

YITP-W-10-08

熱場の量子論とその応用

(2010年12月21日受理)

【日時】 2010年08月30日～2010年09月01日**【場所】** 京都大学 基礎物理学研究所 湯川記念館 Panasonic 国際交流ホール

【内容】 The aim of this workshop is to discuss the latest developments of thermal quantum field theories and their applications in a variety of fields in physics: not only particle physics, nuclear physics, and cosmology, but also in newly developing fields of quantum statistical physics, and condensed matter physics. Particle physics, nuclear physics, and cosmology have been the main target fields of this workshop. For example, recent progress of thermal QCD calculations (including Lattice QCD) and their applications for QCD phase transitions, and the quark gluon plasma states have been intensively discussed. The phase structure in finite temperature and density QCD (including color superconducting states and quark stars) is one of the recent topics and a lot of discussions have been done for them. In statistical and condensed-matter physics, the Bose-Einstein condensation and superfluid phase transition in atomic gases have been discussed: these topics are closely related with thermal field theories and expected to give new developments in thermal field theories.

【世話人】

浅川 正之	(所属：大阪大学)
阿部 純義	(所属：三重大学)
飯田 圭	(所属：高知大学)
稲垣 知宏	(所属：広島大学)
江尻 信司	(所属：新潟大学)
大西 明	(所属：京都大学 基礎物理学研究所)
奥村 雅彦	(所属：理化学研究所)
阪上 雅昭	(所属：京都大学)
橘 基	(所属：佐賀大学)
野中 千穂	(所属：名古屋大学)
峰 真如	(所属：早大本庄学院)
室谷 心	(所属：松本大学)

基研究研究会「熱場の量子論とその応用」

日程: 2010年8月30日(月)~9月1日(水)

場所: 京都大学 基礎物理学研究所 湯川記念館 Panasonic 国際交流ホール

8月30日(月)

10:00-10:05 世話人代表より

【有限温度格子 QCD】 座長: (江尻 信司 (新潟大))

10:05-11:05 Carleton DeTar (University of Utah)

Finite-temperature Lattice QCD: Recent Results

【QCD 相転移・QGP】

11:05-11:20 梅田 貴士 (広島大学) ◆

ウィルソンクォークによる $N_f = 2 + 1$ QCD の状態方程式の研究

11:20-11:35 斎藤 卓也 (高知大学) ◆

センターボートックス描像による QGP 物理の理解

11:35-13:00 昼食

【スペクトル関数】 座長: (野中 千穂 (名古屋大))

13:00-13:15 北沢 正清 (大阪大学) ◆

非閉じ込め相におけるクォーク自己エネルギーの格子 QCD による解析

13:15-13:30 飯田 英明 (理化学研究所) ◆

2 フレーバーウィルソンフェルミオンを用いた格子 QCD による有限温度・密度でのメソン遮蔽質量の研究

13:30-13:45 大野 浩史 (筑波大学) ◆

格子 QCD における対角化の方法を用いたチャーモニウムスペクトル関数の研究

13:45-14:05 休憩

【QGP・輸送係数】 座長: (室谷 心 (松本大))

14:05-14:20 前沢 祐 (理化学研究所) ◆

格子ゲージシミュレーションによる因果的散逸流体力学における輸送係数の計算

【閉じ込め・非閉じ込め相転移】

14:20-14:35 中川 義之 (新潟大学) ◆

クーロンゲージ格子 QCD における QGP 相での Gribov-Zwanziger シナリオ

14:35-14:50 柴田 章博 (KEK) ◆

閉じ込め・非閉じ込め相転移における磁氣的モノポールの役割

【グラフェン】

14:50-15:05 荒木 康史 (東京大学) ◆

強結合 U(1) ゲージ理論に基づくグラフェンのカイラル対称性と電子物性

15:05-15:20 休憩

- 【学生講演】 座長：(浅川 正之 (大阪大))
 15:20-16:20 3分講演：講演順は最後に記述
 16:20-18:30 学生ポスターセッション (ラウンジとホール)
 19:00-21:00 懇親会 (ほくとにて)

8月31日(火)

【相関】 座長：(大西 明 (基研))

- 9:00-9:15 横田 浩 (奈良大学) ◆
 Dyson-Schwinger approach to structure of thermal quasiparticle and phase transition
- 9:15-9:30 米山 博志 (佐賀大学) ◆
 有限密度 QCD の臨界点近傍の特異性
- 9:30-9:45 河野 宏明 (佐賀大学) ◆
 P N J L 模型における C と P の破れ
- 9:45-10:00 日高 義将 (京都大学) ◆
 Quarkyonic Chiral Spirals

10:00-10:20 休憩

【カイラル・凝縮】 座長：(飯田 圭 (高知大))

- 10:20-10:35 佐藤 雅尚 (新潟大学) ◆
 ウィルソン繰り込み群におけるカイラルアノマリーについて
- 10:35-10:50 宮下 和洋 (愛知淑徳大学) ◆
 非摂動くりこみ群による SU(N) ゲージ理論におけるカイラル凝縮の解析
- 10:50-11:05 星野 裕一 (釧路高専) ◆
 フェルミオンのスカラー、スピン密度凝縮に対する Chern-Simon 項の効果

11:05-11:20 小休憩

【鉄系超伝導体】 座長：(飯田 圭 (高知大))

- 11:20-12:20 青木秀夫 (東京大学)
 鉄系超伝導体

12:20-13:30 昼食

【非平衡系・量子化】 座長：(峰 真如 (早大本庄学院))

- 13:30-13:45 内海 裕洋 (三重大学) ◆
 Keldysh 形式による量子輸送における揺らぎの定理
- 13:45-14:00 中村 祐介 (早稲田大学) ◆
 Critical comparison of closed time path formalism and Thermo Field Dynamics in nonequilibrium situation
- 14:00-14:15 水谷 友一 (広島大学) ◆
 熱的 Schwinger-Dyson 方程式から得られる Boltzmann-like 方程式の解析
- 14:15-14:30 小林 恵太 (早稲田大学) ◆
 Nelson's Stochastic Quantization in Thermo Field Dynamics Phase Structure
- 14:30-14:45 西山 陽大 (京都大学) ◆
 Entropy Production of Quantum Fields with Kadanoff-Baym equation

14:45-15:05	休憩
【フェルミ粒子系の熱力学】座長：(峰 真如 (早大本庄学院))	
15:05-16:05	向山 敬 (電通大先端セ) 強く相互作用するフェルミ粒子系の熱力学
16:05-16:10	小休憩
16:10-18:30	ポスター発表 (◆印の講演) (Y306, ラウンジ)
9月1日(水)	
【AdS/CFT・ゲージ理論・宇宙】座長：(阪上 雅昭 (京大))	
9:00-10:00	森成 隆夫 (京都大学) 冷却原子系におけるボーズアインシュタイン凝縮とホーキング輻射
10:00-10:20	中村 真 (京都大学) ◆ 励起子絶縁体の負性微分抵抗と AdS/CFT 対応
10:20-10:40	幡中 久樹 (大阪府立大学) ◆ Randall-Sundrum 時空における有限温度でのゲージ・ヒッグス統合
10:40-11:00	岩崎 愛一 (二松学舎大学) ◆ インフレーションがもたらす小さな宇宙項の力学モデル
11:00-11:20	休憩
【超統計】座長：(飯田 圭 (高知大))	
11:20-12:20	阿部 純義 (三重大学) 超統計入門
12:20-13:30	昼食
【冷却原子】座長：(飯田 圭 (高知大))	
13:30-14:30	森永 実 (電通大学) 冷却原子と相関計測
14:30-14:50	休憩
【凝縮体】座長：(奥村 雅彦 (理研))	
14:50-15:10	内野 瞬 (東京大学) ◆ スピノール BEC における相構造及び低エネルギー励起
15:10-15:30	峰 真如 (早大本庄学院) ◆ 多成分中性原子ボーズ凝縮系におけるゼロモードを含めた解析
15:30-15:50	大久保 茂男 (高知女子大学) ◆ 原子核における α 粒子のボーズアインシュタイン凝縮
15:50-16:10	柴藤 亮介 (首都大学) ◆ 等核フェッシュバッハ分子による多成分ボーズ凝縮体の相分離
16:10-16:20	世話人代表より (表彰など)

学生プレゼンテーション

【固有値問題】

1. 早田 智也 (東京大学)
「くりこみ群様方程式を用いた非摂動的固有値問題の解析」

【冷却原子】

2. 片岡 啓介 (名古屋工業大学)
「冷却原子による $1/N$ 展開の検証 - CP^{N-1} モデルについて」
3. * 渡邊 亮太 (慶応大学)
「超流動 Fermi 原子気体の 1 粒子状態と photoemission スペクトル」
- 4.* 柏村 孝 (慶応大学)
「フェルミ原子ガス超流動における超流動/強磁性/超流動接合と π -phase の実現可能性」
5. 松田 裕一 (立命館大学)
「双極フェルミ分子を含む極低温原子気体の相構造」
6. 猪谷 太輔 (慶応大学)
「 p 波相互作用するフェルミ気体における強結合効果と擬ギャップ構造」

【相構造】

7. 佐藤 大輔 (金沢大学)
「非摂動くりこみ群を用いた量子色力学におけるカイラル相転移現象の解析」
8. 斎藤 華 (筑波大学)
「重いクォークに対する非閉じ込め相転移の次数」
9. 中野 嵩士 (京都大学)
「強結合格子 QCD における Polyakov loop 効果」

【符号問題・有限密度】

10. 境 祐二 (九州大学)
「Average phase factor in the PNJL model」
11. 佐々木 崇宏 (九州大学)
「有限バリオン、有限アイソスピン化学ポテンシャルにおける QCD 相図」
12. * 佐野 崇 (東京大学)
「ランダム行列モデルによる有限密度 QCD 相構造」
13. 山岡 哲朗 (名古屋大学)
「一般化された隠れた局所対称性に基づく有限密度 2-color QCD におけるベクトルボソン質量の解析」
14. 濱 祐介 (東京大学)
「有限密度におけるアンダーソン・ヒッグス機構」
15. 広野 雄士 (東京大学)
「カラー超伝導における非可換渦と環境とのトポロジカルな相互作用」

【スペクトル関数・輸送係数・流体・QGP ダイナミクス】

16. 佐藤 大輔 (京都大学)

「Analysis of fermionic soft mode with resummed perturbation theory」

17. 南 佑樹 (京都大学)

「非線形ランジュバン方程式による QCD 臨界点付近のダイナミクス」

18. 門内 晶彦 (東京大学)

「Relativistic Dissipative Hydrodynamics with Conserved Currents and Onsager Reciprocal Relations」

* **ポスター賞**

渡邊 亮太 (慶応大学)

柏村 孝 (慶応大学)

佐野 崇 (東京大学)

QCD Thermodynamics on the Lattice: Recent Results

Carleton DeTar

*Department of Physics and Astronomy, University of Utah, Salt Lake City, Utah 84112, USA **

I give a brief introduction to the goals, challenges, and technical difficulties of lattice QCD thermodynamics and present some recent results from the HotQCD collaboration for the crossover temperature, equation of state, and other observables.

I. INTRODUCTION

Numerical simulations and models have established that the high-temperature behavior of QCD at low baryon number density is governed by two interrelated phenomena, namely the transition from a low temperature, confined regime to a high temperature deconfined regime and the transition from a low temperature regime with spontaneously broken chiral symmetry to a high temperature regime in which the chiral symmetry is restored. The deconfinement phenomenon is especially apparent at very large quark masses where the first order phase transition of pure SU(3) Yang-Mills theory becomes manifest. The chiral restoration phenomenon, on the other hand, is most relevant in the limit of vanishing quark masses. Between these extremes only a nonperturbative calculation can say what happens. The present consensus in lattice QCD is that there is no phase transition — only a crossover — at physical quark masses and zero baryon number density [1, 2].

Figure 1 (left) summarizes in qualitative terms our knowledge of the QCD phase diagram as a function of the light (up, down, and strange) quark masses $m_u = m_d$ and m_s . Lattice calculations aim to check this picture. One important question is whether, when we fix the strange quark mass at

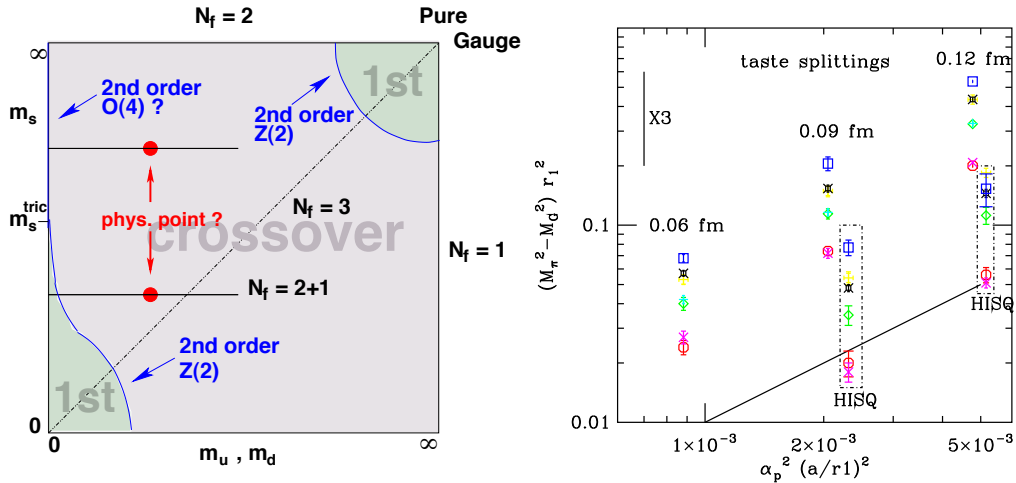


FIG. 1: Left: Sketch of phase diagram at zero baryon density as a function of light quark masses $m_u = m_d$ and m_s . Right: Splitting of the pion taste multiplet showing the expected decrease with lattice spacing. The unboxed points are for the asqtad action and the much lower boxed points are for the HISQ action.

