : e(gh,k,l) \otimes e(g,h,kl) \to e(g,h,k) \otimes e(g,hk,l) \otimes e(h,k,l) \tag{4.16}$$

という射である[*40]．

[*39] 本節の内容は [45, 46] を参考にした．

[*40] 三次元の場の理論における対称性は 2-フュージョン圏と呼ばれる数学的言葉を用いて記述されることが知られている．2-フュージョン圏の言葉では $e(g,h,k)$ は 2-射であり，上式のテンソル積は 2-射のテンソル積を表す．また，ここでは 2-群のような高次

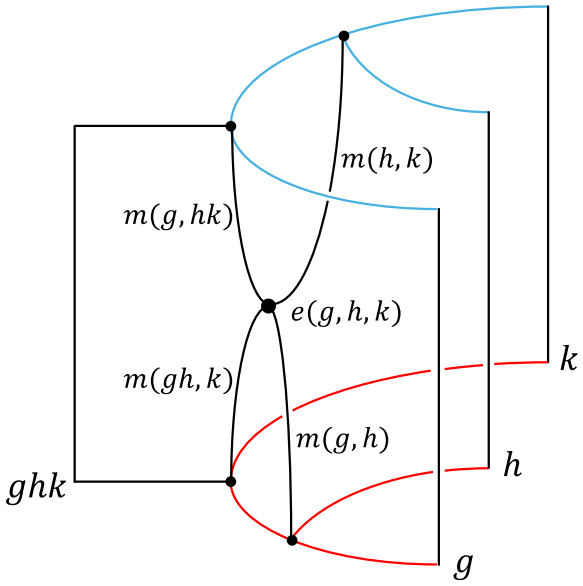


図 19: $e(g,h,k)$ の定義

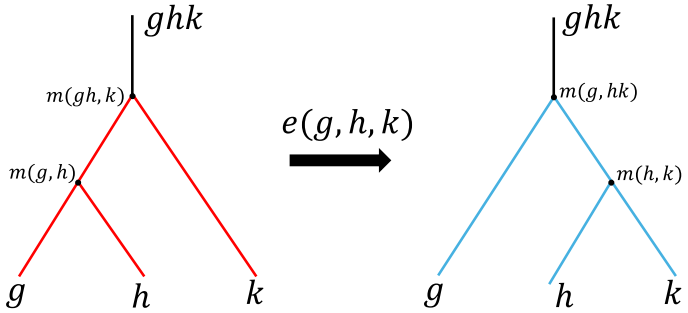


図 20: F-move としての $e(g,h,k)$

ω が満たすべき条件を求めるために

$$\begin{aligned} &e(ghk,l,m)\otimes e(gh,k,lm)\otimes e(g,h,klm)\to \\ &\qquad e(h,k,l)\otimes e(h,kl,m)\otimes e(k,l,m)\otimes e(g,hk,l)\otimes e(g,hkl,m)\otimes e(g,h,k) \end{aligned} \tag{4.17}$$

を二通りの方法で計算する．一つ目の方法は

$$\begin{aligned} e^{i\omega(h,k,l,m)} &: e(hk,l,m)\otimes e(h,k,lm)\to e(h,k,l)\otimes e(h,kl,m)\otimes e(k,l,m)\\ e^{i\omega(g,hk,l,m)} &: e(ghk,l,m)\otimes e(g,hk,lm)\to e(g,hk,l)\otimes e(g,hkl,m)\otimes e(hk,l,m)\\ e^{i\omega(g,h,k,lm)} &: e(gh,k,lm)\otimes e(g,h,klm)\to e(g,h,k)\otimes e(g,hk,lm)\otimes e(h,k,lm) \end{aligned} \tag{4.18}$$

を組み合わせることで計算される．二つ目の方法は

$$\begin{aligned} e^{i\omega(gh,k,l,m)} &: e(ghk,l,m)\otimes e(gh,k,lm)\to e(gh,k,l)\otimes e(gh,kl,m)\otimes e(k,l,m)\\ e^{i\omega(g,h,kl,m)} &: e(gh,kl,m)\otimes e(g,h,klm)\to e(g,h,kl)\otimes e(g,hkl,m)\otimes e(h,kl,m)\\ e^{i\omega(g,h,k,l)} &: e(gh,k,l)\otimes e(g,h,kl)\to e(g,h,k)\otimes e(g,hk,l)\otimes e(h,k,l) \end{aligned} \tag{4.19}$$

群対称性の構造はないと仮定している．2-群の場合の議論は [45] を参照.

を組み合わせることで計算される．これら二通りの方法で同じ結果を出すために ω は

$$\begin{aligned}\delta\omega(g,h,k,l,m) = \omega(h,k,l,m) + \omega(g,hk,l,m) + \omega(g,h,k,lm) \\ - \omega(gh,k,l,m) - \omega(g,h,kl,m) - \omega(g,h,k,l) = 0\end{aligned} \tag{4.20}$$

を満たす必要がある．つまり，ω は 4-コサイクルでなければならない．また，各 $e(g,h,k)$ に対して $e^{i\phi(g,h,k)}$ をかける自由度があるが，この変更によって ω は

$$\omega(g,h,k,l) \to \omega(g,h,k,l) + \delta\phi(g,h,k,l) \tag{4.21}$$

と変化する．つまり 4-コバウンダリーの違いは同一視することができる．よって，三次元場の理論における $G^{(0)}$ 対称性のアノマリーは $e^{i\omega} \in H^4(G, U(1))$ によって分類される．

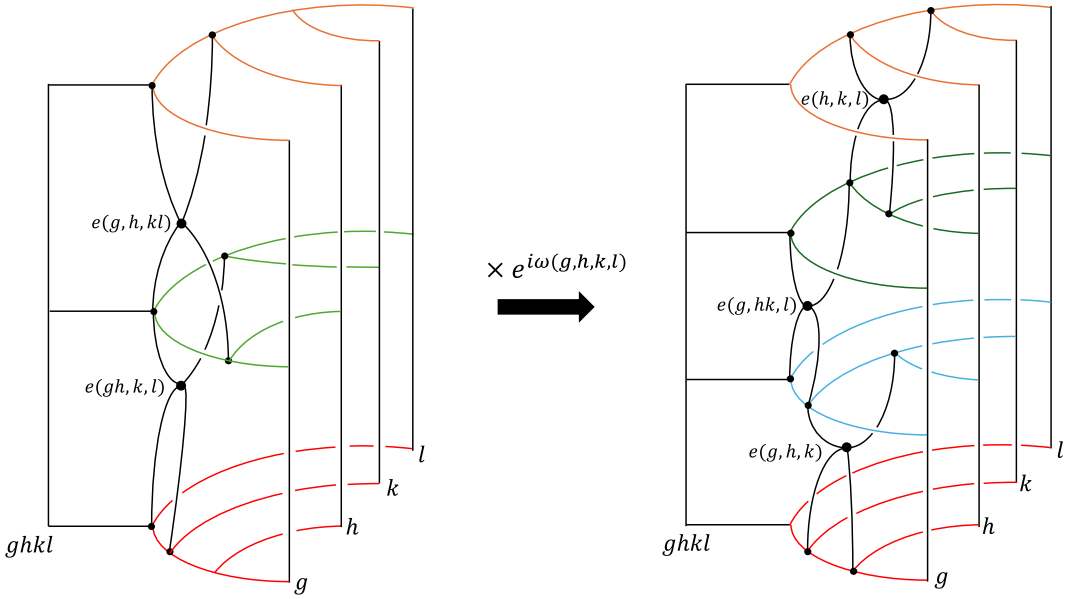


図 21: $e^{i\omega(g,h,k,l)}$ の定義

4.4 場の理論における具体例

本節では，場の理論におけるアノマリーの具体例を述べる．アノマリーの相構造への制限も含めた議論は 4.6，4.7 を参照．

4.4.1 $U(1)$ Chern-Simons 理論

3 次元 $U(1)$ レベル k Chern-Simons 理論の作用は

$$S = \frac{k}{4\pi}\int a \wedge da \tag{4.22}$$

と表される．ゲージ変換 (2.18) を考えると

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{k}{4\pi}\int (2\epsilon \wedge da + \epsilon \wedge d\epsilon) \\ &= \frac{k}{2\pi}\int \epsilon \wedge da\end{aligned} \tag{4.23}$$

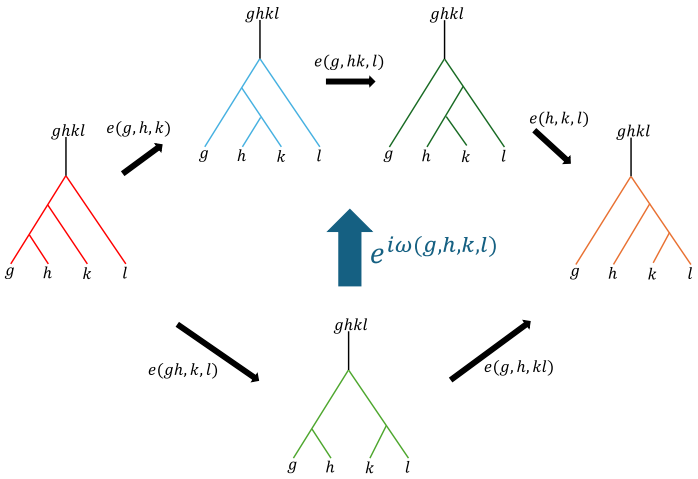


図 22: $e^{i\omega(g,h,k,l)}$ に対応する変形

となり，作用は不変とはならない．しかしその変化分は ϵ と da の積分がそれぞれ $2\pi\mathbb{Z}$ に値をとることから

$$\delta S \in 2\pi k\mathbb{Z} \tag{4.24}$$

となることが分かる．分配関数には作用は e^{iS} の形でしか現れないため，$\delta S \in 2\pi\mathbb{Z}$ であればゲージ不変性は満たされる．したがって，Chern-Simons 理論がゲージ不変であるためには $k \in \mathbb{Z}$ でなければならない．

この理論には $\mathbb{Z}_k^{(1)}$ 対称性があることが知られている．これは $U(1)$ Maxwell 理論の電気的対称性と同様にゲージ場のシフト対称性と解釈できる．実際，閉 1-形式 ϵ によってゲージ場 a をシフトすると (4.23) と同様の計算となり，作用が不変となるには

$$\int \epsilon \in \frac{2\pi}{k}\mathbb{Z} \tag{4.25}$$

でなければならないことが分かる．さらに，$\int \epsilon \in 2\pi\mathbb{Z}$ のときはゲージ変換となるため自明な変換である．よって，この対称性は $\mathbb{Z}_k^{(1)}$ 対称性となる．

この対称性の背景ゲージ場を結合させた作用は

$$S[B] = \frac{k}{4\pi}\int (a \wedge da - 2a \wedge B) \tag{4.26}$$

であり，ゲージ変換は

$$a \to a + \epsilon^{(1)}, \qquad B \to B + d\epsilon^{(1)} \tag{4.27}$$

と書ける．ただし，B は $\mathbb{Z}_k$ ゲージ場を $U(1)$ ゲージ場を用いて表したものであり，$\epsilon^{(1)}$ は周期が $\frac{2\pi}{k}\mathbb{Z}$ である．しかし，このゲージ変換で作用 (4.26) は不変ではなく，

$$\delta S[B] = -\frac{k}{4\pi}\int (2\epsilon^{(1)} \wedge B + \epsilon^{(1)} \wedge d\epsilon^{(1)}) \tag{4.28}$$

だけ変化する．したがって，この $\mathbb{Z}_k^{(1)}$ 対称性には 't Hooft アノマリーがある[*41]．このアノマリーに対するアノマリー流入の作用は

$$\mathcal{A}[B] = \frac{k}{4\pi}\int_4 B \wedge B \tag{4.29}$$

[*41] 厳密には上述のようにアノマリー流入の作用が全微分で書けないことから従う．

となる．ただし，$\int_d$ の d は d 次元多様体上で積分することを意味する．実際，ゲージ変換 (4.27) を行うと

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{A}[B] &= \frac{k}{4\pi}\int_4 (2d\epsilon^{(1)}\wedge B + d\epsilon^{(1)}\wedge d\epsilon^{(1)}) \\ &= \frac{k}{4\pi}\int_3 (2\epsilon^{(1)}\wedge B + \epsilon^{(1)}\wedge d\epsilon^{(1)})\end{aligned} \tag{4.30}$$

となり，式 (4.28) を打ち消すことが分かる．

4.4.2 $U(1)$ Maxwell 理論

3 章で述べたように $U(1)$ Maxwell 理論には電気的 $U(1)^{(1)}$ 対称性と磁気的 $U(1)^{(d-3)}$ 対称性が存在する．それぞれの対称性はアノマリーを持たないが，これらの間には混合アノマリーがあることが知られている．電気的 $U(1)^{(1)}$ 対称性の保存電流は $*j_e = \frac{1}{e^2} * f$ であり，磁気的 $U(1)^{(d-3)}$ 対称性の保存電流は $*j_m = \frac{1}{2\pi} f$ なので，背景ゲージ場付きの作用は

$$S[B_e^{(2)}, B_m^{(d-2)}] = \frac{1}{2e^2}\int (f - B_e^{(2)})\wedge *(f - B_e^{(2)}) + \frac{1}{2\pi}\int f\wedge B_m^{(d-2)} \tag{4.31}$$

となる．ゲージ変換は

$$\begin{aligned} a &\to a + \lambda_e^{(1)} \\ B_e^{(2)} &\to B_e^{(2)} + d\lambda_e^{(1)} \\ B_m^{(d-2)} &\to B_m^{(d-2)} + d\lambda_m^{(d-3)}\end{aligned} \tag{4.32}$$

のように表される．作用 (4.31) は磁気的対称性のゲージ変換に対しては

$$\delta S[B_e^{(2)}, B_m^{(d-2)}] = \frac{1}{2\pi}\int f\wedge d\lambda_m^{(d-3)} \in 2\pi\mathbb{Z} \tag{4.33}$$

となりゲージ不変であるが，電気的対称性のゲージ変換に対しては不変ではなく，

$$\delta S[B_e^{(2)}, B_m^{(d-2)}] = \frac{1}{2\pi}\int d\lambda_e^{(1)}\wedge B_m^{(d-2)} \tag{4.34}$$

となる．電気的対称性に関してゲージ不変にするには

$$S'[B_e^{(2)}, B_m^{(d-2)}] = \frac{1}{2e^2}\int (f - B_e^{(2)})\wedge *(f - B_e^{(2)}) + \frac{1}{2\pi}\int (f - B_e^{(2)})\wedge B_m^{(d-2)} \tag{4.35}$$

とすればよい．しかし，この作用は磁気的対称性のゲージ変換に関しては

$$\delta S'[B_e^{(2)}, B_m^{(d-2)}] = -\frac{1}{2\pi}\int B_e^{(2)}\wedge d\lambda_m^{(d-3)} \tag{4.36}$$

となり不変ではなくなる．どのような相殺項を加えても電気的対称性と磁気的対称性の両方に対してゲージ不変とすることはできないため，これらの対称性には混合アノマリーがある．

アノマリー流入の作用は (4.31) に対しては

$$\mathcal{A}[B_e^{(2)}, B_m^{(d-2)}] = -\frac{1}{2\pi}\int_{d+1} B_e^{(2)}\wedge dB_m^{(d-2)} \tag{4.37}$$

となり，(4.35) に対しては

$$\mathcal{A}[B_e^{(2)}, B_m^{(d-2)}] = +\frac{1}{2\pi}\int_{d+1} dB_e^{(2)}\wedge B_m^{(d-2)} \tag{4.38}$$

となる．これらは全微分項によって移り変わる．

次に，電気的 $U(1)^{(1)}$ 対称性を $\mathbb{Z}_{N_e}^{(1)}$ 部分群に制限し，磁気的 $U(1)^{(d-3)}$ 対称性を $\mathbb{Z}_{N_m}^{(d-3)}$ 部分群に制限した場合のアノマリーについて考える．それぞれの背景ゲージ場を $C_e^{(2)} \in H^2(X;\mathbb{Z}_{N_e}), C_m^{(d-2)} \in H^{d-2}(X;\mathbb{Z}_{N_m})$ とし，それらの $\mathbb{Z}$ 係数へのリフトを $\widehat{C}_e^{(2)} \in C^2(X;\mathbb{Z}), \widehat{C}_m^{(d-2)} \in C^{d-2}(X;\mathbb{Z})$ とする．元の $U(1)$ 背景ゲージ場との対応は

$$\begin{aligned} B_e^{(2)} &= \frac{2\pi}{N_e}\widehat{C}_e^{(2)} \\ B_m^{(d-2)} &= \frac{2\pi}{N_m}\widehat{C}_m^{(d-2)} \end{aligned} \tag{4.39}$$

となっている．これを式 (4.38) に代入すると

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[C_e^{(2)}, C_m^{(d-2)}] &= \frac{1}{2\pi}\int_{d+1} \frac{2\pi}{N_e}\delta\widehat{C}_e^{(2)} \cup \frac{2\pi}{N_m}\widehat{C}_m^{(d-2)} \\ &= \frac{2\pi}{N_m}\int \frac{\delta\widehat{C}_e^{(2)}}{N_e} \cup \widehat{C}_m^{(d-2)} \\ &= \frac{2\pi}{N_m}\int \beta(C_e^{(2)}) \cup \widehat{C}_m^{(d-2)} \end{aligned} \tag{4.40}$$

となる．ただし，微分 d は δ，ウェッジ積 $\wedge$ はカップ積 $\cup$ に置き換えた．また，

$$\beta(C_e^{(2)}) = \frac{1}{N_e}\delta\widehat{C}_e^{(2)} \mod N_e \tag{4.41}$$

は Bockstein 作用素である[*42]．したがって，$\mathbb{Z}_{N_e}^{(1)} \times \mathbb{Z}_{N_m}^{(d-3)}$ 対称性に制限した場合にも (4.40) のアノマリーがあるように思えるが，ここで一つだけ注意が必要である．実は N_e と N_m が互いに素なときはアノマリー (4.40) は消える．これは次のようにして分かる．

N_e, N_m が互いに素なので

$$N_e x + N_m y = 1 \tag{4.42}$$

を満たす整数 $x, y \in \mathbb{Z}$ が存在する．したがって，式 (4.40) は

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[C_e^{(2)}, C_m^{(d-2)}] &= \frac{2\pi}{N_m}\int (xN_e + yN_m)\beta(C_e^{(2)}) \cup \widehat{C}_m^{(d-2)} \\ &= 2\pi\int \left(\frac{xN_e}{N_m} + y\right)\beta(C_e^{(2)}) \cup \widehat{C}_m^{(d-2)} \\ &= 2\pi x\int \frac{1}{N_m}\delta\widehat{C}_e^{(2)} \cup \widehat{C}_m^{(d-2)} \\ &= -2\pi x\int \widehat{C}_e^{(2)} \cup \frac{1}{N_m}\delta\widehat{C}_m^{(d-2)} \\ &= -2\pi x\int \widehat{C}_e^{(2)} \cup \beta(C_m^{(d-2)}) \in 2\pi\mathbb{Z} \end{aligned} \tag{4.43}$$

と変形できる．したがって，N_e, N_m が互いに素な場合はアノマリーはない[*43][3].

[*42] B.4 を参照.

[*43] N_e, N_m が互いに素なときは $\mathbb{Z}_{N_e}$ と $\mathbb{Z}_{N_m}$ の間に自然な積を定めることができないことからもアノマリーがないことが分かる．

4.5 Dijkgraaf-Witten 理論

三次元以下の離散群対称性の場合の 't Hooft アノマリーは群コホモロジーで分類されることが知られている [11]．具体的には 0-形式の離散 G 対称性を持つ d 次元のボソン理論の 't Hooft アノマリーは $H^{d+1}(G;U(1))$ で分類される．このときのアノマリー流入の作用は $H^{d+1}(G;U(1))$ の元に対応する Dijkgraaf-Witten 理論と呼ばれる TQFT となる [47]．以下で Dijkgraaf-Witten 理論について説明する．

4.5.1 2 次元 Dijkgraaf-Witten 理論

まず，2 次元の Dijkgraaf-Witten 理論について説明する．$e^{i\omega} \in H^2(G;U(1))$ を一つ固定する．2 次元閉多様体 Y の三角形分割を取り，各辺に G の元を割り当てる[*44]．その際に図 23 のように三角形一周に沿って元を掛け合わせると単位元となるように元を選ぶ．これは G 値 1-コサイクル，つまり G ゲージ場の配位を一つ選ぶことに対応する．Dijkgraaf-Witten 理論の局所作用は 2-単体 (ijk) に対して $\pm\omega(g_{ij},g_{jk})$ によって与えられる．ただし，符号は (ijk) の向きと Y の向き付けが一致するときはプラスを取り，そうでないときはマイナスを取るものとする．全体の作用はすべての 2-単体についての $\pm\omega(g_{ij},g_{jk})$ の和となり，分配関数は

$$Z = \sum_{g_{ij}\in H^1(Y;G)} \prod_{(ijk)} e^{\pm i\omega(g_{ij},g_{jk})} \tag{4.44}$$

で与えられる．この作用が $H^2(G;U(1))$ の代表元の取り方によらないことは次のようにしてわかる．$\eta \in C^1(G;U(1))$ とし局所作用を $\omega \to \omega + \delta\eta$ と変化させるとき，図 24 のように二つの隣り合う 2-単体からの寄与を考えると

$$\begin{aligned}\delta\eta(g_{ij}.g_{jk}) - \delta\eta(g_{jk},g_{kl}) &= \eta(g_{jk}) - \eta(g_{ij}g_{jk}) + \eta(g_{ij}) - \eta(g_{kl}) + \eta(g_{jk}g_{kl}) - \eta(g_{jk}) \\ &= -\eta(g_{ij}g_{jk}) + \eta(g_{ij}) - \eta(g_{kl}) + \eta(g_{jk}g_{kl})\end{aligned} \tag{4.45}$$

となり，同じ辺を共有する部分の寄与は打ち消される．これは離散版の Stokes の定理と解釈できる．Y は境界を持たないので $\delta\eta$ による寄与は全て打ち消されることが分かる．

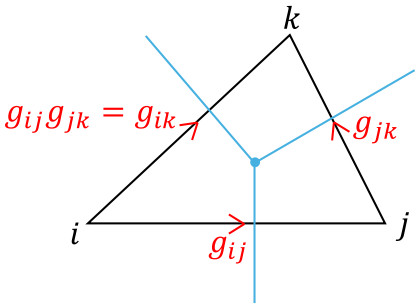


図 23: 二次元 Dijkgraaf-Witten 理論の G ゲージ場の配位

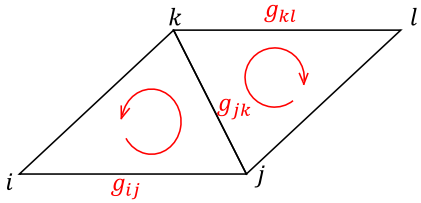


図 24: 2-コバウンダリーからの寄与

二次元 Dijkgraaf-Witten 理論が量子力学の対称性のアノマリーに対するアノマリー流入の作用となっていることを確かめる．そのためには境界付き多様体上で Dijkgraaf-Witten 理論を考えたときに量子力学の対称

[*44] 各辺の向きを考慮し，向きを逆向きにした場合は逆元を割り当てるものとする．

性のアノマリーが出ることを確かめればよい．図 25 の左側のような配位を考えたとき，i におけるゲージ変換を行うことで右側の配位に移ることができる．このゲージ変換によって Dijkgraaf-Witten 理論の作用は

$$\frac{e^{i\omega(g,h)}}{e^{i\omega(gh,1)}} \tag{4.46}$$

だけ変化するが，一般に $e^{i\omega(x,1)} = 1$ となるようにコホモロジーの代表元を選ぶことができるため，$e^{i\omega(g,h)}$ だけ変化したと思ってよい．これは境界上では

$$U_g U_h = e^{i\omega(g,h)} U_{gh} \tag{4.47}$$

と変化しており射影表現，つまり量子力学の対称性のアノマリーが現れる．したがって，二次元の Dijkgraaf-Witten 理論が量子力学のアノマリーのアノマリー流入の作用となっていることが分かった．

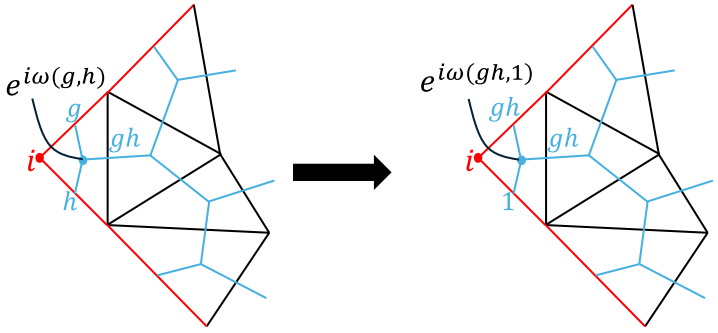


図 25: 境界付き二次元多様体上の Dijkgraaf-Witten 理論

4.5.2　3 次元 Dijkgraaf-Witten 理論

3 次元の Dijkgraaf-Witten 理論についても同様に構成できる．$e^{i\omega} \in H^3(G;U(1))$ を一つ固定する．三次元多様体 Y の三角形分割を取り，図 26 のように平坦条件を満たすように各辺に G の元を割り当てる．3-単体 $(ijkl)$ に対し $e^{i\omega(g_{ij},g_{jk},g_{kl})}$ を符号付きで割り当てる．つまり，Y の向きと $(ijkl)$ の向きが一致するときはプラス，そうでないときはマイナスを取るとする．分配関数は式 (4.44) と同じように

$$Z = \sum_{g_{ij}\in H^1(Y;G)} \prod_{(ijkl)} e^{\pm i\omega(g_{ij},g_{jk},g_{kl})} \tag{4.48}$$

として与えられる．$H^3(G;U(1))$ の代表元の取り方によらないことも二次元の場合と同様の計算で確かめられる．

三次元の Dijkgraaf-Witten 理論が二次元の対称性のアノマリーに対するアノマリー流入の作用となっていることを示す．まず，図 26 の 2-単体 (ijk) と (ikl) が境界となるような状況を考える．3-単体 $(ijkl)$ を取り除くと新たな境界は (ijl) と (jkl) となる．この操作の際に Dijkgraaf-Witten 理論の分配関数から $(ijkl)$ に割り当てられていた位相 $e^{i\omega(g_{ij}\cdot g_{jk}\cdot g_{kl})}$ の寄与が取り除かれる．また，この操作は境界の二次元理論上では図 27 のような F-move に対応していることが分かる．したがって，三次元の Dijkgraaf-Witten 理論によって二次元の理論のアノマリーが打ち消されることが分かる．

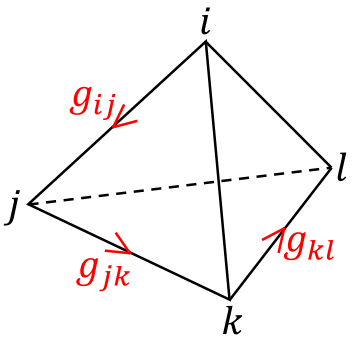


図 26: 三次元 Dijkgraaf-Witten 理論の G ゲージ場の配位

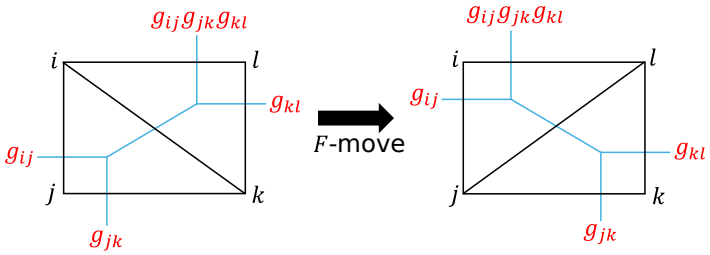


図 27: F-move と三次元 Dijkgraaf-Witten 理論

4.6 円周上の量子力学

本節では，アノマリーから相構造に制限がかかる例としてもっとも簡単なもののひとつである円周上の量子力学について議論する [25, 26]. シータ項を含む多くの理論（次節のゲージ理論を含む）で本節の議論は有効であるため，これを理解することは重要となる.

4.6.1 Hamilton 形式

S^1 上の量子力学のラグランジアンは

$$L_\theta = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + \frac{\theta}{2\pi}\dot{q} \tag{4.49}$$

で与えられる．ただし，q は S^1 上の変数であるため $q \sim q + 2\pi$ とする．q の共役運動量を求めると $p = m\dot{q} + \frac{\theta}{2\pi}$ であり，Hamiltonian は

$$H_\theta = \frac{m}{2}\dot{q}^2 = \frac{1}{2m}\left(p - \frac{\theta}{2\pi}\right)^2 \tag{4.50}$$

となる．この H_θ をユニタリ演算子 e^{iq} で変換すると

$$\begin{aligned} e^{iq}H_\theta e^{-iq} &= H_\theta + [iq, H_\theta] + \frac{1}{2}[iq,[iq,H_\theta]] + \cdots \\ &= \frac{1}{2m}\left(p - \frac{\theta}{2\pi}\right)^2 - \frac{1}{m}\left(p - \frac{\theta}{2\pi}\right) + \frac{1}{2m} \\ &= \frac{1}{2m}\left(p - \frac{\theta+2\pi}{2\pi}\right)^2 \\ &= H_{\theta+2\pi} \end{aligned} \tag{4.51}$$

となる．つまり，θ と $\theta + 2\pi$ は等価であることがわかる．

固有方程式

$$\frac{1}{2m}\left(-i\frac{d}{dq} - \frac{\theta}{2\pi}\right)^2 \Psi_n = E_n \Psi_n \tag{4.52}$$

を解くと

$$\begin{aligned} \Psi_n(q) = \langle q|n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inq} \\ E_n &= \frac{1}{2m}\left(n - \frac{\theta}{2\pi}\right)^2 \end{aligned} \tag{4.53}$$

となる．この表式からも θ と $\theta + 2\pi$ が等価であることが見て取れるが，エネルギーレベルが交差していることに注意が必要である．つまり，例えば $-\pi < \theta < \pi$ の基底状態は $|0\rangle$ であるが，$\pi < \theta < 3\pi$ の基底状態は $|1\rangle$ であり，これらは $\theta = \pi$ で交差している (図 28)．その結果 $\theta = \pi$ では基底状態が二重に縮退している．また，これらの二つの状態 $|0\rangle, |1\rangle$ は以下で見るように $\mathbb{Z}_2$ 対称性によって移り変わるため，$\mathbb{Z}_2$ 対称性が自発的に破れていることが分かる[*45]．

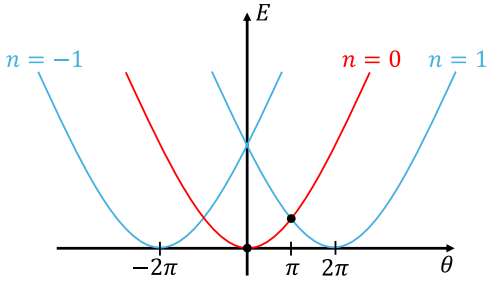


図 28: エネルギースペクトル

この理論の対称性について考える．Lagrangian (4.49) は $\dot{q}$ のみの関数であるため，q のシフト変換

$$U_\alpha : q \to q + \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \tag{4.54}$$

は対称性となる．また，$\theta = 0, \pi$ にはさらに次の荷電共役変換に対する対称性がある[*46]．

$$U_C : q \to -q \tag{4.55}$$

[*45] 通常の量子力学では，Stone-von-Neumann の定理によって Heisenberg 代数の既約表現は一意に決まるため，自発的対称性の破れは起こらない．しかし，ここでは q が円周上に値をとるため q ではなく e^{iq} を変数として考える必要がある．e^{iq}, p は Heisenberg 代数に従わないため，Stone-von-Neumann の定理の条件から外れ，自発的対称性の破れが起こってもよい．

[*46] 一般に $\theta \in \pi\mathbb{Z}$ で荷電共役対称性はあるが，ここでは $\theta \in [0, 2\pi)$ に制限して議論をする．

この変換は一般の θ に対しては L_θ の理論を $L_{-\theta}$ の理論に変える．$\theta = 0$ はこの変換で明らかに不変であり，$\theta = \pi$ では $L_\pi \to L_{-\pi}$ と変換するが θ の 2π シフトの等価性からこれは L_π と等価となるため，$\theta = \pi$ でも U_C は対称性となることが分かる．

$\theta = 0$ では U_α, U_C の $|n\rangle$ への作用は

$$\begin{aligned} U_\alpha |n\rangle &= e^{in\alpha} |n\rangle \\ U_C |n\rangle &= |-n\rangle \end{aligned} \tag{4.56}$$

となる．これらの式から

$$U_C U_\alpha U_C = U_{-\alpha} \tag{4.57}$$

となるため，U_α, U_C で生成される対称性は $O(2)$ 対称性となることが分かる．また，基底状態 $|0\rangle$ はこの $O(2)$ 変換に対して不変な状態である．

$\theta = \pi$ での U_α, U_C の $|n\rangle$ への作用は

$$\begin{aligned} U_\alpha |n\rangle &= e^{in\alpha} |n\rangle \\ U_C |n\rangle &= |-n+1\rangle \end{aligned} \tag{4.58}$$

となる．U_C の作用が $\theta = 0$ の場合と異なるのは $q \to -q$ の変換に加えて θ の 2π シフトに対応する e^{iq} をかける必要があるからである．この場合は式 (4.57) は

$$U_C U_\alpha U_C = e^{i\alpha} U_{-\alpha} \tag{4.59}$$

のように変更される．したがって，I_α という演算子を新たに

$$I_\alpha |n\rangle = e^{i\alpha} |n\rangle \tag{4.60}$$

と定義すると，式 (4.59) は

$$U_C U_\alpha U_C = I_\alpha U_{-\alpha} \tag{4.61}$$

と書ける．I_α はスカラー倍の演算子であり，U_α, U_C と可換，つまり中心の元となっており，したがって式 (4.61) はこの表現が $O(2)$ の射影表現となっていることを表す．言い換えると $\theta = \pi$ における対称性の群は $O(2)$ を中心拡大したものとなっている．実際，$\alpha \in [0, 4\pi)$ に対して $\widetilde{U}_\alpha = I_{-\alpha/2} U_\alpha$ と定義すると式 (4.61) は

$$U_C \widetilde{U}_\alpha U_C = \widetilde{U}_{-\alpha} \tag{4.62}$$

となる．この式は式 (4.57) と同じだが，α の範囲が $[0, 4\pi)$ となり倍になっている．したがって，$\theta = \pi$ における対称性は $O(2)$ の $\mathbb{Z}_2$ による中心拡大であることが分かる．この対称性の群は $Pin^+(2)$ と呼ばれる．この中心拡大における中心の元は $\widetilde{U}_{2\pi} = I_\pi = -1$ である．また，$\theta = \pi$ の基底状態 $|0\rangle, |1\rangle$ は U_C によってたがいに移りあう．したがって，$\mathbb{Z}_2$ 荷電共役対称性は自発的に破れ，残る対称性は $SO(2)$ となる．

4.3.1 で述べたように，射影表現はアノマリーと解釈できる．実際に今回の場合では，q のシフト対称性と荷電共役対称性の間に混合アノマリーがあることが確かめられる．具体的にはシフト対称性の背景ゲージ場を入れた際に荷電共役対称性が $\theta = \pi$ では破れることを見ればよい．シフト対称性の背景ゲージ場 A_0 を入れた Lagrangian は

$$L_{\theta,k} = \frac{m}{2}(\dot{q} + A_0)^2 + \frac{\theta}{2\pi}(\dot{q} + A_0) + kA_0 \tag{4.63}$$

と書ける．最後の項は 1 次元の Chern-Simons 項であり，相殺項とみなすことができる．また A_0 のゲージ変換に対する不変性から $k \in \mathbb{Z}$ でなければならない．この Lagrangian においては θ を 2π シフトすると相殺項が変化するため等価ではない．その代わりに $(\theta, k) \sim (\theta + 2\pi, k - 1)$ という等価性がある．

荷電共役変換はゲージ場に対しては $A_0 \to -A_0$ と作用する．したがって，$\theta = 0$ の場合は相殺項を $k = 0$ とすれば荷電共役変換に対して作用は不変である．$\theta = \pi$ の場合は荷電共役変換を行うと $(\pi, k) \to (-\pi, -k) \sim (\pi, -k - 1)$ となるため，$k = -k - 1$ でなければならない．しかし，これは $k \in \mathbb{Z}$ に矛盾するため，そのような相殺項は存在しない．したがって，背景ゲージ場 A_0 を入れた場合は $\theta = \pi$ では荷電共役対称性は破れていることが分かる．これはシフト対称性と荷電共役対称性の間に混合アノマリーがあることを意味する．アノマリーがあるため基底状態は非自明でなければならないが，確かに $\theta = \pi$ では基底状態が二重縮退している．