* Temporary address: Center for Computational Sciences, Tsukuba University, Tsukuba, Japan

its physical value and reduce the up and down quark masses, we encounter the first-order transition region. Present indications are that we do not.

What can we learn about QCD thermodynamics from numerical lattice simulations? Here is a list of objectives. More could be added.

- Obtaining accurate values of the crossover temperature T_p .
- Determining the equation of state, velocity of sound, etc.
- Studying critical universality at low light quark masses.
- Calculating transport properties of the plasma.
- Establishing the extent of validity of the hadron resonance gas model at low T .
- Determining the behavior of in-medium hadronic modes (e.g. J/ψ), especially above T_p ?
- Searching for an experimentally accessible critical point at nonzero baryon number density.

For all of these topics a nonperturbative treatment is necessary. Numerical simulation on the lattice gives a first-principles, nonperturbative treatment. We know of no alternative. It does not answer all of our questions, however. Here is a list of limitations:

- We can treat only static thermodynamic equilibrium or small perturbations around it.
- We work in euclidean time: Real time properties are difficult to extract. Transport properties can be computed, in principle, but it is not easy.
- Calculations at nonzero quark number density are very difficult.

Phenomenological models can help extrapolate from lattice results to regimes that are inaccessible to lattice calculations.

II. LATTICE METHODOLOGY

For an introduction to lattice methods for QCD thermodynamics, please see [3] and references therein. Here we mention only a few key concepts.

A. Feynman path integral

We work with quantum grand-canonical partition function

$$Z = \text{Tr} \left[\exp \left(-H/T + \sum_i \mu_i N_i/T \right) \right], \quad (1)$$

for temperature T , QCD hamiltonian H , chemical potential μ_i , and conserved charge N_i . It is rewritten, using the Feynman path integral approach, as the functional integral

$$Z = \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp[-S(A, \psi, \bar{\psi}, \mu)] \quad (2)$$

where A_μ , ψ , $\bar{\psi}$ represent the gluon and quark fields and S is the classical action in a Eudclidean space-time (imaginary time). The continuous space-time is discretized as a lattice of points of spacing a , and the classical action is formulated on that lattice. The parameters of the action are, as usual, the gauge coupling and the quark masses. Introducing the lattice puts the functional integration in a form that is more amenable to numerical simulation, and it provides the ultraviolet regulation needed to define QCD.

B. Varying the temperature

The imaginary time coordinate has a finite extent determined by the temperature. So if there are N_τ points in the time direction, at lattice spacing a , the temperature is given by $T = 1/(aN_\tau)$. There are two methods in current use for varying the temperature.

1. Fixed N_τ method. Through the renormalization group, the lattice spacing a depends on the bare gauge coupling g , so as g decreases, a decreases, and T increases. Low T then implies larger lattice spacing and larger cutoff effects! With this method we scan a temperature range at one fixed N_τ and then repeat at larger N_τ to move closer to the continuum.
2. Fixed scale method. [4, 5] With this method we fix the gauge coupling and lattice spacing and vary N_τ . Cutoff effects are then uniform in T .

C. Setting the bare quark masses

Quark masses can also be varied to explore the phase diagram. It is useful to work along “lines of constant physics”; *i.e.* we tune the bare quark masses so as to keep (zero-temperature) meson masses fixed in physical units as T (so a) is varied. Typically we set the strange quark mass m_s to its physical value, but it is expensive to calculate with a physical up and down quark mass $m_u \approx m_d = m_\ell$, so we fix the ratio m_ℓ/m_s , repeat the calculation for a range of ratios, and then extrapolate to the physical point.

D. Determining the lattice scale

To get T in MeV we need to know a in physical units. This value is determined in a zero temperature calculation at the same hamiltonian parameters. It requires matching one dimensionful lattice result with one experimental result. Two common methods are in use:

1. f_K scale. One measures the meson decay constant in lattice units af_K at zero temperature. From the experimental value of f_K , we then know a .

2. r_1 or r_0 method. This method is based on a measurement of the static quark-antiquark potential, a relatively easy process. The constant r_1 is defined as the value of R where $R^2 dV(R)/dR = 1$. The Sommer scale r_0 is similarly defined [6]. Of course, these values are not measured in experiment. So their values are determined in terms of an experimentally observable quantity, such as the splitting of the Υ spectrum, with the result $r_1 \approx 0.31$ fm and $r_0 \approx 0.47$ fm [7].

All scale definitions must agree at zero lattice spacing and physical quark masses, but we expect some disagreement at nonzero spacing and unphysical masses. With current methods we can get better than $\sim 2\%$ accuracy in T .

E. Lattice fermion doubling problem

Putting fermions on the lattice is nontrivial. Discretization of the Dirac action introduces complications. As a result there are several lattice fermion formulations, each with its advantages and disadvantages. With a naive discretization in three space and one time dimension we get 2^4 quark species of the same mass. This is called the fermion “doubling” problem. The remedial strategy varies with the fermion implementation.

Wilson introduced a dimension-five term in the action to lift the degeneracy. All unwanted fermions then get masses of order $1/a$. This procedure breaks chiral symmetry explicitly, which adds to the complexity of studies at finite temperature.

The domain wall and overlap implementations usually start from Wilson’s action and build from it an action with a form of chiral symmetry. It is rigorous, elegant, but computationally expensive.

The staggered fermion implementation diagonalizes the fermion matrix partially to reduce the degeneracy from 16 to 4. In modern language, these are called “tastes”. (Then each flavor comes in four tastes.) Finally, one takes the fourth root of the fermion determinant to get an approximately correct counting of sea quark flavors. This is a controversial step, but recent work has placed it on firmer theoretical ground. (See a discussion and references in [7].)

The lattice regulates ultraviolet divergences by introducing a momentum cutoff of order $1/a$. As the spacing is reduced, we remove the cutoff. Depending on how the lattice action is formulated, at nonzero lattice spacing, results can be distorted by the cutoff. The goal of improving the formulation is to reduce these effects at a given a . This is done by adding irrelevant higher-dimensional terms to the action [8]. The original staggered fermion action is “unimproved”: good to $\mathcal{O}(a^2)$. Improved formulations in current wide use are called “p4” [9, 10], “asqtad” (for references, see [7]), “stout” [11, 12], and “HISQ” [13].

In the continuum limit the tastes are described by an exact, extraneous $SU(4)$ symmetry, and the fourth root is trivial. At nonzero lattice spacing, this symmetry is broken, which leads to a distortion of the hadron spectrum, as shown below. As we will see, recent calculational results suggest that taste symmetry breaking is the source of a large share of the cutoff effects in traditional staggered fermion thermodynamics. Currently, the HISQ action has the most improved taste symmetry, followed closely behind by stout, and then asqtad, and p4. Aside from taste splitting,

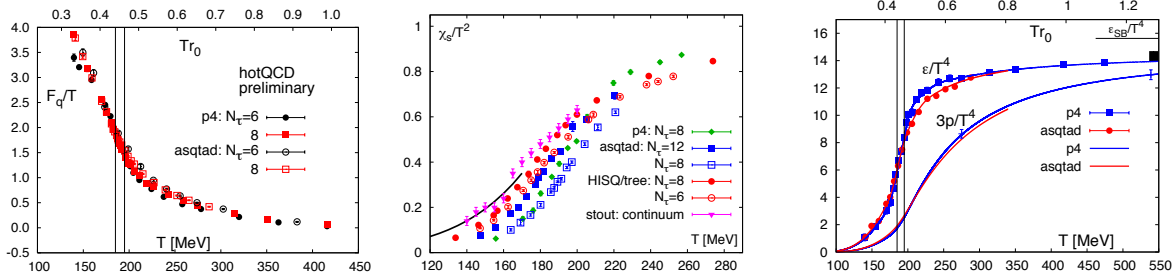


FIG. 2: Three deconfinement markers as a function of temperature (MeV). Left: static quark free energy [3]. Middle: strange quark number susceptibility [14]. Right: energy density and pressure in units of temperature [22]. The Stefan-Boltzmann free-gas limit is indicated on the right. The crossover is evident in all of them.

other cutoff effects are expected. The p4, asqtad, and HISQ actions are all improved with leading errors at $\mathcal{O}(a^2\alpha_s)$, and the stout action is less improved with leading errors at $\mathcal{O}(a^2)$.

The effects of taste-symmetry breaking are most evident in the pion spectrum. Four tastes of quarks and four of antiquarks yield a multiplet of sixteen pion tastes for each physical pion. The resulting multiplet structure is shown in Fig. 1 [14]. The figure shows that the splitting decreases approximately as $a^2\alpha_s^2$. The considerable improvement of HISQ over asqtad is also apparent.

III. RESULTS

I will review some recent results mostly from the HotQCD collaboration [24] including some very new ones based on the HISQ action $N_\tau = 6, 8$ and asqtad $N_\tau = 12$.

A. Indicators of deconfinement

A variety of observables are good phenomenological indicators of deconfinement. We discuss two of them, namely the Polyakov loop or “static quark self energy” and the strange quark number susceptibility. A third, the equation of state, is discussed later below.

The traditional deconfinement indicator is the “Polyakov loop” L . It is related to the static quark free energy F_q , *i.e.* the difference of the free energy of the thermal ensemble with and without a static quark:

$$L = \left\langle \text{Tr} P \exp\left(ig \int_0^{1/T} d\tau A_0(\tau)\right) \right\rangle \sim \exp[-F_q(T)/T] \quad (3)$$

Even when light quarks are present in the ensemble, adding a static quark at low temperature requires screening by a light quark, increasing the free energy by an amount equal, roughly, to a constituent quark mass. In the deconfined phase the constituent quark mass is very low. This effect is visible in the left panel of Fig. 2. There is no direct linkage between this quantity and the chiral order parameter, so this observable is not a good indicator of the chiral transition.

The strange quark number susceptibility measures fluctuations in strangeness $\chi_s = \langle S^2 \rangle / (VT)$. Such fluctuations are expected to be large in the deconfined phase where strangeness is carried by

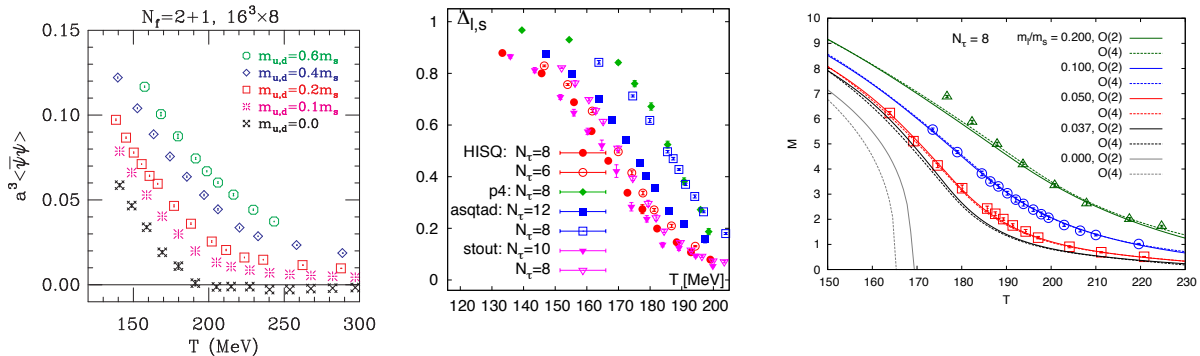


FIG. 3: Left: Chiral condensate for a variety of quark mass ratios m_ℓ/m_s [20]. Also shown is the extrapolation to zero quark mass where a singularity is expected to appear. Middle: The subtracted chiral condensate (see text) from various fermion formulations, showing a lowering of the transition temperature with decreased taste splitting [17]. Right: Chiral condensate for the asqtad action fit to the O(2) and O(4) critical scaling functions (see text) [17].

the quark degrees of freedom, and small in the confined phase where it is carried by hadrons containing a strange quark. This behavior is apparent in the right panel of Fig. 2. Although this quantity is expected to have a singularity at the chiral critical point, an analysis of critical behavior suggests that the singularity is too mild to make this observable a good indicator of the chiral transition.

B. Indicators of chiral symmetry restoration

The chiral condensate and its associated susceptibility are obvious markers of chiral symmetry restoration. The light quark chiral condensate $\bar{\psi}\psi$ is, in fact, the order parameter for chiral symmetry at zero up and down quark masses.

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = (T/V) \partial \log Z / \partial m. \quad (4)$$

It is nonzero when chiral symmetry is spontaneously broken and zero when it is restored. We expect restoration at high T . When all sea quark masses are nonzero, chiral symmetry is not exact, so we don't get zero, exactly. The example in Fig. 3 (left) confirms the expected behavior.

The chiral condensate is subject to both additive (divergent at nonzero quark mass) and multiplicative renormalization. To compare results for different actions, it is necessary to remove these factors. A convenient choice is the “subtracted” condensate (middle panel of Fig. 3):

$$\Delta_{\ell,s} = [(\bar{\psi}\psi)_\ell(T) - m_\ell/m_s \langle \bar{\psi}\psi \rangle_s(T)] / [(\bar{\psi}\psi)_\ell(T=0) - m_\ell/m_s \langle \bar{\psi}\psi \rangle_s(T=0)] \quad (5)$$

C. Taste symmetry and the transition temperature

In Fig. 2 and Fig. 3 we see that the various actions give strikingly different. The discrepancies correlate with the degree of taste symmetry of the action. As taste symmetry is improved, the

curves shift to lower temperature. This is achieved by decreasing the lattice spacing, *i.e.*, increasing N_τ and by improving the action. For the latter property, in order of gradually improved taste symmetry, the actions are p4, asqtad, stout, and HISQ.

D. Scaling of chiral order parameter (Magnetic equation of state)

At zero quark mass we expect universal $O(4)$ critical behavior at the chiral-symmetry-restoring phase transition. It is $O(2)$ at nonzero lattice spacing for staggered fermion actions. Define

$$t = (T - T_c)/T_c \quad \text{and} \quad h = (m_\pi/m_K)^2 \approx m_\ell/m_s \quad (6)$$

For small h and t we have

$$M(t, h) \equiv m_s/T^4 \langle \bar{\psi}\psi(t, h) \rangle \rightarrow t^\beta f(z) + \text{regular} \quad (7)$$

where $z = z_0 t/h^{1/(\beta\delta)}$ and $f(z)$ is the universal scaling function for $O(2)$ or $O(4)$. This analysis is tested in Fig. 3 (right). It follows the analysis for the p4 action described in [16]. A similar analysis for Wilson fermions long ago found surprisingly good scaling [15]. Such a scaling analysis gives a framework for extrapolating results to the physical quark mass.

E. Chiral susceptibility

The chiral susceptibility measures fluctuations in the chiral condensate. For light quarks it is

$$\chi_\ell = \frac{T}{V} \frac{\partial^2}{\partial m_\ell^2} \log Z = \chi_{\ell, \text{disc}} + 2\chi_{\ell, \text{conn}}. \quad (8)$$

The “disconnected” and “connected” labels refer to the topology of quark world lines in the conventional computation. The disconnected term peaks at the crossover, as shown in Fig. 4. The peak height diverges in the chiral limit. Thus it is an excellent marker for the crossover. Consistent with the behavior of chiral condensate, the peak shifts to lower temperature as the lattice spacing is decreased (increasing N_τ).

F. Transition temperature at the physical point

Locating the peaks of the chiral susceptibility at other quark masses and lattice spacings allows us to carry out an extrapolation to the physical light quark mass (approximately $m_s/27$) and zero lattice spacing. The temperature at the peak is plotted in Fig. 4 (right) together with curves based on the ansatz

$$T_p = T_c(0) + a(m_\ell/m_s)^{1/(\beta\delta)} + b/N_\tau^2 \quad (9)$$

The light quark mass dependence is motivated by the expected universal $O(4)$ critical behavior ($1/(\beta\delta) = 0.54$) and the lattice spacing ($1/N_\tau$) dependence is based on the expected $O(a^2)$ cutoff dependence of the action.

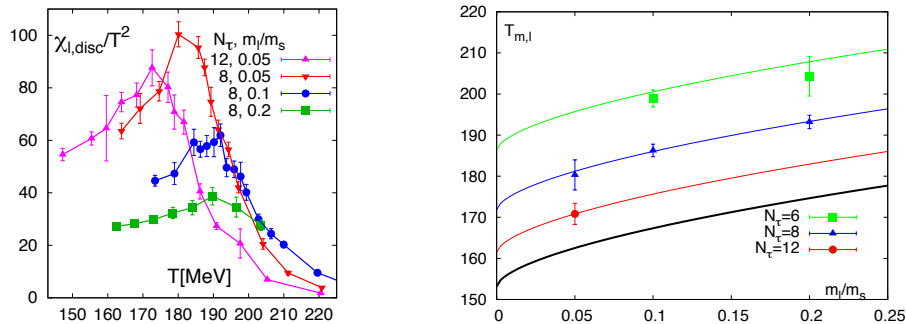


FIG. 4: Left: Disconnected light quark chiral susceptibility for the asqtad action showing a peak at the crossover temperature [18]. The peak shifts to lower temperatures with increasing N_τ (decreasing lattice spacing). Right: The crossover temperature as a function of the light quark mass ratio and N_τ [18]. The curves show the fit to Eq. (9).

At the physical point $m_\ell/m_s = 1/27$ and zero lattice spacing we obtain a preliminary value of the crossover temperature at the physical point: $T_p(\text{phys}) \approx 164(6)$ MeV [18]. The Budapest-Wuppertal result for a closely related observable is $147(2)(3)$ MeV [19]

In the past couple of years there has been a lively discussion about the transition temperature. In 2004 the MILC collaboration, using the improved asqtad action, carried out a similar extrapolation from $N_\tau = 4, 6,$ and 8 to the physical point with lower statistics than in the present study and reported $169(12)(4)$ MeV [20]. In 2006 Cheng *et al.*, using the p4 action, reported $192(7)(4)$ MeV at the physical point based on simulations at $N_\tau = 4$ and 6 [21]. The HotQCD collaboration published a study of the equation of state in 2009, based on both the asqtad and p4 actions, but, because there were not enough data to do so at the time, quite deliberately did not quote a result for the transition temperature at the physical point [22]. At the same time the Budapest-Wuppertal collaboration reported on its study using the stout action, with several values depending on the observable, including $147(2)(3)$ MeV from their renormalized disconnected susceptibility and $165(5)(3)$ from the strange quark number susceptibility [19].

What we have learned first from these studies is that the transition temperature is more sensitive to taste-breaking effects in the staggered action than some had expected. But the story is not finished. The HotQCD collaboration has undertaken a more comprehensive analysis of $O(N)$ universality with its current data. This study may lead to a more refined determination of the crossover temperature. It also provides a means of deciding which observables are better markers of critical behavior.

G. Equation of state (trace anomaly)

The equation of state, *i.e.*, the energy density ϵ , pressure p , and entropy density s as a function of temperature is an important quantity in the hydrodynamics of heavy ion collisions and in the characterization of the early universe. The now standard lattice QCD construction of the equation of state begins with a calculation of the “trace anomaly” or “interaction measure”, $I = \epsilon - 3p$. It

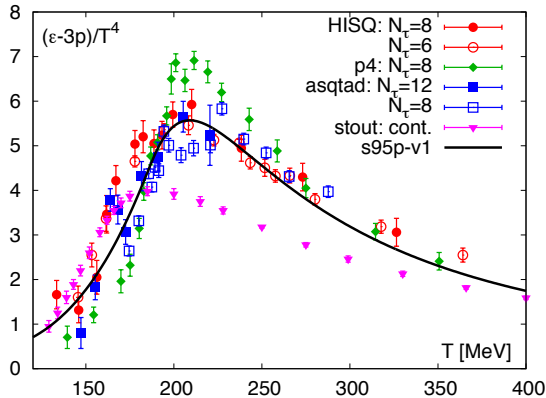


FIG. 5: Interaction measure in units of temperature *vs.* temperature for the asqtad, p4, HISQ, and stout actions at a variety of values of N_τ [17]. The curve is a convenient parameterization. It agrees with the hadron resonance gas model at low temperature.

is plotted in Fig. 5 for a variety of actions. At low temperature the measured points lie below the prediction of the hadron resonance gas model (based on physical hadron masses). Such an effect is an expected consequence of the splitting of the pion taste multiplet, which tends to increase the rms mass of the pion, and therefore increase the transition temperature. At high temperature where cutoff effects are much reduced, the three actions (p4, asqtad, and HISQ) agree. However, a recent Budapest-Wuppertal result for the stout action shows a significant deviation [23]. The results are compared in Fig. 5. The stout action points include a rather large “tree-level” correction for cutoff effects. Since the p4, asqtad, and HISQ actions are improved at $\mathcal{O}(a^2)$, they have better scaling properties at high temperature, as shown, and no such correction was applied. In any case the correction vanishes for all actions in the continuum limit.

The pressure p and energy density ϵ are obtained from the interaction measure I as follows:

$$p = \frac{T}{V} \int_{T_0}^T dT' \frac{1}{T'^3} I(T') \quad \epsilon = I + 3p \quad (10)$$

Results are shown on the right in Fig. 2 for the asqtad and p4 actions.

IV. CONCLUSIONS

Lattice QCD is providing a wealth of information about high temperature QCD, particularly about the nature of the transition from low to high temperature and the behavior of several quantities of phenomenological importance, including the equation of state and the quark number susceptibility. Other quantities I did not have space to discuss are the speed of sound, the equation of state at nonzero baryon density, transport properties, and the survival of hadronic modes in the medium.

The staggered fermion formulation is most widely used for thermodynamic studies. We have learned that taste-symmetry breaking makes a large contribution to cutoff effects in that formulation making it highly desirable to use actions such as HISQ and stout that have better taste

symmetry.

More is yet to be learned about the critical scaling of various quantities near the chiral phase transition, and further study is needed to settle substantial disagreements in the interaction measure at moderate temperature.

-
- [1] R. Hwa and X.N. Wang, ed., *Quark Gluon Plasma 4*, (World Scientific, Singapore, 2010).
 - [2] K. Yagi, T. Hatsuda, and Y. Miake, “Quark Gluon Plasma: From big bang to little bang” (Cambridge University Press, Cambridge, 2008).
 - [3] C. DeTar and U. M. Heller, *Eur. Phys. J. A* **41**, 405 (2009) [arXiv:0905.2949 [hep-lat]].
 - [4] L. Levkova, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **119**, 520 (2003) [arXiv:hep-lat/0209069].
 - [5] T. Umeda, S. Ejiri, S. Aoki, T. Hatsuda, K. Kanaya, Y. Maezawa and H. Ohno, *Phys. Rev. D* **79**, 051501 (2009) [arXiv:0809.2842 [hep-lat]].
 - [6] R. Sommer, *Nucl. Phys. B* **411**, 839 (1994) [arXiv:hep-lat/9310022].
 - [7] A. Bazavov *et al.*, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1349 (2010) [arXiv:0903.3598 [hep-lat]].
 - [8] K. Symanzik, *Nucl. Phys. B* **226**, 205 (1983).
 - [9] U. M. Heller, F. Karsch and B. Sturmfels, *Phys. Rev. D* **60**, 114502 (1999) [arXiv:hep-lat/9901010].
 - [10] F. Karsch, E. Laermann and A. Peikert, *Phys. Lett. B* **478**, 447 (2000) [arXiv:hep-lat/0002003].
 - [11] C. Morningstar and M. J. Peardon, *Phys. Rev. D* **69** (2004) 054501 [arXiv:hep-lat/0311018].
 - [12] Y. Aoki, Z. Fodor, S. D. Katz and K. K. Szabo, *JHEP* **0601**, 089 (2006) [arXiv:hep-lat/0510084].
 - [13] E. Follana *et al.* [HPQCD Collaboration and UKQCD Collaboration], *Phys. Rev. D* **75**, 054502 (2007) [arXiv:hep-lat/0610092].
 - [14] A. Bazavov *et al.* [MILC collaboration], *Phys. Rev. D* **82**, 074501 (2010) [arXiv:1004.0342 [hep-lat]].
 - [15] Y. Iwasaki, K. Kanaya, S. Kaya and T. Yoshie, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 179 (1997) [arXiv:hep-lat/9609022].
 - [16] S. Ejiri *et al.*, *Phys. Rev. D* **80**, 094505 (2009) [arXiv:0909.5122 [hep-lat]].
 - [17] A. Bazavov and P. Petreczky [HotQCD collaboration], (PoS LAT2010, to be published, 2010).
 - [18] W. Söldner [HotQCD collaboration], (PoS LAT2010, to be published, 2010).
 - [19] S. Borsanyi, Z. Fodor, C. Hoelbling, S. D. Katz, S. Krieg, C. Ratti and K. K. Szabo [Wuppertal-Budapest Collaboration], *JHEP* **1009**, 073 (2010) [arXiv:1005.3508 [hep-lat]].
 - [20] C. Bernard *et al.* [MILC Collaboration], *Phys. Rev. D* **71**, 034504 (2005) [arXiv:hep-lat/0405029].
 - [21] M. Cheng *et al.*, *Phys. Rev. D* **74**, 054507 (2006) [arXiv:hep-lat/0608013].
 - [22] A. Bazavov *et al.*, *Phys. Rev. D* **80**, 014504 (2009) [arXiv:0903.4379 [hep-lat]].
 - [23] S. Borsanyi *et al.*, arXiv:1007.2580 [hep-lat].
 - [24] A. Bazavov, T. Bhattacharya, M. Cheng, N.H. Christ, C. DeTar, S. Gottlieb, R. Gupta, U.M. Heller, C. Jung, F. Karsch, E. Laermann, L. Levkova, C. Miao, R.D. Mawhinney, S. Mukherjee, P. Petreczky, D. Renfrew, C. Schmidt, R.A. Soltz, W. Soeldner, R. Sugar, D. Toussaint, W. Unger and P. Vranas.