4.6.2 経路積分形式

次に経路積分形式で円周上の量子力学を解析する．そのために，Euclid 化を行い，さらに時間方向を周長 β の S^1 にコンパクト化する．この時の分配関数は

$$Z[\theta] = \int \mathcal{D}q \, \exp\left[- \int dt \, \left(\frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{i\theta}{2\pi} \dot{q} \right) \right] \tag{4.64}$$

と表される．まずこの分配関数を計算してエネルギー固有値 (4.53) を求める．今 q は S^1 から S^1 への写像なので巻き付き数を考えることができる．巻き付き数が $w \in \mathbb{Z}$ の配位は

$$q(t) = \frac{2\pi w}{\beta} t + \delta q(t) \tag{4.65}$$

と書ける．ただし，δq は揺らぎを表し，$\delta q(\beta) = \delta q(0)$ を満たす．これを作用に代入すると

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{E}}[\theta] &= \int dt \, \left[\frac{m}{2} \left(\frac{2\pi w}{\beta} + \delta \dot{q} \right)^2 - \frac{i\theta}{2\pi} \left(\frac{2\pi w}{\beta} + \delta \dot{q} \right) \right] \\ &= \int dt \, \left(\frac{m}{2} (\delta \dot{q})^2 + \frac{2\pi^2 m}{\beta^2} w^2 - \frac{i\theta}{\beta} w \right) \\ &= \frac{m}{2} \int dt \, (\delta \dot{q})^2 + \frac{2\pi^2 m}{\beta} w^2 - i\theta w \end{aligned} \tag{4.66}$$

となる．ただし，二つ目の等号では $\delta \dot{q}$ が全微分項であるために消えることを用いた．この表式を式 (4.64) に代入すると

$$Z[\theta] = \int \mathcal{D}(\delta q) \, \exp\left[- \frac{m}{2} \int dt \, (\delta \dot{q})^2 \right] \sum_{w \in \mathbb{Z}} \exp\left[- \frac{2\pi^2 m}{\beta} w^2 + i\theta w \right] \tag{4.67}$$

となる．δq の積分については定数の寄与しか与えないので無視する．w についての和を変形するために次の Poisson 和公式を用いる．

$$\sum_{w \in \mathbb{Z}} f(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \tag{4.68}$$

ただし，ここで $\widehat{f}$ は f の Fourier 変換

$$\widehat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, f(x) e^{-2\pi i k x} \tag{4.69}$$

である．$f(x) = e^{-ax^2+bx}$ とすると，

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ax^2+(b-2\pi ik)x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-a\left(x-\frac{b-2\pi ik}{2a}\right)^2+\frac{(b-2\pi ik)^2}{4a}} \\ &\propto e^{\frac{(b-2\pi ik)^2}{4a}}\end{aligned} \tag{4.70}$$

となる．これを用いて (4.67) を計算すると

$$Z[\theta] \propto \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\beta\frac{1}{2m}\left(n-\frac{\theta}{2\pi}\right)^2} \tag{4.71}$$

となり，エネルギー固有値 (4.53) が導出された[*47]．

次に，混合アノマリーがあることを見るために，シフト対称性の背景ゲージ場と結合させる．背景ゲージ場を結合させた Euclid 作用は

$$S_{\mathrm{E}}[\theta, k, A_0] = \int dt\, \left[\frac{m}{2}(\dot{q}+A_0)^2 - \frac{i\theta}{2\pi}(\dot{q}+A_0) - ikA_0\right] \tag{4.72}$$

と表される．以下では簡単のために定数の背景ゲージ場 $A_0 \equiv \frac{\mu}{\beta}$ を考える．背景ゲージ場なしの場合と同様に $q(t)$ を (4.65) のように分解すると，δq の積分を分離することができる．θ, A_0 に依存する部分のみを取り出すと

$$Z[\theta, k, \mu] \propto \sum_{w\in\mathbb{Z}} \exp\left[-\frac{2\pi^2 m}{\beta}w^2 + \left(i\theta - \frac{2\pi m\mu}{\beta}\right)w - \frac{m\mu^2}{2\beta} + i\mu\left(\frac{\theta}{2\pi}+k\right)\right] \tag{4.73}$$

となる．同様に Poisson 和公式 (4.68) を用いると

$$\begin{aligned}Z[\theta, k, \mu] &\propto \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left[-\frac{\beta}{2m}\left(n - \frac{\theta}{2\pi} - i\frac{m\mu}{\beta}\right)^2 - \frac{m\mu^2}{2\beta} + i\mu\left(\frac{\theta}{2\pi}+k\right)\right] \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left[-\frac{\beta}{2m}\left(n-\frac{\theta}{2\pi}\right)^2 + i\mu(n+k)\right]\end{aligned} \tag{4.74}$$

と求まる．

分配関数 (4.74) の言葉で $\theta \to \theta + 2\pi$ の変換を考えると

$$\begin{aligned}Z[\theta+2\pi, k-1, \mu] &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left[-\frac{\beta}{2m}\left(n - \frac{\theta+2\pi}{2\pi}\right)^2 + i\mu(n+k-1)\right] \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left[-\frac{\beta}{2m}\left((n-1) - \frac{\theta}{2\pi}\right) + i\mu\Big((n-1)+k\Big)\right] \\ &= Z[\theta, k, \mu]\end{aligned} \tag{4.75}$$

となるため，$(\theta+2\pi, k-1) \sim (\theta, k)$ という等価性が再導出された．また，2π シフトによってエネルギー準位がずれていることも見て取れる．$\theta = \pi$ において荷電共役変換を考えると

$$Z[\pi, k, \mu] \to Z[-\pi, -k, \mu] = Z[\pi, -k-1, \mu] \tag{4.76}$$

[*47] この導出を見ると分かるように巻き付き数とエネルギー準位のラベルは異なることに注意.

となるため，荷電共役対称性を持つためには $k=-k-1$ でなければならない．しかしこのような整数 k は存在しないため荷電共役対称性は破れていることが分かる．

また，次のように考えることもできる．荷電共役対称性を無理やり保つためには $k=-1/2$ とすればよいが，すると A_0 に対するゲージ変換 $\mu\to\mu+2\pi l$ に対して分配関数が不変でなくなる．実際その変化は (4.74) を用いて

$$Z[\theta,-1/2,\mu+2\pi l]=(-1)^l Z[\theta,-1/2,\mu] \tag{4.77}$$

となる．

4.6.3 相互作用

次に

$$V(\cos(Nq)) \tag{4.78}$$

という形の相互作用を加えた場合について考える．ただし，$N\in\mathbb{N}_{>1}$ である．このとき，q の $U(1)$ シフト対称性は $\mathbb{Z}_N$ 対称性に破れる．つまり，$U_{\frac{2k\pi}{N}}$，$(k=0,1,\cdots,N-1)$ のみが対称性となる．$\theta=0$ では式 (4.57) は変わらず，α のとれる範囲が狭くなるだけなので対称性は二面体群 D_{2N} となる．

$\theta=\pi$ の場合について経路積分形式で $\mathbb{Z}_N$ 対称性の背景ゲージ場を結合させて解析する．背景ゲージ場 A を $\mathbb{Z}_N$ 値に制限するために $U(1)$ 0-形式ゲージ場 B を用いて $NA=dB$ という制限をつける．背景ゲージ場付きの作用は

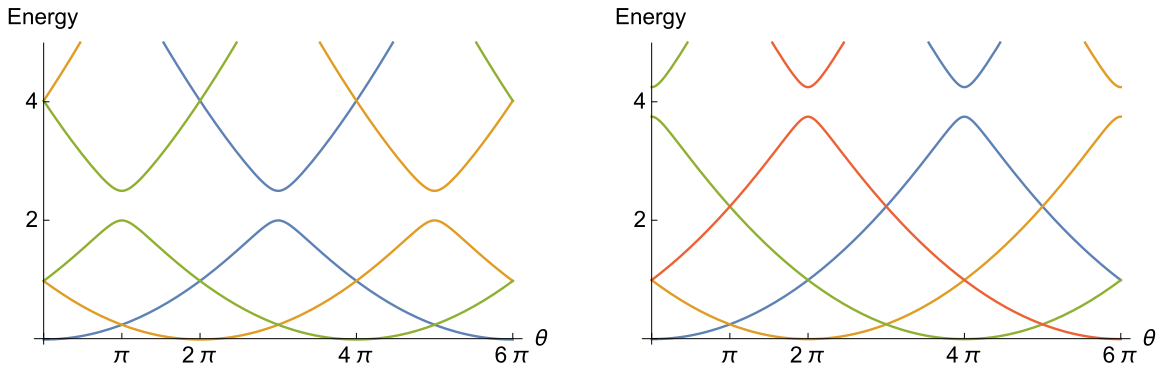
$$S_{\mathrm{E}}[\theta,k,A,B]=\int dt\ \left[\frac{m}{2}(\dot{q}+A_0)^2+V(\cos(Nq+B))-\frac{i\theta}{2\pi}(\dot{q}+A_0)-ikA_0\right] \tag{4.79}$$

となり，ゲージ変換は

$$\begin{aligned} q&\to q-\lambda\\ A&\to A+d\lambda\\ B&\to B+N\lambda \end{aligned} \tag{4.80}$$

と表される．A は $\mathbb{Z}_N$ ゲージ場であることから A の周期は $\frac{2\pi}{N}\mathbb{Z}$ となるため，相殺項のラベル k は $\mathbb{Z}_N$ 値と思ってよい．すると，$\theta=\pi$ において荷電共役変換が対称性となるための条件は $k=-k-1$ であったが，この等式が $\bmod N$ で成り立ってればよいことが分かる．したがって，N の偶奇によって場合分けが必要となる．

1. N が偶数のとき
   このときは $k=-k-1$ の解は存在しないため $\theta=\pi$ で荷電共役対称性が破れている．つまり，$\mathbb{Z}_N$ シフト対称性と $\mathbb{Z}_2$ 荷電共役対称性の間には混合アノマリーがある．そのため，エネルギー固有状態は D_{2N} の射影表現に従い，基底状態は二重縮退している．
2. $N>1$ が奇数のとき
   このときは $k=\frac{N-1}{2}$ とすればよいため，アノマリーはないことが分かる．そのため $\theta=\pi$ でエネルギー固有状態は D_{2N} の射影表現には従わないが，この場合にも基底状態に少し弱い制限をかけることができる．これは次のようにして分かる．荷電共役対称性を保つには $\theta=0$ では $k=0$ でなければならず，$\theta=\pi$ では $k=\frac{N-1}{2}$ でなければならない．そのため，$\theta=0,\pi$ において同一の相殺項で荷電共役対称性を保つことはできないので，$\theta=0,\pi$ いずれかの真空構造が非自明でなければならない．実際，図 29 のように N が奇数の場合も $\theta=\pi$ で真空が二重縮退していることが分かる．しかし，励起状態は偶数と奇数で差が現れている．$N=4$ では励起状態も射影表現に従うため縮退しているが，$N=3$ では励起状態は縮退していない．



(a) $N = 3$ **(b)** $N = 4$

図 29: $V(\cos(Nq)) = 0.5\cos(Nq)$ としたときのエネルギースペクトル ([26] より引用)

4.7 ゲージ理論

$SU(N)$ ゲージ理論への応用について解説する [25]．基本的には前節の円周上の量子力学と同様である．4 次元のシータ項付きの $SU(N)$ Yang-Mills 理論を考える．

$$S = \frac{1}{g^2}\int \mathrm{Tr}(f \wedge *f) + \frac{i\theta}{8\pi^2}\int \mathrm{Tr}(f \wedge f) \tag{4.81}$$

θ の理論と $\theta + 2\pi$ の理論は等価であるが，線演算子のスペクトルの間の対応関係が非自明になることが知られており，これを Witten 効果という [48]．CP 変換は $\theta \to -\theta$ とする変換なので，円周上の量子力学の場合と同様に $\theta = 0, \pi$ では CP 対称性があることが分かる．

この理論には $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性があるため，2-形式背景ゲージ場 B を挿入した作用を考えることができる．その際に一般には B のみに依存する相殺項を作用に加えることができる．相殺項の一般的な形は

$$\frac{2\pi i k}{2N}\int B \cup B \tag{4.82}$$

と表される[*48]．パラメータ k は $k \sim k + 2N$ であり，N が奇数のときは k は偶数でなければならない．上述した Witten 効果のために，θ の 2π シフトにおいて B の相殺項も変更を受ける．具体的には (θ, k) で表される理論と等価になるのは $(\theta + 2\pi, k + N - 1)$ の理論である．これについては 4.7.1 節で示す．

$\theta = 0$ の場合は $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性の背景ゲージ場を挿入しても CP 対称性は存在する．しかし $\theta = \pi$ のときは背景ゲージ場を挿入すると θ の 2π シフトが非自明な変換を引き起こすことから，CP 変換が対称性となるためには

$$k = -k + N - 1 \tag{4.83}$$

を満たさなければならない．

1. N が偶数のとき

   このとき (4.83) を満たすような k は存在しないことから CP 対称性はないことが分かる．つまり，

[*48] 正しくは Pontryagin square と呼ばれるものを用いて表す必要があるが [49]，torsion のない四次元多様体を考えている限りは違いは現れない．ここではそのような多様体のみを考えているものとする．

$\theta = \pi$ のとき $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性と CP 対称性の間には混合アノマリーがある．このことから $\theta = \pi$ では $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性と CP 対称性が同時に保たれた自明な相は存在しないことが分かる．例えば，$\theta = \pi$ における閉じ込め相では $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性は保たれているので，CP 対称性は自発的に破れるか，もしくは真空が非自明な相となる必要がある[*49]．

2. N が奇数のとき
   このとき (4.83) の解は，$N = 1 \bmod 4$ なら $k = (N-1)/2$，$N = 3 \bmod 4$ なら $k = (3N-1)/2$ となる．したがって，N が奇数のときは $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性と CP 対称性の間に混合アノマリーはない．しかし，4.6.3 節の N が奇数の場合と同様に，$\theta = 0$ と $\theta = \pi$ で同じ相殺項で CP 対称性を保つことはできない．したがってこの場合には，$\theta = 0$ と π の間に相転移があるか，もしくは $\theta = 0, \pi$ のいずれかの真空の構造が非自明でなければならないことが結論付けられる．

4.7.1 相殺項の導出

本節では (θ, k) の理論と $(\theta + 2\pi, k + N - 1)$ の理論が等価になることを示す．まず，$SU(N)$ ゲージ理論に $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性の背景ゲージ場 B を結合させる．そのためには B を $U(1)$ 1-形式ゲージ場 $\widetilde{C}$ と $U(1)$ 2-形式ゲージ場 $\widetilde{B}$ で $N\widetilde{B} = d\widetilde{C}$ を満たすものとして表すと便利である．このとき，B と $\widetilde{B}$ は $\widetilde{B} = \frac{2\pi}{N} B$ として関係付いている．さらに，$SU(N)$ ゲージ場 a ではなく，一旦 $U(N)$ ゲージ場

$$\widetilde{a} = a + \frac{1}{N} c \mathbf{1}_N \tag{4.84}$$

を導入し，次のような結合を考える．

$$\frac{i}{2\pi} u \wedge (\operatorname{Tr} \widetilde{f} - d\widetilde{C}) \tag{4.85}$$

ただし，$\widetilde{f}$ は $\widetilde{a}$ の場の強さであり，c は $U(1)$ 1-形式ゲージ場，u は $U(1)$ 2-形式ゲージ場である．このとき，$U(1)$ ゲージ変換は

$$\begin{aligned} c &\to c + N\lambda \\ \widetilde{C} &\to \widetilde{C} + N\lambda \\ \widetilde{B} &\to \widetilde{B} + d\lambda \end{aligned} \tag{4.86}$$

となる．このゲージ変換を用いると，c の自由度は消して $SU(N)$ ゲージ場に戻すことができる．

これらの場を用いてインスタントン項がどのように書けるかを考える．ゲージ変換 (4.86) で不変となるように構成すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi^2} \operatorname{Tr}\Big(\widetilde{f} - \widetilde{B}\mathbf{1}_N\Big) \wedge (\widetilde{f} - \widetilde{B}\mathbf{1}_N) &= \frac{1}{8\pi^2} \operatorname{Tr} \widetilde{f} \wedge \widetilde{f} - \frac{1}{4\pi^2} \widetilde{B} \wedge \operatorname{Tr} \widetilde{f} + \frac{N}{8\pi^2} \widetilde{B} \wedge \widetilde{B} \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \operatorname{Tr} \widetilde{f} \wedge \widetilde{f} - \frac{N}{4\pi^2} \widetilde{B} \wedge \widetilde{B} + \frac{N}{8\pi^2} \widetilde{B} \wedge \widetilde{B} \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \operatorname{Tr} \widetilde{f} \wedge \widetilde{f} - \frac{N}{8\pi^2} \widetilde{B} \wedge \widetilde{B} \end{aligned} \tag{4.87}$$

[*49] この議論から有限温度 Yang-Mills 理論における CP 対称性が回復する温度に制限を与えることができる．$\theta = \pi$ では低温では CP 対称性が破れているが，温度を上げると回復すると考えられている．また，低温では閉じ込め相であるが，温度を上げると非閉じ込め相に移ることが知られている．したがって，CP が回復する温度 T_{CP} と非閉じ込め相転移の温度 T_{dec} の関係が問題となる．ここで示したように $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性と CP 対称性が同時に保たれたギャップを持つ相は存在できないため，$T_{\mathrm{CP}} \geq T_{\mathrm{dec}}$ という不等式が成り立たなければならないことが分かる．ただし，ギャップレス相にならないことは仮定した．詳しくは [25] を参照．

となる．ただし，式 (4.85) において u を経路積分することで $\mathrm{Tr}\,\widetilde{f} = d\widetilde{C} = N\widetilde{B}$ が得られることを用いた．したがって，$\theta \to \theta + 2\pi$ としたときの作用の変化は

$$\frac{2\pi i}{8\pi^2}\int\left[\mathrm{Tr}\left(\widetilde{f}\wedge\widetilde{f}\right) - N\widetilde{B}\wedge\widetilde{B}\right] = -2\pi i c_2 + \frac{2\pi i N(N-1)}{8\pi^2}\int \widetilde{B}\wedge\widetilde{B} \tag{4.88}$$

と表せる．ただし，ここで c_2 は第二 Chern 数

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{8\pi^2}\int\left[(\mathrm{Tr}\,\widetilde{f})\wedge(\mathrm{Tr}\,\widetilde{f}) - \mathrm{Tr}\left(\widetilde{f}\wedge\widetilde{f}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{8\pi^2}\int\left[\mathrm{Tr}\left(\widetilde{f}\wedge\widetilde{f}\right) - N^2\widetilde{B}\wedge\widetilde{B}\right] \end{aligned} \tag{4.89}$$

である．$c_2 \in \mathbb{Z}$ なので，結局 θ の 2π シフトによる作用の変化分は

$$\frac{iN(N-1)}{4\pi}\int \widetilde{B}\wedge\widetilde{B} = \frac{2\pi i(N-1)}{2N}\int B\cup B \tag{4.90}$$

となる．よって，$\theta \to \theta + 2\pi$ と変化させると相殺項 (4.82) は

$$k \to k + N - 1 \tag{4.91}$$

と変化する．

5 ゲージ化

本章では離散対称性のゲージ化について説明する．離散対称性のゲージ化は理論に TQFT を結合させ，新たな理論を得る操作と考えることができる．このとき，ゲージ化された対称性はもはやグローバルな対称性ではなくなるが，新たに双対対称性と呼ばれる対称性が現れることが知られている．また，理論がより大きな対称性を持ち，その部分対称性をゲージ化する場合には，ゲージ化された理論での対称性はより複雑になることがある．このようなゲージ化の操作は一般化対称性，特に非可逆対称性を理解する際に重要となる．

5.1 ゲージ化

ゲージ化とは背景ゲージ場付きの分配関数を様々な背景ゲージ場の配位について足し合わせることである．つまり，理論 $\mathcal{T}$ が対称性 $G^{(p)}$ の背景ゲージ場 $A^{(p+1)}$ と結合しているとし[*50]，その分配関数を $Z_{\mathcal{T}}[A^{(p+1)}]$ と書くと，ゲージ化された理論 $\mathcal{T}/G^{(p)}$ の分配関数は

$$Z_{\mathcal{T}/G^{(p)}} = \sum_{a^{(p+1)}} Z_{\mathcal{T}}[a^{(p+1)}] \tag{5.1}$$

と表される[*51]．ただし，和を取る範囲はゲージ同値でないゲージ場の配位すべてである．例えば $G^{(p)} \simeq \mathbb{Z}_N^{(p)}$ のときは $a^{(p+1)} \in H^{p+1}(X;\mathbb{Z}_N)$ についての足し上げとなる．また，式 (5.1) は厳密には正しく規格化する必要があるが，ここでは規格化については考えないものとする[*52]．離散対称性のゲージ場の挿入は対称性演算子のネットワークの挿入とも思えるため，ゲージ化とは様々な対称性演算子のネットワークの挿入に関する足し上げを行っていると解釈することもできる．対称性にアノマリーがあるときはゲージ同値な配位の中から代表元を選ぶ選び方によって分配関数が変わってしまうため，(5.1) の和が well-defined でなくなる．したがって，アノマリーがある場合はゲージ化はできない．

式 (5.1) は単に分配関数を足し合わせただけであるが，$a^{(p+1)}$ に関する重みを付けて足し合わせることも可能である．

$$Z^I_{\mathcal{T}/G^{(p)}} = \sum_{a^{(p+1)}} I[a^{(p+1)}] Z_{\mathcal{T}}[a^{(p+1)}] \tag{5.2}$$

ただし，この和が well-defined になるために $I[a^{(p+1)}]$ はゲージ不変である必要がある．離散対称性の場合は $I[a^{(p+1)}]$ の候補としては $G^{(p)}$-SPT 相がある[*53]．SPT 相は対称性の構造を忘れると自明な理論であるためゲージ化によって元の理論 $\mathcal{T}$ に新たな自由度が加わるわけではないが， SPT 相を掛け合わせることで得られる理論の対称性の構造が変化する．このようなゲージ化の際に $G^{(p)}$-SPT 相を掛け合わせる自由度のことを離散トーションという．

例えば二次元トーラス T^2 上の 0-形式 G 対称性を考える．T^2 には二つの非自明な 1-サイクル α, β があり，G ゲージ場は α, β に G の元を割り当てたものと考えることができる．したがって，通常のゲージ化 (5.1) は

$$Z_{\mathcal{T}/G} = \sum_{\substack{g,h\in G \\ gh=hg}} Z_{\mathcal{T}}[g,h] \tag{5.3}$$

[*50] 以下では特に断らない限り $G^{(p)}$ は離散群とする．

[*51] 以下では，ダイナミカルな場，つまり経路積分で足し上げられる場については小文字で表し，背景場については大文字で表すこととする．

[*52] 詳しい規格化係数は例えば [50] などを参照．

[*53] 連続対称性の場合はゲージ場が平坦とは限らないため，ゲージ場の運動項などを入れることもできる．

のように表される．2次の群コホモロジー $\epsilon \in H^2(G;U(1))$ によって特徴づけられる G-SPT 相を離散トーションとして入れる場合は

$$Z^{\epsilon}_{\mathcal{T}/G} = \sum_{\substack{g,h\in G\\ gh=hg}} \frac{\epsilon(g,h)}{\epsilon(h,g)} Z_{\mathcal{T}}[g,h] \tag{5.4}$$

と表される．

5.1.1 双対対称性

ゲージ化された理論 $\mathcal{T}/G^{(p)}$ には元の対称性に双対な対称性が現れる．この対称性の対称性演算子は Wilson 演算子

$$e^{i\int a^{(p+1)}} \tag{5.5}$$

である．実際，離散対称性のゲージ場 $a^{(p+1)}$ は平坦であるためこの Wilson 演算子はトポロジカルである．対称性演算子が $(p+1)$ 次元であるためこの対称性は $(d-p-2)$-形式対称性となる．Wilson 演算子は群 $G^{(p)}$ の表現でラベルされるため，この双対対称性の群は $G^{(p)}$ が可換群のときは $G^{(p)}$ の Pontryagin 双対によって与えられる．つまり双対対称性は

$$\widehat{G}^{(d-p-2)} \tag{5.6}$$

である．$p=0$ のときは $G^{(p)}$ が非可換になり得るが，その場合は双対対称性は $\mathrm{Rep}(G)$ という非可逆対称性となる．非可逆対称性については 6 で詳しく述べるためここでは扱わない．以下では $G^{(p)}$ は可換離散群であるとする．

双対対称性に対する背景ゲージ場を $\widehat{A}^{(d-p-1)}$ と書くと，背景ゲージ場付きの分配関数は

$$Z_{\mathcal{T}/G^{(p)}}[\widehat{A}^{(d-p-1)}] = \sum_{a^{(p+1)}} Z_{\mathcal{T}}[a^{(p+1)}] \exp\left[i\int \langle a^{(p+1)}, \widehat{A}^{(d-p-1)}\rangle\right] \tag{5.7}$$

と表される．ただし，$\langle a^{(p+1)}, \widehat{A}^{(d-p-1)}\rangle$ は自然なペアリング $G\times\widehat{G}\to\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ であり，例えば $G^{(p)}=\mathbb{Z}_N^{(p)}$ のときは

$$\langle a^{(p+1)}, \widehat{A}^{(d-p-1)}\rangle = \frac{2\pi}{N} a^{(p+1)} \cup \widehat{A}^{(d-p-1)} \tag{5.8}$$

と書ける．双対対称性の背景ゲージ場に関するゲージ変換

$$\widehat{A}^{(d-p-1)} \to \widehat{A}^{(d-p-1)} + \delta\lambda^{(d-p-2)} \tag{5.9}$$

に対して，例えば $G^{(p)}=\mathbb{Z}_N^{(p)}$ のときは

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{N}\int a^{(p+1)}\cup\widehat{A}^{(d-p-1)} &\to \frac{2\pi}{N}\int a^{(p+1)}\cup(\widehat{A}^{(d-p-1)}+\delta\lambda^{(d-p-2)}) \\ &= \frac{2\pi}{N}\int a^{(p+1)}\cup\widehat{A}^{(d-p-1)} + \frac{2\pi}{N}\int a^{(p+1)}\cup\delta\lambda^{(d-p-2)} \end{aligned} \tag{5.10}$$

となる．第二項は 2π の整数倍となり分配関数には効かない．そのため，双対対称性はアノマリーがないことが分かる．したがって，双対対称性はゲージ化することが可能である．実は双対対称性をゲージ化すると元の理論に戻る．つまり，

$$\mathcal{T}/G^{(p)}/\widehat{G}^{(d-p-2)} \simeq \mathcal{T} \tag{5.11}$$

となる．実際，$d-(d-p-2)-2=p$ となるので p-形式対称性であり，$\widehat{\widehat{G}} \simeq G$ となるため，双対対称性の双対対称性は $G^{(p)}$ 対称性となる．また，分配関数の言葉でも

$$\begin{aligned}
Z_{\mathcal{T}/G^{(p)}/\widehat{G}^{(d-p-2)}}[B^{(p+1)}] &= \sum_{\widehat{a}^{(d-p-1)}} Z_{\mathcal{T}/G^{(p)}}[\widehat{a}^{(d-p-1)}] \exp\left[i\int \langle \widehat{a}^{(d-p-1)}, B^{p+1}\rangle\right] \\
&= \sum_{\widehat{a}^{(d-p-1)}} \sum_{a^{(p+1)}} Z_{\mathcal{T}}[a^{(p+1)}] \exp\left[i\int \langle \widehat{a}^{(d-p-1)}, B^{p+1}\rangle + \langle a^{(p+1)}, \widehat{a}^{(d-p-1)}\rangle\right] \\
&= \sum_{\widehat{a}^{(d-p-1)}} \sum_{a^{(p+1)}} Z_{\mathcal{T}}[a^{(p+1)}] \exp\left[i\int \langle \widehat{a}^{(d-p-1)}, B^{p+1} + (-1)^{(p+1)(d-p-1)} a^{(p+1)}\rangle\right] \\
&= \sum_{a^{(p+1)}} Z_{\mathcal{T}}[a^{(p+1)}] \delta(B^{p+1} + (-1)^{(p+1)(d-p-1)} a^{(p+1)}) \\
&= Z_{\mathcal{T}}[(-1)^{(p+1)(d-p-1)-1} B^{(p+1)}]
\end{aligned} \tag{5.12}$$

となり，符号の違いを除いて $Z_{\mathcal{T}}[B^{(p+1)}]$ に一致する[*54]．ただし三行目から四行目の式変形の際に

$$\sum_{\widehat{a}^{(d-p-1)}} \exp\left[i\int \langle \widehat{a}^{(d-p-1)}, A^{(p+1)}\rangle\right] = \delta(A^{(p+1)}) \tag{5.13}$$

となることを用いた．この式変形から離散対称性のゲージ化は離散 Fourier 変換のようなものであるということが分かる．二回双対を取ると元の理論に戻るのは Fourier 変換を二回とると元に戻ることに対応している．

5.2 $U(1)$ Maxwell 理論

四次元 $U(1)$ Maxwell 理論には $U(1)^{(1)}$ 電気的対称性と $U(1)^{(1)}$ 磁気的対称性がある．これらのゲージ化を行うとどのような理論が得られるかについて考える．

5.2.1 $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 電気的対称性

まず，$U(1)^{(1)}$ 電気的対称性の $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 部分群のゲージ化を考える．電気的対称性の背景ゲージ場を結合させた作用は

$$\frac{1}{2e^2}\int (da - B_e) \wedge *(da - B_e) \tag{5.14}$$

として与えられる．ナイーブには $d\widetilde{a} = da - B_e$ と定義すると $\widetilde{a}$ に関する $U(1)$ Maxwell 理論が得られると思える．しかし，B_e の周期は $\frac{2\pi}{N}\mathbb{Z}$ なので $d\widetilde{a}$ の周期も $\frac{2\pi}{N}\mathbb{Z}$ となり，Dirac 量子化条件を満たさない．Dirac 量子化条件を満たす $U(1)$ ゲージ場は

$$d\widetilde{a} = N(da - B_e) \tag{5.15}$$

である．この $U(1)$ ゲージ場 $\widetilde{a}$ に対する作用は

$$\frac{1}{2N^2e^2}\int d\widetilde{a} \wedge *d\widetilde{a} \tag{5.16}$$

となる．つまり，$\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 電気的対称性をゲージ化すると結合定数が Ne の $U(1)$ Maxwell 理論が得られる [8].

[*54] マイナス符号が出るときは，二回ゲージ化を行う操作が荷電共役変換と同じであることを意味する．

5.2.2 $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 磁気的対称性

次に $U(1)^{(1)}$ 磁気的対称性の $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 部分群のゲージ化を考える．磁気的対称性の背景ゲージ場を結合させた作用は

$$\frac{1}{2e^2}\int da\wedge *da+\frac{i}{2\pi}\int da\wedge B_m \tag{5.17}$$

となる．B_m を $\mathbb{Z}_N$ ゲージ場に制限するには $NB_m=db$ を満たす $U(1)$ 1-形式ゲージ場 b を用いればよい．

$$\frac{i}{2\pi N}\int da\wedge db \tag{5.18}$$

において b を積分すると da の周期が $2\pi N\mathbb{Z}$ に制限される．つまり，Dirac 量子化条件を満たす $U(1)$ ゲージ場は $\widetilde{a}=\frac{1}{N}a$ となる．$\widetilde{a}$ に対する作用は

$$\frac{N^2}{2e^2}\int d\widetilde{a}\wedge *d\widetilde{a} \tag{5.19}$$

となるので，$\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 磁気的対称性をゲージ化すると結合定数が $\frac{e}{N}$ の $U(1)$ Maxwell 理論が得られることが分かる[*55]．

5.3 G ゲージ理論

3.2 で述べたように純粋 G ゲージ理論には $Z(G)^{(1)}$ 対称性がある．その有限部分群 $\Gamma^{(1)}\subset Z(G)^{(1)}$ をゲージ化することを考える．$\Gamma^{(1)}$ 対称性の対称性演算子を挿入することはコサイクル条件を

$$g_{ij}g_{jk}g_{ki}=C_{ijk}\in\Gamma \tag{5.20}$$

に緩めること等価であった．したがって，$\Gamma^{(1)}$ 対称性をゲージ化するということはコサイクル条件を様々な形で緩めて足し合わせるということである．つまり，ゲージ化した理論では $g_{ij}g_{jk}g_{ki}$ は Γ の様々な値を取りうる．これはゲージ群が G ではなく G/Γ となったとみなすことができる．したがって，G ゲージ理論の $\Gamma^{(1)}\subset Z(G)^{(1)}$ 対称性をゲージ化すると G/Γ ゲージ理論が得られる．また，これは Stiefel-Whitney 類 w_2 がダイナミカルな自由度となっているとも言える．

$\Gamma^{(1)}$ 対称性の双対対称性は $\widehat{\Gamma}^{(d-3)}$ 対称性となる．これは磁気的 $(d-3)$-形式対称性に対応し，対称性演算子は Stiefel-Whitney 類の積分

$$\exp\left[i\alpha\int w_2\right] \tag{5.21}$$

で書ける．ただし，α の取りうる値は $\widehat{\Gamma}$ に依存する．この $\widehat{\Gamma}^{(d-3)}$ 対称性をゲージ化するには $\widehat{\Gamma}$ 値 $(d-2)$-形式 $b^{(d-2)}$ を用いて

$$\int w_2\wedge b^{(d-2)} \tag{5.22}$$

に比例する項を作用に加え $b^{(d-2)}$ について積分すればよい．すると，$w_2=0$ という条件のデルタ関数が得られる．$w_2=0$ という条件は G/Γ ゲージ場を G ゲージ場にリフトできるための条件である．したがって，$\widehat{\Gamma}^{(d-3)}$ 対称性をゲージ化するともとの G ゲージ理論が得られる．

[*55] 4.4.2 節で述べたように，N_e と N_m が互いに素とすると $\mathbb{Z}_{N_e}^{(1)}$ 電気的対称性と $\mathbb{Z}_{N_m}^{(1)}$ 磁気的対称性の間に混合アノマリーがないため，ゲージ化することができる．これらのゲージ化を行うと結合定数が $\frac{N_e}{N_m}e$ の $U(1)$ Maxwell 理論が得られる [3]

例えば四次元の $SU(N)$ ゲージ理論を考えると，$\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性がある．この $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性をゲージ化すると $PSU(N)$ ゲージ理論が得られるが，確かに 3.3.4 で述べたように四次元 $PSU(N)$ ゲージ理論は $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 磁気的対称性を持つ．ここで離散トーションについて考えてみると四次元の $\mathbb{Z}_N^{(1)}$-SPT 相は $\mathbb{Z}_N$[*56]でラベルされるため，$PSU(N)$ ゲージ理論は N 個の種類を持つことが分かる．実際，これらは許される線演算子のスペクトルが異なり，シータ項の 2π シフトによって移り変わることが知られている [51].

5.4 混合アノマリーがある場合のゲージ化

二次元の理論 $\mathcal{T}$ が 0-形式対称性 $A \times G$ を持ち，A は可換群かつアノマリーがないとする．このとき，A をゲージ化するとゲージ化した理論 $\mathcal{T}/A$ の対称性はナイーブには $\widehat{A} \times G$ となるように思える．しかし，A と G の間に混合アノマリーがある場合は単純な直積とはならず得られる対称性は非自明になることが知られている [25, 52].

A と G の間の混合アノマリーのアノマリー流入の作用が次のように書ける場合を考える．

$$\mathcal{A} = \int_Y \langle A, e(G) \rangle \propto \int_Y A \cup e(G), \qquad (\partial Y = X) \tag{5.23}$$

ただし，対称性の群とその背景ゲージ場を同じ文字で表すこととする．つまり，式 (5.23) 中の A, G はそれぞれ対称性 A, G の背景ゲージ場とする．また，e は $H^2(G; \widehat{A})$ の元で $e(G)$ は e と G から構成される $H^2(X; \widehat{A})$ の元である[*57].