Equation of State in 2+1 flavor QCD with improved Wilson quarks

梅田貴士 for WHOT-QCD Collaboration
 広島大学大学院教育学研究科

Abstract:

$N_f = 2+1$ QCD の状態方程式を固定格子間隔アプローチによって計算した結果を報告する。固定格子間隔アプローチを採用することによって、状態方程式のゼロ温度部分の計算として、CP-PACS/JLQCD によるハドロンスペクトルの結果を流用することが可能になった。それによって格子作用として岩崎ゲージ作用と非摂動論的改良されたウィルソンフェルミオン作用を用いた、格子間隔が $a \sim 3\text{GeV}$ という細かい格子による格子化誤差を抑えた状態方程式の計算を行った。

1 Introduction

QCD の有限温度相転移は現実世界の宇宙が経験した最後の相転移であり、その相転移の性質は初期宇宙の進化を探る上でも重要な手がかりとなる。この相転移で現れる新しい物質状態はクォーク・グルーオン・プラズマ (QGP) と呼ばれ、重イオン衝突実験により生成が可能である。重イオン衝突実験によって生じる QGP 状態の理論的な解釈は、流体モデルなどを用いて行われているが、モデルの初期条件として必要な基礎物理量はどうしても QCD の第一原理計算から求める必要がある。これら有限温度・密度 QCD の臨界現象に関係するような物理量の研究を非摂動論的、定量的に行える方法は現在の所、格子 QCD による数値シミュレーションだけである。我々のプロジェクトでは、格子 QCD による状態方程式の計算を、これまでにない信頼性で行うことを目的としている。

このような計算を、現実的な計算資源の元で行うために、我々のグループでは新しい固定格子間隔アプローチによる QCD 熱力学量の計算を提唱している [1]。このアプローチを用いることによって、有限温度格子 QCD の研究において、計算コストの大部分を占めるゼロ温度での計算を大幅に省略することが可能になる。さらに、このアプローチで必要になるゼロ温度計算は既に他のグループによって計算された結果とゲージ配位を用いる事が可能になる。この固定格子間隔アプローチの利点によって計算コストを大幅に減らすことができ、従来の方法では困難だったウィルソンクォークを用いた有限温度・密度 QCD の計算が可能になる。さらに、大規模なハドロンスペクトル計算のパラメータを採用する事によって従来の計算より遙かに格子誤差を抑える事が出来る。この報告では CP-PACS/JLQCD によるハドロンスペクトル計算 [2] で採用されたパラメータによる状態方程式計算プロジェクトの報告を行う。より詳細な報告は Ref.[3] を参照

この研究で採用する格子作用は繰り込み改良したゲージ作用と非摂動改良したウィルソンクォーク作用である。

$$S_g = -\beta \left\{ \sum_{x,\mu>\nu} c_0 W_{\mu\nu}^{1\times 1}(x) + \sum_{x,\mu,\nu} c_1 W_{\mu\nu}^{1\times 2}(x) \right\}, \quad (1)$$

$$S_q = \sum_{f=u,d,s} \sum_{x,y} \bar{q}_x^f D_{x,y} q_y^f, \quad (2)$$

$$D_{x,y} = \delta_{x,y} - \kappa_f \sum_{\mu} \{ (1 - \gamma_{\mu}) U_{x,\mu} \delta_{x+\hat{\mu},y} + (1 + \gamma_{\mu}) U_{x-\hat{\mu},\mu}^{\dagger} \delta_{x-\hat{\mu},y} \} \\ - \delta_{x,y} c_{SW} \kappa_f \sum_{\mu>\nu} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (3)$$

ここで c_{SW} は β に依存して非摂動的に決定されたパラメータである [4]。

Ref.[2] の中でもっとも格子が細かく、クォーク質量が小さいパラメータ $\beta = 2.05$, $\kappa_{ud} = 0.1356$, $\kappa_s = 0.1351$ を採用した。ゼロ温度のゲージ配位は JLDG により公開されている。有限温度のゲージ配位は $32^3 \times N_t$ の格子サイズで生成した。 N_t は時間方向の格子サイズで、 $N_t = 4, 6, \dots, 16$ で生成した配位の温度は図 1 の様になる。

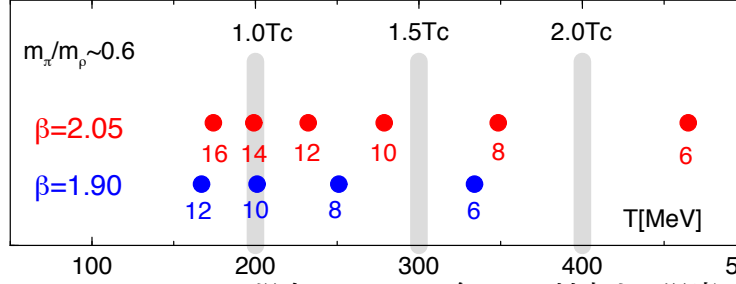


図 1: $\beta = 2.05, 1.90$ の場合について、各 N_t に対応する温度の関係。

状態方程式計算の基本となるトレースアノマリー $(\epsilon - 3p)/T^4$ は以下のように計算される。

$$\frac{\epsilon - 3p}{T^4} = \frac{N_t^3}{N_s^3} \left(a \frac{\partial \beta}{\partial a} \left\langle \frac{\partial S}{\partial \beta} \right\rangle_{sub} + a \frac{\partial \kappa_{ud}}{\partial a} \left\langle \frac{\partial S}{\partial \kappa_{ud}} \right\rangle_{sub} + a \frac{\partial \kappa_s}{\partial a} \left\langle \frac{\partial S}{\partial \kappa_s} \right\rangle_{sub} \right) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial S}{\partial \beta} \right\rangle &= N_s^3 N_t \left(- \left\langle \sum_{x, \mu > \nu} c_0 W_{\mu\nu}^{1 \times 1}(x) + \sum_{x, \mu, \nu} c_1 W_{\mu\nu}^{1 \times 2}(x) \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + N_f \frac{\partial c_{SW}}{\partial \beta} \kappa_f \left\langle \sum_{x, \mu > \nu} \text{Tr}^{(c,s)} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}(D^{-1})_{x,x} \right\rangle \right) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial S}{\partial \kappa_f} \right\rangle &= N_f N_s^3 N_t \left(\left\langle \sum_{x, \mu} \text{Tr}^{(c,s)} \{ (1 - \gamma_\mu) U_{x, \mu}(D^{-1})_{x+\hat{\mu}, x} + (1 + \gamma_\mu) U_{x-\hat{\mu}, \mu}^\dagger(D^{-1})_{x-\hat{\mu}, x} \} \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + c_{SW} \left\langle \sum_{x, \mu > \nu} \text{Tr}^{(c,s)} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}(D^{-1})_{x,x} \right\rangle \right) \end{aligned} \quad (6)$$

ここで $\langle \dots \rangle_{sub}$ は $T = 0$ での値との差であることを意味する。式 (5) と (6) におけるクォーク部分の計算では複素 $U(1)$ ノイズ法 [5] を用いた。

図 2 左のグラフはトレースアノマリーの結果である。式 4 の β 微分と κ 微分の部分と合計した値が描かれている。それぞれ線はスプライン補間によって描かれている。トレースアノマリーのピークの高さは約 7 程度で、スタッガード型クォークを用いた最新の結果 [6, 7] と同程度の値になっている。

このトレースアノマリーの値を用いて温度積分法 [1]

$$\frac{p}{T^4} = \int_{T_0}^T dT \frac{\epsilon - 3p}{T^5} \quad (7)$$

を実行することによって圧力を計算することができる。さらにトレースアノマリーと圧力の組み合わせからエネルギー密度が計算できる。これらの状態方程式の結果を図 2 右のグラフに示す。

図 2 の結果にあるように、温度の低い領域で統計誤差が大きくなっている。これは式 (6) のトレースアノマリーの値が N_t^3 に比例するため、非常に大きな統計が要求される為である。温度積分法では、低温領域の誤差が全温度領域まで伝搬するために、得られた状態方程式の統計誤差も

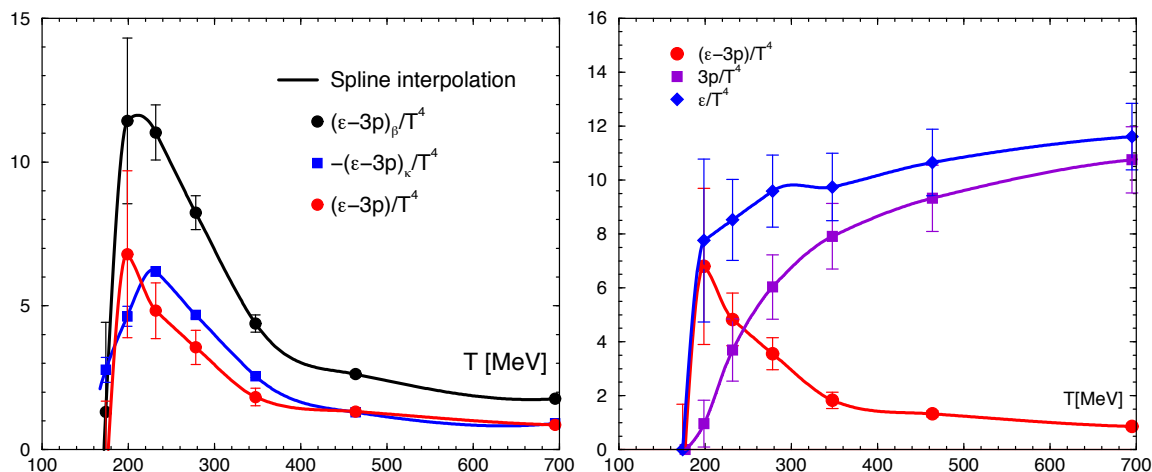


図 2: (左図) トレースアノマリーの結果。それぞれのシンボルは β 微分と κ 微分の部分と合計を表す。曲線はスプライン補間で描かれている。(右図) トレースアノマリーと状態方程式の結果。エネルギー密度 ϵ/T^4 と圧力 $3p/T^4$ の結果についてスプライン補間と共に描かれている。

大きくなってしまふ。この問題を回避するために、CP-PACS/JLQCD のハドロンスペクトル計算での $\beta = 1.90$ のパラメータを採用した計算を計画している。この時の温度は図 1 に図示されている。PACS-CS グループによる物理クォーク質量での計算 [8] がすでにこの β の値で行われている為に、最終目標である物理クォーク質量での状態方程式へむけたテスト計算としても重要である。

この計算は主に高エネルギー加速器研究機構における平成 22 年度大型シミュレーション研究 (大型-10-09)、大阪大学核物理研究センターの SX-9 によって行われた。また、本研究の一部は科研費 (Nos.22740168, 21340049, 22840020, 20340047, 20105001, 20105003) の助成を受けている。

参考文献

- [1] T. Umeda, S. Ejiri, S. Aoki, T. Hatsuda, K. Kanaya, Y. Maezawa and H. Ohno, Phys. Rev. D **79**, 051501 (2009).
- [2] T. Ishikawa *et al.* [JLQCD Collaboration], Phys. Rev. D **78**, 011502 (2008).
- [3] T. Umeda, S. Aoki, K. Kanaya, H. Ohno, S. Ejiri, T. Hatsuda and Y. Maezawa [WHOT-QCD Collaboration], arXiv:1011.2548 [hep-lat].
- [4] S. Aoki *et al.* [CP-PACS Collaboration and JLQCD Collaboration], Phys. Rev. D **73**, 034501 (2006).
- [5] S. Ejiri *et al.* [WHOT-QCD Collaboration], Phys. Rev. D **82**, 014508 (2010).
- [6] S. Borsanyi *et al.*, arXiv:1007.2580 [hep-lat].
- [7] A. Bazavov and P. Petreczky [HotQCD collaboration], J. Phys. Conf. Ser. **230**, 012014 (2010).
- [8] S. Aoki *et al.* [PACS-CS Collaboration], Phys. Rev. D **81**, 074503 (2010).

センターボーテックス描像による QGP 物理の理解

齋藤卓也^a, M. N. Chernodub^{b,c}, 中村純^d, V. I. Zakharov^{c,e}

^a 高知大学総合情報センター,

^bLaboratoire de Mathematiques et Physique Theorique,

^cInstitute of Theoretical and Experimental Physics ITEP,

^d 広島大学情報メディア教育研究センター,

^eMax-Planck Institut für Physik

1 はじめに

重イオン衝突実験により新しい物質形態であるクォークグルーオンプラズマ (QGP) が生成された。この新物質は従来まで予想されていた弱く相互作用する QGP ではなく強相関する QGP (sQGP) であることが示唆されているが [1]、どのようなメカニズムで sQGP が構成されるのかという根源的な疑問についてはまだ答えが出されていない。

この疑問に対して、「磁場的自由度」の特異性に重きを置いて強く相互作用する QGP を理解しようという試みがある。これは、相転移温度以上においても空間方向に閉じ込め状態があり [3]、磁場遮蔽質量は熱 QCD 理論の赤外カットオフとして非摂動論的起源を持つという事実に基づく。また、クーロンゲージの閉じ込めシナリオによるとカラー瞬間力は QGP 相においても閉じ込めポテンシャルを生み、その線形弦張力の温度依存性は磁場質量のそれと一致する。これらの現象はすべて磁場グルーオンと密接な関係をもつと考えられ、非摂動論的な取り扱いが必要となる [2]。

これらの現象を実際に取り扱うために、最近では、モノポールやセンターボーテックスといった QCD 理論が持つトポロジーを考慮し QGP を再構成するやり方がとられている [4, 6, 5]。これらは、ゼロ温度における閉じ込め問題を議論するための有力な概念であり、どれも「磁場的」かつ「非摂動論的」でもあ

る。実際の格子計算により、閉じ込めやカイラルの破れといった QCD 特有の非線形現象と関係することが示されている。文献 [4, 6, 5] において、このようなトポロジカル量をベースに QGP の記述が試みられている。しかし、そのようなトポロジーと QCD の基本要素であるグルーオンとの関係性は、そもそも明らかなことではなく、両者の関係性を議論することは先決である。ここでは、センターボーテックスがどのようにグルーオン伝搬関数に影響を与えるのかを $SU(2)$ 格子計算により研究する。またさらにボーテックスが輸送係数に与える影響も調査する。

2 センターボーテックス

本研究で考えるセンターボーテックスとは、QCD 理論において存在するトポロジー量である。これは、閉じ込めやカイラル対称性の破れなどに代表される QCD における様々な非摂動論的物理と深く関係している。もともとは、t'Hooft、Mack、Cornwall 等により 1970 年代に議論され、1998 年には、Debbio et. al 等 [7] により、実際に数値計算により格子上にボーテックスが存在することが示された。さらなる数値研究により、ボーテックスを格子から削除すると [8]、ストリングテンションがゼロになり、QCD が非閉じ込め理論になるということも示された。また、同様にカイラル対称性が回復することも示され

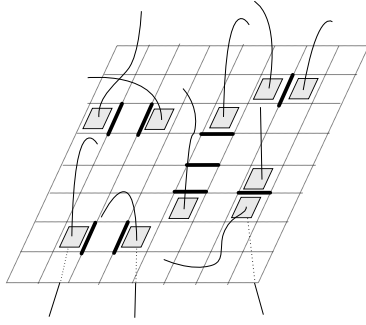


図 1: 黒の実線がマイナス符号を持つリンク変数を、そして灰色の四角が付随する非自明なプラケットを示しボーテックスが在ると解釈される。これは、格子上のランダムボーテックス描像を与える。

ている。

ここでのボーテックスは $SU(N)$ 理論におけるセンター群 $Z(N)$ で定義される $(\pi_1(SU(N)/Z(N)) \sim Z(N))$ 。 $SU(2)$ の格子計算においては、次の関数の最大値を求めることによりボーテックスを定義する。

$$R = \frac{1}{VT} \sum_{x,t} \text{Tr} [U_\mu(x)]^2 \quad (1)$$

またセンター場として、

$$Z_\mu(x) = \text{sgnTr} U_\mu(x) \quad (2)$$

を定義する。すべてのリンク変数は ± 1 の符号を持つことになり、非自明なマイナスの符号を持つプラケットが表れる。これをセンターボーテックスと焼き直すことが可能である (図 1)。また、新しいリンク変数を

$$U'_\mu(x) = Z_\mu(x) U_\mu(x) \quad (3)$$

とすることにより、逆に格子からセンターボーテックスを削除することができる。実際に新しいゲージ配位である $U'_\mu(x)$ は非閉じ込め理論となっており、ストリングテンションは消滅する。ボーテックス自由度を「削除する・しない」により非摂動的物理のオン・オフが可能となる。以上の手順は、論文 [7, 8] で開発されたものであり、センターボーテックス研究を大きく進展させる契機となっている。さらには、

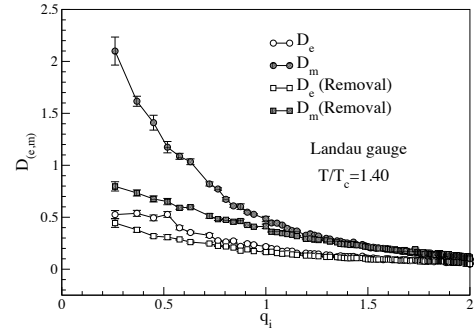


図 2: 電場グルーオンと磁場グルーオンの数値結果: ボーテックスを削除すると小運動量 (赤外領域) における磁場グルーオンが大きく変化する。一方で電場グルーオンの変化は小さい。磁場グルーオンは非摂動的に取り扱う必要のあることを示している。

「モノポール描像」、「グリボフ・ツバンツィガーシナリオ」、「九後・小嶋カラー閉じ込め条件」といった代表的閉じ込め理論の総合的議論にも重要であると考えられている。

3 数値結果

本研究では、 $SU(2)$ ゲージ理論のクエンチ近似シミュレーションを行う。モンテカルロ計算により十分に平衡に達したゲージ配位からボーテックス自由度を引き出す。そして、ボーテックス自由度を削除する。このようにして得られた 2 種類のゲージ配位を利用して目的となる物理量 (グルーオン伝搬関数、輸送係数など) を計算し比較研究を行うことができる。

運動量空間でのグルーオン伝搬関数の数値結果を示したものが図 2 である。温度は $T/T_c \sim 1.40$ である。ボーテックスの自由度を生かした場合と削除した場合とがプロットされている。大きい運動量領域においては、電場グルーオンと磁場グルーオンは変化は共に見られない。しかし、小さな運動量領域においては、特に磁場グルーオン伝搬関数に大きな変化が見られるが、一方で電場グルーオンの変化は小さい。QGP 相においても磁場グルーオンが非摂動的に大変重要な量であることが確認できる。また、こ

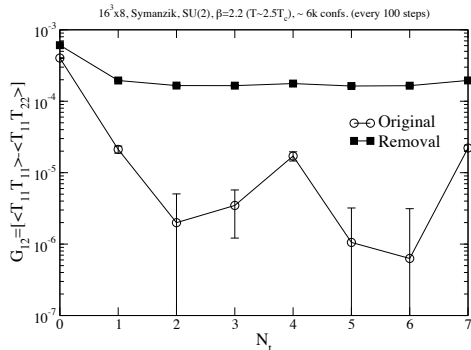


図 3: 粘性係数に関係した温度グリーン関数のテスト計算の結果。データは粗く完全な議論はできないが、ボーテックスを削除すると相関関数に大きな変化が起こることが確かめられた。

の数値結果は、センターボーテックスといったトポロジー量が QGP においても重要であることを示している。

図 3 においては、粘性係数に関係した格子上で計算される相関関数の様子をプロットしてある。データは粗く、最終的な結論を現段階で引き出すことはできてはいないが、ボーテックスを削除した後数値結果は大きな変化を受けることは見て取れる。強く相互作用する QGP の特徴的な結果である小さな粘性係数にボーテックスで表される磁場自由度の特異性が、影響を与えるということを示している。実際にどの程度粘性に影響を与えるのかを定量的に判断するためには、さらに統計が必要であり、今後の課題である。

4 まとめ

本研究では、QCD の非摂動的な物理を記述するセンターボーテックスメカニズムを通して、磁場グルーオンの赤外領域での特徴を研究した。磁場自由度は強く相互作用する QGP を理解する上で重要であることが示された。また、現在輸送係数や状態方程式（ここでは紹介していないが）への影響も現

在調査中である。

参考文献

- [1] Strongly Coupled Quark-Gluon Plasma: The Status Report, E. Shuryak, hep-ph/0608177
- [2] Lattice calculation of gluon screening masses, A. Nakamura, T. Saito, S. Sakai, Phys.Rev. D69 (2004) 014506
- [3] The Spatial String Tension in the Deconfined Phase of the (3+1)-Dimensional SU(2) Gauge Theory, G.S.Bali, J.Fingberg, U.M.Heller, F.Karsch, K.Schilling, Phys. Rev. Lett. 71,3059-3062,1993
- [4] Magnetic component of Yang-Mills plasma, M.N. Chernodub, V.I. Zakharov, Phys. Rev. Lett. 98,082002,2007
- [5] Manifestations of magnetic vortices in equation of state of Yang-Mills plasma, M.N. Chernodub, Atsushi Nakamura, V.I. Zakharov, Phys.Rev.D78,074021,2008
- [6] Magnetic Component of Quark-Gluon Plasma is also a Liquid!, J. Liao and E. Shuryak, Phys.Rev.Lett.101,162302,2008; Magnetic Component of Quark-Gluon Plasma, J. Liao, E. Shuryak, J. Phys. G35,104058,2008
- [7] Detection of Center Vortices in the Lattice Yang-Mills Vacuum, L. Del Debbio, M. Faber, J. Giedt, J. Greensite, S. Olejnik, Phys.Rev.D58,094501,1998
- [8] On the relevance of center vortices to QCD, Ph. de Forcrand, M. D'Elia, Phys. Rev. Lett. 82 (1999) 4582

非閉じ込め相におけるクォーク自己エネルギーの格子 QCD による解析

大阪大学大学院理学研究科 北沢正清

1 序

有限温度系に対する格子 QCD シミュレーションは今や、重イオン衝突実験と双璧をなす「数値」実験装置として、有限温度 QCD の情報を我々に提供する手段としての重要な役割を担っている。有限温度格子 QCD は松原形式の統計力学を経路積分で書き直して計算機に載せたものであり、この形式で解析可能な物理量は大ざっぱに静的および動的な量の二つに分類される。前者、すなわち静的な量については、統計力学の基本公式 $\langle O \rangle = \text{Tr}[O\rho]$ に基づいて任意の演算子 O の期待値を求めるとというのが解析の基本原理である。ただし ρ は密度行列。静的な量の解析において、有限温度格子 QCD は状態方程式など広範な物理対象に適用され多くの成功を収めている。

その一方で、動的な量、すなわちある統計集団の上にかきた何らかの揺動の時間発展に関する情報を格子 QCD シミュレーションで解析しようとする、途端に問題が難しくなる。動的な情報は有限温度実時間伝搬関数に含まれているのだが、松原形式で直接計算できるのは虚時間伝搬関数 $\tilde{G}(\tau) \equiv \langle O_1(\tau)O_2(0) \rangle$ に限られるためである。このため、解析の手続きとしては虚時間関数のフーリエ変換 $\tilde{G}(i\omega_n)$ と遅延伝搬関数 $G^R(\omega)$ の間の解析性を頼りに後者の振る舞いを推測することになる。しかし、格子 QCD で得られる離散的かつ統計誤差付きの $\tilde{G}(\tau)$ に関する情報は、この解析接続を遂行するためには原理的に不十分である。解析接続を仮定抜きで遂行するためのアルゴリズムとして最大エントロピー法 (MEM) が提案されており、実際この手法は有限温度におけるチャーモニウムの定性的な性質を論じる際に重要な成功を収めている [1]。しかし、MEM で得られるスペクトルは与えられた先見的情報と格子解析のデータから推測される最も確からしいイメージに過ぎず、その定量的なレベルでの妥当性に関しては慎重な議論が必要である。この解析接続の問題は、有限温度格子 QCD で解析される動的な量の信頼性の根本を担う部分であり、この問題を改善していくことは極めて重要な課題である。

有限温度系の動的な性質を調べる研究においては、伝搬関数の中でもその虚部であるスペクトル関数に注目した解析がよく行われる。これは、スペクトル関数が場の励起に関する情報を直接的に表現しているためである。実際、スペクトルに鋭いピークが存在する場合それは系の準粒子的な励起に相当し、ピークの位置と幅はそれぞれ質量および崩壊幅に対応する。また、多くの物性系ではスペクトル関数に直結した物理量を観測する実験を行うことができるので、実験に対する予言をする上でもスペクトル関数の解析は有用である。その一方で、あるスペクトル関数がなぜ実現するのか、たとえば媒質効果によって準粒子質量が変化した場合に、なぜそのような変化が起こったのかという物理を理解しようとする際には、スペクトル関数はさほど有用ではない。また、典型的な格子上の相関関数に MEM を適用してスペクトル関数を解析した場合、準粒子ピークの存在等の定性的振る舞いについてはかなり確からしい結果が得られるものの、崩壊幅をこの手法により定量的に見積もることは現在のところ極めて難しい。本来スペクトル関数は伝搬関数と同じ量の情報を持っており、原理的には動的励起に関する全ての情報がこの関数から抜き出せるはずなのだが、格子シミュレーションにおけるスペクトルの解析はこのように不定性を持っているため、ここで挙げたような疑問と向き合うためにはスペクトル関数と相補的に他の物理量を解析することが望ましい。そのような解析は、ひいては解析接続に伴う不定性を軽減することにも役立つであろう。

2 逆伝搬関数と自己エネルギー

本研究では以上のような問題意識に基づき、通常行われるスペクトル関数の解析と並行して伝搬関数の逆を解析することを提案する。議論を平易に進めるために、ここでは基本的な場を考えると、その遅延伝搬関数 $S^R(\omega)$ の逆は Schwinger-Dyson 方程式

$$[S^R(\omega)]^{-1} = [S_0^R(\omega)]^{-1} - \Sigma^R(\omega), \quad (1)$$

なる構造を持つ。ただしここで $S_0^R(\omega)$ は自由伝搬関数、 $\Sigma^R(\omega)$ は遅延自己エネルギーである。この関数、特にその虚部を直接的に解析し、スペクトル関数の解析と併用しようというのが本研究のアイデアである。ここで、 $[S_0^R(\omega)]^{-1}$ が実であることから $\text{Im}[S^R(\omega)]^{-1} = -\text{Im}\Sigma^R(\omega)$ であり、基本的な場に対する逆伝搬関数の虚部の解析は、すなわち自己エネルギーの虚部の解析に相当することに注意する。

自己エネルギーの虚部の大きさは、光学定理によりミクロなプロセスが起きる頻度と解釈することができ、ミクロな立場からの意味付けが与えやすい。また、摂動論的な解析により伝搬関数を計算する場合、まず自己エネルギーを解析したのち、それを式 (1) に代入することで伝搬関数を求める。この際、自己エネルギーの実部と虚部は Kramers-Kronig 関係式で結び付いているため、自己エネルギーの虚部のみをはじめに計算してしまうことがしばしば行われる。自己エネルギーの虚部が得られた後には Kramers-Kronig 関係式で実部を導出し、更に式 (1) で伝搬関数を構成するのだが、このような計算を何度か実際に行った経験があると自己エネルギーの虚部の構造をみただけでスペクトル関数の定性的な振る舞いが推測できるようになる。これらの意味で、自己エネルギー、特にその虚部は理論的な立場からするとスペクトル関数より基本的な量といえ、この量を格子計算から直接的に推測することは動的な物理を理解する助けとなるであろう。

有限温度格子 QCD で動的な量を調べる際によく解析されるのはスペクトル関数 $\rho(\omega) = (1/\pi)\text{Im}S^R(\omega)$ である。この関数は、 $S^R(\omega)$ が複素上半平面で解析的であることを用いると、格子上で計算される虚時間関数 $\tilde{S}(\tau)$ と

$$\tilde{S}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega K(\tau, \omega) \rho(\omega) \quad (2)$$

なる関係を持つことが示される。ただしここで積分核 $K(\tau, \omega) = e^{(1/2-\tau T)\omega/T} / (e^{\omega/2T} \pm e^{-\omega/2T})$ であり、複号はフェルミオンとボソンに対応する。 $S^R(\omega)$ の解析性は遅延関数の因果性により保証される。式 (2) によれば、スペクトル $\rho(\omega)$ は $\tilde{S}(\tau)$ を逆ラプラス変換することによって得られる。従ってこの解析では、解析接続の問題は逆ラプラス変換をいかに確からしく行うかという問題に置き換わる。

虚時間関数と実時間関数を結び付ける関係式は式 (2) だけなのだろうか。実は、逆伝搬関数に関しても全く同様な関係式

$$[\tilde{S}]^{-1}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega K(\tau, \omega) \text{Im}[S^R(\omega)]^{-1} = - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega K(\tau, \omega) \text{Im}\Sigma(\omega) \quad (3)$$

を導くことができる。ただしここで左辺の $[\tilde{S}]^{-1}(\tau)$ は虚時間伝搬関数の逆を意味することに注意する。式 (3) は、逆遅延伝搬関数 $[S^R(\omega)]^{-1}$ が上半平面で解析的であることを用いれば式 (2) と同様に導出できる。 $[S^R(\omega)]^{-1}$ の解析性は、式 (1) と遅延自己エネルギーの解析性から容易に導かれる。