この場合に A をゲージ化して得られる対称性 Γ は $e \in H^2(G; \widehat{A})$ によって特徴づけられる G の $\widehat{A}$ による拡大

$$1 \to \widehat{A} \to \Gamma \to G \to 1 \tag{5.24}$$

となる[*58]．これは次のようにして理解することができる．(5.23) のような形の混合アノマリーは，図 30 のように G のトポロジカルラインのジャンクションを $a \in A$ のラインが通過した際に $\langle a, e(g,h) \rangle$ の位相がかかると解釈することができる．A をゲージ化すると様々な A のトポロジカルラインが挿入されるため，G のトポロジカルラインのジャンクションはトポロジカルではなくなる．これを修正するには A のゲージ化にともなって現れる双対対称性 $\widehat{A}$ を用いればよい．$\chi \in \widehat{A}$ のトポロジカルラインが境界を持つとき，図 31 のように境界を $a \in A$ のトポロジカルラインが通過すると $\chi(a)$ の位相を出す．したがって，図 32 のように G のトポロジカルラインのジャンクションにおいて $e(g,h) \in \widehat{A}$ のトポロジカルラインが境界をもつとすると，位相が打ち消され，トポロジカルとなる．これは $\widehat{A} \times G$ 上の演算が

$$(0, g) \times (0, h) = (e(g,h), gh) \tag{5.25}$$

となることを意味する．これはまさしく $\mathcal{T}/A$ の対称性 Γ が $\widehat{A}$ と G の単純な直積ではなく群の拡大 (5.24) に従うことを意味する．また，Γ 対称性のゲージ場は $\widehat{A}, G$ のゲージ場を用いて表すことができるが，その際にゲージ場 $\widehat{A}, G$ には次の条件が課される．

$$\delta \widehat{A} = e(G) \tag{5.26}$$

[*56] 時空がスピン多様体であることを仮定している．
[*57] 詳しくは C.3 を参照.
[*58] 群の拡大については C.2 を参照.

これは図 32 からも分かるが，数式を用いても次のようにして分かる．G ゲージ場を挿入した状態で A のゲージ化を行うには

$$\sum_a Z_{\mathcal{T}}[a, G] \exp\left(i \int \langle a, \widehat{A} \rangle\right) \tag{5.27}$$

を計算する必要がある．この和が well-defined になるためには和の中身が a のゲージ変換 $a \to a + \delta\lambda$ について不変でなければならない．変化分を計算すると

$$\exp\left[i \int_Y \delta\lambda \cup e(G) + i \int_X \delta\lambda \cup \widehat{A}\right] = \exp\left[i \int_X \lambda \cup (e(G) - \delta\widehat{A})\right] \tag{5.28}$$

となる．したがって，ゲージ不変となるためには (5.26) が課されなければならない．

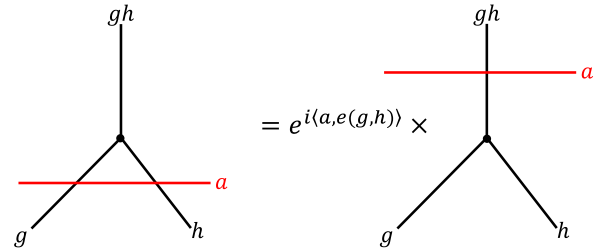


図 30: 混合アノマリーを持つ場合の対称性演算子

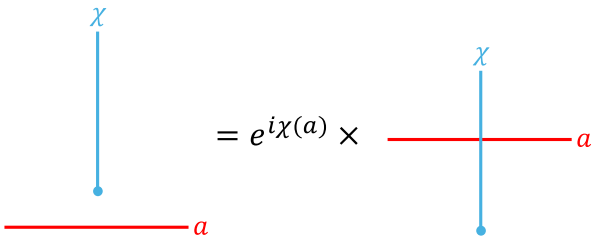


図 31: 境界を持つ Wilson ラインへの対称性演算子の作用

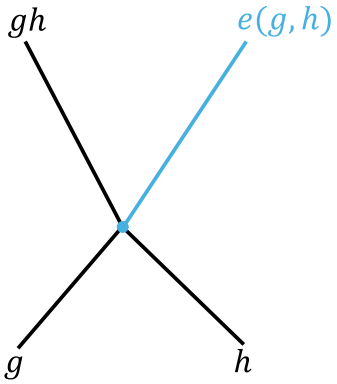


図 32: 群の拡大の対称性演算子による理解

また，ゲージ化を二回行うと元の理論に戻ることから，上述の議論を逆にたどることで非自明な拡大を持つ対称性の部分群をゲージ化すると混合アノマリーが生じることが分かる．具体的には理論 $\mathcal{T}$ の対称性 Γ が $e \in H^2(G;A)$ で特徴づけられる G の A による拡大

$$1 \to A \to \Gamma \to G \to 1 \tag{5.29}$$

で表される場合を考える．このとき，A をゲージ化すると $\mathcal{T}/A$ の理論の対称性は $\widehat{A} \times G$ であるが，これらの間には

$$\int \langle \widehat{A}, e(G) \rangle \tag{5.30}$$

という混合アノマリーがある．

また，ここでは二次元の理論を考えたが，一般の d 次元の理論を考えることも可能である．その場合は双対対称性 $\widehat{A}$ は $(d-2)$-形式対称性となるため，(5.24) は群の拡大というより高次群対称性となる．

5.4.1 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称性

最も簡単で非自明な例は $\mathbb{Z}_2^{\mathrm{A}} \times \mathbb{Z}_2^{\mathrm{B}}$ 対称性が混合アノマリー

$$\pi \int A \cup \beta(B) = \frac{\pi}{2} \int A \cup \delta \widetilde{B} \tag{5.31}$$

を持つ場合である．ただし，A, B はそれぞれ $\mathbb{Z}_2^{\mathrm{A}}, \mathbb{Z}_2^{\mathrm{B}}$ の背景ゲージ場であり，$\beta : H^1(X;\mathbb{Z}_2) \to H^2(X;\mathbb{Z}_2)$ は Bockstein 写像であり，$\beta(B) = \frac{1}{2}\delta\widetilde{B}$ と表せる．ただし，$\widetilde{B}$ は B をリフトして得られる $\mathbb{Z}_4$ 値 1-コチェインである．このとき，$\mathbb{Z}_2^{\mathrm{A}}$ 対称性をゲージ化すると得られる対称性は $\mathbb{Z}_4$ となる．実際 $\mathbb{Z}_4$ は

$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \to 1 \tag{5.32}$$

という非自明な拡大で表される．

これは次のように考えることもできる．$\mathbb{Z}_2^{\mathrm{B}}$ ラインを η_{B} とすると，$\mathbb{Z}_2^{\mathrm{A}}$ ゲージ化した後の理論では混合アノマリーによって η_{B} はトポロジカルではなくなる．これは B についてのゲージ変換を行うことで分かる．B についてのゲージ変換 $B \to B + \delta\lambda$ を行うと

$$\frac{\pi}{2} \int_Y \delta a \cup \delta\widetilde{\lambda} = \frac{\pi}{2} \int_X \delta a \cup \widetilde{\lambda} \tag{5.33}$$

だけ変換する[*59]．したがって，ゲージ不変性を保つためには

$$\eta = \eta_{\mathrm{B}} \exp\left(i\frac{\pi}{2} \int a \right) \tag{5.34}$$

と定義すればよい．η ラインを二乗すると $\eta_{\mathrm{B}}^2 = 1$ なので

$$\eta^2 = \exp\left(i\pi \int a \right) \tag{5.35}$$

となり，$\mathbb{Z}_2^{\mathrm{A}}$ のゲージ化によって現れる双対対称性 $\widehat{\mathbb{Z}}_2^{\mathrm{A}}$ の対称性演算子が得られる．さらに二乗すると $\eta^4 = 1$ となるため，η ラインは $\mathbb{Z}_4$ 対称性の生成子となっていることが分かる．

[*59] $\mathbb{Z}_2^{\mathrm{A}}$ 対称性をゲージ化しダイナミカルな自由度としたため，ゲージ場を小文字の a で表している．

5.4.2 G ゲージ理論

G ゲージ理論には $Z(G)^{(1)}$ 電気的対称性と $\pi_1(G)^{(d-3)}$ 磁気的対称性がある．簡単のためにここでは $Z(G)=\mathbb{Z}_n$, $\pi_1(G)=\mathbb{Z}_m$ と書ける場合を考える．m と n が公約数を持つとき，これらの二つの対称性の間には $U(1)$ Maxwell 理論のときと同様の形の混合アノマリーがある．そのため，$Z(G)^{(1)}$ 対称性をゲージ化した理論の対称性は $\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_m$ ではなく

$$1\to\mathbb{Z}_n\to\Gamma\to\mathbb{Z}_m\to 1 \tag{5.36}$$

という非自明な拡大で表される $\Gamma^{(d-3)}$ 対称性となる．

これは次のように解釈することもできる．G の普遍被覆群を $\widetilde{G}$ とし，$G=\widetilde{G}/H$ と書けるとする．ただし，$H\subset Z(\widetilde{G})$ である．すると，

$$\begin{aligned} Z(G)&=Z(\widetilde{G})/H\\ \pi_1(G)&=H \end{aligned} \tag{5.37}$$

と表される．さらに $Z(G)$ ゲージ化をして得られるゲージ理論のゲージ群は

$$G/Z(G)=\widetilde{G}/Z(\widetilde{G}) \tag{5.38}$$

となる．このゲージ群の中心は自明であり，基本群は $Z(\widetilde{G})$ となるため $Z(\widetilde{G})^{(d-3)}$ 磁気的対称性を持つことが分かる．$Z(\widetilde{G})$ は一般には $Z(G)\times\pi_1(G)$ とはならず，非自明な拡大

$$1\to Z(G)\to Z(\widetilde{G})\to\pi_1(G)\to 1 \tag{5.39}$$

で表される．

具体例を述べると $SU(4)$ ゲージ理論には $\mathbb{Z}_4^{(1)}$ 電気的対称性がある．その $\mathbb{Z}_2^{(1)}$ 部分群をゲージ化すると $SU(4)/\mathbb{Z}_2$ ゲージ理論となるが，この理論には $\mathbb{Z}_2^{(1)}$ 電気的対称性と $\mathbb{Z}_2^{(d-3)}$ 磁気的対称性がある．さらに $\mathbb{Z}_2^{(1)}$ をゲージ化すると $PSU(4)$ ゲージ理論が得られるが，この理論は $\mathbb{Z}_4^{(d-3)}$ 磁気的対称性を持つ．これは $SU(4)/\mathbb{Z}_2$ ゲージ理論が (5.31) と同様の混合アノマリーを持つことを利用している．

5.4.3 $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 対称性

二次元の $\mathbb{Z}_2^{\mathrm{A}}\times\mathbb{Z}_2^{\mathrm{B}}\times\mathbb{Z}_2^{\mathrm{C}}$ 対称性を持つ理論の $\mathbb{Z}_2^{\mathrm{A}}$ 対称性をゲージ化した場合に得られる対称性について議論する．この場合，$H^2(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2)\simeq\mathbb{Z}_2^3$ である．コホモロジーの各元と群の拡大の間の対応 (C.4 を参照) より，

$$\mathcal{A}_1=\pi\int A\cup B\cup C \tag{5.40}$$

のアノマリーの場合は $\mathbb{Z}_2^{\mathrm{A}}$ をゲージ化すると位数 8 の二面体群 D_8 が得られる．また，

$$\mathcal{A}_2=\pi\int A\cup(\beta(B)+\beta(C)+B\cup C) \tag{5.41}$$

のアノマリーの場合は $\mathbb{Z}_2^{\mathrm{A}}$ をゲージ化すると四元数群 Q_8 が得られるということが分かる．ただし，$\beta(B)$ は Bockstein 写像である．

このように可換群の対称性がアノマリーを持つ場合は部分群をゲージ化すると非可換群の対称性が得られることがある．このような現象が起こる理論の具体例を挙げると，4.7 で述べた四次元 $SU(N)$ ゲージ理論の

CP 対称性と $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性の混合アノマリーを用いたものがある [25]．$N=2$ とし，時間方向をコンパクト化するとする．すると，四次元の理論における $\mathbb{Z}_2^{(1)}$ 電気的対称性は，コンパクト化した後の三次元の理論では $\mathbb{Z}_2^{(1)}$ 対称性と $\mathbb{Z}_2^{(0)}$ 対称性に分解される．したがって，$\theta=\pi$ では $\mathbb{Z}_2^{(1)}\times\mathbb{Z}_2^{(0)}\times\mathbb{Z}_2^{(0)}$ 対称性がある．四次元の理論における $\mathbb{Z}_2^{(1)}$ 対称性と CP 対称性の間のアノマリーは (5.40) と同じ形となる[*60]．したがって，$\mathbb{Z}_2^{(1)}$ 対称性をゲージ化すると $D_8^{(0)}$ 対称性が得られる．

[*60] この場合は三次元の理論であり，一つは 1-形式対称性であるが上述の場合と同様に議論することができる．

6 非可逆対称性

一般化対称性の考え方では、トポロジカルな演算子を対称性とみなすが，トポロジカルな演算子のフュージョンは一般に群の規則に従うとは限らない．このような群の規則に従わない対称性を非可逆対称性と呼ぶ．非可逆対称性は二次元共形場理論の文脈では古くから例が知られていたが [53, 54]，高次元においても存在することが最近の研究で調べられている [7, 8]．本章では，非可逆対称性を記述するための道具であるフュージョン圏について解説した後，場の理論における非可逆対称性の様々な具体例を述べる．

6.1 フュージョン圏

6.1.1 フュージョン圏の定義

本節では，二次元場の理論の有限非可逆対称性がフュージョン圏を用いてどのように記述されるかを見る[*61]．ただし，物理的な理解を優先し，数学的な厳密性は犠牲にしていることに注意してほしい[*62]．本節の内容は主に [2, 55] を基にしている．また，フュージョン圏について書かれた数学の本としては例えば [56] がある．

フュージョン圏のデータについて説明する．

- 対象
  フュージョン圏 $\mathcal{C}$ の対象はトポロジカル演算子である．二次元の 0-形式対称性を考えているのでトポロジカル演算子は 1 次元の演算子である．$a \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ を一つ選ぶと相関関数
  $$\langle \cdots a(C) \cdots \rangle \tag{6.1}$$
  という量を考えることができる．ただし C は 1 次元のラインであり，$\cdots$ は $a(C)$ とは無関係な演算子の挿入を表している (図 33).
- 射
  対象 $a, b \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ に対して，射 $m : a \to b$ とはトポロジカルライン a を b に変えるような点状のトポロジカル演算子である．a から b への射全体の集合 $\hom(a, b)$ は複素ベクトル空間の構造を持つ (図 33).
- 直和
  二つの対象 $a, b \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ に対して直和 $a \oplus b \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ という対象が存在する．物理的には $(a \oplus b)(C)$ の挿入は $a(C)$ を挿入した相関関数と $b(C)$ を挿入した相関関数の和を意味している．
  $$\langle \cdots (a \oplus b)(C) \cdots \rangle = \langle \cdots a(C) \cdots \rangle + \langle \cdots b(C) \cdots \rangle \tag{6.2}$$
- 単純対象
  $\hom(a, a) \simeq \mathbb{C}$，つまり a から a の射が恒等射のスカラー倍のみであるとき，$a \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ を単純対象という．ここでは $\mathcal{C}$ に含まれる単純対象の同型類の数は有限とする．この条件は有限対称性を考えていることに対応する．

[*61] 有限ではない非可逆対称性はテンソル圏，三次元以上の場の理論における非可逆対称性は高次テンソル圏と呼ばれるもので記述される．ここでは，簡単のために二次元の有限対称性のみを考える．

[*62] 圏論の基本事項については付録 D を参照.

- 半単純性 $x \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ が半単純であるとは

$$x = \bigoplus_a N_a a \tag{6.3}$$

という有限和に分解できることをいう．ただし，a は単純対象であり，N_a は非負整数である．フュージョン圏 $\mathcal{C}$ では任意の対象 $x \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ は半単純である[*63]．

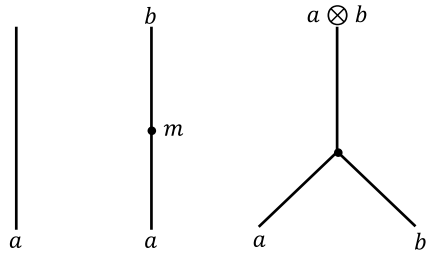


図 33: 左から対象、射、テンソル積を表す．

- テンソル積
  二つの対象 $a, b \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ に対してテンソル積 $a \otimes b \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ という対象が存在する．これは物理的にはトポロジカルライン a と b のフュージョンを表す．つまり $(a \otimes b)(C)$ の挿入は $a(C)b(C)$ の挿入を意味する (図 33)．
- 単位対象
  ある特別な対象 $1 \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ が存在して任意の $a \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ に対して $a \otimes 1 = 1 \otimes a = a$ が成り立つ．つまり，1 はフュージョンに関する単位元である．また，$1(C)$ の挿入は何も挿入しないことと等価である．

$$\langle \cdots 1(C) \cdots \rangle = \langle \cdots\cdots \rangle \tag{6.4}$$

  ここでは単位対象は単純，つまり $\hom(1,1) \simeq \mathbb{C}$ であるとする[*64]．
- 結合構造
  三つの対象 $a, b, c \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ に対して結合構造

$$\alpha_{a,b,c} : (a \otimes b) \otimes c \to a \otimes (b \otimes c) \tag{6.5}$$

  という同型射が存在する．これは 4.3.2 節で述べた F-シンボルに対応するデータである．この結合構造は，四つの対象のテンソル積を考えた際の整合条件として図 34 のような五角形恒等式と呼ばれる恒等式を満たさなければならない．
- 双対構造
  任意の対象 $a \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ に対して双対対象 $\bar{a}$ が存在する．これは物理的には a の向きを逆にしたものである．つまり，C の向きを逆にしたラインを $\overline{C}$ とすると

$$\langle \cdots \bar{a}(C) \cdots \rangle = \langle \cdots a(\overline{C}) \cdots \rangle \tag{6.6}$$

[*63] この条件から単純対象がフュージョン圏の基本的な構成要素であることが分かる．
[*64] この条件はトポロジカルな点演算子，つまり 1-形式対称性がないことを意味する．この仮定を満たさない理論の例としては，二次元の随伴表現に従う物質場を含む量子色力学がある [57]．

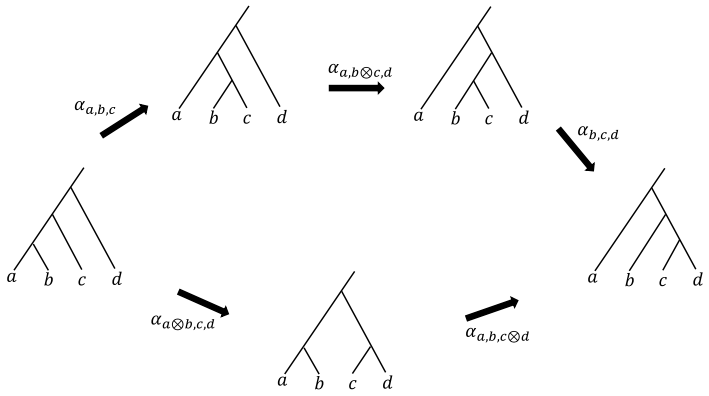


図 34: 結合構造の五角形恒等式

となる．双対を二回とると元の対象と自然に同型となる．また，双対を取るとテンソル積の順番は入れ替わる．

$$\overline{a \otimes b} = \overline{b} \otimes \overline{a} \tag{6.7}$$

- 評価射，余評価射
  双対構造とともに次のような射が存在する．

$$\mathrm{ev}_a^{\mathrm{R}} : a \otimes a^* \to 1, \qquad \mathrm{ev}_a^{\mathrm{L}} : a^* \otimes a \to 1 \tag{6.8}$$

を評価射といい，

$$\mathrm{coev}_a^{\mathrm{R}} : 1 \to a^* \otimes a, \qquad \mathrm{coev}_a^{\mathrm{L}} : 1 \to a \otimes a^* \tag{6.9}$$

を余評価射という (図 35)．また，$\mathrm{ev}_a^{\mathrm{R}}$ と $\mathrm{ev}_{a^*}^{\mathrm{L}}$ は等しくはないが，軸構造と呼ばれる同型 $p_a : a \xrightarrow{\sim} a$ によって次のように結びつく．

$$\mathrm{ev}_a^{\mathrm{R}} = \mathrm{ev}_{a^*}^{\mathrm{L}} \circ (p_a \otimes 1) \tag{6.10}$$

さらに，評価射と余評価射は次の整合条件を満たす．

$$(\mathrm{ev}_a^{\mathrm{R}} \otimes 1) \circ \alpha^{-1}_{a,a^*,a} \circ (1 \otimes \mathrm{coev}_a^{\mathrm{R}}) = 1 \tag{6.11}$$

この等式は図で書くと図 36 のようになる．

- 量子次元
  評価射，余評価射を用いることで各対象に対して量子次元を定義することができる．

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_a^{\mathrm{L}} \circ \mathrm{coev}_a^{\mathrm{R}} &: 1 \to a^* \otimes a \to 1 \\ \mathrm{ev}_a^{\mathrm{R}} \circ \mathrm{coev}_a^{\mathrm{L}} &: 1 \to a \otimes a^* \to 1 \end{aligned} \tag{6.12}$$

という射は恒等射の定数倍となる[*65]．したがって，対象 a に対し二つの複素数が定まるが，ここではこれらは等しいと要請する[*66]．この値を a の量子次元といい，$\dim a$ と表す．量子次元は構成からもわかるように可縮な閉じたトポロジカルラインの真空期待値と考えることもできる．可逆なトポロジカルラインの量子次元は 1 となる．

[*65] 1 は単純対象であるため $\hom(1,1) \simeq \mathbb{C}$ である．
[*66] この仮定を満たすものを特に 球面的フュージョン圏という．この名前はこの条件が S^2 上に図 37 を置いたときの整合性からくる条件だからである．

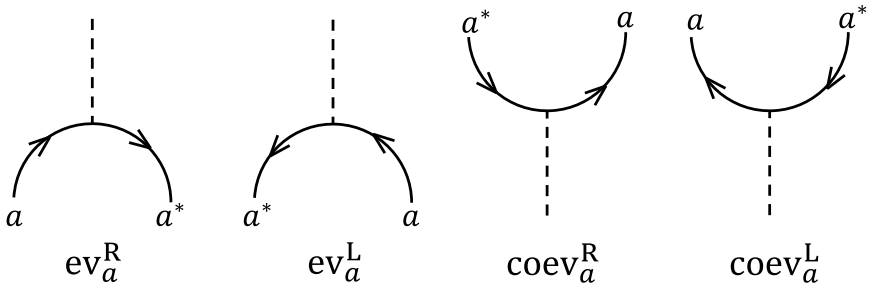


図 35: 評価射，余評価射

また，フュージョン圏 $\mathcal{C}$ の次元は

$$\dim \mathcal{C} = \sum_a (\dim a)^2 \tag{6.13}$$

として定義される．ただし，和のとる範囲は単純対象の同型類全体である．

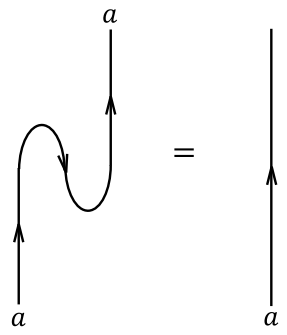


図 36: 評価射，余評価射の整合条件

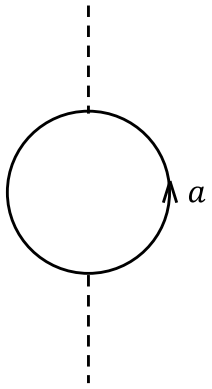


図 37: 量子次元

6.1.2 Vec_G^α

フュージョン圏の具体例として離散群 G の対称性に対応するフュージョン圏 Vec_G^α について述べる．Vec_G^α の対象は G の元によってラベルされた $\mathbb{C}$-ベクトル空間である．つまり，任意の対象 x は

$$x = \bigoplus_{h\in G} N_h \mathbb{C} \tag{6.14}$$

と表される．ただし，ここで N_h は非負整数である．Vec_G^α の単純対象は $N_h = \delta_{g,h}$，つまりラベル g のみが 1 次元複素ベクトル空間となり，それ以外は自明となるようなものである．この単純対象が g でラベルされたトポロジカルラインに対応する．以下では特に混同する恐れがない限り，$g \in G$ に対応する単純対象をそのまま g で表すこととする．すると，任意の対象 x は $x = \bigoplus_{g\in G} N_g g$ と表せる．$x = \bigoplus_{g\in G} N_g g$ と $x' = \bigoplus_{g\in G} N'_g g$ のテンソル積は

$$x \otimes x' = \bigoplus_{g\in G} \left(\sum_{h\in G} N_h N'_{h^{-1}g} \right) g \tag{6.15}$$

と計算される．このテンソル積は単純対象に対しては $g \otimes h = gh$ というように群の演算規則と一致し，一般の対象に対してはこれを線形に拡張したものとなっている．

次に結合構造について考える．単純対象に対する結合構造を与えると，それを線形に拡張することで任意の対象に対する結合構造が得られるので，ここでは単純対象のみを考える．$g, h, k \in G$ に対して $(g \otimes h) \otimes k,\ g \otimes (h \otimes k)$ はともに 1 次元複素ベクトル空間であるから，$\alpha_{g,h,k}$ は $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への線形同型写像となる．したがって，適切に規格化することで $\alpha_{g,h,k} \in U(1)$ とみなしてよい．これは 4.3.2 節で述べた F-symbol と同じものである．したがって，α は $H^3(G; U(1))$ の元と思うことができる．以上のようにして定められたフュージョン圏を Vec_G^α と表す．

6.1.3 Rep(G)

5.1.1 節で述べたように．二次元の理論が有限非可換群 G の対称性を持つとき，G をゲージ化して得られる理論は Rep(G) という非可逆対称性を持つ．Rep(G) の対象は G の有限次元表現であり，射は表現の間の絡作用素である．また，テンソル積は表現のテンソル積によって与えられる．単純対象は G の既約表現となることは Schur の補題から分かる．また，G の表現 a の量子次元は a の表現次元そのものとなる．非可換群の既約表現は 1 次元表現以外を含むため，非可逆対称性となることが分かる．

例えば，具体例として Rep(D_8) がどのようなフュージョン圏かを考える．D_8 は

$$D_8 = \langle r, s \mid r^4 = s^2 = 1,\ srs = r^{-1} \rangle \tag{6.16}$$

という表示を持つ．D_8 は r, s によって生成されるため，r, s の行き先だけ指定すれば表現が定まる．D_8 の有限次元既約表現は次の 5 つである．

$$\begin{array}{rll} 1_{++}: & r \mapsto 1, & s \mapsto 1 \\ 1_{+-}: & r \mapsto 1, & s \mapsto -1 \\ 1_{-+}: & r \mapsto -1, & s \mapsto 1 \\ 1_{--}: & r \mapsto -1, & s \mapsto -1 \\ 2: & r \mapsto i\sigma_y, & s \mapsto \sigma_z \end{array} \tag{6.17}$$

ただし，σ_y, σ_z は Pauli 行列である．四つの一次元表現はテンソル積に関して $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ の構造を持つ．さらに，計算すると二次元表現二つのテンソル積が

$$2 \otimes 2 = 1_{++} \oplus 1_{+-} \oplus 1_{-+} \oplus 1_{--} \tag{6.18}$$

と分解できることが示せる．また，このフュージョン圏の量子次元は

$$\dim \mathrm{Rep}(D_8) = 1 + 1 + 1 + 1 + 2^2 = 8 \tag{6.19}$$

となる．D_8 は位数 8 なので

$$\dim D_8 = 8 \tag{6.20}$$

となるが，これらが等しいのは偶然ではなく一般にゲージ化によってフュージョン圏の量子次元は不変である．

6.1.4 TY(G)

Rep(G) 以外に重要な非可逆対称性の例として Tambara-Yamagami 圏 TY(G) と呼ばれるものがある [58]．ただしここで G は可換群とする．TY(G) は G 対称性を拡張したものとなっている．TY(G) の単純対象は

$g \in G$ に加えて一つの対象 D によってラベルされる．これらの間のフュージョン則は

$$\begin{aligned} g \otimes h &= gh \\ g \otimes D &= D \otimes g = D \\ D \otimes D &= \bigoplus_{g \in G} g \end{aligned} \tag{6.21}$$

となる．二つ目の式から D には逆元がないことが分かる．実際，逆元 D^{-1} が存在すると D^{-1} を両辺にかけることで $g = 1$ となり矛盾してしまう．したがって，$\mathrm{TY}(G)$ は非可逆対称性を表すフュージョン圏となっている．またこれらのフュージョン則から D の量子次元は $\dim D = \sqrt{|G|}$ となることが分かる．また，$\mathrm{TY}(G)$ の量子次元は

$$\dim \mathrm{TY}(G) = 2|G| \tag{6.22}$$

となる．

$\mathrm{TY}(G)$ のフュージョンの構造は (6.21) で与えられるが，実は結合構造は一意には決まらず対称かつ非退化な bicharacter $\chi : G \times G \to U(1)$ と Frobenius-Schur indicator $\epsilon = \pm 1/\sqrt{|G|}$ によって指定されることが知られている．これらを指定すると結合構造が

$$\begin{aligned} \alpha_{g,D,h} &= \chi(g,h) \in \hom(D,D) \\ \alpha_{D,g,D} &= \bigoplus_h \chi(g,h) 1_h \in \hom\left(\bigoplus_h h, \bigoplus_h h\right) \\ \alpha_{D,D,D} &= \epsilon(\chi(g,h)^{-1})_{g,h} \in \hom\left(\bigoplus_g D, \bigoplus_h D\right) \end{aligned} \tag{6.23}$$

と定まる．ただし，最後の行は $\hom\left(\bigoplus_g D, \bigoplus_h D\right)$ の g 成分から h 成分への写像として $\epsilon\chi(g,h)^{-1}$ をかけることを意味する．これらのデータを指定したものを $\mathrm{TY}(G,\chi,\epsilon)$ と記すこととする．

例えば，$G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{1, a, b, ab\}$ を考える．この場合 bicharacter は

$$\chi_\pm(a,a) = 1, \qquad \chi_\pm(b,b) = -\chi_\pm(a,b) = \pm 1 \tag{6.24}$$

という二通りがある．Frobenius-Schur indicator も二通りなので四つの $\mathrm{TY}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ がある．実は

$$\begin{aligned} \mathrm{TY}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \chi_+, 1/2) &= \mathrm{Rep}(D_8) \\ \mathrm{TY}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \chi_+, -1/2) &= \mathrm{Rep}(Q_8) \end{aligned} \tag{6.25}$$

となることが知られている．実際，$\mathrm{Rep}(D_8)$ の場合は (6.18) で確かめたように二次元表現が D に対応した Tambara-Yamagami 圏となっていることが分かる．

6.1.5 ゲージ化

本節ではフュージョン圏の言葉でゲージ化を表現する方法について述べる．フュージョン圏の言葉ではゲージ化は対称 Frobenius 代数 A を一つ指定することで定まる．対称 Frobenius 代数について述べるためには，まず $\mathcal{C}$ の代数と余代数について説明する必要がある．$\mathcal{C}$ の代数とは対象 $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ と射

$$m : A \otimes A \to A, \qquad e : 1 \to A \tag{6.26}$$

の組で図 38 の等式を満たすもののことである．m, e をそれぞれ乗法射，単位射と呼ぶ．また，$\mathcal{C}$ の余代数は対象 $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ と射

$$\Delta : A \to A \otimes A, \qquad \varepsilon : A \to 1 \tag{6.27}$$

の組で図 38 を上下反転させ矢印の向きを変えた等式を満たすもののことである．Δ, ε をそれぞれ余乗法射，余単位射という．$\mathcal{C}$ の 対称 Frobenius 代数とは代数かつ余代数であり，図 39 を満たすようなもののことである．

$\mathcal{C}$ の対称 Frobenius 代数 A が与えられたとき，ゲージ化は二次元時空上に A でラベルされたトポロジカルラインによる十分細かいネットワークを挿入することで実現される．図 38，39 の条件はネットワークのとり方によらないための条件，つまりゲージ変換に対する不変性のための条件と解釈することができる．

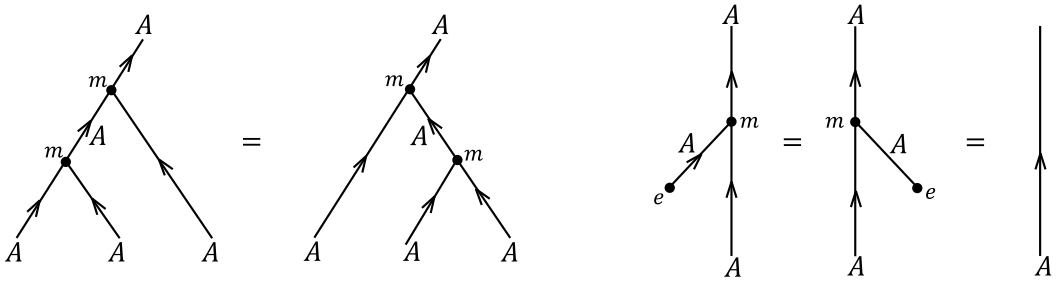


図 38: $\mathcal{C}$ 上の代数となる条件

例として Vec_G の場合を考える．G ゲージ化に対応する対称 Frobenius 代数 A は

$$A = \bigoplus_{g \in G} g \tag{6.28}$$

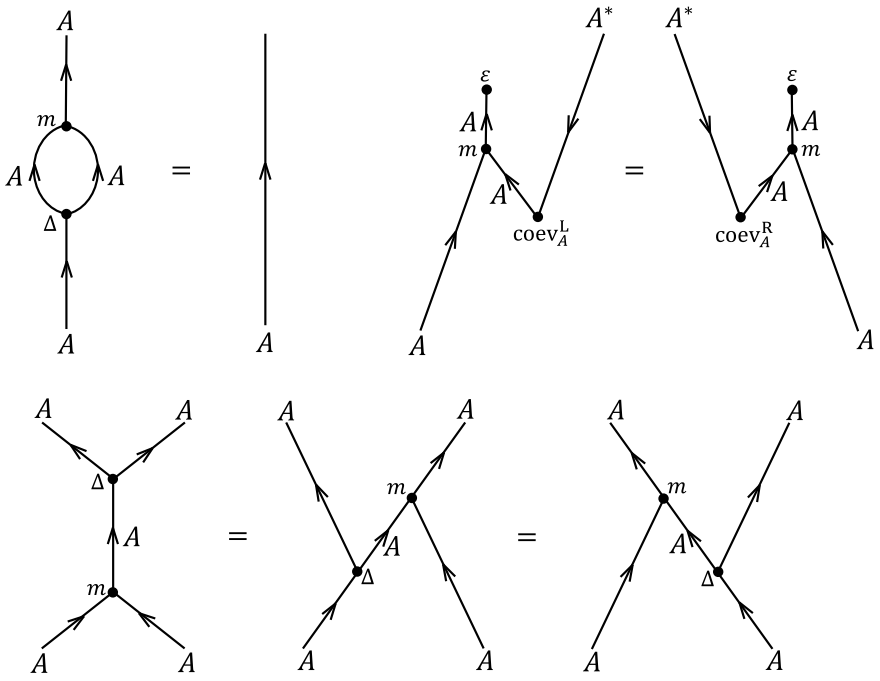


図 39: $\mathcal{C}$ 上の対称 Frobenius 代数となる条件

である．このとき，

$$A \otimes A = \bigoplus_{g\in G}\left(\bigoplus_{h\in G} gh^{-1}\otimes h\right) \tag{6.29}$$

となる．乗法射 $m : A \otimes A \to A$ は

$$m_g : \bigoplus_{h\in G} gh^{-1}\otimes h \simeq \mathbb{C}^{|G|} \ni (z_1, \cdots, z_{|G|}) \mapsto \sum_{h\in G} z_h \in \mathbb{C} \simeq g \tag{6.30}$$

によって与えられ，単位射 $e : 1 \to A$ は

$$e_g = \delta_{1,g}\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \tag{6.31}$$

として与えられる．また，余乗法射 $\Delta : A \to A \otimes A$ は

$$\Delta_g : g \simeq \mathbb{C} \ni z \mapsto \frac{1}{|G|}(z, z, \cdots, z) \in \mathbb{C}^{|G|} \simeq \bigoplus_{h\in G} gh^{-1}\otimes h \tag{6.32}$$

で与えられ，余単位射 $\varepsilon : A \to 1$ は

$$\varepsilon_g = |G|\delta_{1,g}\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \tag{6.33}$$

で与えられる．

この対称 Frobenius 代数のネットワークを挿入することは様々な配位の G ゲージ場の重ね合わせを考えていることに対応する．したがって，この対称 Frobenius 代数が G ゲージ化に対応していることが分かる．

6.1.6 アノマリー

4.1 節で述べたように可逆な対称性のアノマリーは背景ゲージ場付きの分配関数のゲージ不変性の破れとして定義された．非可逆対称性の場合は背景ゲージ場に当たるものが知られていないため，このような定義を用いることはできない．そこで分配関数のゲージ不変性ではなく，ここではアノマリーがあると自明な相が許されないという条件を用いてアノマリーを定義する．具体的には $\mathcal{C}$ 対称性がアノマリーを持つとは，ファイバー関手と呼ばれるものが存在しないこととして定義される [24]．ファイバー関手とは $\mathcal{C}$ から Vec へのテンソル積の構造を保つ関手のことである．ただし，Vec とは有限次元複素ベクトル空間がなす圏であり，単純対象が一つしかないフュージョン圏である．

しかし，与えられたフュージョン圏に対してファイバー関手が存在するかを調べるのは数学的にも難しい問題である．しかし，実はアノマリーを持つための十分条件として簡単に判定できるものが知られている．それは量子次元が非整数のトポロジカルラインが存在する場合はアノマリーがあるというものである [24, 55]．量子次元はフュージョン則が与えられれば計算することができるため，この判定方法は簡単で実用的である．

6.2 双対欠陥

もっとも古くから知られていた非可逆対称性の一つとして二次元 Ising 模型の Kramers-Wannier 双対性を利用したものがある [53]．Kramers-Wannier 双対性は Ising 模型の高温と低温を入れ替える双対性であり，臨界温度ではちょうどこの双対変換に関する不動点となっている．臨界点上ではこの双対性に対応する対称性欠陥 D を構成することができ，次のフュージョン則を満たす．

$$D \times \eta = \eta \times D = D, \qquad D \times D = 1 + \eta \tag{6.34}$$

ただし，η はスピンを反転させる $\mathbb{Z}_2$ 対称性の対称性演算子である．したがって，Ising 模型の臨界点上では TY($\mathbb{Z}_2$) 対称性があることが分かる．この Kramers-Wannier 欠陥は現代的な理解では双対欠陥と呼ばれるものの一種であることが知られている [8, 7]．双対欠陥は二次元に限らない一般の偶数次元の場の理論において非可逆対称性を構成する重要な方法の一つとなっている．

双対欠陥は次のように構成される．$G^{(p)}$ 対称性を持つ d 次元の理論 $\mathcal{T}$ であり，次の条件を満たすものを考える．

$$\mathcal{T}/G^{(p)} \simeq \mathcal{T} \tag{6.35}$$

つまり，ゲージ化をすると元の理論と等価となるような理論を考える．この等価の意味は必ずしも等しい必要はなく，双対性などを通して等価であればよい．実際，後で挙げるコンパクトボソンの具体例などは T-双対性の下で等価となる．また，ゲージ化をして元の理論と等価になるためには，双対対称性がもとの対称性と同じでなければならないので $p = d - p - 2$，つまり，$p = (d-2)/2$ という条件が必要である．このことから d は偶数でなければならず，$d = 2$ のときは $p = 0$，$d = 4$ のときは $p = 1$ というようになる．

双対欠陥を具体的に構成するには half-space gauging と呼ばれる手法を用いる．これは 1.2.3 節で対称性演算子を構成したときのように余次元 1 の多様体 $M^{(d-1)}$ によって時空を二つに分け，片方の時空だけを $G^{(p)}$ をゲージ化するという手法である．ゲージ化すると元の理論に戻るため，バルクは理論 $\mathcal{T}$ で記述され，$M^{(d-1)}$ 上に非自明な欠陥 D が挿入されることとなる (図 40)．

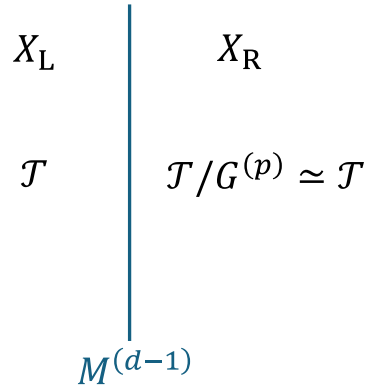


図 40: half-space gauging

ただし，この欠陥がトポロジカルであるためにはゲージ化をする際に $G^{(p)}$ 対称性のゲージ場 $a^{(p+1)}$ に Dirichlet 境界条件を課さなければならない．すると $M^{(d-1)}$ を変化させた際の変化分は $da^{(p+1)}$ によって計算されるが，$a^{(p+1)}$ は平坦なので 0 となる．したがって，この欠陥はトポロジカルであることが分かる．

次に双対欠陥 D のフュージョン則について述べる．$G^{(p)}$ 対称性の対称性演算子を η_g と表すこととする．D を構成する際に $G^{(p)}$ の half-space gauging を行ったが，その際に Dirichlet 境界条件を課したことから η_g の演算子は D 上では自明になることが分かる．したがって，D と η_g のフュージョンは

$$D \times \eta_g = \eta_g \times D = D \tag{6.36}$$

のようになることが分かる[*67]．双対欠陥二つのフュージョン則は，二次元の場合は

$$D \times D = \sum_{g \in G} \eta_g \tag{6.37}$$

となる[*68]．右辺の演算子は凝縮欠陥と呼ばれる演算子である [60]．これらのフュージョン則から双対欠陥の対称性を表すフュージョン圏は $\mathrm{TY}(G)$ であることが分かる．

双対欠陥のフュージョン則 (6.37) に現れた凝縮欠陥について述べる．通常 q-形式対称性をゲージ化するときはバルク全体でゲージ化するが，余次元 p の多様体 $M^{(d-p)}$ 上でのゲージ化を考えることもできる．q-形式対称性が $M^{(d-p)}$ 上でゲージ化できる場合 p-ゲージ化可能といい，そうでない場合は p-アノマリーがあるという．q-形式対称性の対称性演算子は余次元 $(q+1)$ なので $p \leq q+1$ でなければならない．q-形式対称性を p-ゲージ化して得られる対称性欠陥を凝縮欠陥という．(6.37) の右辺の凝縮欠陥は 0-形式対称性を 1-ゲージ化したものとなっている．

6.3 トポロジカルインターフェース

双対欠陥を具体的に構成する際に，トポロジカルインターフェースを用いると便利である．トポロジカルインターフェースとは図 41 のように二つの d 次元理論 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ をつなぐ余次元 1 のインターフェースであって，トポロジカルなもののことである．$\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}$ となるときはトポロジカルインターフェースは理論 $\mathcal{T}$ の 0-形式対称性そのものである．したがって，トポロジカルインターフェースは 0-形式対称性の対称性演算子を一般化したものと見なすことができる．

対称性演算子と同様にトポロジカルインターフェースに対してもフュージョンを考えることができる．$\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ の間のインターフェース I_1 と $\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$ の間のインターフェース I_2 を合成すると $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3$ の間のインターフェース $I_1 I_2$ となる (図 42)．$\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_3 = \mathcal{T}$ の場合は $I_1 I_2$ は理論 $\mathcal{T}$ の対称性演算子となる．

トポロジカルインターフェースの具体例としては前節で述べた half-space gauging がある．(6.35) を満たさない場合にも half-space gauging を行うことができ，その場合は理論 $\mathcal{T}$ と $\mathcal{T}/G^{(p)}$ をつなぐインターフェースが構成される．このインターフェースがトポロジカルであることは Dirichlet 境界条件によって保障される．

もう一つの具体例は双対性である．例としては後述する二次元コンパクトボソンの T-双対性や四次元 Maxwell 理論の電磁双対性などがある．このインターフェースは元の理論と双対の理論の間をつなぐトポロジカルインターフェースとなる．

[*67] 厳密には half-space gauging は右半分だけをゲージ化しているため，左から η_g をかけた場合は η_g が吸収されるとは限らない．実際，[59] などでは双対欠陥と η_g のフュージョンが非可換になる場合が議論されている．

[*68] 四次元の場合は $D \times D$ ではなく $D \times \overline{D}$ を考えると同様のフュージョン則が導かれる．

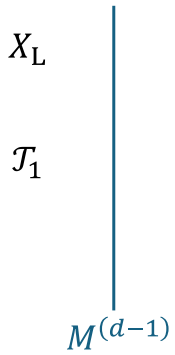


図 41: トポロジカルインターフェース

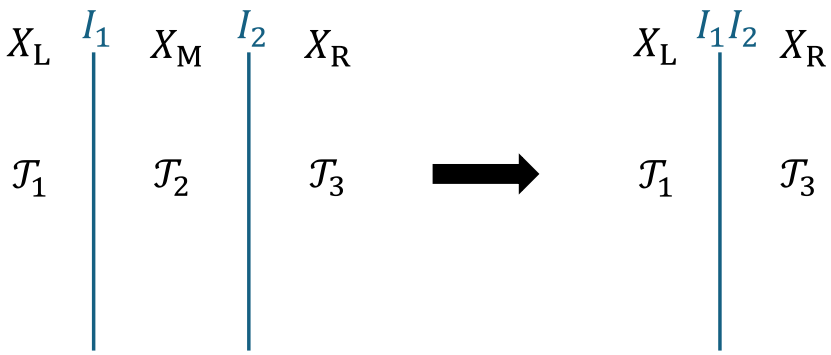


図 42: トポロジカルインターフェースのフュージョン

6.4 二次元コンパクトボソン

二次元コンパクトボソンの理論

$$\frac{R^2}{4\pi}\int d\phi \wedge *d\phi, \qquad \phi \sim \phi + 2\pi \tag{6.38}$$

における非可逆対称性について説明する．ただし，R は標的空間の S^1 の半径を表すパラメータである．この理論には $U(1)$ シフト対称性と $U(1)$ 巻き付き対称性という二つの 0-形式対称性がある．それぞれの保存電流は

$$\begin{aligned} *j_s &= \frac{R^2}{2\pi} * d\phi \\ *j_w &= \frac{1}{2\pi} d\phi \end{aligned} \tag{6.39}$$

であり，保存則はそれぞれ運動方程式と Bianchi 恒等式に対応する．

6.4.1 シフト対称性のゲージ化

シフト対称性の背景ゲージ場を結合させた作用は

$$\frac{R^2}{4\pi}\int (d\phi - A) \wedge *(d\phi - A) \tag{6.40}$$

と書ける．ここで $U(1)$ シフト対称性のうち $\mathbb{Z}_N$ 部分群だけゲージ化することを考える．ナイーブには $d\phi - A = d\phi'$ として ϕ' を定義することでもとのコンパクトボソンの理論に戻るように思える．しかし，コンパクトボソンは巻き付き数が整数でなければならないが ϕ' の巻き付き数は

$$\int \frac{d\phi'}{2\pi} = \int \frac{d\phi}{2\pi} - \int \frac{A}{2\pi} \in \frac{1}{N}\mathbb{Z} \tag{6.41}$$

となる．したがって，正しい巻き付き数を持つコンパクトボソンは $d\widetilde{\phi} = Nd\phi' = Nd\phi - NA$ と定義される．$\widetilde{\phi}$ に対する作用は

$$\frac{R^2}{4\pi N^2}\int d\widetilde{\phi} \wedge *d\widetilde{\phi} \tag{6.42}$$

となる．したがって，$\mathbb{Z}_N$ シフト対称性をゲージ化すると半径 R/N のコンパクトボソンの理論が得られる[*69]．

次に $\mathbb{Z}_N$ シフト対称性の half-space gauging によって得られるトポロジカルインターフェースの作用を求める．図 40 のように時空を半分に分けて X_{R} のみをゲージ化するので次の量を計算すればよい．

$$\int \mathcal{D}\phi_{\mathrm{L}}\mathcal{D}\phi_{\mathrm{R}}\mathcal{D}\lambda\mathcal{D}a \exp\left[-\frac{R^2}{4\pi}\int_{X_{\mathrm{L}}} d\phi_{\mathrm{L}} \wedge *d\phi_{\mathrm{L}} - \frac{R^2}{4\pi}\int_{X_{\mathrm{R}}} (d\phi_{\mathrm{R}} - a) \wedge *(d\phi_{\mathrm{R}} - a) + i\int_M \lambda(\phi_{\mathrm{L}} - \phi_{\mathrm{R}})\right] \tag{6.43}$$

ただし，a は $\mathbb{Z}_N$ ゲージ場であり，M 上では Dirichlet 条件が課されている．上述の議論と同様に $d\widetilde{\phi}_{\mathrm{R}} = N(d\phi_{\mathrm{R}} - a)$ と変数変換することにより X_{R} の作用は $\widetilde{\phi}_{\mathrm{R}}$ に関する半径 R/N のコンパクトボソンの作用となる．この変換によって接続条件を表す M 上の積分は次のようになる．

$$\frac{i}{2\pi}\int_M \widetilde{\lambda}(N\phi_{\mathrm{L}} - \widetilde{\phi}_{\mathrm{R}}) \tag{6.44}$$

ただし，a は M 上で消えることと $\lambda = N\widetilde{\lambda}$ という置き換えを行った．このインターフェースがトポロジカルであることは a の Dirichlet 境界条件によって保証される．

6.4.2 巻き付き対称性のゲージ化

次に $U(1)$ 巻き付き対称性の $\mathbb{Z}_N$ 部分群のゲージ化について考える．巻き付き対称性の背景ゲージ場を結合させた作用は

$$\frac{R^2}{4\pi}\int d\phi \wedge *d\phi + \frac{i}{2\pi}\int d\phi \wedge B \tag{6.45}$$

となる．B を $\mathbb{Z}_N$ ゲージ場に制限するには $NB = dC$ となるコンパクトボソン C を用いればよい．

$$\frac{i}{2\pi N}\int d\phi \wedge dC \tag{6.46}$$

という作用に対して C を経路積分すると ϕ の巻き付き数が N の倍数に制限される．したがって $\widetilde{\phi} = \frac{\phi}{N}$ とすると $\widetilde{\phi}$ は巻き付き数が $\mathbb{Z}$ 値のコンパクトボソンとなり $\widetilde{\phi}$ の作用は

$$\frac{N^2R^2}{4\pi}\int d\widetilde{\phi} \wedge *d\widetilde{\phi} \tag{6.47}$$

が得られる．したがって，$\mathbb{Z}_N$ 巻き付き対称性をゲージ化をすると半径が NR のコンパクトボソンの理論が得られる[*70]．

[*69] これは 5.2.1 節で述べた議論と同様の議論である．
[*70] これは 5.2.2 節で述べた議論と同様の議論である．

巻き付き対称性を half-space gauging することで得られるトポロジカルインターフェースは同様に計算すると

$$\frac{i}{2\pi}\int_M \lambda(\phi_{\rm L}-N\phi_{\rm R}) \tag{6.48}$$

となる．

6.4.3 T-双対性

2 次元コンパクトボソンには T-双対性と呼ばれる双対性がある．これは半径が R と $1/R$ の理論が等価であるという双対性である．場の言葉では $d\phi$ と $R^2 * d\phi$ を入れ替える双対性であり，したがってシフト対称性と巻き付き対称性が入れ替わる．T-双対性に対応するインターフェースは

$$\frac{i}{2\pi}\int \phi_{\rm L} d\phi_{\rm R} \tag{6.49}$$

と表される．このインターフェースが T-双対を表していることを見るには M 上の運動方程式を見ればよい．M 上の $\phi_{\rm L},\phi_{\rm R}$ の運動方程式を求めると

$$\begin{aligned}\frac{R^2}{2\pi} * d\phi_{\rm L} &= \frac{i}{2\pi} d\phi_{\rm R}\\ \frac{1}{2\pi R^2} * d\phi_{\rm R} &= \frac{i}{2\pi} d\phi_{\rm L}\end{aligned} \tag{6.50}$$

となり，確かに T-双対を表していることが分かる[*71]．このインターフェースがトポロジカルであることを示すにはエネルギー運動量テンソルが連続となることを示せばよい．エネルギー運動量テンソルは左の領域では

$$T_{\mu\nu} = \frac{R^2}{4\pi}\left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial_\rho\phi\partial_\rho\phi - \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right) \tag{6.51}$$

となる．この式に (6.50) を代入すると $R\to 1/R$ としたエネルギー運動量テンソルが得られるが，これは右側の領域のエネルギー運動量テンソルである．したがって，エネルギー運動量テンソルはこのインターフェース上で連続となるため，このインターフェースはトポロジカルであることが分かる．

6.4.4 双対欠陥

これらのインターフェースを組み合わせることで二次元コンパクトボソンの理論に双対欠陥を構成することができる．例えば，半径が $\sqrt{N}$ の理論において $\mathbb{Z}_N$ シフト対称性をゲージ化すると半径 $\sqrt{N}/N = 1/\sqrt{N}$ の理論となり，さらに T-双対を取ると半径 $\sqrt{N}$ の理論に戻る．したがってこれらのインターフェースをフュージョンすることで半径 $\sqrt{N}$ の理論上の双対欠陥 D が得られる (図 43)．この D の表式は式 (6.44)，(6.49) から

$$\frac{i}{2\pi}\int_M \lambda(N\phi_{\rm L}-\phi_{\rm M}) + \frac{i}{2\pi}\int_{M'} \phi_{\rm M} d\phi_{\rm R} \tag{6.52}$$

において $M'\to M$ とすることで得られる．したがって

$$\frac{i}{2\pi}\int_M \lambda(N\phi_{\rm L}-\phi_{\rm M}) + \phi_{\rm M} d\phi_{\rm R} \tag{6.53}$$

[*71] i が現れるのは Euclid 化して考えているため．

となり，ϕ_{M} を経路積分することで $\lambda = d\phi_{\mathrm{R}}$ が得られるので

$$\frac{iN}{2\pi}\int_M \phi_{\mathrm{L}} d\phi_{\mathrm{R}} \tag{6.54}$$

と求まる．

また，半径が $1/\sqrt{N}$ の理論の場合でも $\mathbb{Z}_N$ 巻き付き対称性をゲージ化すると半径 $N/\sqrt{N} = \sqrt{N}$ の理論となり，さらに T-双対を取ると半径 $1/\sqrt{N}$ の理論に戻るため双対欠陥を構成することができる[*72]．この双対欠陥 D の表式は

$$\frac{i}{2\pi}\int_M \lambda(\phi_{\mathrm{L}} - N\phi_{\mathrm{M}}) + \phi_{\mathrm{M}} d\phi_{\mathrm{R}} \tag{6.55}$$

となる．上の場合と同様に ϕ_{M} を経路積分すると $N\lambda = d\phi_{\mathrm{R}}$ となるため

$$\frac{i}{2\pi N}\int \phi_{\mathrm{L}} d\phi_{\mathrm{R}} \tag{6.56}$$

が得られる．ただしここで注意する必要があり，この表式はゲージ変換 $\phi_{\mathrm{L}} \to \phi_{\mathrm{L}} + 2\pi$ に対して不変でない．ゲージ不変な表式は (6.55) のように補助場を用いなければならない．

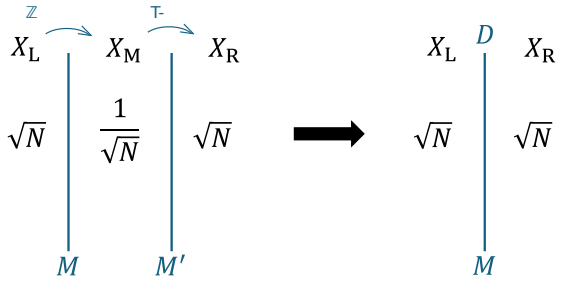


図 43: 二次元コンパクトボソン理論における双対欠陥の構成

6.4.5 フュージョン則

次のこの双対欠陥のフュージョン則を求める．ここでは $R = \sqrt{N}$ のコンパクトボソンにおける $\mathbb{Z}_N$ シフト対称性のゲージ化を利用した双対欠陥 D についてのみ考える．まず，$\mathbb{Z}_N$ シフト対称性の生成子

$$\eta(M) = \exp\left[\int_M *d\phi\right] \tag{6.57}$$

とのフュージョンを考える．$\eta \times D$ は

$$\int_M *d\phi_{\mathrm{L}} + \frac{iN}{2\pi}\int_M \phi_{\mathrm{L}} d\phi_{\mathrm{R}} \tag{6.58}$$

を計算すればよい．そのためには双対欠陥上の運動方程式を求める必要がある．式 (6.54) の表式から，双対欠陥上の運動方程式は

$$*d\phi_{\mathrm{L}} = id\phi_{\mathrm{R}} \tag{6.59}$$

[*72] ただし，半径 $1/\sqrt{N}$ の理論は $\sqrt{N}$ の理論と T-双対で結びついているので，この双対欠陥は上で述べたものと同様であることに注意．

となる．これを用いると (6.58) は

$$\frac{iN}{2\pi}\int_M \left(\phi_{\rm L}+\frac{2\pi}{N}\right)d\phi_{\rm R} \tag{6.60}$$

となる．$\widetilde{\phi}_{\rm L}=\phi_{\rm L}+2\pi/N$ と定義しなおすことで双対欠陥 D が得られるので

$$\eta\times D=D \tag{6.61}$$

となる．$D\times\eta=D$ についても同様に求めることができる．

次に，$D\times D$ を求める．M 上の作用は

$$\frac{iN}{2\pi}\int_M \phi_{\rm L}d\phi_{\rm M}+\phi_{\rm M}d\phi_{\rm R}=\frac{iN}{2\pi}\int_M d\phi_{\rm M}(\phi_{\rm L}-\phi_{\rm R}) \tag{6.62}$$

と表せる．これを次のように変形する．

$$\frac{iN}{2\pi}\int_M \phi_{\rm M}dc+\frac{i}{2\pi}\int_M \lambda(\phi_{\rm L}-\phi_{\rm R}+c) \tag{6.63}$$

この表式が (6.62) と等価であることは，c を積分すると $\lambda=Nd\phi_{\rm M}$ となることから分かる．この表式において $\phi_{\rm M}$ を積分するとコンパクトボソン c は $\mathbb{Z}_N$ 値に制限される．これは $c=2\pi k/N,\ k\in\mathbb{Z}_N$ という定数となることを意味する．したがって，$D\times D$ の表式は最終的に

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_N}\exp\left[\frac{i}{2\pi}\int_M\lambda\left(\phi_{\rm L}-\phi_{\rm R}+\frac{2\pi k}{N}\right)\right] \tag{6.64}$$

となる．これは (6.57) の表式とは異なるが，1.2.3 節の対称性演算子の構成を思い出すと，$\mathbb{Z}_N$ シフト対称性の対称性演算子の和となっていることが分かる．したがって，

$$D\times D=\sum_{k\in\mathbb{Z}_N}\eta^k \tag{6.65}$$

となり，双対欠陥の二乗が凝縮欠陥となることが確かめられた．

6.5 カイラル対称性

6.5.1 非可逆対称性演算子

本節では四次元の理論における非可逆対称性の例について述べる [5, 4]．質量 0 の Dirac フェルミオンに関する QED を考える．作用は

$$S=\int d^4x\left[\frac{1}{4e^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+i\overline{\Psi}(\partial_\mu-iA_\mu)\gamma^\mu\Psi\right] \tag{6.66}$$

で与えられる．この作用は古典的には次のカイラル変換

$$\Psi\to e^{i\alpha\gamma_5/2}\Psi \tag{6.67}$$

に関して不変となる[*73]．しかし量子論的にはこの対称性は破れていることが知られており，これを ABJ アノマリーという[*74]．具体的にはこの変換の電流

$$j_\mu=\overline{\Psi}\gamma_5\gamma_\mu\Psi \tag{6.68}$$

[*73] 係数は $\alpha\sim\alpha+2\pi$ となるように決めてある．実際，$\alpha=2\pi$ とすると $\Psi\to-\Psi$ となるが，これは $U(1)$ ゲージ変換なので自明な変換となる．

[*74] 't Hooft アノマリーとは異なる概念であることに注意．

は保存せず

$$d*j=\frac{1}{4\pi^2}F\wedge F \tag{6.69}$$

となる．そこでナイーブには j ではなく新たに

$$*\widehat{j}=*j-\frac{1}{4\pi^2}A\wedge dA \tag{6.70}$$

として新たに電流を定義すると $d*\widehat{j}=0$ となるのでトポロジカルな演算子

$$\widehat{U}_\alpha(M^{(3)})=\exp\left[\frac{i\alpha}{2}\int_{M^{(3)}}\left(*j-\frac{1}{4\pi^2}A\wedge dA\right)\right] \tag{6.71}$$

を定義できるように思える．しかし，この演算子の二項目の Chern-Simons 項は $\alpha\in 2\pi\mathbb{Z}$ でないときはゲージ不変ではない．そこでこの演算子を修正してトポロジカルかつゲージ不変な演算子を構成する必要がある．実は $\alpha\in\pi\mathbb{Q}$ のときはそのような構成が知られている．まずもっとも簡単な $\alpha=2\pi/N$ の場合について考える．このとき，演算子 (6.71) のうち Chern-Simons 項の部分は

$$-\frac{i}{4\pi N}\int_{M^{(3)}}A\wedge dA \tag{6.72}$$

となる．この表式をゲージ不変にするために次のように修正する．

$$i\int_{M^{(3)}}\left(\frac{N}{4\pi}a\wedge da+\frac{1}{2\pi}a\wedge dA\right) \tag{6.73}$$

ただし，ここで a は $M^{(3)}$ 上に住むダイナミカルな $U(1)$ ゲージ場であり，(6.73) の表式は正しくは a の経路積分を含んでいるものとする[*75]．式 (6.73) から式 (6.72) へは a の経路積分をナイーブに行うと $a=-A/N$ となるため元に戻ることが分かる．ただし，この式変形は $-A/N$ が適切に量子化された $U(1)$ ゲージ場ではないので正しくないことに注意する必要がある．式 (6.73) を用いることでトポロジカルかつゲージ不変な $\alpha=2\pi/N$ のカイラル変換の演算子

$$\mathcal{D}_{\frac{1}{N}}(M^{(3)})=\exp\left[i\int_{M^{(3)}}\left(\frac{2\pi}{2N}*j+\frac{N}{4\pi}a\wedge da+\frac{1}{2\pi}a\wedge dA\right)\right] \tag{6.74}$$

が定義できる．

$\mathcal{D}_{\frac{1}{N}}$ の定義で重要だったのは $M^{(3)}$ 上の TQFT との結合を考えたことにある．カイラル変換 (6.67) を $M^{(3)}$ で区切られた右側のバルクのみで行うと， ABJ アノマリーがあることによって右側には式 (6.69) の右辺の積分が現れる．この $\frac{1}{4\pi N}\int F\wedge F$ は境界付きの多様体上ではゲージ不変でなく境界へのアノマリー流入を引き起こす．したがって，ゲージ不変な対称性演算子を構成するためにはこのアノマリー流入によって打ち消されるようなアノマリーを持つ TQFT を $M^{(3)}$ 上に置かなければならない．そのために $\mathcal{D}_{\frac{1}{N}}$ の定義の際には $U(1)_N$ Chern-Simons 理論を結合させた．

したがって，一般の $\alpha=2\pi p/N$, $(p,N$ は互いに素$)$ に対するカイラル変換の対称性演算子を構成するには $\frac{p}{4\pi N}\int F\wedge F$ からのアノマリー流入を打ち消すような TQFT を $M^{(3)}$ 上に置けばよい．これは例えば $U(1)_N$ Chern-Simons 理論を p 個かけ合わせることなどで実現できる．この TQFT の選び方には任意性があるが，ある種の最小なものを取ってくることができることが知られている．これを最小 $\mathbb{Z}_N$ TQFT と呼び，$\mathcal{A}^{N,p}$ と表す．つまり $\mathcal{A}^{N,p}$ は $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性を持ち $p\sim p+N$ でラベルされるようなアノマリーを持つ TQFT であ

[*75] 以下この節では，演算子中の小文字の a は足し上げられているものとする．

る．さらに，同じように $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性を持ち p でラベルされるアノマリーを持つ TQFT $\mathcal{T}[B]$ があったとき，$\mathcal{T}[B]$ は $\mathcal{A}^{N,p}[B]$ と独立な TQFT $\mathcal{T}'$ の積に分解されるという性質を持つ．このような最小 $\mathbb{Z}_N$ TQFT を用いることで $\alpha = 2\pi p/N$ のカイラル変換に対応する対称性演算子は

$$\mathcal{D}_{\frac{p}{N}}(M^{(3)}) = \exp\left[i\int_{M^{(3)}}\left(\frac{2\pi p}{2N} * j + \mathcal{A}^{N,p}[dA/N]\right)\right] \tag{6.75}$$

と書ける．

6.5.2 フュージョン則

次に前節で構成した対称性演算子のフュージョン則について考える．まず，$\mathcal{D}_{\frac{1}{N}}$ と $\mathcal{D}^\dagger_{\frac{1}{N}}$ のフュージョンを考える．$\mathcal{D}^\dagger_{\frac{1}{N}}$ は $\mathcal{D}_{\frac{1}{N}}$ の向きを変えたもので

$$\mathcal{D}^\dagger_{\frac{1}{N}}(M^{(3)}) = \exp\left[-i\int_{M^{(3)}}\left(\frac{2\pi}{2N} * j + \frac{N}{4\pi}\bar{a}\wedge d\bar{a} + \frac{1}{2\pi}\bar{a}\wedge dA\right)\right] \tag{6.76}$$

と表される．$\mathcal{D}_{\frac{1}{N}}$ と $\mathcal{D}^\dagger_{\frac{1}{N}}$ のフュージョンを計算すると

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\frac{1}{N}}(M^{(3)})\times\mathcal{D}^\dagger_{\frac{1}{N}}(M^{(3)}) &= \int\mathcal{D}a\mathcal{D}\bar{a}\,\exp\left[i\int_{M^{(3)}}\left(\frac{N}{4\pi}a\wedge da - \frac{N}{4\pi}\bar{a}\wedge d\bar{a} + \frac{1}{2\pi}(a-\bar{a})\wedge dA\right)\right]\\ &= \int\mathcal{D}a\mathcal{D}\bar{a}\,\exp\left[i\int_{M^{(3)}}\left(\frac{N}{4\pi}(a+\bar{a})\wedge d(a-\bar{a}) + \frac{1}{2\pi}(a-\bar{a})\wedge dA\right)\right]\end{aligned} \tag{6.77}$$

となる．ここで，$b = \frac{1}{2}(a+\bar{a})$，$c = a-\bar{a}$ と置くと

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\frac{1}{N}}(M^{(3)})\times\mathcal{D}^\dagger_{\frac{1}{N}}(M^{(3)}) &= \int\mathcal{D}b\mathcal{D}c\,\exp\left[i\int_{M^{(3)}}\left(\frac{N}{2\pi}b\wedge dc + \frac{1}{2\pi}c\wedge dA\right)\right]\\ &= \sum_{c\in H^1\left(M^{(3)};\frac{2\pi}{N}\mathbb{Z}_N\right)}\exp\left[\frac{i}{2\pi}\int_{M^{(3)}}c\wedge dA\right]\\ &= \sum_{\gamma^{(2)}\in H_2(M^{(3)};\mathbb{Z}_N)}\exp\left[\frac{2\pi i}{N}\int_{\gamma^{(2)}}\frac{dA}{2\pi}\right]\end{aligned} \tag{6.78}$$

となる．最右辺の表式は磁気的 $\mathbb{Z}_N^{(1)}\subset U(1)^{(1)}$ 対称性の凝縮欠陥となっていることが分かる．このことから $\mathcal{D}_{\frac{1}{N}}$ は双対欠陥となっていることが分かる．

次に，$\mathcal{D}_{\frac{1}{N}}$ の二乗を計算する．

$$\mathcal{D}_{\frac{1}{N}}(M^{(3)})\times\mathcal{D}_{\frac{1}{N}}(M^{(3)}) = \int\mathcal{D}a_1\mathcal{D}a_2\,\exp\left[i\int_{M^{(3)}}\left(\frac{4\pi}{2N} * j + \frac{N}{4\pi}a_1\wedge da_1 + \frac{N}{4\pi}a_2\wedge da_2 + \frac{1}{2\pi}(a_1+a_2)\wedge dA\right)\right] \tag{6.79}$$

となるが，N が奇数のときはこれは $\exp\big(i\int(a_1+a_2)\big)$，$\exp\big(i\int(a_1-a_2)\big)$ でそれぞれ生成される $\mathcal{A}^{N,2}\times\mathcal{A}^{N,2}$ に分解できることが知られている．バルクの $U(1)$ ゲージ場 A は一つ目の $\mathcal{A}^{N,2}$ にのみ結合しているため，フュージョン則は N が奇数のときは

$$\mathcal{D}_{\frac{1}{N}}\times\mathcal{D}_{\frac{1}{N}} = \mathcal{A}^{N,2}\mathcal{D}_{\frac{2}{N}} \tag{6.80}$$

となる．この表式から分かるようにフュージョン係数がただの数ではなく TQFT となっている．つまり，フュージョン係数が多様体に依存する．一般に非可逆対称性の場合はフュージョン係数が TQFT となることがあり，これはその一例となっている．

6.6 混合アノマリーがある場合のゲージ化

5.4 節で式 (5.23) のような混合アノマリーにおいて A をゲージ化すると非自明な群の拡大が起こることを述べた．では A ではなく G をゲージ化するとどのような対称性が得られるのか．ただし G は可換群とし，G 自身にはアノマリーはないものとする．

一般の A や G について議論するのは困難であるため，ここでは $A=\mathbb{Z}_N, G=\mathbb{Z}_N^{\mathrm{B}}\times\mathbb{Z}_N^{\mathrm{C}}$ とし，混合アノマリーは

$$\mathcal{A}=\frac{2\pi i}{N}\int_3 A\cup B\cup C \tag{6.81}$$

で与えられているとする．ただし，B,C は $G=\mathbb{Z}_N^{\mathrm{B}}\times\mathbb{Z}_N^{\mathrm{C}}$ のそれぞれの $\mathbb{Z}_N$ ゲージ場である．次に，S,T という操作を次のように定義する．

$$\begin{aligned} S&: Z_{\mathcal{T}}[B,C]\to\sum_{b,c}Z_{\mathcal{T}}[b,c]\exp\left[\frac{2\pi i}{N}\int b\cup B+c\cup C\right]\\ T&: Z_{\mathcal{T}}[B,C]\to Z_{\mathcal{T}}[B,C]\exp\left[\frac{2\pi i}{N}\int B\cup C\right]\end{aligned} \tag{6.82}$$

S は G のゲージ化を意味し，T は G-SPT をかける操作に対応する．理論 $\mathcal{T}$ に対して $k\in\mathbb{Z}_N$ でラベルされた G-SPT をかけて G でゲージ化した理論を $\widetilde{\mathcal{T}}_k$ と表すこととする．

$$Z_{\widetilde{\mathcal{T}}_k}[B,C]=\sum_{b,c}Z_{\mathcal{T}}[b,c]\exp\left[\frac{2\pi i}{N}\int k\,b\cup c+b\cup B+c\cup C\right] \tag{6.83}$$

この理論 $\widetilde{\mathcal{T}}_k$ に対し STS という操作を行うと，

$$\begin{aligned} &Z_{STS\widetilde{\mathcal{T}}_k}[B,C]\\ &=\sum_{b_1,c_1}Z_{TS\widetilde{\mathcal{T}}_k}[b_1,c_1]\exp\left[\frac{2\pi i}{N}\int b_1\cup B+c_1\cup C\right]\\ &=\sum_{b_1,c_1,b_2,c_2}Z_{\widetilde{\mathcal{T}}_k}[b_2,c_2]\exp\left[\frac{2\pi i}{N}\int b_1\cup B+c_1\cup C+b_1\cup c_1+b_2\cup b_1+c_2\cup c_1\right]\\ &=\sum_{b_2,c_2}Z_{\widetilde{\mathcal{T}}_k}[b_2,c_2]\exp\left[\frac{2\pi i}{N}\int (b_2-B)\cup(C-c_2)\right]\\ &=\sum_{b_2,c_2,b_3,c_3}Z_{\mathcal{T}}[b_3,c_3]\exp\left[\frac{2\pi i}{N}\int k\,b_3\cup c_3+b_3\cup b_2+c_3\cup c_2+(b_2-B)\cup(C-c_2)\right]\\ &=\sum_{b_3,c_3}Z_{\mathcal{T}}[b_3,c_3]\exp\left[\frac{2\pi i}{N}\int k\,b_3\cup c_3+c_3\cup(C-b_3)-B\cup b_3\right]\\ &=\sum_{b_3,c_3}Z_{\mathcal{T}}[b_3,c_3]\exp\left[\frac{2\pi i}{N}\int (k+1)b_3\cup c_3+b_3\cup B+c_3\cup C\right]\\ &=Z_{\widetilde{\mathcal{T}}_{k+1}}[B,C]\end{aligned} \tag{6.84}$$

となる．つまり，STS という操作は $\widetilde{\mathcal{T}}_k$ を $\widetilde{\mathcal{T}}_{k+1}$ に写す操作となっている．同様にして ST^lS は $\widetilde{\mathcal{T}}_k$ を $\widetilde{\mathcal{T}}_{k+l}$ に写す操作となっている．また，これは $\widetilde{T}_k=(ST^k)\mathcal{T}$ であることと $S^2=1$ から，$(ST^lS)(ST^k)\mathcal{T}=ST^{k+l}\mathcal{T}$ として示してもよい．

以上のことから，理論 $\widetilde{\mathcal{T}}_k$ において STS による half-space gauging を行うと $\widetilde{\mathcal{T}}_k$ と $\widetilde{\mathcal{T}}_{k+1}$ の間のトポロジカルインターフェースが構成される．このままでは，このインターフェースは対称性ではないが，ここでゲージ場 A に関するゲージ変換を考える．$A \to A + \delta\lambda$ とするとアノマリー流入の作用から

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A} &= \frac{2\pi i}{N}\int_3 \delta\lambda \cup b \cup c \\ &= \frac{2\pi i}{N}\int_2 \lambda \cup b \cup c \end{aligned} \tag{6.85}$$

となるので，ゲージ変換パラメータ λ を左半分では 0 に，右半分では 1 をとるようにすると，右半分の理論 $\widetilde{\mathcal{T}}_{k+1}$ は $\widetilde{\mathcal{T}}_k$ に変化する．したがって，STS の half-space gauging と A のゲージ変換を組み合わせることで理論 $\widetilde{\mathcal{T}}_k$ の対称性演算子を構成することができる．このゲージ変換は A ラインの生成子をインターフェース上に置くことと等価であるため，A ラインの生成子と half-space gauging の合成と言ってもよい．また A ラインの生成子の l 乗は ST^lS による half-space gauging と合成することで対称性演算子となる．

以上のようにして構成された演算子はゲージ化の操作を含んでいるため非可逆対称性となる．A ラインの生成子に対応する対称性演算子は N 乗すると凝縮欠陥となるような演算子となっているため，このような演算子を N-ality 欠陥と呼ぶ．

$N = 2$ のときはこのようにして得られる N-ality 欠陥は双対欠陥となっており，この場合は $\mathrm{TY}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ 対称性，より詳しくは $\mathrm{Rep}(D_8)$ 対称性が得られることが知られている [61].