式 (3) により、 $[\tilde{S}]^{-1}(\tau)$ が格子解析の結果として与えられれば実時間関数 $\text{Im}\Sigma(\omega)$ はスペクトル関数を解析するときと全く同じ方法で推測することができる。スペクトル関数の非負性が保証される伝搬関数に対しては、自己エネルギーの虚部も同様な性質を持つこと

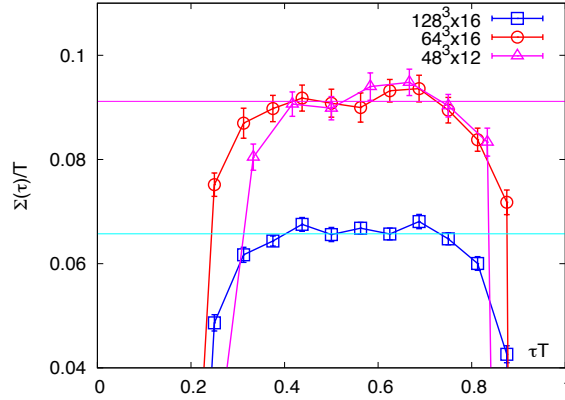


Figure 1: $T = 3T_c$ におけるクォーク逆伝搬関数 $\tilde{S}(\tau)$ 。 $\tau T = 0.5$ 付近では 2-pole 近似の予測とよく一致している。

が容易に示されるので、MEM を使うことも可能である。こうして得られる実時間の情報は $[S^R(\omega)]^{-1}$ の解析性という式 (2) には含まれない情報を持っており、式 (2) によるスペクトルの解析と相補的な情報を提供するはずである。

$[\tilde{S}]^{-1}(\tau)$ を求める際には、格子上で求めた相関関数 $\tilde{S}(\tau)$ の逆行列を数値的に求めればよい。伝搬関数 $\tilde{S}(\tau)$ は並進対称性を持っているので、この逆行列の計算は運動量の固有空間に属する小さな行列に対して行えば良く、数値的な負担はフェルミオン行列の逆の計算に要するそれと比べれば軽微である。また、ジャックナイフ法を用いることで $[\tilde{S}]^{-1}(\tau)$ の誤差と相関行列も自然に構成できることに注意しておく。

3 クォーク自己エネルギー

上で提案した方法論の妥当性を確かめるため、ここでは文献 [2] で計算された格子上のクォーク伝搬関数から $[\tilde{S}]^{-1}(\tau)$ を構成してみることにする。図 1 に、温度 $T = 3T_c$ においてカイラル極限およびゼロ運動量で計算されたクォーク相関関数から求められた $[\tilde{S}]^{-1}(\tau)$ を掲げる。図の細い線は、文献 [2] で得られた 2-pole 近似のスペクトル関数に対応する自己エネルギーの値である。図 1 は、これら二つの結果が $\tau T = 0.5$ 付近において良く一致することを示しており、 $[\tilde{S}]^{-1}(\tau)$ の解析が正しく行われていること、および文献 [2] で採用された 2-pole 近似が比較的良い近似であることを示唆している。ただし、 $\tau T \simeq 0$ 付近では両者の間に格子間隔効果に由来すると思われる大きなずれが存在する。

ここで得られた $[\tilde{S}]^{-1}(\tau)$ と式 (3) を用いて実時間関数 $\text{Im}\Sigma(\omega)$ を求めるのが次の課題だが、図 1 のデータは統計誤差が大きく、残念ながら有用な結果を得ることが期待できない。より狭い格子間隔による解析において、自己エネルギーの解析が効力を発揮することが期待される。

References

- [1] M. Asakawa and T. Hatsuda, Phys. Rev. Lett. **92**, 012001 (2004).
- [2] F. Karsch and M. Kitazawa, Phys. Lett. B **658**, 45 (2007); Phys. Rev. D **80**, 056001 (2009).

2 フレーバーウィルソンフェルミオンを用いた 格子 QCD による有限温度・密度でのメソン遮蔽質量の研究

飯田英明*

独立行政法人 理化学研究所 仁科加速器研究センター

2 フレーバーウィルソンフェルミオンの格子 QCD を用い、有限温度および密度におけるメソン遮蔽質量の研究を行った。有限温度・ゼロ密度での遮蔽質量は、擬相転移温度 T_{pc} 以下ではほぼ一定なのに対し、 T_{pc} を超えると単調増加する。有限密度では、クォーク化学ポテンシャル μ によるテイラー展開法を用いて計算を行った。 μ 展開の 2 次（1 次はゼロ）の係数は、我々¹の計算パラメータの範囲では常に正であり、相転移温度 T_{pc} 以下ではその値は小さく、 T_{pc} 以上で大きな値になる。以上から、メソン遮蔽質量は、化学ポテンシャルの小さな領域で、 T_{pc} 以下では有限温度・密度効果を殆ど受けず、 T_{pc} 以上で大きく影響を受けることが分かった。

1 はじめに

有限温度・密度中のメソンの研究は、閉じ込めおよびカイラル相転移を理解する上で重要である。実際、 J/ψ の抑制や、有限密度中でのベクトル中間子の質量変化など、メソンの性質の変化が、クォーク・グルーオン・プラズマ相や媒質効果を反映すると考えられる [1]。この研究では、メソンの遮蔽質量を、2 フレーバーのウィルソンフェルミオンにおける格子 QCD により研究した。ゲージ配位は WHOT-QCD Collaboration によって生成されたものを用い [2, 3]、メソンの空間的相関の遠方での振る舞いから遮蔽質量を計算し、その温度および密度依存性を調べた。その結果、有限温度・密度の遮蔽質量への影響は、擬相転移温度 T_{pc} 以下では小さく、 T_{pc} 以上では大きくなることが分かった。以下に現在までに得られた結果を示す。

2 遮蔽質量の計算手法

メソンの空間相関関数 $G(x)$ を考える:

$$\langle G(x) \rangle = \sum_{y,z,t} \langle \phi(x,y,z,t) \phi(0,0,0,0)^\dagger \rangle \quad (1)$$

$\phi(x,y,z,t)$ はメソン演算子であり、ここでは擬スカラー (PS) とベクトル (V) チャンネルの粒子を扱う。 $\langle G(x) \rangle$ をアイソスカラークォーク化学ポテンシャル $\mu \equiv (\mu_u + \mu_d)/2$ に関して展開し、 μ/T の小さい領域を調べる:

$$\langle G(x) \rangle_\mu = \langle G(x) \rangle_0 + \langle G(x) \rangle_2 \tilde{\mu}^2 + O(\tilde{\mu}^4) \quad (2)$$

ここで $\tilde{\mu} \equiv \mu/T$ である。展開の奇数次は、荷電共役変換不変性より消える。詳細は省くが、この展開係数 $\langle G(x) \rangle_0$ と $\langle G(x) \rangle_2$ を格子 QCD により計算した。

*e-mail address: hiida@riken.jp

¹理研の前沢祐と京大基研・理研の矢崎紘一との共同研究である。

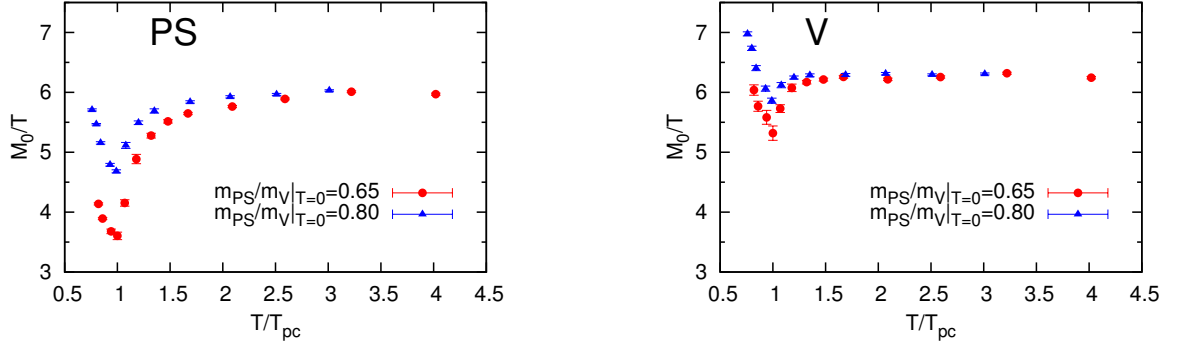


図 1: PS チャンネル (左) および V チャンネル (右) における M_0/T の温度依存性。丸シンボルは $m_{\text{PS}}/m_{\text{V}}|_{T=0} = 0.65$ 、三角は $m_{\text{PS}}/m_{\text{V}}|_{T=0} = 0.80$ の計算結果。

遮蔽質量 $M(\mu, T)$ を引き出すために、 x が大きいところで $\langle G(x) \rangle$ が

$$\langle G(x) \rangle_{(\mu, T)} = A(\mu, T) \left[e^{-M(\mu, T)x} + e^{-M(\mu, T)(L-x)} \right] \quad (3)$$

と振る舞うことを仮定する。 L は x 方向の格子サイズである。ここで (3) 式の両辺を $\tilde{\mu}$ で展開する。 $A(\mu, T) = A_0 + A_2\tilde{\mu}^2 + O(\tilde{\mu}^4)$, $M(\mu, T) = M_0 + M_2\tilde{\mu}^2 + O(\tilde{\mu}^4)$ とすると

$$\langle G(x) \rangle_0 = A_0 \left(e^{-M_0x} + e^{-M_0(L-x)} \right) \quad (4)$$

$$\frac{\langle G(x) \rangle_2}{\langle G(x) \rangle_0} = \frac{A_2}{A_0} + M_2 \left\{ \left(x - \frac{L}{2} \right) \tanh \left[M_0 \left(x - \frac{L}{2} \right) \right] - \frac{L}{2} \right\} \quad (5)$$

が導かれる。格子 QCD により計算した $\langle G(x) \rangle_0$ と $\langle G(x) \rangle_2$ を上式に代入し、 $M_0, M_2, A_2/A_0$ をパラメータとして x の大きいところでフィットすることにより、 $\tilde{\mu}$ の 2 次までの遮蔽質量を引き出した。

3 計算結果

簡単に計算のセットアップを述べておく。renormalization-group improved Iwasaki gauge action 及び $N_f = 2$ の clover-improved Wilson quark action を用いて WHOT-QCD Collaboration により作られた、 $16^3 \times 4$ のゲージ配位を用いて計算を行っている。これらの配位は、ゼロ温度での擬スカラーメソンの質量とベクトルメソンの質量の比 $m_{\text{ps}}/m_{\text{v}}|_{T=0}$ を 0.65 および 0.80 に固定して作られている。それぞれの質量比に対して 100 個のゲージ配位を用いて計算を行った。

3.1 ゼロ密度・有限温度の計算結果

図 1 左は PS チャンネルでの M_0/T を温度 T/T_{pc} に対してプロットしたものである。丸シンボルは $m_{\text{PS}}/m_{\text{V}}|_{T=0} = 0.65$ 、三角は $m_{\text{PS}}/m_{\text{V}}|_{T=0} = 0.80$ の計算結果である。図より、 T_{pc} 付近において、 M_0/T が特異的な振る舞いをする事がわかる。すなわち、 T_{pc} 以下では M_0/T は減少し、 T_{pc} 以上で増加する。 M_0 自体は T_{pc} 以下で一定であり、 T_{pc} 以上で単調増加する。これは、相転移温度以下で遮蔽質量は温度効果を殆ど受けず、相転移温度以上で温度効果を大きく受けることを意味する。また、高温では、 M_0/T が 2π に近づく。これは、高温極限で、 M_0 がクォークの熱的質量 πT の 2 倍に近づくことを意味する。すなわち、高温でメソンが殆ど自由なクォーク・反クォークからなることを示しており、妥当な結果である。クォーク質量依存性に関しては、通常

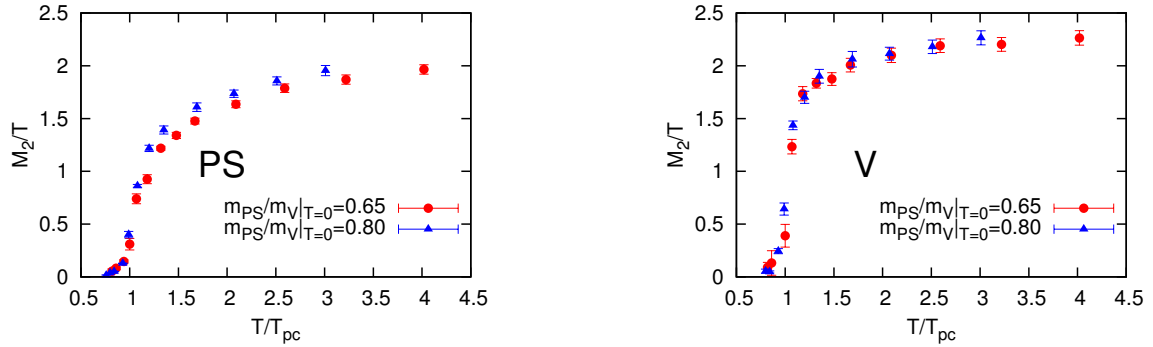


図 2: PS チャンネル (左) および V チャンネル (右) における、遮蔽質量の $\tilde{\mu}$ に対する 2 次の応答 M_2/T の温度依存性。丸シンボルは $m_{PS}/m_V|_{T=0} = 0.65$ 、三角は $m_{PS}/m_V|_{T=0} = 0.80$ の計算結果。

のメソンの質量と同様に、クォーク質量が大きい方が遮蔽質量も大きくなっている。図 1 右は V チャンネルの結果である。PS チャンネルに比べ温度依存性が小さいことを除けば、定性的には PS チャンネルの結果とほぼ同様である。