7 SymTFT

本章では SymTFT について説明する．これは，d 次元の理論の対称性を $(d+1)$ 次元の TQFT を用いて記述する方法である [12, 13, 14, 15, 16]．これを用いると，理論のダイナミクスに依らない形で対称性を記述し，議論することができる．特に，ダイナミクスを変えないトポロジカルな操作 (離散対称性のゲージ化など) は SymTFT の言葉ではトポロジカルな境界条件の取り換えとして解釈することができる．

7.1 SymTFT

SymTFT の考え方では d 次元閉多様体 X 上の理論 $\mathcal{T}$ の対称性は $(d+1)$ 次元多様体 $Y = X \times [0,1]$ 上の TQFT として記述される[*76]．Y は二つの境界 $\partial Y = \overline{X}_0 \sqcup X_1$ を持つが，$\overline{X}_0$ ではトポロジカルな境界条件が課され，X_1 では理論 $\mathcal{T}$ のダイナミカルな情報を持つ物理的な境界条件が課され，一般にはトポロジカルではない．

$\mathcal{T}$ の p-形式対称性の対称性演算子は TQFT の $(d-p-1)$ 次元トポロジカル演算子によって記述される．$\overline{X}_0$ に $(d-p-1)$ 次元のトポロジカル演算子を置くと，図 44 のように t 方向を縮めた際に d 次元の理論 $\mathcal{T}$ において対応する p-形式対称性の対称性演算子を挿入した分配関数が得られる．

$\mathcal{T}$ の p-形式対称性の荷電演算子は $\overline{X}_0$ で自明になる TQFT の $(p+1)$ 次元のトポロジカル演算子によって記述される．そのような演算子は図 44 のように $\overline{X}_0$ 上に境界もつように配置することが可能である．このような配置の下で t 方向を縮めると p-次元の荷電演算子を挿入した相関関数が得られる．対称性演算子の荷電演算子への作用は TQFT における $(d-p-1)$ 次元の演算子と $(p+1)$ 次元の演算子の間のブレイディングと解釈することができる．

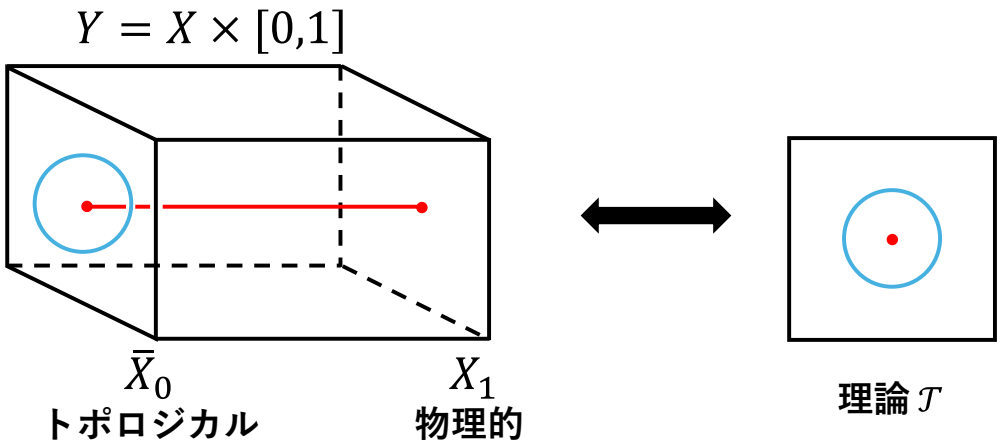


図 44: SymTFT の概念図．青いラインが境界の理論の対称性演算子に対応し，赤い点が荷電演算子に対応する．青い線と赤い線の間のブレイディングが対称性演算子の作用を表す．

[*76] $[0,1]$ 方向の座標を t で表す．

7.2 $\mathcal{C}$ 対称性

SymTFT の数学的な側面について説明する．高次元の対称性に対応する数学的記述は複雑なので二次元の有限対称性，つまりフュージョン圏で記述される対称性のみを考える．

フュージョン圏 $\mathcal{C}$ で表される二次元の対称性に対する三次元の SymTFT は数学的には $\mathcal{C}$ の Turaev-Viro TQFT というもので表される [62]．$\mathcal{C} = \mathrm{Vec}_G^\omega$ の場合は Turaev-Viro TQFT は (G, ω) で指定される Dijkgraaf-Witten 理論となる [47]．Turaev-Viro TQFT の具体的な構成については詳しく述べないが，Dijkgraaf-Witten 理論の場合と同様に三次元多様体を三角形分割し，各 1-単体に $\mathcal{C}$ の元を割り当て，各 3-単体に対して結合構造を割り当てたものと思えばよい．

三次元 TQFT は一般にモジュラーテンソル圏 (MTC) という言葉によって記述されるが[*77]，$\mathcal{C}$ の Turaev-Viro TQFT に対応する MTC は $\mathcal{C}$ の Drinfeld 中心 $Z(\mathcal{C})$ と呼ばれるものであることが知られている．

前節で SymTFT を調べる際にはトポロジカルな境界条件が重要であると述べたが，MTC の言葉ではトポロジカルな境界条件は Lagrangian 代数というものと対応することが知られている．これは凝縮 (ゲージ化) できるエニオンのうち極大のもののことである．ここでは Lagrangian 代数の正確な定義を述べることはせず，代わりに Lagrangian 部分群と呼ばれるものについて説明する．3 次元 TQFT が Abelian TQFT [*78] となる場合は Lagrangian 代数は Lagrangian 部分群と等価であることが知られている [63]．

Lagrangian 部分群は次のように定義される．Abelian TQFT ではエニオンのフュージョンは可換群 G の構造をなす．Lagrangian 部分群とは $|L|^2 = |G|$ を満たす G の部分群 L で次の三つの条件を満たすもののことである．

1. 任意のエニオン $a \in L$ に対して $\theta(a) = 1$
2. 任意の二つのエニオン $a, b \in L$ に対して a, b のブレイディングが自明，つまり $\forall a, b \in L, B(a, b) = 1$
3. 任意の L に含まれないエニオン a に対して L に含まれるエニオン b が存在して a, b のブレイディングが非自明となる．つまり，$\forall a \notin L, \exists b \in L,$ s.t. $B(a, b) \neq 1$

一つ目の条件は L がボソンによって構成されていること，二つ目の条件は部分群 L をゲージ化するための条件，三つ目の条件は L を含むより大きな部分群でゲージ化することができないことを意味する．

Lagrangian 部分群とトポロジカルな境界条件が対応することは次のようにして理解することができる．まず，三次元閉多様体 Z 上に TQFT を置き，二次元閉多様体 M によって Z が Z_1, Z_2 に分けられているとする．Lagrangian 部分群 L が与えられたとき，Z_2 上で L をゲージ化，つまり half-space gauging を行う．すると M 上にインターフェースを構成できるが，Dirchlet 境界条件を課すことでこのインターフェースはトポロジカルとなる (図 45)．L をゲージ化すると L に含まれるエニオンは自明となる．さらに Lagrangian 部分群の三つ目の条件から，L に含まれないエニオンはゲージ不変でなくなるため，Z_2 上では非自明かつゲージ不変な演算子がなくなり自明な理論となる．これは Z_1 の領域だけを考えていることと等価なので，M 上のインターフェースは Z_1 のトポロジカルな境界と思うことができる．以上のようにして，$Z(\mathcal{C})$ が Lagrangian 部分群 L を持つときは L に対応するトポロジカルな境界条件が構成できることが示された．

この構成から分かるように，L に対応するトポロジカルな境界では L のエニオンは自明，つまり端を持つこ

[*77] モジュラーテンソル圏は三次元 TQFT 中のトポロジカルライン (エニオン) を記述する数学的道具である．詳しくは付録 D を参照.

[*78] Abelian TQFT とは全てのエニオンの量子次元が 1 であるようなもののことである．

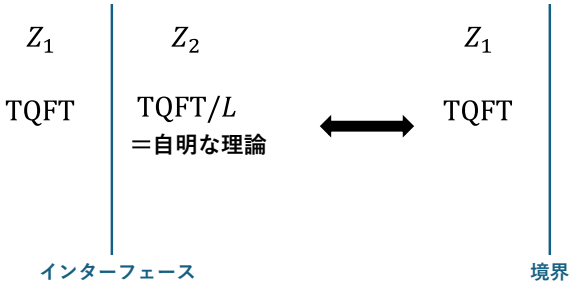


図 45: トポロジカルな境界条件の構成

とができる．したがって，L に対応するトポロジカルな境界条件を $\overline{X}_0$ に課して t 方向を縮めると，G/L の対称性が得られ，L に含まれるエニオンが荷電演算子となる．Lagrangian 部分群の三つ目の条件から対称性演算子の荷電演算子への作用が得られることも分かる．

また，エニオンの Poincaré 双対を取り背景ゲージ場の言葉で書き直すと，L に対応するトポロジカルな境界条件は L に対応する背景ゲージ場の Dirichlet 境界条件を取っていることが分かる．

7.3 $\mathbb{Z}_N$ 対称性

具体例として二次元のアノマリーのない $\mathbb{Z}_N^{(0)}$ 対称性を持つ理論 $\mathcal{T}$ を考える．この $\mathbb{Z}_N$ 対称性の対称性演算子の生成子を η，荷電演算子の生成子を V とする．二次元の $\mathbb{Z}_N$ 対称性に対応する SymTFT はレベル N の BF 理論

$$\frac{2\pi i}{N}\int b\cup\delta a \tag{7.1}$$

である [64]．ここで a, b は $\mathbb{Z}_N$ ゲージ場である．この理論におけるエニオンは

$$\begin{aligned} e(\gamma) &= \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\int_\gamma a\right) \\ m(\gamma) &= \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\int_\gamma b\right) \end{aligned} \tag{7.2}$$

という Wilson ラインで生成される N^2 個のラインであり，これらのエニオンの間のブレイディングは

$$B(e,m) = \langle e(\gamma)m(\gamma')\rangle = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right) \tag{7.3}$$

となる．これは次のように求めることができる．

$$\langle e(\gamma)m(\gamma')\rangle = \sum_{a,b}\exp\left[\frac{2\pi i}{N}\int\Big(b\cup\delta a + a\cup\delta(\gamma) + b\cup\delta(\gamma')\Big)\right] \tag{7.4}$$

b の和を取ると，$a = -\delta(\Sigma')$ というデルタ関数が得られる．ただし，Σ' は $\partial\Sigma' = \gamma'$ を満たす二次元多様体である．したがって，a の和を取ると

$$\langle e(\gamma)m(\gamma')\rangle = \exp\left[-\frac{2\pi i}{N}\int\delta(\Sigma')\cup\delta(\gamma)\right] = \exp\left[-\frac{2\pi i}{N}\,\mathrm{Link}(\gamma,\gamma')\right] = e^{2\pi i/N} \tag{7.5}$$

ただし，$\mathrm{Link}(\gamma,\gamma') = -1$ とした (図 46)．

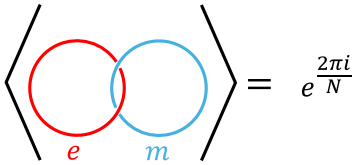


図 46: e ラインと m ラインのブレイディング

7.3.1 境界条件

トポロジカルな境界条件を調べるために Lagrangian 部分群 L を求める．まず，エニオン全体がなす群は $G = \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$ であり，$|L|^2 = |G|$ でなければならないので $|L| = N$ であることが分かる．代表的な Lagrangian 部分群として次の二つがある．

- $L = \{e^k \mid k \in \mathbb{Z}_N\}$
  この L に対応するトポロジカルな境界条件は e ラインを自明とするため，$e^k m^l \sim m^l$ となる．この境界条件を $\overline{X}_0$ に置き t 方向を縮めると，理論 $\mathcal{T}$ が得られ，$[m^l]$ は η^l のトポロジカルラインに対応し，e^k は V^k の荷電演算子に対応する．また，ゲージ場の言葉ではこの境界条件は a に対する Dirchlet 境界条件に対応する．
  実際に作用の言葉で L の half-space gauging を行うことを考える．$e(\gamma)$ の Poincaré 双対を取った 2-形式背景ゲージ場を $\widetilde{B}$ とすると
  $$\frac{2\pi i}{N}\int_Z b \cup \delta a + \frac{2\pi i}{N}\int_{Z_2} \widetilde{B} \cup a \tag{7.6}$$
  となる．$\widetilde{B}$ を経路積分すると Z_2 上では $a = 0$ となるので BF 理論の作用に代入すると 0 となる．したがって，作用の言葉でも Z_2 上では自明な理論となることが分かる．
  また，m ラインを M 上に挿入することも可能である[*79]．その場合，m ラインの M 上での Poincaré 双対の 1-形式背景ゲージ場を A とすると，作用は
  $$\frac{2\pi i}{N}\int_Z b \cup \delta a + \frac{2\pi i}{N}\int_{Z_2} \widetilde{B} \cup a + \frac{2\pi i}{N}\int_M b \cup A \tag{7.7}$$
  となる．$\widetilde{B}$ を積分した後，M 上で b を積分すると $a = A$ という条件が M 上で課される．つまり，m ラインを M 上に挿入すると境界で $a = A$ とするような Dirchlet 境界条件が課される．この境界条件を $|D(A)\rangle$ という状態として表すこととする．
- $L = \{m^k \mid k \in \mathbb{Z}_N\}$
  先ほどの Lagrangian 部分群とは e, m を入れ替えただけしか変わらないので，同様に議論することで M 上で $b = B$ とするような Dirchlet 境界条件が得られることが分かる．したがって，この Lagrangian 部分群に対応するトポロジカルな境界条件を $\overline{X}_0$ に置き t 方向を縮めると，$\mathbb{Z}_N$ 対称性が得られる．ただし，この $\mathbb{Z}_N$ 対称性はもとの理論 $\mathcal{T}$ の対称性というより，ゲージ化した理論 $\mathcal{T}/\mathbb{Z}_N$ における双対の $\mathbb{Z}_N$ 対称性ととらえることができる．これについては後ほど説明する．ゲージ場 a と b は互いに共役の

[*79] e ラインと m ラインは非自明なブレイディングを持つ．つまり，これらの対称性の間には混合アノマリーがあるということであり，同時に背景ゲージ場を挿入することはできない．しかし，今 half-space gauging を行う際には M 上で $\widetilde{B} = 0$ としているため M 上の m ラインを挿入することができる．

関係となっているため，b に対する Dirichlet 境界条件は a に対する Neumann 境界条件と思うことができる．この境界条件を $|N(B)\rangle$ と表すこととすると，$|D(A)\rangle$ と $|N(B)\rangle$ は離散 Fourier 変換で結びつく．実際，作用の言葉でも $|N(B)\rangle$ は

$$\frac{2\pi i}{N}\int_Z b\cup\delta a+\frac{2\pi i}{N}\int_{Z_2} b\cup\widetilde{A}+\frac{2\pi i}{N}\int_M B\cup a \tag{7.8}$$

という作用に対応するため，

$$|N(B)\rangle=\sum_a \exp\left[\frac{2\pi i}{N}\int_M B\cup a\right]|D(a)\rangle \tag{7.9}$$

と表せる．

まとめると，代表的な境界条件は状態の言葉で

$$\begin{aligned}|D(A)\rangle&=\sum_a \delta(a-A)\,|a\rangle\\ |N(B)\rangle&=\sum_a \exp\left[\frac{2\pi i}{N}\int B\cup a\right]|a\rangle\end{aligned} \tag{7.10}$$

と表せる．ただし，$|a\rangle$ は $|D(a)\rangle$ と同じ意味で用いている．

次に物理的な境界条件について述べる．X_1 に課す境界条件は

$$|\mathcal{T}\rangle=\sum_a Z_{\mathcal{T}}[a]\,|a\rangle \tag{7.11}$$

と表される．ただし，$Z_{\mathcal{T}}[A]$ は背景ゲージ場 A を挿入した理論 $\mathcal{T}$ の分配関数である．この境界条件が正しいことは次のようにしてわかる．$\overline{X}_0$ に Dirchlet 境界条件を課し，t 方向を縮める．t 方向を縮めることは状態の言葉では内積を取ることを意味するので $\langle D(A)|\mathcal{T}\rangle$ を計算すればよい．実際に (7.10) と (7.11) を用いて計算すると

$$\langle D(A)|\mathcal{T}\rangle=\sum_{a,a'}\delta(a-A)Z_{\mathcal{T}}[a']\,\langle a|a'\rangle=Z_{\mathcal{T}}[A] \tag{7.12}$$

となり，確かに背景ゲージ場 A を挿入した分配関数が再現されていることが分かる．また，$\overline{X}_0$ に Neumann 境界条件を課した場合も同様に計算すると

$$\langle N(B)|\mathcal{T}\rangle=\sum_{a,a'}\exp\left[\frac{2\pi i}{N}\int a\cup B\right]Z_{\mathcal{T}}[a']\,\langle a|a'\rangle=\sum_a\exp\left[\frac{2\pi i}{N}\int a\cup B\right]Z_{\mathcal{T}}[a]=Z_{\mathcal{T}/\mathbb{Z}_N}[B] \tag{7.13}$$

となり，確かに理論 $\mathcal{T}/\mathbb{Z}_N$ の分配関数が再現される．

以上のように $\mathbb{Z}_N$ ゲージ化の操作がトポロジカルな境界条件の取り換えによって実現されることが分かったが，$\mathbb{Z}_N$ が部分群を持つときには部分群ゲージ化を考えることもできる．例えば $\mathbb{Z}_n\subset\mathbb{Z}_N$ とし，$\mathbb{Z}_n$ 部分群のゲージ化を考えたいとする．この操作に対応するトポロジカルな境界条件は Lagrangian 部分群

$$L=\{e^{pn}m^{qk}\mid p\in\mathbb{Z}_k,\,q\in\mathbb{Z}_n\}\simeq\mathbb{Z}_k\times\mathbb{Z}_n \tag{7.14}$$

となる．実際，この L は Lagrangian 部分群の条件を満たしており，

$$G/L\simeq\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_k \tag{7.15}$$

となり，生成元となる代表元は e^k,m^n である．これは $\mathbb{Z}_n$ をゲージ化して残る $\mathbb{Z}_k$ 対称性と，新たに創発する双対の $\mathbb{Z}_n$ 対称性に対応していることが分かる．

7.3.2 アノマリーがある場合

次に $\mathbb{Z}_N$ 対称性がアノマリーを持つ場合について述べる．二次元 $\mathbb{Z}_N$ 対称性のアノマリーは $H^3(\mathbb{Z}_N, U(1)) \simeq \mathbb{Z}_N$ で分類される．アノマリー流入の作用を具体的に書くと

$$\frac{2\pi i k}{N^2} \int A \cup \delta A \tag{7.16}$$

と表される．このアノマリーを持つ $\mathbb{Z}_N$ 対称性の SymTFT は

$$S = \frac{2\pi i}{N} \int \left(b \cup \delta a + \frac{k}{N} a \cup \delta a \right) \tag{7.17}$$

となる．この作用の運動方程式を考えると

$$\begin{aligned} \delta a &= 0 \\ \delta b + \frac{2k}{N} \delta a &= 0 \end{aligned} \tag{7.18}$$

となる．一つ目の式を二つ目に代入して $\delta b = 0$ が得られるように思えるが，それは間違いである．一つ目の式は $\mathrm{mod}\ N$ での等式であるため，$\frac{1}{N}\delta a$ は 0 になるとは限らない．したがってアノマリーがある場合，e ラインはトポロジカルであるが，m ラインはトポロジカルでなくなる．トポロジカルにするためには

$$\widetilde{m}(\gamma) = \exp\left[\frac{2\pi i}{N} \int_\gamma \left(b + \frac{2k}{N} a \right) \right] \tag{7.19}$$

というラインを新たに考えなければならない．しかしこのように $\widetilde{m}$ を定義すると，$\widetilde{m}$ は自分自身と非自明なブレイディングを持つ．実際に計算すると

$$\langle \widetilde{m}(\gamma) \widetilde{m}(\gamma') \rangle = \sum_{a,b} \exp\left[\frac{2\pi i}{N} \int b \cup \delta a + \frac{k}{N} a \cup \delta a + \left(b + \frac{2k}{N} a \right) \cup (\delta(\gamma) + \delta(\gamma')) \right] \tag{7.20}$$

となり，b の和を取ると $a = -\delta(\Sigma) - \delta(\Sigma')$ というデルタ関数が得られる．ただし，Σ, Σ' はそれぞれ $\partial\Sigma = \gamma$, $\partial\Sigma' = \gamma'$ を満たす二次元多様体である．したがって，a の和を取ると

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{m}(\gamma) \widetilde{m}(\gamma') \rangle &= \exp\left[-\frac{2\pi i k}{N^2} \int (\delta(\Sigma) + \delta(\Sigma')) \cup (\delta(\gamma) + \delta(\gamma')) \right] \\ &= \exp\left[-\frac{4\pi i k}{N^2} \mathrm{Link}(\gamma, \gamma') \right] \end{aligned} \tag{7.21}$$

となる．ただし，γ や γ' は自分自身とはリンクしていないものとした．

したがって，m ラインをゲージ化できないため， Neumann 境界条件に対応する Lagrangian 代数は存在しない．Neumann 境界条件はゲージ化の操作に対応していたため，これはゲージ化ができないことを意味する．したがって，SymTFT の言葉ではアノマリーがある場合にゲージ化ができないという事実は Neumann 境界条件が取れないこととして表される．

7.4 SPT がある場合

$H^2(\mathbb{Z}_N, U(1))$ は自明であるため二次元 $\mathbb{Z}_N$ 対称性には SPT はないが，例えば二次元 $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$ 対称性などは $H^2(\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N, U(1)) \simeq \mathbb{Z}_N$ なので SPT が存在する．SPT が存在する場合は SymTFT の境界条件と

して SPT を掛け合わせた Dirchlet 境界条件や離散トーションを入れた Neumann 境界条件を取ることができる．

一般的に G 対称性を考え，

$$\exp\left[i\int_X \nu(A)\right] \tag{7.22}$$

で表される SPT があるとする．この SPT が掛け合わされた Dirchlet 境界条件は

$$|D(A)_\nu\rangle = \sum_a \delta(a-A)\exp\left[-i\int \nu(a)\right]|a\rangle \tag{7.23}$$

と表される．実際，

$$\langle D(A)_\nu|\mathcal{T}\rangle = \sum_{a,a'}\delta(a-A)\exp\left[i\int\nu(a)\right]Z_{\mathcal{T}}[a']\,\langle a|a'\rangle = Z_{\mathcal{T}}[A]\exp\left[i\int\nu(A)\right] \tag{7.24}$$

となり SPT が掛け合わされている．この SPT に関する離散トーションに対応する Neumann 境界条件は

$$|N(B)_\nu\rangle = \sum_a \exp\left[-i\int a\cup B - i\int\nu(a)\right]|a\rangle \tag{7.25}$$

と表される．実際，

$$\begin{aligned}\langle N(B)_\nu|\mathcal{T}\rangle &= \sum_{a,a'}\exp\left[i\int a\cup B + i\int\nu(a)\right]Z_{\mathcal{T}}[a']\,\langle a|a'\rangle \\ &= \sum_a \exp\left[i\int a\cup B + i\int\nu(a)\right]Z_{\mathcal{T}}[a]\end{aligned} \tag{7.26}$$

となり，離散トーションを含めたゲージ化となっていることが分かる．

ただし，$|N(B)_\nu\rangle$ に対応する Lagrangian 代数は $|N(B)\rangle$ に対応する Lagrangian 代数と異なるが，$|D(A)_\nu\rangle$ に対応する Lagrangian 代数は $|D(A)\rangle$ に対応する Lagrangian 代数と同じであることに注意する必要がある．

7.5 $\mathrm{TY}(\mathbb{Z}_N)$ 対称性の SymTFT

6.2 節で述べたようによく現れる非可逆対称性の例として $\mathrm{TY}(\mathbb{Z}_N)$ 対称性がある．本節ではこの $\mathrm{TY}(\mathbb{Z}_N)$ に対する SymTFT の構成方法について述べる．当然，$\mathrm{TY}(\mathbb{Z}_N)$ はフュージョン圏であるので Turaev-Viro TQFT として SymTFT を実現することは可能であるが，ここでは $\mathbb{Z}_N$ 対称性の SymTFT から出発して $\mathrm{TY}(\mathbb{Z}_N)$ 対称性の SymTFT を構成する [50].

$\mathrm{TY}(\mathbb{Z}_N)$ の双対欠陥は $\mathbb{Z}_N$ 対称性の half-space gauging によって得られるインターフェースであったので，まず $\mathbb{Z}_N$ SymTFT (7.1) の言葉でこのインターフェースをどのように記述できるかについて説明する．7.3 節で述べたように，SymTFT の言葉では理論 $\mathcal{T}$ の $\mathbb{Z}_N$ 対称性演算子は m ラインによって表され，理論 $\mathcal{T}/\mathbb{Z}_N$ の $\mathbb{Z}_N$ 対称性演算子は e ラインによって表されたので，$\mathcal{T}$ と $\mathcal{T}/\mathbb{Z}_N$ の間のインターフェースは e ラインと m ラインを入れ替えるような欠陥であると考えられる．実際，作用 (7.1) を見ると，ゲージ場 a,b を入れ替える 0-形式対称性があり，これは e ラインと m ラインを入れ替える操作に対応することが分かる．この対称性の対称性演算子は em^{-1} ラインを二次元多様体上でゲージ化した凝縮欠陥

$$D_{\mathrm{EM}}(M^{(2)}) = \sum_{\gamma\in H_1(M^{(2)};\mathbb{Z}_N)} e(\gamma)m^{-1}(\gamma) \tag{7.27}$$

として実現できる[*80]．この凝縮欠陥が e ラインと m ラインを入れ替える役割を担うことは次のようにして分かる．まず，D_{EM} は em^{-1} ラインをゲージ化しているため，em^{-1} ラインを吸収することが分かる．そのため，$e = em^{-1} \times m$ と思うと e ラインと D_{EM} がフュージョンすると m ラインが出てくることが分かる．したがって，D_{EM} は e ラインと m ラインを入れ替える演算子となる．

D_{EM} が e と m を入れ替えるということは D_{EM} をトポロジカルな境界条件に作用させると Dirchlet 境界条件と Neumann 境界条件を入れ替える (図 47)．したがって，図 48 のように境界付きの D_{EM} を作用させることで Dirchlet 境界条件と Neumann 境界条件の間のトポロジカルインターフェースが構成できる．このような境界付きの D_{EM} をツイスト欠陥といい，$\Sigma_0(\gamma, M^{(2)})$ と表す．式で書くと

$$\Sigma_0(\gamma, M^{(2)}) = \sum_{\gamma \in H_1(M^{(2)}, \mathbb{Z}_N)} e(\gamma) m^{-1}(\gamma) \tag{7.28}$$

となり D_{EM} と同じ表式となるが，ここでは $M^{(2)}$ は γ を境界に持つ二次元多様体である．ツイスト欠陥には境界に e ラインや m ラインを付ける自由度がある．しかし $M^{(2)}$ 上では em^{-1} ラインが凝縮していることから e ラインと m ラインは同一視される．したがって，$e^k(\gamma) m^l(\gamma)$ を境界に付けた場合に $k + l \bmod N$ の値が同じならば同じツイスト欠陥とみなせる．そのためツイスト欠陥は N 種類あり，$k \in \mathbb{Z}_N$ に対して

$$\Sigma_k(\gamma, M^{(2)}) = e^{n+k}(\gamma) m^{-n}(\gamma) \Sigma_0(\gamma, M^{(2)}), \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_N \tag{7.29}$$

と表される．

このツイスト欠陥を用いることで $\mathcal{T}$ と $\mathcal{T}/\mathbb{Z}_N$ の間のインターフェースを構成することができるが，ツイスト欠陥は真の線演算子ではなく面の境界として定義されている．TY($\mathbb{Z}_N$) 対称性の SymTFT を得るためには双対欠陥に対応する真の線演算子が必要である．そのためには凝縮欠陥 D_{EM} で生成される $\mathbb{Z}_2$ 対称性をゲージ化すればよい．すると，ツイスト欠陥 $\Sigma_k(\gamma, M^{(2)})$ の $M^{(2)}$ 部分は自明となるため，γ 上で定義された真の線演算子となる．したがって，D_{EM} をゲージ化した理論ではツイスト欠陥は双対欠陥に対応するエニオンとなり，TY($\mathbb{Z}_N$) 対称性の SymTFT が得られることが分かる．

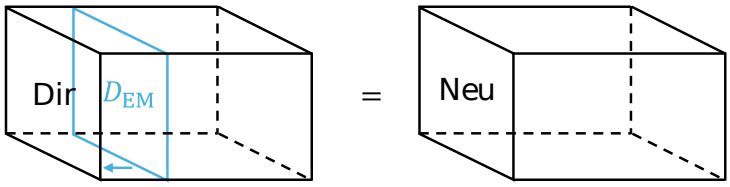


図 47: D_{EM} の境界への作用

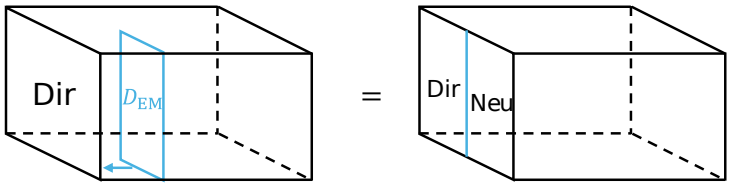


図 48: ツイスト欠陥の境界への作用

[*80] 実は，非自明なトポロジカル点演算子を持たない三次元 TQFT の 0-形式対称性は全て凝縮欠陥として表されることが知られている [60].