これらの結果は、KS フェルミオンを用いた有限温度の遮蔽質量の計算と定性的に同じであることをコメントしておく [4]。

3.2 有限密度での計算結果

図 2 左は PS チャンネルの M_2/T を温度に対してプロットしたものである。丸シンボルは $m_{PS}/m_V|_{T=0} = 0.65$ 、三角は $m_{PS}/m_V|_{T=0} = 0.80$ の計算結果である。 M_2/T は我々の計算した温度範囲で、常に正である。また、 T_{pc} 以下では M_2/T は小さく、 T_{pc} を超えると大きな値になる。すなわち、遮蔽質量は、 T_{pc} 以下では密度効果を殆ど受けず、 T_{pc} を超えると大きくその効果を受ける。図 2 右は V チャンネルの計算結果である。上記の性質に関しては PS チャンネルの結果と同様である。クォーク質量依存性に関しては、V チャンネルでは M_2/T がクォーク質量にほぼ依存しないのに対し、PS チャンネルでは、クォーク質量が重くなると M_2/T が少し増加している。これらの計算結果は、クォーク質量依存性を除き、KS フェルミオンによる先行研究 [5] と定性的に一致する。クォーク質量依存性に関しては、更に研究が必要である。

4 グルーオン遮蔽質量との比較

ここでは、メソンの遮蔽質量を、グルーオンの遮蔽質量 (デバイ遮蔽質量) と比較する。クォークの作用は化学ポテンシャルと直接結合しているのに対し、グルーオンは、クォークを通してのみ密度効果を受ける。遮蔽質量の密度依存性はこのような違いを反映すると考えられ、両者を比較することは興味深い。この研究で使ったゲージ配位により計算したデバイ遮蔽質量が、参考文献 [2, 3] にあるので、比較を行ってみよう。ここでは、デバイ遮蔽質量 $m_D(\mu)$ を $m_D(\mu) = m_{D,0} + m_{D,2}\tilde{\mu}^2 + O(\tilde{\mu}^4)$ と展開する。図 3 左はメソン遮蔽質量の M_0/T と M_2/T 、図 3 右はデバイ遮蔽質量の $m_{D,0}$ と $m_{D,2}$ である。この図より、メソン遮蔽質量とデバイ遮蔽質量には、特徴的な差があることがわかる。まず、メソン遮蔽質量は T_{pc} 以上で温度に対して増加するのに比べ、デバイ遮蔽質量は減少する。これは、高温極限でメソン遮蔽質量 M/T が 2π に漸近するのにに対し、デバイ遮蔽質量 m_D/T はゲージ結合定数に比例するためゼロに漸近していくことを反映している。また、 M_2/M_0 の比は、 $m_{D,2}/m_{D,0}$ よりも大きい。これは、化学ポテンシャルへの結合の仕方の違

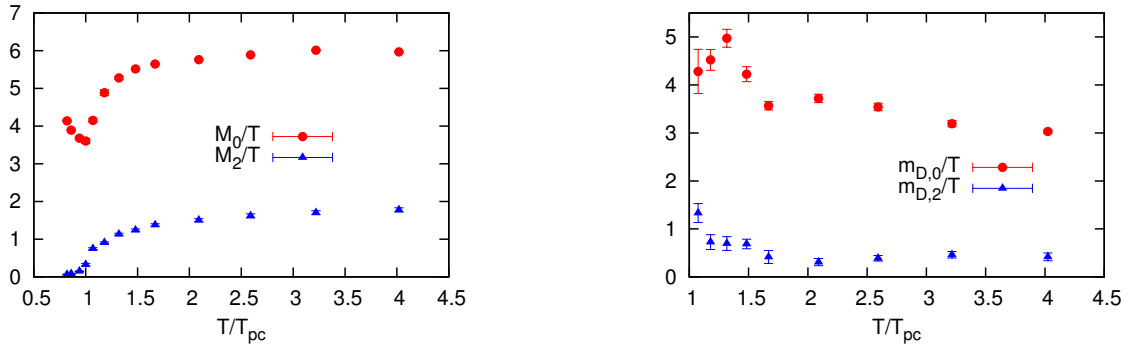


図 3: 左: $m_{PS}/m_V|_{T=0} = 0.65$ での PS チャンネルにおけるメソン遮蔽質量の M_0/T および M_2/T の温度依存性。右: グルーオン (デバイ) 遮蔽質量の $m_{D,0}/T$ および $m_{D,2}/T$ の温度依存性。

いから、フェルミオンの化学ポテンシャルに対する応答が、グルーオンのそれより大きいことを意味していると考えられる。

5 まとめ

2 フレーバーウィルソンフェルミオンを用いた格子 QCD により、有限温度および密度におけるメソン遮蔽質量の研究を行った。その結果、有限温度・ゼロ密度での遮蔽質量は、擬相転移温度 T_{pc} 以下では一定であり、 T_{pc} 以上で単調増加することが分かった。有限密度では、クォーク化学ポテンシャルによるテイラー展開法を用い、化学ポテンシャルの 2 次まで (1 次はゼロ) の計算を行った。展開の 2 次の項は、我々の計算パラメータの範囲では常に正であり、相転移温度 T_{pc} 以下ではその値は非常に小さく、 T_{pc} 以上で大きな値になる。以上より、メソン遮蔽質量は、化学ポテンシャルの小さい領域で、 T_{pc} 以下では有限温度・密度効果を殆ど受けず、 T_{pc} 以上で大きく影響を受けることが分かった。更に、同じゲージ配位を用いて計算されたグルーオン (デバイ) 遮蔽質量と、今回計算したメソンの遮蔽質量を比較した。メソン遮蔽質量は T_{pc} 以上で単調増加するのに対し、デバイ遮蔽質量は単調減少する。また、化学ポテンシャルに対する応答は、メソン遮蔽質量の方が大きい。これは、クォークとグルーオンで化学ポテンシャルに対する結合が違うことを反映していると考えられる。

参考文献

- [1] K. Yagi, T. Hatsuda and Y. Miake, *Quark-Gluon Plasma*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [2] **WHOT-QCD** Collaboration, Y. Maezawa *et. al.*, Phys. Rev. D**75** (2007) 074501.
- [3] **WHOT-QCD** Collaboration, S. Ejiri *et. al.*, Phys. Rev. D**82** (2010) 014508.
- [4] M. Cheng *et. al.*, arXiv:1010.1216.
- [5] S. Choe *et. al.*, Phys. Rev. D**65** (2002) 054501; **QCD-TARO** Collaboration, I. Pushkina *et. al.*, Phys. Lett. **B609** (2005) 265–270.

格子QCDにおける対角化の方法を用いたチャーモニウムスペクトル関数の研究

大野浩史 (筑波大学数理物質科学研究科)
for WHOT-QCD Collaboration

1 背景

重イオン衝突実験においてクォーク・グルオン・プラズマ (QGP) が生成されると、その内部ではデバイ遮蔽効果が働き、 J/ψ 等のチャーモニウムが生成されなくなると考えられており [1]、 J/ψ 生成量の抑制は QGP 生成の重要なシグナルの一つとなっている。このことから、高温でのチャーモニウムの振る舞いを理論的に理解することは非常に重要である。

実際、これまでに格子 QCD による数値シミュレーションに基づくいくつかの研究がなされてきた (例えば [2])。それらの研究では主に、最大エントロピー法 (MEM) [3] と呼ばれる方法を用いてメソンの相関関数からスペクトル関数を計算し、その温度依存性が調べられた。ここで、MEM はベイズ統計に基づく解析手法で、有限個のデータ点から連続なスペクトル関数を構成することができる。その結果、各チャーモニウムに対応するピークの変化から、 J/ψ や η_c 等の S 波状態は、臨界温度 T_c の少なくとも 1.5 倍程度まで消失しないことが示唆された。一方で、 χ_{c0} や χ_{c1} 等の P 波状態は T_c のほぼ直上で消失する可能性が示された。

しかしながら、MEM を用いて正しいスペクトル関数を得るためには、求めたいスペクトル関数の情報をできる限り多く含んだ、デフォルトモデルと呼ばれる量を選ぶ必要があるが、一般にそれはあまり明らかではない。従って、MEM にはデフォルトモデルの選び方に関する不定性が存在する。また、格子 QCD のシミュレーションは有限体積で計算する必要があり、この場合、スペクトル関数は離散的なスペクトルのみで構成されるので、MEM によって得られる連続スペクトルの意味は単純には理解できない。ゆえに、離散的なシグナルを直接計算するのに適した方法を用いて、これまでの結果を確認することが必要であると考えられる。

2 方法

そこで、本研究では対角化の方法 [4] を用いてメソンのスペクトル関数を計算する方法を提案し、これを用いて、ゼロ温度及び有限温度におけるチャーモニウムのスペクトル関数を計算する。具体的な方法は以下の通りである。

- まず、量子数が同じ異なる n 個のメソン演算子を定義し、これらを用いて $n \times n$ のメソン相関関数行列 $C(t)$ を作る。ただし、 $C(t)$ の (1,1) 成分は求めるべきスペクトル関数に対応したメソン演算子を用いて定義する。ここで t は虚時間である。
- 次に、 $C(t)$ に関する一般化固有値問題 $C(t)\mathbf{v}^{(k)} = \lambda_k(t, t_0)C(t_0)\mathbf{v}^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) を解き、その固有対 $(\lambda_k(t, t_0), \mathbf{v}^{(k)})$ を求める。
- 最後に、得られた $(\lambda_k(t, t_0), \mathbf{v}^{(k)})$ を用いて、有効質量 $m_k^{\text{eff}}(t, t_0)$ 及び対応するスペクトル関数の値 $\rho(m_k^{\text{eff}}(t, t_0))$ を次式により計算する。

$$\lambda_k(t; t_0) = \frac{\cosh[m_k^{\text{eff}}(t, t_0) (t - N_t/2)]}{\cosh[m_k^{\text{eff}}(t, t_0) (t_0 - N_t/2)]}, \quad (1)$$

$$\rho(m_k^{\text{eff}}(t, t_0)) = (C(t_0)V)_{1k} (V^{-1})_{k1} \frac{\sinh[m_k^{\text{eff}}(t, t_0) N_t/2]}{\cosh[m_k^{\text{eff}}(t, t_0) (t_0 - N_t/2)]}. \quad (2)$$

ここで、 $V \equiv [\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^n]$ 、 N_t は時間方向の格子サイズである。このとき、スペクトル関数のピークの位置 m_k 及び高さ $\rho(m_k)$ は t, t_0 が十分大きい時の $m_k^{\text{eff}}(t, t_0)$ 及び $\rho(m_k^{\text{eff}}(t, t_0))$ の漸近値として与えられる。

もし、 m_k の位置にあるピークに対応する状態が温度を変えていった時に消失したとすると、 $\rho(m_k)$ はゼロ温度の場合のそれと大きく変化すると考えられる。従って、 $\rho(m_k)$ の温度依存性を調べ、その様な変化が現れるかどうかを確認することで、チャーモニウムの消失を調べることができると考えられる。

3 シミュレーションの詳細と結果

本研究では、空間方向と時間方向の格子間隔 a_s 及び a_t の比が $\xi \equiv a_s/a_t = 4$ 、格子サイズ $20^3 \times N_t$ の非等方格子において、ダイナミカルなクォークの効果を無視したクエンチ近似を用いた格子 QCD シミュレーションを行った。ゲージ場に対しては、ゲージ結合定数 $\beta = 6.10$ としてウィルソンプラケット作用を用いた。このとき、空間方向の格子間隔は $a_s = 0.0970(5)\text{fm}$ ($a_s^{-1} = 2.03(13)\text{GeV}$) となる。時間方向の格子サイズ N_t はゼロ温度では $N_t = 160$ とした。また、有限温度では $N_t = 32, 26, 20$ とし、時間方向の格子サイズの逆数は温度に対応するので、それぞれ約 $0.88T_c, 1.1T_c, 1.4T_c$ となる。用いたゲージ配位の数にはゼロ温度では 299、有限温度では 800 である。一方、クォーク場に対しては、ウィルソンパラメタ $r = 1$ として $O(a)$ 改良されたウィルソン作用を用いた。また、ホッピングパラメタ κ はシミュレーションで得られる J/ψ の質量が実験値とほぼ等しくなるように、 $\kappa = 0.10109$ とした。作用の定義やその他のパラメタは [5] と同じものを用いた。

対角化に用いるメソン演算子は $\omega_i(\vec{x}) = e^{-A_i|\vec{x}|^2}$ で定義されるガウス型のスミアリング関数を用いて定義し、 $A_1 = \infty, A_2 = 0.25, A_3 = 0.20, A_4 = 0.15, A_5 = 0.10, A_6 = 0.05, A_7 = 0.02$ の 7 つのスミアリングパラメタを用いた。 $A_1 = \infty$ はスミアリングを行わないことに対応している。

まずはじめに、ゼロ温度において、擬スカラー (Ps)、ベクター (Ve)、スカラー (Sc) 及び軸性ベクター (Av) の各チャネルに対して m_k 及び $\rho(m_k)$ を計算した。ただし、 $t_0 = 5$ とし、S 波の基底状態及び第一励起状態に対しては、それぞれ $t = 73-77, t = 35-39$ 、P 波の基底状態及び第一励起状態に対しては、それぞれ $t = 60-64, t = 25-29$ の範囲について、 $m_k^{\text{eff}}(t, t_0)$ 及び $\rho(m_k^{\text{eff}}(t, t_0))$ のプラトーを定数フィットすることで m_k 及び $\rho(m_k)$ を求めた。対角化は A_1 から A_n までの n 個のスミアリングパラメタを用いて行い、基底の数 n は $n = 3, 4, 5, 6, 7$ と変化させた。図 1 に Ve 及び Av チャネルに対する結果を示す。ここで、縦の破線はチャーモニウムの質量の実験値 [6] を示している。また、比較のため、MEM を用いて同様の量を計算した結果を (+) で示す。ただし、ピークの高さが最大となる位置を m_k 、ピークで囲まれた領域の面積を $\rho(m_k)$ とした。基底状態についてみると、どの場合も同様の結果が得られ、よくシグナルを取り出せることがわかった。しかしながら、第一励起状態については、各 n ごとに結果が異なり、MEM の結果とも一致しなかった。しかしながら、我々の方法では、 n を増やすにつれてある値に収束していき、Ve チャネルに関しては実験値に近付いていくことから、基底の数を増やすことで結果が改善され、より精度のよいシグナルが得られたと考えられる。Ps 及び Sc チャネルに関しても、それぞれ Ve、Av と同様の結果が得られた。