7.6 連続対称性

7.2 節で述べたように数学的には，フュージョン圏で特徴づけられる離散対称性に対する SymTFT はその Drinfeld 中心によって記述される．しかし，連続対称性の場合は対称性の構造を記述する数学的な言葉はよく知られておらず，そのため SymTFT に関してもよく知られていない．しかし，近年になって $U(1)$ 対称性などの簡単な場合では，物理の言葉で連続対称性に対する SymTFT が発見され，調べられるようになった [28, 27]．本節ではそれについて詳しく説明する．

$U(1)$ 対称性に対する SymTFT は $U(1)$ ゲージ場と $\mathbb{R}$ ゲージ場を用いた BF 理論

$$\frac{i}{2\pi}\int b\wedge d\widetilde{a} \tag{7.30}$$

によって記述される．ただし，b は $U(1)$ ゲージ場であり，$\widetilde{a}$ は $\mathbb{R}$ ゲージ場である．以降本節では $U(1)$ ゲージ場はチルダなしの a,b などで表し，$\mathbb{R}$ ゲージ場はチルダ付きの $\widetilde{a},\widetilde{b}$ などで表すこととする．

この理論におけるトポロジカル演算子は

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_\alpha(\gamma)&=\exp\left(i\alpha\int_\gamma\widetilde{a}\right)\\ V_\beta(\gamma)&=\exp\left(i\beta\int_\gamma b\right)\end{aligned} \tag{7.31}$$

と表される．ここで，$\alpha\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\beta\in\mathbb{Z}$ である．α のとりうる範囲が $\mathbb{R}$ ではなく $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ である理由は，Dirac 量子化条件から $\frac{db}{2\pi}$ の周期が整数となるため，b の経路積分を行うと $\int\widetilde{a}\in2\pi\mathbb{Z}$ という条件が課されるためである．これらのラインの間のブレイディングは

$$B(\alpha,\beta)=e^{2\pi i\alpha\beta} \tag{7.32}$$

となる．

トポロジカルな境界条件を求めるために Lagrangian 部分群を求める[*81]．

- $L=\{V_\beta\mid\beta\in\mathbb{Z}\}$
  このトポロジカルな境界条件を課した際に得られる対称性は $\widetilde{U}_\alpha$ によって生成される対称性なので $U(1)$ 対称性となる．
- $L=\{\widetilde{U}_\alpha\mid\alpha\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}\}$
  このトポロジカルな境界条件を課した際に得られる対称性は V_β によって生成される対称性なので $\mathbb{Z}$ 対称性となる．
- $L=\{\widetilde{U}_{\frac{k}{n}}V_{nl}\mid k\in\mathbb{Z}_n,l\in\mathbb{Z}\}$(ただし，$n$ は固定された自然数)
  このトポロジカルな境界条件を課した際に得られる対称性は $\widetilde{U}_\alpha$ $(\alpha\in[0,1/n))$ と V_β $(\beta\in\mathbb{Z}_n)$ によって生成される対称性なので $U(1)\times\mathbb{Z}_n$ 対称性となる．ただし，これらの間には混合アノマリーがある．

また，$\mathbb{R}$ ゲージ場を二つ用いた BF 理論

$$S=\frac{i}{2\pi}\int\widetilde{b}\wedge d\widetilde{a} \tag{7.33}$$

[*81] エニオンが無限個あるため，群の位数についての条件は考えることができない．

を SymTFT として用いても $U(1)$ 対称性を記述することができる．この理論のトポロジカル演算子は

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_\alpha(\gamma) &= \exp\left(i\alpha\int_\gamma \widetilde{a}\right)\\ \widetilde{V}_\beta(\gamma) &= \exp\left(i\beta\int_\gamma \widetilde{b}\right)\end{aligned} \tag{7.34}$$

と表される．ただし，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ であることに注意が必要である．これらのラインの間のブレイディングは (7.32) となる．この SymTFT の Lagrangian 部分群は次のようなものがある．

- $L=\{\widetilde{V}_\beta \mid \beta\in\mathbb{R}\}$
  このトポロジカルな境界条件を課した際に得られる対称性は $\widetilde{U}_\alpha$ によって生成される対称性なので $\mathbb{R}$ 対称性となる．
- $L=\{\widetilde{U}_\alpha \mid \alpha\in\mathbb{R}\}$
  このトポロジカルな境界条件を課した際に得られる対称性は V_β によって生成される対称性なので $\mathbb{R}$ 対称性となる．
- $L=\{\widetilde{U}_{nR}V_{mR^{-1}} \mid n\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}\}$(ただし，$R$ は固定された正の実数)
  このトポロジカルな境界条件を課した際に得られる対称性は $\widetilde{U}_\alpha$ $(\alpha\in[0,R))$ と V_β $(\beta\in[0,R^{-1}))$ によって生成される対称性なので $U(1)\times U(1)$ 対称性となる．ただし，これらの間には混合アノマリーがある．

以上のように $\mathbb{R}$ ゲージ場二つの BF 理論 (7.33) を用いると，自然に混合アノマリーを持った二つの $U(1)$ 対称性が現れる．これはまさしく二次元コンパクトボソンの対称性となっている [65]．また，$U(1)$ ゲージ場と $\mathbb{R}$ ゲージ場を用いた BF 理論 (7.30) を二つ組み合わせ，混合アノマリーを加えた作用

$$S=\frac{i}{2\pi}\int\left(b\wedge d\widetilde{b}+a\wedge d\widetilde{a}-b\wedge da\right) \tag{7.35}$$

を考えてもコンパクトボソンの SymTFT が得られる．実際，a を経路積分すると $b=\widetilde{a}$ というデルタ関数が得られ，b を経路積分すると作用 (7.33) が得られる．

8 自発的対称性の破れと分配関数

本章では対称性の自発的破れ (SSB) と背景ゲージ場付きの分配関数の関係について説明する．SSB パターンを調べることは理論の相構造を調べる上で重要となる [17]．対称性が破れているかを判定するには通常は秩序変数の期待値を調べるが，本章では代わりに，背景ゲージ場付きの分配関数の振る舞いを調べることで相を判定できることについて説明する．

8.1 自発的対称性の破れ

8.1.1 0-形式対称性の自発的破れ

本節では従来の対称性，つまり 0-形式対称性の場合の SSB について復習する．通常の可逆な G-対称性の SSB は秩序変数 σ の期待値によって判定される．σ は G-対称性の荷電演算子であり，期待値が 0 の場合は G-対称性は破れておらず，期待値が 0 でない場合は G-対称性は SSB していることを意味する．より正確には

$$\lim_{h\to 0}\lim_{V\to\infty}\langle\sigma\rangle_{V,h}\neq 0 \tag{8.1}$$

のときに SSB が起こる．ただし，ここで V は系の体積，h は対称性を破る外場を表すパラメータであり，この外場の入れ方によって選ばれる真空が変わる．

このように対称性を破る外場を入れるような方法とは別に，二点相関関数を見ることで SSB を判定する方法もある．

$$\lim_{|x-y|\to\infty}\langle\sigma(x)\sigma(y)\rangle_{\mathrm{c}}\neq 0 \tag{8.2}$$

となるとき非対角長距離秩序があるといい，その場合は SSB が起こっている．ただし，$\langle\sigma(x)\sigma(y)\rangle_{\mathrm{c}}$ は連結二点相関関数で

$$\langle\sigma(x)\sigma(y)\rangle_{\mathrm{c}}=\langle\sigma(x)\sigma(y)\rangle-\langle\sigma(x)\rangle\langle\sigma(y)\rangle \tag{8.3}$$

として定義される．

これら二つの SSB の判定方法の関係について説明する．話を具体的にするために d 次元の実スカラー場の理論

$$S[\phi]=\int d^dx\,\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2+\frac{\lambda}{4}(\phi^2-v^2)^2\right] \tag{8.4}$$

を考える．ただし，$\lambda, v^2>0$ である．ϕ の一点関数

$$\langle\phi\rangle=\frac{\int\mathcal{D}\phi\,\phi e^{-S[\phi]}}{\int\mathcal{D}\phi\,e^{-S[\phi]}} \tag{8.5}$$

は系の体積 V が十分大きいときは $\phi=\pm v$ の二つの鞍点の寄与が主要となる．$\phi=\pm v+\varphi$ とおき，作用 (8.4) に代入すると

$$\begin{aligned}S[\pm v+\varphi]&=\int d^dx\,\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2+\frac{\lambda}{4}(\varphi^2\pm 2v\varphi)^2\right]\\&=\int d^dx\,\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2+\lambda v^2\varphi^2+O(\varphi^3)\right]\end{aligned} \tag{8.6}$$

となり，φ の二次までででは作用は同じとなるため，一点関数は

$$\begin{aligned}\langle\phi\rangle &\simeq \frac{\int\mathcal{D}\varphi\,(-v+\varphi)e^{-S[-v+\varphi]}+\int\mathcal{D}\varphi\,(v+\varphi)e^{-S[v+\varphi]}}{\int\mathcal{D}\varphi\,e^{-S[-v+\varphi]}+\int\mathcal{D}\varphi\,e^{-S[v+\varphi]}}\\ &\simeq \frac{\langle -v+\varphi\rangle+\langle v+\varphi\rangle}{2}\end{aligned} \tag{8.7}$$

と書ける．$\langle\varphi\rangle\simeq 0$ なので

$$\langle\phi\rangle\simeq\frac{-v+v}{2}=0 \tag{8.8}$$

となる．次に対称性を破る外場を加えた作用

$$S[\phi]-\varepsilon\int d^dx\,\phi \tag{8.9}$$

を用いて一点関数を計算する．ϵ が十分小さいとすると同様に解析することができ，

$$\langle\phi\rangle\simeq\frac{\langle(-v+\varphi)e^{-\epsilon vV}\rangle+\langle(v+\varphi)e^{\epsilon vV}\rangle}{\langle e^{-\epsilon vV}\rangle+\langle e^{\epsilon vV}\rangle} \tag{8.10}$$

となる．ただし，期待値 $\langle\cdot\rangle$ は作用 (8.6) を用いて計算している．したがって，$V\to\infty$ を取ってから $\epsilon\to 0$ とすると

$$\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{V\to\infty}\langle\phi\rangle=v \tag{8.11}$$

となり，確かに一点関数がノンゼロとなっていることが分かる．

次に二点関数を同様に計算すると，

$$\langle\phi(x)\phi(y)\rangle=\frac{\langle(-v+\varphi(x))(-v+\varphi(y))\rangle+\langle(v+\varphi(x))(v+\varphi(y))\rangle}{2}=v^2+\langle\varphi(x)\varphi(y)\rangle \tag{8.12}$$

となるが，第二項は作用 (8.6) が質量 $\sqrt{2\lambda v^2}$ の自由スカラーの作用であることから

$$\langle\varphi(x)\varphi(y)\rangle\simeq e^{-\sqrt{2\lambda v^2}|x-y|} \tag{8.13}$$

となるため，$|x-y|\to\infty$ の極限で落ちる．したがって，

$$\lim_{|x-y|\to\infty}\langle\phi(x)\phi(y)\rangle_{\rm c}=v^2 \tag{8.14}$$

となり[*82]，非対角長距離秩序があることが分かる．

クラスター分解性との関係についてコメントしておく．伝統的な場の理論の公理系である Osterwalder–Schrader 公理系 [66] では次のクラスター分解性

$$\lim_{|x-y|\to\infty}\langle\phi(x)\phi(y)\rangle_{\rm c}=0 \tag{8.15}$$

を公理の一つとして要求している．SSB しているときは非対角長距離秩序があり，このクラスター分解性が破れているように見えるが，実はこれは真空を正しく選んでいないことに起因する．有限体積では $\phi=\pm v$ の二つの状態の間に遷移があるためこれらの重ね合わせ状態として真空が実現されるが，無限体積ではこれらの状態の間に遷移がないため，これらの状態は違うセクターに入る．したがって，無限体積で期待値を計算する際には一つの真空を選ばなければならない．実際，片方の真空を選んで期待値を計算するとクラスター分解性が満たされていることが分かる．

[*82] 一点関数は対称性を破る外場を入れていないので 0 となることに注意.

8.1.2 p-形式対称性の自発的破れ

p-形式対称性の SSB は荷電演算子を $V_p(\gamma^{(p)})$ とすると

$$\lim_{|\gamma^{(p)}|\to\infty}\left\langle V_p(\gamma^{(p)})\right\rangle \neq 0 \tag{8.16}$$

として定義される．ただし，$|\gamma^{(p)}|\to\infty$ は $\gamma^{(p)}$ のサイズを大きくするような極限である．この定義は $\gamma^{(p)}$ が一つ高い次元の多様体 $\Sigma^{(p+1)}$ の境界として与えられると考えると，0-形式対称性の非対角長距離秩序を用いた方法と対応していることが分かる．またこの定義は閉じ込め・非閉じ込めを Wilson ループの面積則か周長則かによって判定する方法と対応している．実際面積則に従う場合は，(8.16) は満たされないため中心対称性が保たれた相となるが，周長則に従う場合は，Wilson ループの定義の際に適切な相殺項を加えることで期待値をノンゼロにすることができるため，(8.16) を満たし，中心対称性が破れた相となる．

8.2 SSB と SPT

8.2.1 背景ゲージ場付きの分配関数

ギャップがあり，かつ対称性が破れずに保たれた相では基底状態は一意となるが，自明な理論になるとは限らず，SPT 相となる場合がある．また，SSB が起こる場合でも完全に SSB せずに部分群に破れる場合，残った対称性に関する SPT 相になる場合がある．このように一般には SSB と SPT が混じったような相が現れるが，SPT 相かどうかを秩序変数の期待値から読み取るのは困難である．したがって，SSB と SPT を統一的に判定することのできるような量があると望ましい．以下では，可逆な離散対称性の場合は背景ゲージ場付きの分配関数がその役割を果たすことを見る [24].

まず，Ising 模型の場合を例にとり，SSB 相での背景ゲージ付きの分配関数の振る舞いについて述べる．Ising 模型において，図 49 のような $\mathbb{Z}_2$ 背景ゲージ場の挿入はスピンの向きを反転させる境界条件を課していると思うことができる．SSB 相の基底状態では隣り合うスピンの向きは揃いやすいが，$\mathbb{Z}_2$ 背景ゲージ場を挿入したことにより欠陥を通り越す際にスピンの向きが反転するため，スピン上向きの領域と下向きの領域が現れる．その結果ドメインウォールができ，エネルギーを余分に稼ぐ．したがって，ノンゼロの背景ゲージ場を挿入した分配関数は

$$Z[A]\sim e^{-T_{\rm DW}V_{\rm DW}} \tag{8.17}$$

となる．ただし，$T_{\rm DW},V_{\rm DW}$ はそれぞれドメインウォールの張力と体積である．この表式からドメインウォールの体積を無限大にする極限では $Z[A]=0$ となることが分かる．この現象は低エネルギーの有効理論の立場では，ツイストした Hilbert 空間の元がないことを表す．以上をまとめると SSB 相での分配関数の振る舞いは

$$\frac{Z[A]}{Z[0]}=\delta_2(A) \tag{8.18}$$

となる．ただし，$\delta_2(A)$ は $A=0$ で 1 を取り，それ以外では 0 を取るものとする．

次に，Ising 模型の高温相，つまり対称性の破れていない無秩序相について調べる．無秩序相では基底状態は一意であり，スピンの向きの反転に対して不変である．したがって，背景ゲージ場を挿入しても分配関数の値は変わらないので

$$\frac{Z[A]}{Z[0]}=1 \tag{8.19}$$

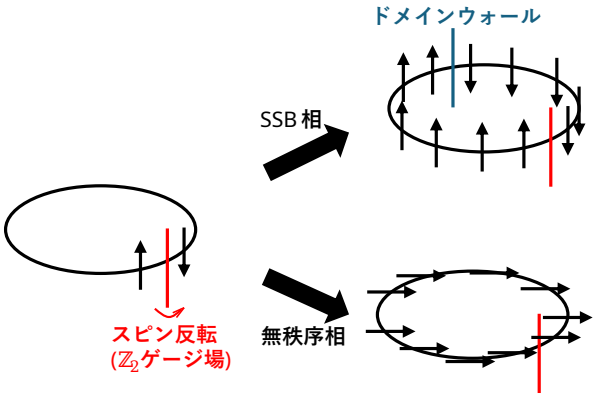


図 49: 背景ゲージ場を挿入した Ising 模型

となることが分かる．

また Ising 模型には SPT 相はないが，SPT 相がある場合は SPT 相の分配関数は可逆な場の理論の分配関数として与えられるので

$$\frac{Z[A]}{Z[0]} = Z_{\mathrm{inv}}[A] \tag{8.20}$$

のようになる．

以上を組み合わせると，部分群に SSB し，残った対称性に対する SPT 相が現れる場合も統一的に表すことができる．例えば可換な G 対称性が部分群 H 対称性に SSB し，さらに H に関する SPT 相となっている場合は，

$$\frac{Z[A]}{Z[0]} = \delta(\pi(A)) Z_\nu[A] \tag{8.21}$$

と表される．ただし，π は G/H への射影であり，$Z_\nu[A]$ は ν でラベルされる H-SPT の分配関数である[*83]．

このような SSB と SPT が混じった相が現れる例としては例えば四次元の $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性がある [20]．四次元の $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性に対しては $k \in \mathbb{Z}_N$ でラベルされる SPT 相を考えることができ[*84]，その分配関数は

$$\exp\left[\frac{2\pi i k}{2N}\int B \cup B\right] \tag{8.22}$$

と表される．ただし，$B \in H^2(X;\mathbb{Z}_N)$ である．したがって，四次元 $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ のギャップを持つ相は一般に $\mathbb{Z}_n^{(1)}$ への SSB だけでなく破れずに残った $\mathbb{Z}_n^{(1)}$ 対称性の $k \in \mathbb{Z}_n$ でラベルされる SPT 相となることがある．このような場合の分配関数の比は

$$\frac{Z[B]}{Z[0]} = \delta_N(nB)\exp\left[\frac{2\pi i k}{2n}\int \frac{nB}{N}\cup\frac{nB}{N}\right] \tag{8.23}$$

となる．ただし，$\delta_N(B)$ は任意の 2-サイクル Σ に対して $\int_\Sigma B \in N\mathbb{Z}$ を満たすときだけ 1 を取りそれ以外は 0 を取るような汎関数である．$\delta_N(nB) = 1$ となるときは，$\frac{n}{N}B$ は $\mathbb{Z}_n$ ゲージ場とみなすことができる．

[*83] 厳密には $Z_\nu[A]$ に代入する A は適切に定数倍の規格化をする必要がある．
[*84] スピン構造を仮定している．

8.2.2 低エネルギー有効理論における計算

前節で見た背景ゲージ場付きの分配関数の振る舞いを低エネルギー有効理論の立場から具体的に計算する．SPT 相の分配関数は知られているので，ここでは SSB 相に着目する．簡単のために $\mathbb{Z}_N^{(p)}$ 対称性の SSB 相を考えると，低エネルギー有効理論は $\mathbb{Z}_N^{(p)}$ TQFT

$$S = \frac{2\pi i}{N} \int b^{(d-p-1)} \cup \delta a^{(p)} \tag{8.24}$$

で与えられる．この作用には $a^{(p)}$ のシフト対称性として $\mathbb{Z}_N^{(p)}$ 対称性がある．その背景ゲージ場を $A^{(p+1)}$ とすると，背景ゲージ場付きの分配関数は

$$Z[A] = \sum_{a^{(p)}, b^{(d-p-1)}} \exp\left[\frac{2\pi i}{N} \int b^{(d-p-1)} \cup \left(\delta a^{(p)} - A^{(p+1)}\right)\right] \tag{8.25}$$

と表される．$b^{(d-p-1)}$ の和を取ると，

$$\delta a^{(p)} = A^{(p+1)} \tag{8.26}$$

という制限がかかるが，左辺はコホモロジーの自明な元であるため，$A^{(p+1)}$ がコホモロジーの非自明な元であるときは，式 (8.26) を満たすような配位は存在しない．したがって，

$$\frac{Z[A]}{Z[0]} = \delta(A) \tag{8.27}$$

が成り立つことが分かる．

8.2.3 SymTFT との関係

前節で述べた背景ゲージ場付きの分配関数の振る舞いは SymTFT を用いることでも理解することができる．d 次元上の離散的で可逆な G 対称性を考える．このとき SymTFT は $(d+1)$ 次元の Dijkgraaf-Witten 理論となり，$\overline{X}_0$ に Dirchlet 境界条件を課すことで G 対称性を実現することができる．X_1 には一般にはトポロジカルとは限らない物理的な境界条件を置くが，X_1 にもトポロジカルな境界条件を置くと，t 方向を縮めた際に d 次元の G 対称性を持った TQFT が得られる．したがって，SymTFT を用いると d 次元の G 対称性を持つ TQFT を分類することができる．G 対称性でギャップを持つ相は TQFT で記述することができるので，これは G 対称性を持つ理論のギャップを持つ相の分類ができると言ってもよい[*85]．

例えば例として X_1 にも Dirichlet 境界条件を置いた場合を考える．すると，

$$\langle D(A)|D(0)\rangle = \sum_{a,a'} \delta(a-A)\delta(a') \langle a|a'\rangle = \delta(A) \tag{8.28}$$

となり，G-SSB 相の分配関数が再現される．

次に X_1 に Neumann 境界条件を置いた場合を考えると

$$\langle D(A)|N(0)\rangle = \sum_{a,a'} \delta(a-A) \langle a|a'\rangle = 1 \tag{8.29}$$

となり，自明な相の分配関数が再現される．

[*85] ここでは簡単のために可逆な G 対称性だけを考えているが，この手法は有限であれば非可逆対称性にも適用することができる [67].

また，X_1 に離散トーションを含めた Neumann 境界条件を置いた場合を考えると

$$\langle D(A)|N(0)_\nu\rangle = \sum_{a,a'} \delta(a-A) \exp\left[-i\int \nu(a')\right] \langle a|a'\rangle = \exp\left[-i\int \nu(A)\right] \tag{8.30}$$

となり，$-\nu$ でラベルされる SPT 相の分配関数が再現される．

また，Dirchlet 境界条件と Neumann 境界条件を混ぜた

$$|D(A)\times N_\nu(B)\rangle = \sum_{a} \delta(\pi(a)-A) \exp\left[-i\int \nu(i(a)) - i\int i(a)\cup B\right] \tag{8.31}$$

と表される境界条件について考えることもできる．ただし，π は G/H への射影であり，i は $\pi(A)=0$ となる場合に G ゲージ場を H ゲージ場に写すような写像とする．また，A, B はそれぞれ G/H ゲージ場，H ゲージ場であり，ν は H-SPT に対応する d-コサイクルである．このとき，

$$\langle D(A)|D(0)\times N_\nu(0)\rangle = \sum_{a,a'} \delta(a-A)\delta(\pi(a)) \exp\left[-i\int \nu(i(a))\right] = \delta(\pi(A)) \exp\left[-i\int \nu(i(A))\right] \tag{8.32}$$

となり，G 対称性が部分群 H に SSB し，さらに H-SPT 相となるような場合の分配関数が得られる．

8.2.4 秩序変数や無秩序変数との関係

四次元 $SU(N)$ ゲージ理論を考える[*86]．四次元 $SU(N)$ ゲージ理論には $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性があるので，ギャップを持つ相は一般に部分群 $\mathbb{Z}_n^{(1)}$ 対称性に SSB し，さらに $k\in\mathbb{Z}_n$ でラベルされる SPT 相となる．このときの背景ゲージ場付きの分配関数の振る舞いは (8.23) で表されたが，本節ではこの分配関数の振る舞いと Wilson ラインや 't Hooft ラインの期待値との関係について議論する．

ただし，本題に入る前に 't Hooft ラインについて少し説明をする．$SU(N)$ ゲージ理論における 't Hooft ラインは 3.3.1 節で定義した 't Hooft ラインとは違い，完全な線演算子ではない．具体的には磁荷 m の 't Hooft ライン $T^m(\gamma)$ には電気的 $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性の対称性演算子 $U_m(\Sigma)$ を付けなければならない (図 50)[*87]．ただし，$\partial\Sigma=\gamma$ である．したがって，'t Hooft ラインが挿入されているときは境界付き曲面上に定義された対称性演算子も挿入しなければならない[*88]．これは背景ゲージ場 B の言葉では，$T^m(\gamma)$ が挿入されているときは $\delta B = m\delta(\gamma)$ が成り立つということを意味する．この事実は以下の議論で重要な点の一つとなっている．

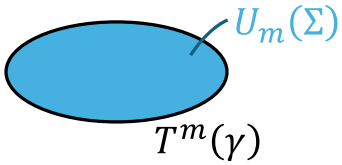


図 50: $SU(N)$ ゲージ理論における 't Hooft ループ

それぞれの相での Wilson ラインや 't Hooft ラインの期待値について調べていく．

[*86] ここでは話を具体的にするために四次元 $SU(N)$ ゲージ理論を考えるが，一般の可逆な離散対称性の場合でも同様に議論することができる．

[*87] このような演算子を無秩序変数という．

[*88] 電気的 $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ をゲージ化し $PSU(N)$ ゲージ理論に移るとこの対称性演算子は自明になり，完全な線演算子としての 't Hooft ラインが得られる．

- 閉じ込め相

  まず閉じ込め相，つまり $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性が保たれている相について考える．上述のように自明相になるとは限らず，一般には $k \in \mathbb{Z}_N$ でラベルされる SPT 相となる．このとき Wilson ライン W や 't Hooft ライン T は面積則に従うが，これらを組み合わせた $W^{kl}T^l$ $(l \in \mathbb{Z}_N)$ は周長則に従うことが知られている．この条件が分配関数

  $$\frac{Z[B]}{Z[0]} = \exp\left[\frac{2\pi ik}{2N}\int B \cup B\right] \tag{8.33}$$

  と整合することを確かめる．$W^e(\gamma)T^m(\gamma)$ というラインを考える．電気的 $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性の背景ゲージ場が挿入されているとき，Wilson ラインは単独ではゲージ不変ではなく，

  $$W^e(\gamma)T^m(\gamma)\exp\left(\frac{2\pi ie}{N}\int_\Sigma B\right) \tag{8.34}$$

  とするとゲージ不変となる．この演算子の期待値を IR の有効理論の立場から考える．IR の有効理論であるレベル k-SPT の理論 (8.33) には非自明な線演算子は存在しない．したがって，$W^e(\gamma)T^m(\gamma)$ は IR では自明な演算子の定数倍に流れ，

  $$\left\langle W^e(\gamma)T^m(\gamma)\exp\left(\frac{2\pi ie}{N}\int_\Sigma B\right)\right\rangle \propto \exp\left(\frac{2\pi ik}{2N}\int_X B\cup B + \frac{2\pi ie}{N}\int_\Sigma B\right) \tag{8.35}$$

  となる．B のゲージ変換 $B \to B + \delta\lambda$ によって右辺は

  $$\exp\left(\frac{2\pi ik}{N}\int_X B\cup\delta\lambda + \frac{2\pi ie}{N}\int_\Sigma \delta\lambda\right) \tag{8.36}$$

  だけ変化する．ここで，$T^m(\gamma)$ が挿入されていることから，上で述べたように $\delta B = m\delta(\gamma)$ となることを用いるとゲージ変換による変化分は

  $$\begin{aligned}\exp\left(\frac{2\pi ik}{N}\int_X B\cup\delta\lambda + \frac{2\pi ie}{N}\int_X \delta\lambda\cup\delta(\Sigma)\right) &= \exp\left(\frac{2\pi ik}{N}\int_X B\cup\delta\lambda - \frac{2\pi ie}{N}\int_X \lambda\cup\delta(\gamma)\right)\\ &= \exp\left(\frac{2\pi ik}{N}\int_X B\cup\delta\lambda - \frac{2\pi ie}{Nm}\int_X \lambda\cup\delta B\right)\\ &= \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\left(k-\frac{e}{m}\right)\int_X B\cup\delta\lambda\right)\end{aligned} \tag{8.37}$$

  となる．したがって，$e = km$ のときはゲージ不変であるが，それ以外のときは式 (8.35) の右辺はゲージ不変でないことが分かる．これは

  $$\langle W^e(\gamma)T^m(\gamma)\rangle = 0, \qquad e \neq km \tag{8.38}$$

  でなければならないことを意味する．$W^{kl}T^l$ の形の線演算子はゲージ不変となるため，周長則に従うことと整合していることが分かる．

- 非閉じ込め相

  次に，$\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性が完全に破れた相について考える．この場合は Wilson ライン W^e が周長則に従い，'t Hooft ラインを含むような W^eT^m $(m \neq 0)$ は面積則に従う．SSB 相での分配関数の振る舞いは

  $$\frac{Z[B]}{Z[0]} = \delta_N(B) \tag{8.39}$$

となる．この表式から 't Hooft ラインを含む場合は期待値が 0 になるのは明らかである．実際，この分配関数は B がノンゼロの配位を許さないことを意味するが，'t Hooft ラインは定義から B をノンゼロにするため期待値は 0 となる．次に Wilson ラインの期待値について考える．そのためにまず，分配関数 (8.39) の右辺を次のように書き直す．

$$\begin{aligned}\delta_N(B) &= \sum_{a\in H^2(X;\mathbb{Z}_N)} \exp\left[\frac{2\pi i}{N}\int a\cup B\right] \\ &= \sum_{a\in C^2(X;\mathbb{Z}_N)}\sum_{b\in C^1(X;\mathbb{Z}_N)} \exp\left[\frac{2\pi i}{N}\int (a\cup B + a\cup \delta b)\right]\end{aligned} \tag{8.40}$$

このとき，$\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性のゲージ変換は

$$\begin{aligned}B &\to B+\delta\lambda \\ b &\to b-\lambda\end{aligned} \tag{8.41}$$

として与えられる．この IR の有効理論では閉じ込め相のときとは異なり，

$$\exp\left[\frac{2\pi i}{N}\int_\gamma b\right] \tag{8.42}$$

という線演算子を考えることができる．したがって，IR において Wilson ライン $W(\gamma)$ がこの線演算子に流れるとすると，

$$\begin{aligned}\left\langle W(\gamma)\exp\left(\frac{2\pi i}{N}\int_\Sigma B\right)\right\rangle &= \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\int_\Sigma B + \frac{2\pi i}{N}\int_\gamma b\right) \\ &= \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\int_\Sigma (B+\delta b)\right)\end{aligned} \tag{8.43}$$

となる．最右辺はゲージ変換 (8.41) に関して不変であるため，この期待値はノンゼロの値を取ることができる．よって，Wilson ラインが (8.42) に流れると仮定すると期待値が周長則に従うことと整合することが分かる．

- 一般の相

  $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性が $\mathbb{Z}_n$ 部分群に破れ，さらに $k\in\mathbb{Z}_n$ でラベルされる SPT 相となっている場合を考える．この場合は W^n と $W^kT^{\frac{N}{n}}$ で生成される N 本の線演算子が周長則に従う．この相における分配関数の振る舞いは

  $$\frac{Z[B]}{Z[0]} = \delta_N(nB)\exp\left[\frac{2\pi i k}{2n}\int \frac{nB}{N}\cup\frac{nB}{N}\right] \tag{8.44}$$

  と表される．$\delta_N(nB)$ は

  $$\begin{aligned}\delta_N(nB) &= \sum_{a\in H^2(X;\mathbb{Z}_N)} \exp\left[\frac{2\pi i}{N}\int a\cup nB\right] \\ &= \sum_{a\in C^2(X;\mathbb{Z}_N)}\sum_{b\in C^1(X;\mathbb{Z}_N)} \exp\left[\frac{2\pi i}{N}\int (a\cup nB + a\cup \delta b)\right]\end{aligned} \tag{8.45}$$

  と表され，ゲージ変換は

  $$\begin{aligned}B &\to B+\delta\lambda \\ b &\to b-n\lambda\end{aligned} \tag{8.46}$$

となる．したがって，この相では b の Wilson ライン

$$\exp\left[\frac{2\pi i}{N}\int_\gamma b\right] \tag{8.47}$$

を考えることができる．
W^eT^m の期待値

$$\left\langle W^e(\gamma)T^m(\gamma)\exp\left(\frac{2\pi ie}{N}\int_\Sigma B\right)\right\rangle \tag{8.48}$$

について考える．まず，$T^m(\gamma)$ を挿入していることにより $\delta B = m\delta(\gamma)$ が成り立ち，さらに nB は $\mathbb{Z}_N$ ゲージ場として自明でなければならないので m は $p\in\mathbb{Z}_n$ を用いて $m=\frac{pN}{n}$ と書ける．ここで，分配関数 (8.44) がゲージ変換でどのように変換するかについて考える．ゲージ変換 (8.46) に対する変化分は

$$\begin{aligned}\exp\left[\frac{2\pi ikn^2}{nN^2}\int_X B\cup\delta\lambda\right] &= \exp\left[\frac{2\pi ikn}{N^2}\int_X \lambda\cup\frac{pN}{n}\delta(\gamma)\right]\\ &= \exp\left[\frac{2\pi ikp}{N}\int_\gamma\lambda\right]\end{aligned} \tag{8.49}$$

となる．$W^e(\gamma)T^m(\gamma)$ が b に関する Wilson ラインの q 乗に流れると仮定すると

$$\left\langle W^e(\gamma)T^m(\gamma)\exp\left(\frac{2\pi ie}{N}\int_\Sigma B\right)\right\rangle \propto \exp\left[\frac{2\pi ie}{N}\int_\Sigma B+\frac{2\pi iq}{N}\int_\gamma b\right]\times\frac{Z[B]}{Z[0]} \tag{8.50}$$

となる．右辺の分配関数を除いた部分のゲージ変換 (8.46) に対する変化分は

$$\exp\left[\frac{2\pi i}{N}(e+qn)\int_\gamma\lambda\right] \tag{8.51}$$

となる．この量が (8.49) と一致しなければならないので $p=0$ のときは e が n の倍数となり，$p\neq 0$ のときは $e=kp$ となる必要がある[*89]．したがって，W^n と $W^kT^{\frac{N}{n}}$ で生成される N 個の線演算子がゲージ不変な形で表すことができ，周長則に従うことと整合する．

8.3 連続対称性

前節では離散対称性の場合は背景ゲージ場付きの分配関数によってギャップを持つ相の分類ができることを述べた．しかし，連続対称性の場合は SSB 相ではギャップレスモードが出るため TQFT とはならないため，離散対称性とは大きく状況が異なる．また，離散対称性の SSB 相で背景ゲージ場を入れると分配関数が 0 になるのはドメインウォールができることが要因であったが，連続対称性の場合はドメインウォールはできないため，SSB 相で背景ゲージ場を入れた際に分配関数が 0 になるとは限らない．そこで，ここでは連続対称性の中でも最も簡単な $U(1)^{(p)}$ 対称性の SSB の場合に背景ゲージ場付きの分配関数がどのように振る舞うかを求める．

まず，$p=0$ の場合を考える．$U(1)^{(0)}$ 対称性の SSB 相における 低エネルギー有効理論は 3.4.2 節で述べたようにコンパクトボソンの理論 (3.37) である．時空を各方向の長さが L_i，$(i=1,\cdots,d)$ の d 次元トーラス T^d とし，その座標を $x^i\sim x^i+L_i$，$(i=1,2,\cdots,d)$ とする．背景ゲージ場として $A=\frac{\alpha}{L_1}dx^1$，もしくは

[*89] $k,p\in\mathbb{Z}_n$ であることに注意.

等価であるが，1 方向だけに $\varphi(x^1+L_1)=\varphi(x^1)+\alpha$ というツイストした境界条件を置く．ほかの方向に関しては周期的境界条件を置いてるものとする．この境界条件のもとでの運動方程式の古典解は

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{d}\frac{2\pi n_i}{L_i}x^i+\frac{\alpha}{L_1}x^1 \tag{8.52}$$

と書ける．ただし，$n_i\in\mathbb{Z}$ は巻き付き数を表している．量子的な揺らぎの部分を $\delta\varphi$ と表すと，作用は

$$S[\varphi]=\frac{v^2}{2}\int d^dx\left[\sum_{i=1}^{d}\left(\frac{2\pi n_i+\alpha\delta_{i,1}}{L_i}\right)^2+(\partial_\mu\delta\varphi)^2\right] \tag{8.53}$$

と表される．したがって，分配関数を計算すると

$$Z[A]=\int\mathcal{D}(\delta\varphi)\exp\left[-\frac{v^2}{2}\int d^dx\,(\partial_i\delta\varphi)^2\right]\sum_{\{n_i\}}\exp\left[-\frac{v^2V}{2}\sum_i\left(\frac{2\pi n_i+\alpha\delta_{i,1}}{L_i}\right)^2\right] \tag{8.54}$$

となる．ただし，$V=L_1L_2\cdots L_d$ は d 次元トーラスの体積である．$Z[0]$ との比を取ると

$$\begin{aligned}\frac{Z[A]}{Z[0]}&=\frac{\sum\exp\left[-\frac{2\pi^2v^2V}{L_1^2}\left(n_1+\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2\right]}{\sum\exp\left[-\frac{2\pi^2v^2V}{L_1^2}n_1^2\right]}\\&=\frac{\theta\left(\frac{\alpha}{2\pi}\tau,\tau\right)}{\theta(0,\tau)}e^{-\frac{\alpha^2v^2V}{2L_1^2}}\end{aligned} \tag{8.55}$$

となる．ただし，$\tau=\frac{2\pi iv^2V}{L_1^2}$ であり，$\theta(z,\tau)$ はテータ関数

$$\theta(z,\tau)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{\pi in^2\tau+2\pi inz}=e^{-\pi iz^2/\tau}\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{\pi i\tau(n+z/\tau)^2} \tag{8.56}$$

である．したがって，$A=\frac{\alpha}{L_1}dx^1$ の挿入では分配関数は 0 にはならないことが分かる．

離散対称性の場合と異なり，連続対称性の場合は平坦でない背景ゲージ場を挿入することができる．例えば，図 51 のように x^1,x^2 方向からなる T^2 を考え，x^1,x^2 方向それぞれの張り合わせ関数を $e^{i\alpha_1(x^2)},e^{i\alpha_2(x^1)}$ として

$$\alpha_1(L_2)-\alpha_1(0)=\alpha_2(L_1)-\alpha_2(0)+2\pi n \tag{8.57}$$

を満たすような $U(1)$ ゲージ場の配位を考える．ただし，n は 0 でない整数とする．これは

$$\frac{1}{2\pi}\int_{T^2}dA=n\neq0 \tag{8.58}$$

を満たすような背景ゲージ場の配位を考えていることとなる．コンパクトボソン φ が x^1,x^2 方向にそれぞれ w_1,w_2 の巻き付き数を持っているとする．図 51 のように $(x^1,x^2)=(0,0)$ から (L_1,L_2) まで青線で描かれた二通りの経路に沿って φ がどのように変化するかを考えると，

$$\begin{aligned}\varphi(L_1,L_2)&=\varphi(0,0)+2\pi(w_1+w_2)+\alpha_1(0)-\alpha_1(L_2)\\\varphi(L_1,L_2)&=\varphi(0,0)+2\pi(w_1+w_2)+\alpha_2(0)-\alpha_2(L_1)\\&=\varphi(0,0)+2\pi(w_1+w_2)+\alpha_1(0)-\alpha_1(L_2)+2\pi n\end{aligned} \tag{8.59}$$

という式が得られる．したがって，このような背景ゲージ場の配位の下ではコンパクトボソン φ の値が一意に定まらない．つまり，well-defined なコンパクトボソンの配位がないため，経路積分の足しあげは行われず，

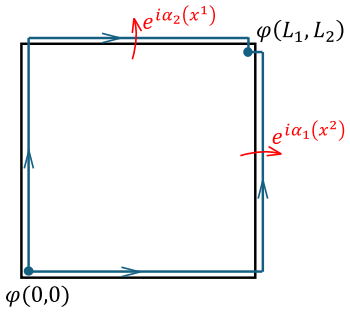


図 51: 平坦でない $U(1)$ 背景ゲージ場を挿入した場合のコンパクトボソン

分配関数 $Z[A]$ は 0 でなければならないことが分かる．つまり，非自明な Chern 類を持つ背景ゲージ場の配位の下では分配関数の値は 0 となる．

一般の p-形式対称性の場合も同様に計算することができる．$U(1)^{(p)}$ 対称性の SSB 相における低エネルギー有効理論は $U(1)$ p-形式ゲージ場 $a^{(p)}$ に関する Maxwell 理論

$$S = \frac{1}{2e^2}\int da^{(p)} \wedge *da^{(p)} \tag{8.60}$$

となる．この理論には $U(1)^{(p)}$ 電気的対称性があり，その背景ゲージ場を $A^{(p+1)}$ と表すこととする．

$$A^{(p+1)} = \alpha \frac{dx^1}{L_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dx^{p+1}}{L_{p+1}} \tag{8.61}$$

という背景ゲージ場の配位を考える．$a^{(p)}$ は $U(1)$ 値であるからモノポールのある配位を考えることができる．したがって，式 (8.52) と同様に

$$da^{(p)} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_{p+1}} 2\pi n_{i_1 i_2 \cdots i_{p+1}} \frac{dx^{i_1}}{L_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{dx^{i_{p+1}}}{L_{i_{p+1}}} + d\alpha^{(p)} \tag{8.62}$$

のように書くことができる．ただし，ここで $\alpha^{(p)}$ は $U(1)$ 値でなく $\mathbb{R}$ 値の p-形式ゲージ場である．これを作用に代入して分配関数を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{Z[A^{(p+1)}]}{Z[0]} &= \frac{\sum \exp\left[-\frac{2\pi^2 V}{e^2 (L_1 \cdots L_{p+1})^2}(n + \frac{\alpha}{2\pi})^2\right]}{\sum \exp\left[-\frac{2\pi^2 V}{e^2 (L_1 \cdots L_{p+1})^2} n^2\right]} \\ &= \frac{\theta(\frac{\alpha}{2\pi}\tau, \tau)}{\theta(0,\tau)} e^{-\frac{\alpha V^2}{2e^2 (L_1 \cdots L_{p+1})^2}} \end{aligned} \tag{8.63}$$

が得られる．ただし，$\tau = \frac{2\pi i V}{e^2 (L_1 \cdots L_{p+1})^2}$ である．したがって，$p = 0$ の場合と同様に分配関数は 0 にならない．

同様にして

$$\frac{1}{2\pi}\int dA^{(p+1)} = n \neq 0 \tag{8.64}$$

となるようなゲージ場の配位に対しては well-defined な $a^{(p)}$ の配位が存在せず分配関数は 0 になることが分かる．

8.4 混合アノマリーと背景ゲージ場付きの分配関数

前節で連続対称性の SSB 相では背景ゲージ場を挿入しても必ずしも分配関数が 0 になるとは限らないことを見た．本節では，どのような背景ゲージ場を入れると分配関数が 0 になるかをアノマリーの立場から考察する．

SSB 相ではソリトン的対称性が創発する場合がある．そのとき一般に，破れた対称性とソリトン的対称性の間には混合アノマリーがある[*90]．破れた対称性の背景ゲージ場を A とし，創発したソリトン的対称性の背景ゲージ場を B とする．ここで考えている分配関数は破れた対称性に対する背景ゲージ場を挿入したものなので

$$Z[A, B = 0] \tag{8.65}$$

である．$A \neq 0$ のとき，$B \to B + d\lambda$ のゲージ変換に対して混合アノマリーがあることから分配関数 (8.65) は

$$Z[A, 0] \to Z[A, d\lambda] e^{i\mathcal{A}(A,\lambda)} \tag{8.66}$$

のように位相が変化する．λ が定数でかつ $\mathcal{A}(A, \lambda) \neq 0$ のとき

$$Z[A, 0] = Z[A, 0] e^{i\mathcal{A}(A,\lambda)} \tag{8.67}$$

となるため，$Z[A, 0] = 0$ でなければならない．このようにして，破れた対称性と創発するソリトン的対称性の間に混合アノマリーがある場合に分配関数が消えることが分かったが，これは言い換えるとアノマリーが生じるような A の配位を選ぶとトポロジカルソリトンが生じるということである．

8.4.1 $\mathbb{Z}_N^{(p)}$ 対称性

離散対称性の場合の具体例として $\mathbb{Z}_N^{(p)}$ 対称性の SSB 相を考える．$\mathbb{Z}_N^{(p)}$ 対称性の SSB 相の低エネルギー有効理論は $\mathbb{Z}_N^{(p)}$ TQFT (8.24) である．この理論にはふたつの対称性がある．一つは $a^{(p)}$ の $\mathbb{Z}_N^{(p)}$ シフト対称性であり，これはもともと考えていた $\mathbb{Z}_N^{(p)}$ 対称性そのものである．もう一つの対称性は $b^{(d-p-1)}$ の $\mathbb{Z}_N^{(d-p-1)}$ シフト対称性であり，これは低エネルギーで創発するソリトン的対称性である．例えば Ising 模型の場合は $p = 0, N = 2$ の場合に対応するが，この場合の $b^{(d-1)}$ の $\mathbb{Z}_2^{(d-1)}$ シフト対称性はドメインウォールに関するソリトン対称性となっている．

これら二つの対称性の間には混合アノマリーがある．このことを確かめるにはそれぞれの対称性の背景ゲージ場を $A^{(p+1)}, B^{(d-p)}$ とし，理論 (8.24) に結合させる．

$$S[A^{(p+1)}, B^{(d-p)}] = \frac{2\pi i}{N} \int \left(b^{(d-p-1)} \cup \delta a^{(p)} - b^{(d-p-1)} \cup A^{(p+1)} - (-1)^{d-p} B^{(d-p)} \cup a^{(p)} \right) \tag{8.68}$$

ゲージ変換は

$$\begin{aligned} a^{(p)} &\to a^{(p)} + \lambda^{(p)} \\ A^{(p+1)} &\to A^{(p+1)} + \delta\lambda^{(p)} \\ b^{(d-p-1)} &\to b^{(d-p-1)} + \lambda^{(d-p-1)} \\ B^{(d-p)} &\to B^{(d-p)} + \delta\lambda^{(d-p-1)}, \end{aligned} \tag{8.69}$$

[*90] 証明されているわけではないが，少なくともここで挙げる例に対しては成り立っている．

であり，このゲージ変換によって作用 (8.68) は

$$\delta S = -\frac{2\pi i}{N}\int\left[\lambda^{(d-p-1)}\cup A^{(p+1)} + (-1)^{(d-p)}B^{(d-p)}\cup\lambda^{(p)} + \lambda^{(d-p-1)}\cup\delta\lambda^{(p)}\right] \tag{8.70}$$

のように変換する．したがって，$\mathbb{Z}_N^{(p)}$ 対称性と $\mathbb{Z}_N^{(d-p-1)}$ 対称性の間には混合アノマリーがあることが分かる．$\lambda^{(p)}=0$, $\lambda^{(d-p-1)}=\text{const.}$ としたときに分配関数は

$$Z[A^{(p+1)},0]\to Z[A^{(p+1)},0]\exp\left[-\frac{2\pi i}{N}\int\lambda^{(d-p-1)}\cup A^{(p+1)}\right] \tag{8.71}$$

と変換する．そのため $A^{(p+1)}\neq 0$ であれば $Z[A^{(p+1)},0]=0$ でなければならないことが分かる．

8.4.2 $U(1)^{(p)}$ 対称性

次に $U(1)^{(p)}$ 対称性の場合を考える．$U(1)^{(p)}$ 対称性の SSB 相の低エネルギー有効理論 (8.60) には，通常の $U(1)$ Maxwell 理論と同様に電気的 $U(1)^{(p)}$ 対称性と磁気的 $U(1)^{(d-p-2)}$ 対称性があり，これらの間には混合アノマリーがある．電気的 $U(1)^{(p)}$ 対称性の背景ゲージ場を $A^{(p+1)}$ とし磁気的 $U(1)^{(d-p-2)}$ 対称性の背景ゲージ場を $B^{(d-p-1)}$ とすると，混合アノマリーは式 4.38 と同様に

$$\mathcal{A}=\frac{i}{2\pi}\int dA^{(p+1)}\wedge B^{(d-p-1)} \tag{8.72}$$

という $(d+1)$ 次元のアノマリー流入の作用によって特徴づけられる．

ここで考えている分配関数は $Z[A^{(p+1)},B^{(d-p-1)}=0]$ であり，$B^{(d-p-1)}\to B^{(d-p-1)}+d\lambda^{(d-p-2)}$ というゲージ変換を行うとこの分配関数は

$$Z[A^{(p+1)},0]\to Z[A^{(p+1)},d\lambda^{(d-p-2)}]\exp\left[\frac{i}{2\pi}\int dA^{(p+1)}\wedge\lambda^{(d-p-2)}\right] \tag{8.73}$$

と変化する．したがって，$A^{(p+1)}$ が平坦，つまり $dA^{(p+1)}=0$ のときはアノマリーは消えてしまい位相の不定性が生まれない．よって，分配関数 $Z[A,0]$ は 0 である必要がなくなる．

しかし，(8.64) を満たすような平坦でないゲージ場の配位に対してはアノマリーがあるため，$B^{(d-p-1)}$ のゲージ変換によって位相の不定性が生まれる．したがって，このときは $Z[A,0]=0$ でなければならないことが分かる．

8.4.3 $\mathbb{C}P^1$ シグマ模型

他にも SSB 相でソリトン的対称性が創発し，破れた対称性との混合アノマリーがある場合として $\mathbb{C}P^1$ シグマ模型がある．$\mathbb{C}P^1$ シグマ模型は $SO(3)$ 対称性が $SO(2)$ 対称性に破れた場合の低エネルギー有効理論である．3.4.5 節で述べたように $\mathbb{C}P^1$ シグマ模型は $|z_1|^2+|z_2|^2=1$ を満たす二つの複素スカラー z_1,z_2 と $U(1)$ ゲージ場 a で表される．このとき，

$$\vec{z}\to U\vec{z},\qquad U\in SU(2) \tag{8.74}$$

という $SU(2)$ の対称性があるように思えるが，実際には $U=-1$ のときはこれは $U(1)$ ゲージ変換と思うことができる．したがって，忠実に作用する対称性変換は $SU(2)/\mathbb{Z}_2\simeq SO(3)$ である．そのため $SO(3)$ の背景ゲージ場を $SU(2)$ ゲージ場 A と $\mathbb{Z}_2$ ゲージ場 w_2 の組で表した際に[*91]，$\mathbb{Z}_2$ ゲージ変換は

$$\begin{aligned} w_2&\to w_2+\delta\lambda\\ a&\to a-\pi\lambda\end{aligned} \tag{8.75}$$

[*91] w_2 は 3.2.4 節で述べた Stiefel-Whitney 類のことである．

というように w_2 だけでなく a の変換も引き起こす．

また，$\mathbb{C}P^1$ シグマ模型は 3.4.5 節で述べたように $\pi_2(\mathbb{C}P^1) \simeq \mathbb{Z}$ であることから生じる $(d-3)$-形式のソリトン的対称性がある．この対称性の保存電流は

$$\frac{f}{2\pi} = \frac{da}{2\pi} \tag{8.76}$$

であった．したがって，$U(1)$ 値の $(d-2)$-形式背景ゲージ場 B を結合させると

$$S = \int |d\vec{z} - ia\vec{z} - iA\vec{z}|^2 + \frac{i}{2\pi}\int da \wedge B \tag{8.77}$$

となる．しかし，この作用はゲージ変換 (8.75) で不変でない．ゲージ変換 (8.75) で不変にするためには B との結合を

$$\frac{i}{2\pi}\int (da + \pi w_2) \wedge B \tag{8.78}$$

という形にすればよい．しかしすると今度は B に関するゲージ変換に関して不変でなくなる．そのため，この $SO(3)$ 対称性と $U(1)$ ソリトン的対称性の間には混合アノマリーがあることが分かる．

9 まとめと今後の展望

本論文の大部分はこの 10 年ほどで発展した一般化対称性に関するレビューである．一般化対称性は様々な理論で現れ，理論が解けない場合にも重要な情報を与えることのできる強力な道具である．このような対称性の一般化によって従来の対称性の概念では調べることができなかった現象の理解を深めることとなった．

本論文では 1 章で一般化対称性を導入し，2 章で本論文を通して重要となる背景ゲージ場について説明した．3 章では高次形式対称性について具体例と共に述べ，4 章，5 章ではアノマリーやゲージ化の概念について説明を行った．これらは従来の対称性や高次形式対称性の理解をする上で重要な概念であるが，それだけでなく 6 章で述べた非可逆対称性を構成する上でも現れるものとなっている．7 章では対称性を一つ高い次元の TQFT を用いて解析する道具として知られている SymTFT について詳しく解説した．8 章は自身の研究に関する章であり，ここでは主に一般化対称性を持つ理論の相構造について調べた．特に，一般化対称性の SSB と SPT 相が混じる場合に便利な量として背景ゲージ場付きの分配関数というものを考え，その性質について論じた．離散対称性の場合の分配関数の振る舞いはある程度知られていたが，その振る舞いを様々な道具を用いて再考した．特に，SSB 相で創発するソリトン的対称性との混合アノマリーを用いた分配関数の振る舞いの理解は連続対称性の SSB の場合でも適用可能な結果となっていることを示した．

本研究の今後の展望としては，主に三つの方向性がある．一つは本研究では一般化対称性のうち主に可逆な対称性に対する分配関数の振る舞いを調べたが，非可逆対称性の場合にどのように振る舞うかを調べることである．その際に一つ問題となるのが，非可逆対称性に対する背景ゲージ場の表式がよくわからないということである．背景ゲージ場付きの分配関数を対称性演算子の挿入とみなすことで同様のものを考えることはできるが，創発する対称性との混合アノマリーの表式などについてはいまだによく知られていない．例えば二次元 CFT のミニマル模型などを考えると対称性演算子を挿入した分配関数を計算できるため，そのような場合の SSB 相の振る舞いを調べることで非可逆対称性に対するアノマリーの表式に対する理解が得られるのではないかと考えている．

二つ目の方向性は連続対称性の SSB 相に対する理解である．連続対称性の SSB 相では南部-Goldstone 粒子が生じてギャップが閉じるため低エネルギー有効理論が TQFT とならない．そのため SymTFT を用いた理解などの離散対称性との対応が非自明である．7.6 で述べたように近年連続対称性に対する SymTFT に対する理解が少しずつ得られているので，これを用いて連続対称性の SSB 相を解析できるのではないかと考えられる．また，連続対称性の SSB の場合のもう一つの問題として低エネルギーで創発するソリトン的対称性が存在しない場合や，複雑な構造を持つ場合があることが挙げられる．ソリトン的対称性が存在しない場合は混合アノマリーを用いた方法が使えないため，そのような場合の分配関数の振る舞いを調べることは困難となる．また，ソリトン的対称性が複雑な構造を持つ場合としては例えば本論文でも述べた $\mathbb{C}P^1$ シグマ模型がある．この模型には Hedgehog と Hopfion と呼ばれる二種類のソリトンがあり，Hedgehog ソリトンに関するソリトン的対称性と $SO(3)$ 対称性の間に混合アノマリーがあることを 8 章で示した．しかし，Hopfion に関するソリトン的対称性は非可逆対称性となることが知られており，混合アノマリーがあるかは非自明である．より一般にソリトン的対称性はこのように非可逆対称性や高次群対称性などの非自明な構造となるため，そのような対称性に対するアノマリーを調べるための道具の開発が必要となる．

三つ目の方向性は数値計算を用いた分配関数の計算である．近年テンソル繰り込み群 (TRG) による物理系の解析が盛んに行われているが，この TRG は分配関数の計算と相性の良い道具となっている．そのため，TRG を用いて相転移を解析する際の指標として背景ゲージ場付きの分配関数が利用できると考えられる．

謝辞

本研究を遂行するにあたり，多くの方々のご指導とご支援を賜りましたことを心より感謝申し上げます．

まず，指導教員である橋本幸士教授には，研究生活および学生生活の両面において多大なるサポートをいただきました．教授の広い見識と的確なアドバイスにより，本研究をより良い形で進めることができました．心より感謝申し上げます．

次に，共同研究者である基礎物理学研究所の谷崎佑弥助教には，本研究を進める上で多くの時間を割いて丁寧にご指導いただきました．助教のご支援がなければ，この成果を得ることはできなかったと確信しております．深く感謝申し上げます．

また，基礎物理学研究所の川平将志氏，安藤貴政氏には，本研究に関連する議論を通じて数多くのことを教えていただきました．心より感謝申し上げます．さらに，同期の皆さまには，研究生活を通じて多大なる支えと刺激をいただき，感謝の意を表します．特に，基礎物理学研究所の大石翼君，片山颯君，武藤永治君には，研究分野が近いこともあり，日々の議論や助言を通じて多くの学びを得ることができました．この場を借りて改めて感謝申し上げます．

最後に，これまで私を支え続けてくれた家族に深く感謝いたします．日々の理解と励ましがなければ，修士課程を無事に修了することはできなかったと確信しています．この場を借りて，改めて感謝の意を表します．

付録 A　幾何学

A.1　微分形式

多様体 X の次元を d とする．局所座標を $(x^1, \cdots, x^d)$ とするとき p-形式 ω は

$$\omega = \sum_{\{i_1,\cdots,i_p\}} \omega_{i_1,\cdots,i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \tag{付録 A.1}$$

のように表される．ウェッジ積 $\wedge$ は

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega, \qquad (\omega \in \Omega^p(X),\ \eta \in \Omega^q(X)) \tag{付録 A.2}$$

という性質を持つ．X 上の p-形式全体を $\Omega^p(X)$ と記す．外微分 $d : \Omega^p(X) \to \Omega^{p+1}(X)$ は

$$d\omega = \sum_j \sum_{\{i_1,\cdots,i_p\}} \frac{\partial}{\partial x^j} \omega_{i_1,\cdots,i_p} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \tag{付録 A.3}$$

として定義される．外微分 d は次のような性質を持つ．

$$\begin{aligned} d^2 &= 0 \\ d(\omega \wedge \eta) &= d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta, \qquad (\omega \in \Omega^p(X)) \end{aligned} \tag{付録 A.4}$$

$\omega \in \Omega^p(X)$ と p 次元部分多様体 $M^{(p)}$ が与えられたとき，積分

$$\int_{M^{(p)}} \omega \tag{付録 A.5}$$

を考えることができる．$M^{(p)}$ が境界 $N^{(p-1)}$ を持ち，$\omega = d\eta$ と書けるとき，次の Stokes の定理が成り立つ．

$$\int_{M^{(p)}} d\eta = \int_{N^{(p-1)}} \eta \tag{付録 A.6}$$

したがって，$M^{(p)}$ が閉多様体で ω が完全形式のときは

$$\int_{M^{(p)}} \omega = 0 \tag{付録 A.7}$$

が成り立つ．ただしここで一つ注意が必要であり，ω が大域的な微分形式であることが重要である．物理でよく現れる積分はゲージ場を用いて表されるが，ゲージ場は局所的にしか定義されていないために Stokes の定理を用いる際には注意が必要である．

次に Hodge 作用素 $* : \Omega^p(X) \to \Omega^{d-p}(X)$ について説明する．(付録 A.1) の $\omega \in \Omega^p(X)$ に対して，$*\omega \in \Omega^{d-p}(X)$ は

$$*\omega = \frac{1}{(d-p)!} \epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_d} \omega^{\mu_1 \cdots \mu_p} dx^{\mu_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_d} \tag{付録 A.8}$$

として定義される．Hodge 作用素を二回とると

$$** \omega = (-1)^{p(d-p)} \omega \tag{付録 A.9}$$

となる[*92]．

[*92] これは Euclid 空間の場合の表式であり，Minkowski 時空の場合は -1 倍が必要である．

A.2 de Rham コホモロジー

p-形式 $\Omega^p(X)$ の部分集合として次の二つの集合を定義する．

$$\begin{aligned} Z^p(X) &= \{\omega \in \Omega^p(X) | d\omega = 0\} \\ B^p(X) &= \{\omega \in \Omega^p(X) | \omega = d\eta,\ \eta \in \Omega^{p-1}(x)\} \end{aligned} \tag{付録 A.10}$$

$Z^p(X)$ の元を p-閉形式と呼び，$B^p(X)$ の元を p-完全形式と呼ぶ．(付録 A.4) より

$$B^p(X) \subset Z^p(X) \tag{付録 A.11}$$

が成り立つので，商空間

$$H^p(X) = Z^p(X)/B^p(X) \tag{付録 A.12}$$

が定義できる．これを p 次の de Rham コホモロジーという．

A.3 デルタ関数形式とリンク数

Poincaré 双対性とは向き付け可能な d 次元多様体 X に対して

$$H^k(X) \simeq H_{d-k}(X) \tag{付録 A.13}$$

という同型のことである．$H_p(X)$ は p 次のホモロジー群であり，p 次元部分多様体の集合に同値関係を入れたものである[*93]．この同型は

$$H^k(X) \times H^{d-k}(X) \ni (\omega, \eta) \mapsto \int \omega \wedge \eta \in \mathbb{R} \tag{付録 A.14}$$

という写像が非退化であることと，ホモロジーとコホモロジーが双対関係にあることから従う．この同型から p 次元多様体 $M^{(p)}$ に対して $(d-p)$-形式が定まる．これを $\delta(M^{(p)})$ と表し，デルタ関数形式という[*94]．この定義から $\omega \in \Omega^p(X)$ に対して

$$\int_{M^{(p)}} \omega = \int_X \omega \wedge \delta(M^{(p)}) \tag{付録 A.15}$$

が成り立つ．$M^{(p)}$ の境界が $N^{(p-1)}$ で与えられるとき，$\eta \in \Omega^{p-1}(X)$ として

$$\begin{aligned} \int_{N^{(p-1)}} \eta &= \int_X \eta \wedge \delta(N^{(p-1)}) \\ \int_{N^{(p-1)}} \eta &= \int_{\partial M^{(p)}} \eta = \int_{M^{(p)}} d\eta = \int_X d\eta \wedge \delta(M^{(p)}) = (-1)^p \int_X \eta \wedge d\delta(M^{(p)}) \end{aligned} \tag{付録 A.16}$$

となるため，

$$\delta(\partial M^{(p)}) = (-1)^p d\delta(M^{(p)}) \tag{付録 A.17}$$

が成り立つ．

このデルタ関数形式を用いると二つの部分多様体の間のリンク数を定義することができる．$M^{(p)}, N^{(d-p)}$ に対してまず交点数を次のように定義する．

$$\mathrm{Int}(M^{(p)}, N^{(d-p)}) = \int_{M^{(p)}} \delta(N^{(d-p)}) = \int_X \delta(N^{(d-p)}) \wedge \delta(M^{(p)}) \tag{付録 A.18}$$

[*93] 詳しくは付録 B で説明する．
[*94] 例えば [68] を参照．

この交点数を用いると，$M^{(p)}$ と $L^{(d-p-1)}$ の間のリンク数は

$$\mathrm{Link}(M^{(p)}, L^{(d-p-1)}) = \mathrm{Int}(N^{(p+1)}, L^{(d-p-1)}) \qquad \text{(付録 A.19)}$$

と定義される．ただし，$N^{(p+1)}$ は $\partial N^{(p+1)} = M^{(p)}$ を満たす $(p+1)$ 次元多様体である．

付録 B　代数トポロジー

本付録では本論文で必要な代数トポロジーについて説明する．代数トポロジーの本としては例えば [69] を参照.

B.1　基本的事項

B.1.1　完全列

加群の図式

$$\cdots \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} A_2 \xrightarrow{f_3} A_3 \xrightarrow{f_4} \cdots \tag{付録 B.1}$$

を考える[*95]．$\mathrm{im}\, f_i = \ker f_{i+1}$ が成り立つときこの図式は A_i で完全という．すべての A_i について完全なとき，この図式を完全列という.

完全列の代表的な性質として

- 図式
$$0 \to A \xrightarrow{f} B \tag{付録 B.2}$$
が A について完全なら f は単射.
- 図式
$$A \xrightarrow{f} B \to 0 \tag{付録 B.3}$$
が B について完全なら f は全射.
- 図式
$$0 \to A \xrightarrow{f} B \to 0 \tag{付録 B.4}$$
が完全列なら $A \simeq B$ である.

完全列の中でも

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0 \tag{付録 B.5}$$

という完全列を短完全列と呼ぶ．短完全列 (付録 B.5) が $B = A \oplus C$ を満たすとき分裂するという．また，これは準同型 $s : C \to B$ で $g \circ s = \mathrm{id}_C$ を満たすものが存在することと同値である.

B.1.2　鎖複体

加群の図式

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \cdots \tag{付録 B.6}$$

が任意の n について $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ を満たすとき，$\mathcal{C} = \{(C_n, \partial_n)\}_n$ の組を鎖複体という．∂_n のことを境界作用素といい，C_n の元を n-チェインという.

$$\begin{aligned} Z_n &= \ker \partial_n \\ B_n &= \mathrm{im}\, \partial_{n+1} \end{aligned} \tag{付録 B.7}$$

[*95] 各 $f_i : A_{i-1} \to A_i$ は加群の準同型であることに注意.

と定義する．Z_n, B_n の元をそれぞれ n-サイクル，n-バウンダリーという．$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ より $B_n \subset Z_n$ が成り立つ．したがって，商加群

$$H_n = Z_n / B_n \tag{付録 B.8}$$

が定義できる．これを n 次のホモロジー群という．

コホモロジーを定義するには A を加群として

$$C^n(A) = \hom(C_n; A) \tag{付録 B.9}$$

を考えればよい．C^n の元を n-コチェインという．∂_n の双対写像を $\delta^n : C^n \to C^{n+1}$ とするとホモロジーの場合と同様に

$$\begin{aligned} Z^n(A) &= \ker \delta^n \\ B^n(A) &= \operatorname{im} \delta^{n-1} \end{aligned} \tag{付録 B.10}$$

が定義できる．$Z^n(A), B^n(A)$ の元をそれぞれ n-コサイクル，n-コバウンダリーという．$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ より $\delta^n \circ \delta^{n-1} = 0$ となるため $B^n(A) \subset Z^n(A)$ が成り立つ．したがって，n 次コホモロジー群

$$H^n(A) = Z^n(A) / B^n(A) \tag{付録 B.11}$$

が定義される．

B.1.3 ジグザグ補題

ホモロジー代数における重要な補題としてジグザグ補題と呼ばれるものがある．これは異なるコホモロジーの間の関係を調べる際に役立つものである．

加群の完全列

$$0 \to A \to B \to C \to 0 \tag{付録 B.12}$$

が与えられたとき，コチェイン複体の完全列

$$0 \to \mathcal{C}(A) \xrightarrow{f} \mathcal{C}(B) \xrightarrow{g} \mathcal{C}(C) \to 0 \tag{付録 B.13}$$

が誘導される．ただし，この複体の完全列は次の可換図式と等価である．

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \downarrow{\scriptstyle \delta_A^{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \delta_B^{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \delta_C^{n-1}} & & \\ 0 & \longrightarrow & C^n(A) & \xrightarrow{f^n} & C^n(B) & \xrightarrow{g^n} & C^n(C) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \delta_A^{n}} & & \downarrow{\scriptstyle \delta_B^{n}} & & \downarrow{\scriptstyle \delta_C^{n}} & & \\ 0 & \longrightarrow & C^{n+1}(A) & \xrightarrow{f^{n+1}} & C^{n+1}(B) & \xrightarrow{g^{n+1}} & C^{n+1}(C) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \delta_A^{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \delta_B^{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \delta_C^{n+1}} & & \end{array} \tag{付録 B.14}$$

ただし，各行は完全列であり，各列は鎖複体となっている．このとき，次のコホモロジーの長完全列が導かれる．

$$\cdots \xrightarrow{\beta} H^n(A) \xrightarrow{f_*} H^n(B) \xrightarrow{g_*} H^n(C) \xrightarrow{\beta} H^{n+1}(A) \xrightarrow{f_*} H^{n+1}(B) \xrightarrow{g_*} H^{n+1}(C) \xrightarrow{\beta} \cdots \tag{付録 B.15}$$

f_*, g_* は f, g によって誘導される準同型写像である．非自明なのは β の部分である．この部分の構成について説明する．まず，$H^n(C)$ の元であるコホモロジー類を一つとり，その代表元を $c \in Z^n(C)$ とする．g^n は全射なので $C^n(B)$ の元 b が存在して

$$g^n(b) = c \tag{付録 B.16}$$

と書ける．$g^{n+1} \circ \delta_B^n = \delta_C^n \circ g^n$ より

$$g^{n+1}(\delta_B^n b) = \delta_C^n(g^n(b)) = \delta_C^n c = 0 \tag{付録 B.17}$$

より，$\delta_B^n b \in \ker g^{n+1} = \mathrm{im}\, f^{n+1}$ となる．したがって，$a \in C^{n+1}(A)$ が存在して

$$f^{n+1}(a) = \delta_B^n b \tag{付録 B.18}$$

と書ける．$f^{n+2} \circ \delta_A^{n+1} = \delta_B^{n+1} \circ f^{n+1}$ より

$$f^{n+2}(\delta_A^{n+1} a) = \delta_B^{n+1}(f^{n+1}(a)) = \delta_B^{n+1}(\delta_B^n b) = 0 \tag{付録 B.19}$$

が成り立つ．f^{n+2} は単射なのでこれは $\delta_A^{n+1} a = 0$ を意味する．したがって，$a \in Z^{n+1}(A)$ となるので，$H^{n+1}(A)$ の元を定める．以上から

$$\beta([c]) = [a] \tag{付録 B.20}$$

とすることで写像 $\beta : H^n(C) \to H^{n+1}(A)$ が構成できた[*96]．この写像の構成から分かるように

$$a = f^{-1}(\delta_B^n b) \tag{付録 B.21}$$

である[*97]．

B.2 単体的複体

実際に位相空間 X に対してホモロジー群やコホモロジー群を定める方法について述べる．位相空間 X は三角形分割されており，各頂点には $i, j, k, \cdots$ などのラベルがついてあるとする．頂点 i のことを 0-単体といい，辺 (ij) を 1-単体，面 (ijk) を 2-単体，四面体 $(ijkl)$ を 3-単体と呼ぶ．n-単体についても同様に n 次元の図形 $(i_0 i_1 \cdots i_n)$ として定義される (図 52)．また，各 n-単体には向きが定められているものとする．例えば

$$\begin{aligned} (ij) &= -(ji) \\ (ijk) &= (jki) = (kij) = -(ikj) = -(jik) = -(kji) \end{aligned} \tag{付録 B.22}$$

となる．n-単体の集合を基底とするような自由加群を $C_n(X)$ とし，$C_n(X)$ の元を n-チェインと呼ぶ．つまり，各 n-単体を $\sigma_{n,i}$ としたとき n-チェインは

$$c = \sum_i c_i \sigma_{n,i}, \qquad c_i \in \mathbb{Z} \tag{付録 B.23}$$

と表される．次に境界作用素を定義する．n-単体 $(i_0 i_1 \cdots i_n)$ に対し，境界作用素 ∂_n を次のように定義する．

$$\partial_n(i_0 i_1 \cdots i_n) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j (i_0 i_1 \cdots \hat{i}_j \cdots i_n) \tag{付録 B.24}$$

[*96] 厳密にはこの写像が well-defined であることを確かめる必要があるが，ここでは省略する．
[*97] f は単射なので，定義域を適切に制限すれば逆写像が存在する．

ただしここで $\hat{i}_j$ は i_j だけ取り除くことを意味する．例えば

$$\begin{aligned}\partial_0(i_0) &= 0 \\ \partial_1(i_0 i_1) &= i_1 - i_0 \\ \partial_2(i_0 i_1 i_2) &= (i_1 i_2) - (i_0 i_2) + (i_0 i_1)\end{aligned} \tag{付録 B.25}$$

のようになる．一般の r-チェインに対しては線形に拡張したとすると境界作用素 $\partial_n : c_n(X) \to C_{n-1}(X)$ が定義される．∂_n は $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ を満たす．そのため $\{(C_n(X), \partial_n)\}_n$ は鎖複体となる．したがって，n-サイクルの集合 $Z_n(X)$ や n-バウンダリーの集合 $B_n(X)$ も (付録 B.10) と同様に定義され，n 次のホモロジー群

$$H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X) \tag{付録 B.26}$$

が定義される．

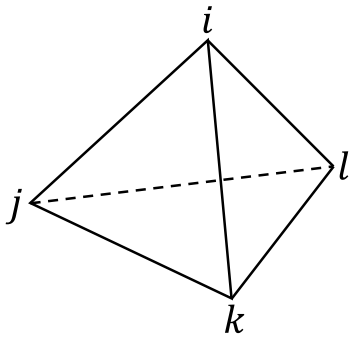


図 52: n-単体 ($n = 3$)

次にコホモロジーを定義する．(付録 B.9) と同様に

$$C^n(X; A) = \hom(C_n(X), A) \tag{付録 B.27}$$

として n-コチェインを定義する．$C_n(X)$ は n-単体 $(i_0 i_1 \cdots i_n)$ によって張られるので，n-単体の行き先だけ指定すればよい．つまり，n-コチェイン c は

$$c_{i_0 i_1 \cdots i_n} \in A \tag{付録 B.28}$$

の集まりと思うことができる．境界作用素 ∂_n の双対写像 $\delta_n : C^n(X; A) \to C^{n+1}(X; A)$ は次のように表される．

$$(\delta_n c)_{i_0 i_1 \cdots i_{n+1}} = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j c_{i_0 i_1 \cdots \hat{i}_j \cdots i_{n+1}} \tag{付録 B.29}$$

実際に計算することで $\delta_n \circ \delta_{n-1} = 0$ を確かめることができる．したがって，$Z^n(X; A), B^n(X; A)$ を (付録 B.10) と同様に定義すると，$B^n(X; A) \subset Z^n(X; A)$ が成り立ち，

$$H^n(X; A) = Z^n(X; A)/B^n(X; A) \tag{付録 B.30}$$

が定義できる．

B.3 Čech 複体

位相空間 X に対してホモロジーやコホモロジーを定義する別の方法として Čech 複体を用いる方法がある．ほとんどの位相空間，特に物理で現れるような例に対しては単体的複体を用いても，Čech 複体を用いても結果は変わらないが，Čech 複体はゲージ場を議論する上で相性の良い方法である．

まず，位相空間 X の開被覆 $\{U_i\}_i$ をとる．Čech 複体における n-単体とは

$$U_{i_0 i_1 \cdots i_n} = U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_n} \tag{付録 B.31}$$

のことである．したがって，n-チェインはこれらの $\mathbb{Z}$ 係数の線形結合によって得られ，n-コチェインは各 $U_{i_0 i_1 \cdots i_n}$ に対し $c_{i_0 i_1 \cdots i_n} \in A$ を割り当てるような写像 c として定義される．写像 ∂_n, δ_n などの定義やホモロジー，コホモロジーの定義は単体的複体の場合と同様である．

ただし，ここで一つ注意が必要である．上述の Čech コホモロジーの定義は開被覆の取り方に依存した形となっているが，開被覆としてすべての n-単体 $U_{i_0 i_1 \cdots i_n}$ が可縮となるようなものを選ぶとコホモロジーは一意に定まり，単体的複体を用いたコホモロジーと同じになることが知られている．このような開被覆を良い被覆という．

単体的複体と Čech 複体は双対のような関係となっている．実際，図 53 のように各開集合の中心に点を打ち，それらを線でつなぐと U_i, U_j, U_k が点，U_{ij}, U_{jk}, U_{ki} が辺，U_{ijk} が面というように各単体が対応していることが見て取れる．

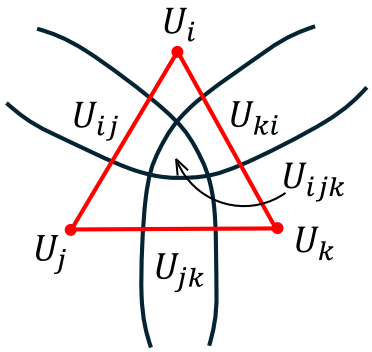


図 53: Čech 複体と単体的複体

B.4 Bockstein 写像

$\mathbb{Z}_N$ ゲージ場に対する操作として Bockstein 写像と呼ばれるものがある．Bockstein 写像とは完全列

$$0 \to \mathbb{Z}_N \xrightarrow{\times N} \mathbb{Z}_{N^2} \xrightarrow{\text{mod } N} \mathbb{Z}_N \to 0 \tag{付録 B.32}$$

から誘導されるコホモロジーの長完全列 (付録 B.15) の写像 β のことである．

$$\beta : H^n(X; \mathbb{Z}_N) \to H^{n+1}(X; \mathbb{Z}_N) \tag{付録 B.33}$$

のことである．式 (付録 B.20) から分かるように，$c \in H^n(X; \mathbb{Z}_N)$ を $\mathbb{Z}_N$ ゲージ場とすると，

$$\beta(c) = \frac{1}{N} \delta \tilde{c} \tag{付録 B.34}$$

と表される．ただし，$\tilde{c}$ は c を $C^n(X;\mathbb{Z}_{N^2})$ の元にリフトしたものである．

また，文献によっては完全列

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times N} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{mod } N} \mathbb{Z}_N \to 0 \tag{付録 B.35}$$

を用いて Bockstein 写像が構成される場合もある．この完全列を用いて構成された Bockstein 写像を $\widetilde{\beta}$ と表すこととすると，

$$\widetilde{\beta}(c) = \frac{1}{N}\delta\tilde{c} \tag{付録 B.36}$$

であるが，ここでの $\tilde{c}$ は上とは異なり，c を $C^n(X;\mathbb{Z})$ にリフトしたものである．β と $\widetilde{\beta}$ の関係は

$$\beta = (\text{mod } N) \circ \widetilde{\beta} \tag{付録 B.37}$$

となっている．

B.5 ホモトピー群

n 次元球面 S^n から X への写像全体の集合に対して，互いにホモトピックなものを同一視して得られる集合を n 次のホモトピー群といい，$\pi_n(X)$ と表す．0 次のホモトピー群 $\pi_0(X)$ は X の連結成分の個数を表し，また 1 次のホモトピー群は基本群と呼ばれることもある．

ファイバーが F のファイバー束 $p : E \to B$ に対して次のホモトピー群の長完全列が導かれることが知られている．

$$\cdots \to \pi_n(F) \to \pi_n(E) \to \pi_n(B) \to \pi_{n-1}(F) \to \pi_{n-1}(E) \to \pi_{n-1}(B) \to \cdots \tag{付録 B.38}$$

ただし，(付録 B.15) とは違い，次数が下がっていくことに注意が必要である．

X が Lie 群 G のときは様々な事実が知られている．

- $\pi_1(G)$ は可換群となる．
- $\pi_2(G) = 0$.
- G が単純のとき $\pi_3(G) \simeq \mathbb{Z}$.

また，連結 Lie 群の基本群を調べるうえで役に立つ普遍被覆について説明する．Lie 群 G の普遍被覆 $\widetilde{G}$ とは G を底空間とし離散集合 Γ をファイバーに持つファイバー束であり単連結なもののことである．したがって，$G = \widetilde{G}/\Gamma$ と書ける．このことと (付録 B.38) の長完全列を用いると

$$\pi_1(\widetilde{G}) \to \pi_1(G) \to \pi_0(\Gamma) \to \pi_0(\widetilde{G}) \tag{付録 B.39}$$

が導かれるが，$\pi_1(\widetilde{G}), \pi_0(\widetilde{G})$ は自明なので $\pi_1(G) \simeq \pi_0(\Gamma) = \Gamma$ が得られる．

この事実を利用すると，次のように様々な Lie 群の基本群を求めることができる．

- $U(1)$ の普遍被覆は $\mathbb{R}$ であり $U(1) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ なので $\pi_1(U(1)) \simeq \mathbb{Z}$ である．
- $PSU(N) = SU(N)/\mathbb{Z}_N$ であり，$SU(N)$ は単連結なので，$SU(N)$ は $PSU(N)$ の普遍被覆となる．したがって，$\pi_1(PSU(N)) \simeq \mathbb{Z}_N$ となる．
- $SO(N)$ の二重被覆を取ると単連結なスピン群 $Spin(N)$ が得られることが知られている．したがって，$\pi_1(SO(N)) \simeq \mathbb{Z}_2$ となる．

B.6 分類空間

群 G の分類空間 BG は主 G 束を分類する空間である．多様体 X が与えられたとき，

$$\{X \text{ 上の主 } G \text{ 束 (の同型類)}\} \simeq \{f : X \to BG\}/\sim \qquad \text{(付録 B.40)}$$

のような関係が成り立つ．より詳しく述べると，すべてのホモトピー群が自明となるような空間 EG と主 G 束 $EG \to BG$ があり，$f : X \to BG$ を一つとると f による $EG \to BG$ の引き戻しとして主 G 束 $f^*EG \to X$ が得られる．このようにして X 上の主 G 束と $X \to BG$ の写像が対応する．このことから G ゲージ理論は BG を標的空間とするシグマ模型とみなすことができる．

また，$EG \to BG$ は主 G 束であることから (付録 B.38) を用いると次の完全列が導かれる．

$$\pi_{n+1}(EG) \to \pi_{n+1}(BG) \to \pi_n(G) \to \pi_n(EG) \qquad \text{(付録 B.41)}$$

EG のホモトピー群は自明だったので

$$\pi_{n+1}(BG) \simeq \pi_n(G) \qquad \text{(付録 B.42)}$$

が導かれる．

付録 C　群コホモロジー

本付録では本論文で必要な群コホモロジーについて説明する．群コホモロジーの本としては例えば [70] を参照.

C.1　群コホモロジーの定義

G を有限群，M を G-加群とする．M の演算を $+$ で表し，$g \in G$ の $m \in M$ への作用を m^g と表す．群コホモロジーにおける p-コチェイン e は $e : G^p \to M$ という写像として表される．p-コチェイン全体の集合を $C^p(G;M)$ と書く．コバウンダリー写像 $\delta : C^p(G;M) \to C^{p+1}(G:M)$ は次のように定義される．

$$\delta e(g_1,\cdots,g_{p+1}) = e(g_2,\cdots,g_{p+1})^{g_1} + \sum_{i=1}^{p}(-1)^i e(g_1,\cdots,g_ig_{i+1},\cdots,g_{p+1}) + (-1)^{p+1}e(g_1,\cdots,g_p) \tag{付録 C.1}$$

$p = 1,2,3$ の場合について具体的に書き下すと

$$\begin{aligned}
\delta e_1(g_1,g_2) &= e_1(g_2)^{g_1} - e_1(g_1g_2) + e(g_1)\\
\delta e_2(g_1,g_2,g_3) &= e_2(g_2,g_3)^{g_1} - e_2(g_1g_2,g_3) + e_2(g_1,g_2g_3) - e_2(g_1,g_2)\\
\delta e_3(g_1,g_2,g_3,g_4) &= e_3(g_2,g_3,g_4)^{g_1} - e_3(g_1g_2,g_3,g_4) + e_3(g_1,g_2g_3,g_4) - e_3(g_1,g_2,g_3g_4) + e_3(g_1,g_2,g_3)
\end{aligned} \tag{付録 C.2}$$

となる．通常のコホモロジーの場合と同様に，δ を 2 回作用させると 0 となる．実際，$p = 1$ の場合で具体的に確かめると

$$\begin{aligned}
\delta^2 e_1(g_1,g_2,g_3) &= \delta e_1(g_2,g_3)^{g_1} - \delta e_1(g_1g_2,g_3) + \delta e_1(g_1,g_2g_3) - \delta e_1(g_1,g_2)\\
&= e_1(g_3)^{g_1g_2} - e_1(g_2g_3)^{g_1} + e_1(g_2)^{g_1} - e_1(g_3)^{g_1g_2} + e_1(g_1g_2g_3) - e_1(g_1g_2)\\
&\quad + e_1(g_2g_3)^{g_1} - e_1(g_1g_2g_3) + e_1(g_1) - e_1(g_2)^{g_1} + e_1(g_1g_2) - e_1(g_1)\\
&= 0
\end{aligned} \tag{付録 C.3}$$

となる．したがって，$(C^p(G;M),\delta)$ の組は複体となっているのでコホモロジー

$$H^p(G;M) = \ker\delta/\operatorname{im}\delta \tag{付録 C.4}$$

が定義できる．これを p 次の群コホモロジーという．

C.2　2 次の群コホモロジーと群の拡大

C.2.1　群の中心拡大

G を群，N を可換群とする．群 G の N による拡大とは短完全列

$$1 \to N \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{p} G \to 1 \tag{付録 C.5}$$

のことである．N が Γ の中心に含まれるとき中心拡大という．以下では中心拡大のみを考える．単射 i により $N \subset \Gamma$ とみなすことができる．すると $N = \operatorname{im} i = \ker p$ なので N は Γ の正規部分群となる．したがって，共役 $N \ni n \to \gamma n\gamma^{-1}$ によって Γ は N に作用する．

ここで $s : G \to \Gamma$ として $p \circ s = \mathrm{id}_G,\ s(1_G) = 1_\Gamma$ を満たすものを一つとる．s は一般に準同型ではないため，$s(g)s(h) \neq s(gh)$ である．このずれを $e(g,h)$ と定義する．つまり，

$$s(g)s(h) = e(g,h)s(gh) \tag{付録 C.6}$$

である．両辺に p を作用させると p は準同型なので $gh = p(e(g,h))gh$ が得られる．したがって，$e(g,h) \in \ker p = N$ であることが分かる．したがって，e は $G \times G \to N$ という写像と見なすことができる．また s を用いると G の N への作用を $n^g \coloneqq s(g)ns(g)^{-1}$ として定義できる．これが実際に作用となっていることは次のように確認できる．

$$\begin{aligned}(n^g)^h &= s(h)s(g)\, n\, s(g)^{-1}s(h)^{-1} \\ &= e(h,g)s(hg)\, n\, s(hg)^{-1}e(h,g)^{-1} \\ &= e(h,g)\, n^{hg}\, e(h,g)^{-1} \\ &= n^{hg}\end{aligned} \tag{付録 C.7}$$

最後の等号では N が可換群であることを用いた．

次に，上で定義した $e : G \times G \to N$ が満たすべき条件を求める．$s(g)s(h)s(k)$ を二通りの方法で計算すると

$$\begin{aligned}(s(g)s(h))s(k) &= e(g,h)s(gh)s(k) = e(g,h)e(gh,k)s(ghk) \\ s(g)(s(h)s(k)) &= s(g)e(h,k)s(hk) = s(g)e(h,k)s(g)^{-1}e(g,hk)s(ghk)\end{aligned} \tag{付録 C.8}$$

となるので

$$e(h,k)^g e(g,hk) = e(g,h)e(gh,k) \tag{付録 C.9}$$

が得られる．これは (付録 C.2) と見比べると $\delta e = 1$ と等価であることが分かる．ただし，ここでは加群の演算を積のように書いてあることに注意．したがって，e は N 値の 2-コサイクルであることが分かる．

次に，$s : G \to \Gamma$ を $s' : G \to \Gamma$ に取り換えるとどうなるかについて考えてみる．これらのずれとして

$$s'(g) = f(g)s(g) \tag{付録 C.10}$$

と定義すると，両辺に p を作用させると $p(f(g)) = 1_G$ が得られるため $f : G \to N$ という写像と見なせることが分かる．s' に対しても (付録 C.6) と同様に 2-コサイクル $e' : G \times G \to N$ を定義する．$s'(g)s'(h)$ を二通りの方法で計算すると

$$\begin{aligned}s'(g)s'(h) &= e'(g,h)s'(gh) = e'(g,h)f(gh)s(gh) \\ s'(g)s'(h) &= f(g)s(g)f(h)s(h) = f(g)s(g)f(h)s(g)^{-1}e(g,h)s(gh)\end{aligned} \tag{付録 C.11}$$

となり

$$e'(g,h) = e(g,h) \times \frac{f(h)^g f(g)}{f(gh)} = e(g,h) \times \delta f(g,h) \tag{付録 C.12}$$

が得られる．よって $s : G \to \Gamma$ の取替えは 2-コバウンダリーをかけることに対応する．したがって，完全列 (付録 C.5) から自然に 2 次の群コホモロジーの元 $e \in H^2(G;N)$ が定まることが分かる．

逆に，群 G, N と $e \in H^2(G;N)$ が与えられたとき，Γ は集合としては $N \times G$ であり，群の演算は

$$(n_1, g_1) \times (n_2, g_2) = (n_1 n_2^g \cdot e(g_1, g_2)\,,\ g_1 g_2) \tag{付録 C.13}$$

として定義される．

$H^2(G;N)$ の自明な元に対応する拡大は自明な拡大といい，$\Gamma = N \rtimes G$ となる．

C.3 群コホモロジーとゲージ場

0-形式の可換な離散 G 対称性を考える．X 上の G ゲージ場は 2.2 節で述べたように $g \in H^1(X;G)$ によって表される．$e \in H^2(G;N)$ によってラベルされる G の N による拡大 (付録 C.5) が与えられたとき，$e(g) \in H^2(X;N)$ が次のようにして自然に定義できる．ただし，G の N への作用は自明とする．

まず，X の三角形分割を取り，$g \in H^1(X;G)$ が単体的複体の 1-コチェインとして表現されているとする．つまり，各 1-単体 (ij) に対して $g_{ij} \in G$ が割り当てられているとする．このとき $e(g)$ は各 2-単体 (ijk) に対して $e(g_{ij}, g_{jk}) \in N$ を割り当てる写像として定義される．このように定義した $e(g)$ は X 上の 2-コサイクルとなっていることが次のように確かめられる．3-単体 $(ijkl)$ に対して

$$(\delta e(g))(ijkl) = e(g_{jk}, g_{kl}) - e(g_{ik}, g_{kl}) + e(g_{ij}, g_{jl}) - e(g_{ij}, g_{jk}) = (\delta e)(g_{ij}, g_{jk}, g_{kl}) = 0 \qquad \text{(付録 C.14)}$$

となる．ただし，一つ目の δ は単体的複体のコホモロジーにおけるコバウンダリー写像であり，二つ目の δ は群コホモロジーにおけるコバウンダリー写像である．また，最後の等号では e が群コホモロジーに意味で 2-コサイクルであることを用いた．したがって，$g \in H^1(X;G)$ と $e \in H^2(G;N)$ から $e(g) \in H^2(X;N)$ が構成された[*98]．

C.4 具体例

C.4.1 $H^2(\mathbb{Z}_2;\mathbb{Z}_2)$

$$H^2(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2 \qquad \text{(付録 C.15)}$$

非自明なコホモロジーの代表元は

$$e(g,h) = gh \qquad \text{(付録 C.16)}$$

と書ける．ただし，$g, h \in \mathbb{Z}_2$ であり gh は群の演算ではなく積であることに注意する必要がある．つまり，$(g,h) = (1,1)$ のときのみ $e(g,h) = 1$ となりそれ以外は 0 を取る写像である．このコホモロジーに対応する群の拡大は

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\text{mod } 2} \mathbb{Z}_2 \to 0 \qquad \text{(付録 C.17)}$$

である．実際，左の $\mathbb{Z}_2$ の元を a，右の $\mathbb{Z}_2$ の元を b と書くと，

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = (a_1 + a_2 + e(b_1, b_2), b_1 + b_2) \qquad \text{(付録 C.18)}$$

となるため，$(a,b) = (0,1)$ が生成する $\mathbb{Z}_4$ となることが分かる．

このコホモロジーに関して前節で述べた $e(g)$ を考えると，B.4 で述べた Bockstein 写像 $\beta : H^1(X;\mathbb{Z}_2) \to H^2(X;\mathbb{Z}_2)$ となる．

[*98] $e(g)$ は次のように解釈することもできる．$H^2(G;N)$ は分類空間 BG を用いて $H^2(BG;N)$ とも書けるため，e は BG 上の 2-コサイクルとみなせる．また，$g \in H^1(X;G)$ は $g : X \to BG$ という写像ともみなせる．したがって g による e の引き戻し $g^*e \in H^2(X;N)$ が定義できるが，これがまさしく $e(g)$ のことである．[52]

C.4.2 $H^2(\mathbb{Z}_N;\mathbb{Z}_N)$

$$H^2(\mathbb{Z}_N;\mathbb{Z}_N)\simeq\mathbb{Z}_N \tag{付録 C.19}$$

このコホモロジーの生成元は

$$e(g,h)=\begin{cases}0 & (g+h<N)\\ 1 & (g+h\geq N)\end{cases} \tag{付録 C.20}$$

である．$N=2$ のときは前節のコサイクルと同じであることが分かる．このコホモロジーに対応する群の拡大は

$$0\to\mathbb{Z}_N\xrightarrow{\times N}\mathbb{Z}_{N^2}\xrightarrow{\text{mod }N}\mathbb{Z}_N\to 0 \tag{付録 C.21}$$

である．この群の拡大は N 進数で右の $\mathbb{Z}_N$ は 1 の位，左の $\mathbb{Z}_N$ は N の位に対応し，コサイクル e は繰り上がりを表していることが分かる．$N=2$ の場合と同様にコサイクル e によって Bockstein 写像 $\beta:H^1(X;\mathbb{Z}_N)\to H^2(X;\mathbb{Z}_N)$ が誘導される．

C.4.3 $H^2(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2;\mathbb{Z}_2)$

$$H^2(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2;\mathbb{Z}_2)\simeq\mathbb{Z}_2^3 \tag{付録 C.22}$$

分かりやすさのために，以下では 2-コサイクルの値域の $\mathbb{Z}_2$ を $\mathbb{Z}_2^{\mathrm{A}}$ とし，定義域の $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ を $\mathbb{Z}_2^{\mathrm{B}}\times\mathbb{Z}_2^{\mathrm{C}}$ と表すこととする．この $\mathbb{Z}_2^3$ の三つの生成元となるコホモロジーの代表元は

$$\begin{aligned}e_1((b_1,c_1),(b_2,c_2))&=b_1b_2\\ e_2((b_1,c_1),(b_2,c_2))&=c_1c_2\\ e_3((b_1,c_1),(b_2,c_2))&=b_1c_2\end{aligned} \tag{付録 C.23}$$

と表せる．これらで生成される八つの群の拡大は

$$\begin{array}{lcc}e=0 & \to & \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\\ e=e_1,\ e_2,\ e_1+e_2 & \to & \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4\\ e=e_3,\ e_1+e_3,\ e_2+e_3 & \to & D_8\\ e=e_1+e_2+e_3 & \to & Q_8\end{array} \tag{付録 C.24}$$

となる．ただし，D_8 は位数 8 の二面体群で，Q_8 は四元数群である．

$e=e_3$ の場合について詳しく見ていく．D_8 は $D_8=\langle r,s\mid r^4=s^2=1,\ srs=r^{-1}\rangle$ という表示を持つ．このコホモロジーの場合の群の演算は

$$(a_1,b_1,c_1)\times(a_2,b_2,c_2)=(a_1+a_2+b_1c_2,b_1+b_2,c_1+c_2) \tag{付録 C.25}$$

と表される．D_8 の生成元 r,s に対応する元の選び方は任意性があるが，例えば $r=(0,1,1),\ s=(0,0,1)$ とすればよいことが計算すれば分かる．このコホモロジーによって誘導される $H^1(X;\mathbb{Z}_2^{\mathrm{B}}\times\mathbb{Z}_2^{\mathrm{C}})\to H^2(X;\mathbb{Z}_2^{\mathrm{A}})$ は

$$e(b,c)=b\cup c \tag{付録 C.26}$$

となる．

$e = e_1 + e_2 + e_3$ の場合についても詳しく見ていく．Q_8 は $Q_8 = \langle i, j \mid i^2 = j^2 = ijij \rangle$ という表示を持つ．このコホモロジーの場合の群の演算は

$$(a_1, b_1, c_1) \times (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 + b_1 c_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2) \tag{付録 C.27}$$

と表される．Q_8 の生成元との対応は $i = (0, 0, 1),\ j = (0, 1, 0)$ とすればよい．このコホモロジーによって誘導される $H^1(X; \mathbb{Z}_2^{\mathrm{B}} \times \mathbb{Z}_2^{\mathrm{C}}) \to H^2(X; \mathbb{Z}_2^{\mathrm{A}})$ は

$$e(b, c) = \beta(b) + \beta(c) + b \cup c \tag{付録 C.28}$$

となる．

付録 D　圏論

D.1　基本事項

圏論の基本的事項について説明する．**圏の定義**：圏 $\mathcal{C}$ とはデータ

- 対象の集まり $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$.
- 各 $a, b \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ に対して射 $f : a \to b$ の集まり $\hom(a, b)$.
- 各 $a, b, c \in \mathrm{ob}(\mathcal{C}),\ f \in \hom(a, b),\ g \in \hom(b, c)$ に対して合成 $g \circ f \in \hom(a, c)$ が定まる．
- 各 $a \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ に対して恒等射 $1_a \in \hom(a, a)$

からなり，以下の公理を満たすもののことである．

- 結合法則：任意の $f \in \hom(a, b),\ g \in \hom(b, c),\ h \in \hom(c, d)$ に対し，

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \tag{付録 D.1}$$

  が成り立つ．
- 単位法則：任意の $f \in \hom(a, b)$ に対して $f \circ 1_a = f = 1_b \circ f$ が成り立つ．

$f : a \to b$ が同型射であるとは，$g : b \to a$ が存在して $g \circ f = 1_a,\ f \circ g = 1_b$ を満たすことである．このとき，a, b は同型であるといい，$a \sim b$ と書く．

関手の定義：$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を圏とする．関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ とはデータ

- $a \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ に対応する $F(a) \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})$
- $a, a' \in \mathrm{ob}(\mathcal{C}),\ f \in \hom(a, a')$ に対応する $F(f) \in \hom(F(a), F(a'))$

からなり，以下の公理を満たすものことである．

- $a, a', a'' \in \mathrm{ob}(\mathcal{C}),\ f \in \hom(a, a'),\ f' \in \hom(a', a'')$ に対して

$$F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f) \tag{付録 D.2}$$

  が成り立つ．
- $a \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ について $F(1_a) = 1_{F(a)}$ が成り立つ．

D.2　モジュラーテンソル圏と三次元 TQFT

三次元 TQFT はエニオンと呼ばれる線演算子のデータによって表される[*99]．エニオンの性質は数学的にはモジュラーテンソル圏 (MTC) と呼ばれるもので記述される．本節の内容は [63] を基にしている．

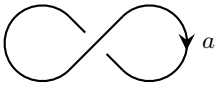
エニオンはトポロジカルなラインであるため，二次元の有限対称性と同様にフュージョン圏の構造を持つ．MTC はさらに R-行列と呼ばれるデータを持つ．R-行列は線形写像

$$R_c^{ab} : \hom(c, a \otimes b) \to \hom(c, b \otimes a) \tag{付録 D.3}$$

であり，図で表すと図 54 のように書ける．R-行列は F-symbol との整合性として六角形恒等式と呼ばれるものを満たす．この R-行列を用いるとエニオン a に対してトポロジカルスピンと呼ばれる量を定義することが

[*99] S^2 Hilbert 空間が一次元であること，言い換えると非自明なトポロジカル点演算子がないことを仮定している．

できる．

$$\theta(a) = \frac{1}{d_a}\sum_c d_c \,\mathrm{Tr}(R_c^{aa}) = \frac{1}{d_a}$$  (付録 D.4)

ただし，a の量子次元 $\dim a$ を d_a と略記している．トポロジカルスピンは $\theta(a) = \theta(a^*)$ を満たしかつ常に 1 の冪根になることが知られている．そのため $\theta(a) = e^{2\pi i s_a}$ と書く場合もある．

R-行列を二つ組み合わせることで

$$R_c^{ba} R_c^{ab} : \hom(c, a \otimes b) \to \hom(c, a \otimes b) \tag{付録 D.5}$$

が得られるが，実はこれは単位行列に比例し，その係数は

$$\frac{\theta(c)}{\theta(a)\theta(b)} \tag{付録 D.6}$$

となることが知られている．この表式において $c = a \otimes b$ としたものをブレイディングといい，$B(a, b)$ と書く．つまり，

$$B(a,b) = \frac{\theta(a \otimes b)}{\theta(a)\theta(b)} \tag{付録 D.7}$$

である (図 55).

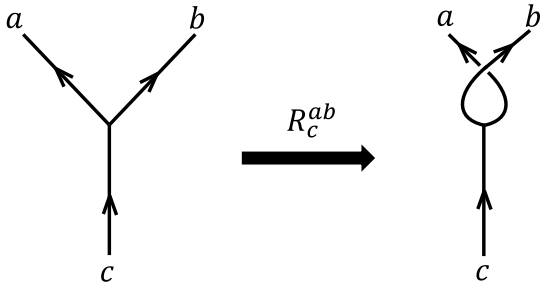


図 54: R-行列

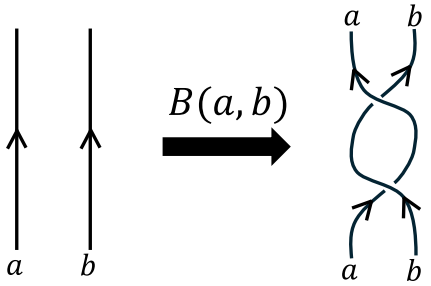


図 55: ブレイディング

参考文献

[1] D. Gaiotto, A. Kapustin, N. Seiberg, and B. Willett, "Generalized Global Symmetries," *JHEP* **02** (2015) 172, arXiv:1412.5148 [hep-th].

[2] L. Bhardwaj and Y. Tachikawa, "On finite symmetries and their gauging in two dimensions," *JHEP* **03** (2018) 189, arXiv:1704.02330 [hep-th].

[3] C. Cordova and K. Ohmori, "Quantum duality in electromagnetism and the fine structure constant," *Phys. Rev. D* **109** no. 10, (2024) 105019, arXiv:2307.12927 [hep-th].

[4] C. Cordova and K. Ohmori, "Noninvertible Chiral Symmetry and Exponential Hierarchies," *Phys. Rev. X* **13** no. 1, (2023) 011034, arXiv:2205.06243 [hep-th].

[5] Y. Choi, H. T. Lam, and S.-H. Shao, "Noninvertible Global Symmetries in the Standard Model," *Phys. Rev. Lett.* **129** no. 16, (2022) 161601, arXiv:2205.05086 [hep-th].

[6] A. Kapustin and N. Seiberg, "Coupling a QFT to a TQFT and Duality," *JHEP* **04** (2014) 001, arXiv:1401.0740 [hep-th].

[7] J. Kaidi, K. Ohmori, and Y. Zheng, "Kramers-Wannier-like Duality Defects in (3+1)D Gauge Theories," *Phys. Rev. Lett.* **128** no. 11, (2022) 111601, arXiv:2111.01141 [hep-th].

[8] Y. Choi, C. Cordova, P.-S. Hsin, H. T. Lam, and S.-H. Shao, "Noninvertible duality defects in 3+1 dimensions," *Phys. Rev. D* **105** no. 12, (2022) 125016, arXiv:2111.01139 [hep-th].

[9] G. 't Hooft, "Naturalness, chiral symmetry, and spontaneous chiral symmetry breaking," *NATO Sci. Ser. B* **59** (1980) 135–157.

[10] C. G. Callan, Jr. and J. A. Harvey, "Anomalies and Fermion Zero Modes on Strings and Domain Walls," *Nucl. Phys. B* **250** (1985) 427–436.

[11] X. Chen, Z.-C. Gu, Z.-X. Liu, and X.-G. Wen, "Symmetry protected topological orders and the group cohomology of their symmetry group," *Phys. Rev. B* **87** no. 15, (2013) 155114, arXiv:1106.4772 [cond-mat.str-el].

[12] W. Ji and X.-G. Wen, "Categorical symmetry and noninvertible anomaly in symmetry-breaking and topological phase transitions," *Phys. Rev. Res.* **2** no. 3, (2020) 033417, arXiv:1912.13492 [cond-mat.str-el].

[13] D. Gaiotto and J. Kulp, "Orbifold groupoids," *JHEP* **02** (2021) 132, arXiv:2008.05960 [hep-th].

[14] L. Kong, T. Lan, X.-G. Wen, Z.-H. Zhang, and H. Zheng, "Algebraic higher symmetry and categorical symmetry – a holographic and entanglement view of symmetry," *Phys. Rev. Res.* **2** no. 4, (2020) 043086, arXiv:2005.14178 [cond-mat.str-el].

[15] F. Apruzzi, F. Bonetti, I. García Etxebarria, S. S. Hosseini, and S. Schafer-Nameki, "Symmetry TFTs from String Theory," *Commun. Math. Phys.* **402** no. 1, (2023) 895–949, arXiv:2112.02092 [hep-th].

[16] D. S. Freed, G. W. Moore, and C. Teleman, "Topological symmetry in quantum field theory," arXiv:2209.07471 [hep-th].

[17] L. D. Landau, "On the theory of phase transitions," *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **7** (1937) 19–32.

[18] I. Affleck, T. Kennedy, E. H. Lieb, and H. Tasaki, "Rigorous Results on Valence Bond Ground States in Antiferromagnets," *Phys. Rev. Lett.* **59** (1987) 799.

[19] X. Chen, Z. C. Gu, and X. G. Wen, "Local unitary transformation, long-range quantum entanglement, wave function renormalization, and topological order," *Phys. Rev. B* **82** (2010) 155138, arXiv:1004.3835 [cond-mat.str-el].

[20] M. Nguyen, Y. Tanizaki, and M. Ünsal, "Study of gapped phases of 4d gauge theories using temporal gauging of the $\mathbb{Z}_N$ 1-form symmetry," *JHEP* **08** (2023) 013, arXiv:2306.02485 [hep-th].

[21] G. 't Hooft, "On the Phase Transition Towards Permanent Quark Confinement," *Nucl. Phys. B* **138** (1978) 1–25.

[22] G. 't Hooft, "A Property of Electric and Magnetic Flux in Nonabelian Gauge Theories," *Nucl. Phys. B* **153** (1979) 141–160.

[23] G. 't Hooft, "Topology of the Gauge Condition and New Confinement Phases in Nonabelian Gauge Theories," *Nucl. Phys. B* **190** (1981) 455–478.

[24] R. Thorngren and Y. Wang, "Fusion category symmetry. Part I. Anomaly in-flow and gapped phases," *JHEP* **04** (2024) 132, arXiv:1912.02817 [hep-th].

[25] D. Gaiotto, A. Kapustin, Z. Komargodski, and N. Seiberg, "Theta, Time Reversal, and Temperature," *JHEP* **05** (2017) 091, arXiv:1703.00501 [hep-th].

[26] Y. Kikuchi and Y. Tanizaki, "Global inconsistency, 't Hooft anomaly, and level crossing in quantum mechanics," *PTEP* **2017** no. 11, (2017) 113B05, arXiv:1708.01962 [hep-th].

[27] A. Antinucci and F. Benini, "Anomalies and gauging of U(1) symmetries," arXiv:2401.10165 [hep-th].

[28] T. D. Brennan and Z. Sun, "A SymTFT for continuous symmetries," *JHEP* **12** (2024) 100, arXiv:2401.06128 [hep-th].

[29] L. Bhardwaj, L. E. Bottini, L. Fraser-Taliente, L. Gladden, D. S. W. Gould, A. Platschorre, and H. Tillim, "Lectures on generalized symmetries," *Phys. Rept.* **1051** (2024) 1–87, arXiv:2307.07547 [hep-th].

[30] R. Luo, Q.-R. Wang, and Y.-N. Wang, "Lecture notes on generalized symmetries and applications," *Phys. Rept.* **1065** (2024) 1–43, arXiv:2307.09215 [hep-th].

[31] S.-H. Shao, "What's Done Cannot Be Undone: TASI Lectures on Non-Invertible Symmetries," arXiv:2308.00747 [hep-th].

[32] T. D. Brennan and S. Hong, "Introduction to Generalized Global Symmetries in QFT and Particle Physics," arXiv:2306.00912 [hep-ph].

[33] K. Ohmori, "Intensive lectures on generalized symmetries." at YITP, 2023.

[34] 本間泰史, **スピン幾何学 : スピノール場の数学**. 森北出版, 東京, 2016.

[35] B. Heidenreich, J. McNamara, M. Montero, M. Reece, T. Rudelius, and I. Valenzuela, "Non-invertible global symmetries and completeness of the spectrum," *JHEP* **09** (2021) 203, arXiv:2104.07036 [hep-th].

[36] S. Gukov and E. Witten, "Gauge Theory, Ramification, And The Geometric Langlands Program," arXiv:hep-th/0612073.

[37] S. Gukov and E. Witten, "Rigid Surface Operators," *Adv. Theor. Math. Phys.* **14** no. 1, (2010) 87–178, arXiv:0804.1561 [hep-th].

[38] P. Goddard, J. Nuyts, and D. I. Olive, "Gauge Theories and Magnetic Charge," *Nucl. Phys. B* **125** (1977) 1–28.

[39] S. Chen and Y. Tanizaki, "Solitonic symmetry as non-invertible symmetry: cohomology theories with TQFT coefficients," arXiv:2307.00939 [hep-th].

[40] S. D. Pace, "Emergent generalized symmetries in ordered phases and applications to quantum disordering," *SciPost Phys.* **17** no. 3, (2024) 080, arXiv:2308.05730 [cond-mat.str-el].

[41] S. Chen and Y. Tanizaki, "Solitonic Symmetry beyond Homotopy: Invertibility from Bordism and Noninvertibility from Topological Quantum Field Theory," *Phys. Rev. Lett.* **131** no. 1, (2023) 011602, arXiv:2210.13780 [hep-th].

[42] C. Córdova, D. S. Freed, H. T. Lam, and N. Seiberg, "Anomalies in the Space of Coupling Constants and Their Dynamical Applications I," *SciPost Phys.* **8** no. 1, (2020) 001, arXiv:1905.09315 [hep-th].

[43] C. Córdova, D. S. Freed, H. T. Lam, and N. Seiberg, "Anomalies in the Space of Coupling Constants and Their Dynamical Applications II," *SciPost Phys.* **8** no. 1, (2020) 002, arXiv:1905.13361 [hep-th].

[44] E. Witten, "Fermion Path Integrals And Topological Phases," *Rev. Mod. Phys.* **88** no. 3, (2016) 035001, arXiv:1508.04715 [cond-mat.mes-hall].

[45] C. Copetti, M. Del Zotto, K. Ohmori, and Y. Wang, "Higher Structure of Chiral Symmetry," arXiv:2305.18282 [hep-th].

[46] K. Inamura and K. Ohmori, "Fusion surface models: 2+1d lattice models from fusion 2-categories," *SciPost Phys.* **16** (2024) 143, arXiv:2305.05774 [cond-mat.str-el].

[47] R. Dijkgraaf and E. Witten, "Topological Gauge Theories and Group Cohomology," *Commun. Math. Phys.* **129** (1990) 393.

[48] E. Witten, "Dyons of Charge e theta/2 pi," *Phys. Lett. B* **86** (1979) 283–287.

[49] A. Kapustin and R. Thorngren, "Topological Field Theory on a Lattice, Discrete Theta-Angles and Confinement," *Adv. Theor. Math. Phys.* **18** no. 5, (2014) 1233–1247, arXiv:1308.2926 [hep-th].

[50] J. Kaidi, K. Ohmori, and Y. Zheng, "Symmetry TFTs for Non-invertible Defects," *Commun. Math. Phys.* **404** no. 2, (2023) 1021–1124, arXiv:2209.11062 [hep-th].

[51] O. Aharony, N. Seiberg, and Y. Tachikawa, "Reading between the lines of four-dimensional gauge theories," *JHEP* **08** (2013) 115, arXiv:1305.0318 [hep-th].

[52] Y. Tachikawa, "On gauging finite subgroups," *SciPost Phys.* **8** no. 1, (2020) 015, arXiv:1712.09542 [hep-th].

[53] H. A. Kramers and G. H. Wannier, "Statistics of the two-dimensional ferromagnet. Part 1.," *Phys. Rev.* **60** (1941) 252–262.

[54] E. P. Verlinde, "Fusion Rules and Modular Transformations in 2D Conformal Field Theory," *Nucl. Phys. B* **300** (1988) 360–376.

[55] C.-M. Chang, Y.-H. Lin, S.-H. Shao, Y. Wang, and X. Yin, "Topological Defect Lines and Renormalization Group Flows in Two Dimensions," *JHEP* **01** (2019) 026, arXiv:1802.04445

[hep-th].

[56] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych, and V. Ostrik, *Tensor Categories*, vol. 205 of *Mathematical Surveys and Monographs*. AMS, Providence, RI, 2015.

[57] Z. Komargodski, K. Ohmori, K. Roumpedakis, and S. Seifnashri, "Symmetries and strings of adjoint QCD_2," *JHEP* **03** (2021) 103, arXiv:2008.07567 [hep-th].

[58] D. Tambara and S. Yamagami, "Tensor Categories with Fusion Rules of Self-Duality for Finite Abelian Groups," *J. Algebra* **209** no. 2, (1998) 692–707.

[59] Y. Nagoya and S. Shimamori, "Non-invertible duality defect and non-commutative fusion algebra," *JHEP* **12** (2023) 062, arXiv:2309.05294 [hep-th].

[60] K. Roumpedakis, S. Seifnashri, and S.-H. Shao, "Higher Gauging and Non-invertible Condensation Defects," *Commun. Math. Phys.* **401** no. 3, (2023) 3043–3107, arXiv:2204.02407 [hep-th].

[61] R. Thorngren and Y. Wang, "Fusion category symmetry. Part II. Categoriosities at c = 1 and beyond," *JHEP* **07** (2024) 051, arXiv:2106.12577 [hep-th].

[62] V. G. Turaev and O. Y. Viro, "State sum invariants of 3 manifolds and quantum 6j symbols," *Topology* **31** (1992) 865–902.

[63] J. Kaidi, Z. Komargodski, K. Ohmori, S. Seifnashri, and S.-H. Shao, "Higher central charges and topological boundaries in 2+1-dimensional TQFTs," *SciPost Phys.* **13** no. 3, (2022) 067, arXiv:2107.13091 [hep-th].

[64] Z. Duan, Q. Jia, and S. Lee, "$\mathbb{Z}_N$ duality and parafermions revisited," *JHEP* **11** (2023) 206, arXiv:2309.01913 [hep-th].

[65] R. Argurio, A. Collinucci, G. Galati, O. Hulik, and E. Paznokas, "Non-Invertible T-duality at Any Radius via Non-Compact SymTFT," arXiv:2409.11822 [hep-th].

[66] K. Osterwalder and R. Schrader, "AXIOMS FOR EUCLIDEAN GREEN'S FUNCTIONS," *Commun. Math. Phys.* **31** (1973) 83–112.

[67] L. Bhardwaj, L. E. Bottini, D. Pajer, and S. Schäfer-Nameki, "Gapped Phases with Non-Invertible Symmetries: (1+1)d," arXiv:2310.03784 [hep-th].

[68] 日高義将, "高次対称性入門.". (非公開).

[69] A. Hatcher, *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[70] K. Brown, *Cohomology of Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012. https://books.google.co.jp/books?id=2fzlBwAAQBAJ.