最後に、S 波の基底状態に対して $m_k^{\text{eff}}(t, t_0)$ 及び $\rho(m_k^{\text{eff}}(t, t_0))$ の温度依存性を調べた。 $t_0 = 5$ 、対角化に用いる基底の数は $n = 7$ とした。図 2 に Ve チャネルに対する結果を示す。 $m_k^{\text{eff}}(t, t_0)$ をみると、大きな温度依存性は特にみられなかったが、 $\rho(m_k^{\text{eff}}(t, t_0))$ は T_c の前後で変化が見られた。しかしながら、その変化量をとても小さいものであるため、少なくとも $1.4T_c$ までは J/ψ は消失していないようにみえる。Ps チャネル、つまり η_c に対しても同様の結果が得られた。

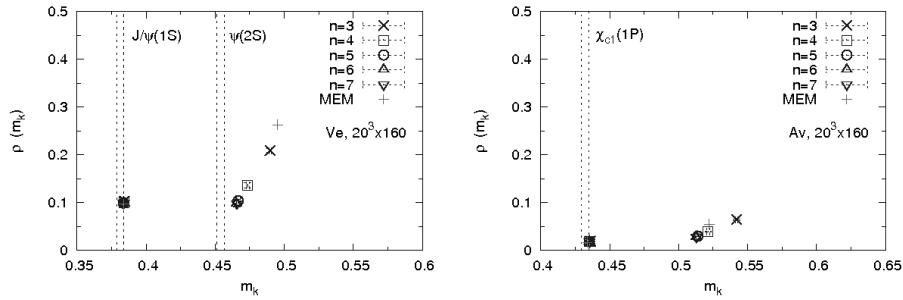


図 1: Ve (左) と Av (右) チャネルに対するスペクトル関数のピークの位置 m_k と高さ $\rho(m_k)$

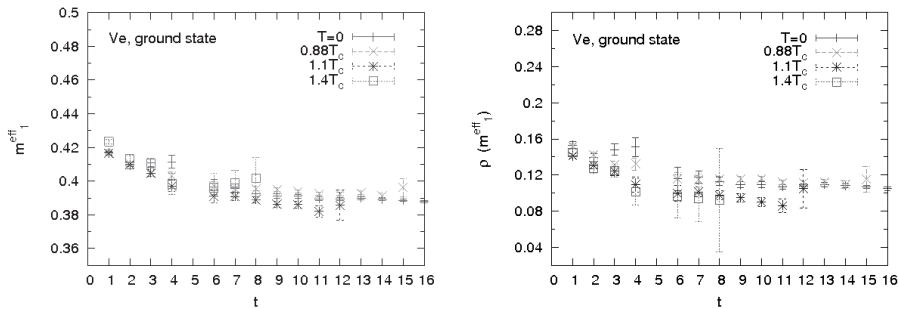


図 2: Ve チャネルに対する有効質量 m_1^{eff} (左) と対応するスペクトル関数の値 $\rho(m_1^{\text{eff}})$ (右)

4 まとめ

対角化の方法を用いてメソンのスペクトル関数を計算する方法を提案し、ゼロ温度及び有限温度においてチャーモニウムのスペクトル関数を計算した。ゼロ温度において、Ps、Ve、Sc、Av チャネルのスペクトル関数のピークの位置と高さを第一励起状態まで計算した結果、基底状態に関しては MEM の結果と同様のものが得られた。第一励起状態では基底の数によって結果が異なったが、基底の数を増やすにつれてより精度の良いシグナルを得ることができた。また、有限温度において、Ps 及び Ve チャネルの基底状態に対して有効質量及び対応するスペクトル関数の値を計算した結果、 $1.4T_c$ まで大きな温度依存性は見られなかった。従って、少なくとも $1.4T_c$ まで J/ψ 及び η_c の消失に対する明確な証拠は得られなかった。

参考文献

- [1] T. Matsui and H. Satz, *Phys. Lett. B* **178**, 416 (1986).
- [2] G. Aarts, C. Allton, M. B. Oktay, M. Peardon and J. I. Skullerud, *Phys. Rev. D* **76**, 094513 (2007) [hep-lat/0705.2198].
- [3] M. Asakawa, T. Hatsuda and Y. Nakahara, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **46**, 459 (2001) [arXiv:hep-lat/0011040].
- [4] M. Lüscher and U. Wolff, *Nucl. Phys. B* **339**, 222 (1990)
- [5] H. Matsufuru, T. Onogi and T. Umeda, *Phys. Rev. D* **64**, 114503 (2001) [hep-lat/0107001]
- [6] K. Nakamura et al. (Particle Data Group), *J. Phys. G* **37**, 075021 (2010).

Transport coefficients of causal dissipative relativistic hydrodynamics in lattice gauge simulations

Y. Maezawa RIKEN

¹Relativistic fluid dynamics is an important model to understand various collective phenomena in astrophysics and heavy-ion collisions, although its theoretical foundation has not yet been established [1]. The relativistic Navier-Stokes theory is, for example, acausal and unstable and inadequate as the theory of relativistic fluids. The reason is that the irreversible currents (the shear stress tensor $\pi^{\mu\nu}$, the bulk viscous pressure Π etc.) are linearly proportional to the thermodynamic forces (the shear tensor $\sigma^{\mu\nu}$, the expansion scalar θ etc.), with the proportionality constant named the shear viscosity coefficient η , the bulk viscosity coefficient ζ etc. Thus, the forces have an instantaneous influence on the currents, which obviously violates causality and leads to instabilities. These problems are solved by, for example, introducing retardation into the definitions of the irreversible currents, leading to equations of motion for these currents which thus become independent dynamical variables. The retardation effect is characterized by the relaxation time. Theories of this type are called causal dissipative relativistic fluid dynamics (CDR). In CDR, the irreversible currents and the thermodynamic forces are no longer in a simple linear relation, and such fluids are called *non-Newtonian*. As a consequence, the transport coefficients for CDR cannot be computed with methods commonly used for *Newtonian* (Navier-Stokes) fluids, such as the Green-Kubo-Nakano (GKN) formula.

Recently, a new microscopic formula to calculate the transport coefficients of CDR from time-correlation functions was proposed [2, 3]. This formula reproduces the ordinary results when it is applied to the classical Navier-Stokes theory and the diffusion equation. The con-

sistency between this new formula and the results obtained from the Boltzmann equation was confirmed in Ref. [4, 5]. Since this formula is derived from quantum field theory, it will be applicable even to dense fluids, differently from the calculations based on the Boltzmann equation.

The purpose of the present study is to calculate the transport coefficients of CDR with lattice QCD simulations by using the new formula. The calculations of the transport coefficients, in general, contain temporal-correlation functions which are very difficult to estimate in lattice simulations [6, 7]. Thus, as a first attempt, we focus on a ratio between the shear viscosity and the corresponding relaxation time, η/τ_π , which is given only by static correlation functions. After defining the correlation functions between the energy-momentum tensor on the lattice, we calculate the ratio in quenched lattice simulations on $24^3 \times 4-16$ lattices with $\beta_{\text{LAT}} = 6.0$, which corresponds to the temperature range $0.5 \lesssim T/T_c \lesssim 1.8$ where T_c is the critical temperature.

We first choose gross variables which are necessary to extract the macroscopic motion of many-body systems. If the chosen variables are not enough, the derived fluid dynamics will show unphysical behaviors, such as instability and the divergent transport coefficients.

For ideal fluid, the energy-momentum tensor $T^{\mu\nu}$ is a function only of the energy density ε and the fluid velocity u^μ , which is normalized as $u^\mu u_\mu = 1$. Then, by applying a Lorentz transformation and using the definition of the energy density and pressure P , we obtain $T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}P$. Note that P is calculated by the equation of state. Since $T^{\mu\nu}$ is conserved, we have $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. This is the relativistic Euler equation.

For dissipative fluid, $T^{\mu\nu}$ cannot be expressed only by ε and u^μ . We represent this

¹ This is study in collaboration with H. Abuki (Tokyo Univ. of Science), T. Hatsuda (The Univ. of Tokyo) and T. Koide (Frankfurt Inst.).

additional component by another second rank tensor $\Pi^{\mu\nu}$. The most general $T^{\mu\nu}$ is, then, given by $T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}P + \Pi^{\mu\nu}$. Conventionally, $\Pi^{\mu\nu}$ is expressed using the trace part Π and traceless part $\pi^{\mu\nu}$ as $\Pi^{\mu\nu} = \pi^{\mu\nu} - (g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu)\Pi$. Finally $T^{\mu\nu}$ is expressed as $T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P + \Pi)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}(P + \Pi) + \pi^{\mu\nu}$, and Π and $\pi^{\mu\nu}$ are the bulk viscous pressure and the shear stress tensor, respectively, satisfying the orthogonality condition $u_\mu \pi^{\mu\nu} = 0$. In the traditional Landau-Lifshitz theory [8], the viscous terms are induced instantaneously by the corresponding thermodynamic force: $\Pi = -\zeta\theta$, $\pi^{\mu\nu} = 2\eta\sigma^{\mu\nu}$, where ζ and η are the bulk and shear viscosities, respectively. The thermodynamic forces θ and $\sigma^{\mu\nu}$ are defined by

$$\begin{aligned}\theta &= \partial_\mu u^\mu, \\ \sigma^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\partial^\mu u^\nu + \partial^\nu u^\mu - \frac{2}{3}(g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu)\theta) \\ &\equiv \Delta^{\mu\nu\lambda\delta}\partial_\lambda u_\delta.\end{aligned}$$

When we use these definitions of the viscous terms, we obtain the relativistic Navier-Stokes equation. Because of the instantaneous production of the viscous terms, this equation contains sound propagations with infinite speed.

In order to solve this problem, the retardation effect is taken into account by introducing relaxation times τ_π for the shear stress tensor and τ_Π for the bulk viscous pressure, respectively. Thus the viscous terms satisfying causality are given by

$$\begin{aligned}\tau_\Pi u^\mu \partial_\mu \Pi + \tau_\Pi \Pi \theta + \Pi &= -\zeta\theta, \\ \tau_\pi \Delta^{\mu\nu\lambda\delta} u^\alpha \partial_\alpha \pi_{\lambda\delta} + \tau_\pi \pi^{\mu\nu} \theta + \pi^{\mu\nu} &= 2\eta\sigma^{\mu\nu},\end{aligned}$$

where τ_Π and τ_π are the relaxation times of Π and $\pi^{\mu\nu}$, respectively. Here the projection operator $\Delta^{\mu\nu\lambda\delta}$ is necessary to satisfy the orthogonality relation. These are the equations of CDR. One can easily check that the Navier-Stokes theory is reproduced in the vanishing relaxation time limit. The second terms on the l.h.s. come from the (de)compression of fluid cells which is important to implement stable numerical calculations with ultra-relativistic initial conditions [9].

In fluid dynamics, transport coefficients are inputs which should be calculated from the underlying microscopic dynamics. As was discussed in the introduction, we cannot apply the GKN formula to CDR. The new formula is derived by using the projection operator method [2, 4]. The results are summarized as

$$\frac{\eta}{\beta(\varepsilon + P)} = \frac{\eta_{GKN}}{\beta^2 \int d^3\mathbf{x}(\hat{T}^{0x}(\mathbf{x}), \hat{T}^{0x}(\mathbf{0}))}, \quad (1)$$

$$\frac{\tau_\pi}{\beta} = \frac{\eta_{GKN}}{\beta^2 \int d^3\mathbf{x}(\hat{T}^{yx}(\mathbf{x}), \hat{T}^{yx}(\mathbf{0}))}, \quad (2)$$

$$\frac{\zeta}{\beta(\varepsilon + P)} = \frac{\zeta_{GKN}}{\beta^2 \int d^3\mathbf{x}(\hat{T}^{0x}(\mathbf{x}), \hat{T}^{0x}(\mathbf{0}))}, \quad (3)$$

$$\frac{\tau_\Pi}{\beta} = \frac{\zeta_{GKN}}{\beta^2 \int d^3\mathbf{x}(\delta\hat{\Pi}(\mathbf{x}), \delta\hat{\Pi}(\mathbf{0}))}, \quad (4)$$

where $\hat{\cdot}$ denotes operator, and we define $\hat{\Pi} \equiv \sum_{i=1}^3 \hat{T}^{ii}/3 - c_s^2 \hat{T}^{00}$ and $\delta\hat{A} \equiv \hat{A} - \text{Tr}[\rho_{eq}\hat{A}]$ with the equilibrium density matrix ρ_{eq} . The inner product is defined by Kubo's canonical correlation,

$$(A, B) = \int_0^\beta \frac{d\lambda}{\beta} \text{Tr}[\rho_{eq} A(-i\lambda) B]. \quad (5)$$

Here η_{GKN} and ζ_{GKN} are the shear and bulk viscosities of Newtonian fluids which are calculated using the GKN formula (or more precisely, using the Zubarev method). These quantities are given by the temporal (dynamical) correlation functions.

One can see that the new transport coefficients are still calculated from the GKN formula with the normalization factors, which are, on the other hand, given by the static correlation functions. Thus, for example, the ratio of the shear viscosity and corresponding relaxation time is calculated only from the static correlation functions,

$$\frac{\eta}{\tau_\pi(\varepsilon + P)} = \frac{\int d^3\mathbf{x}(\hat{T}^{yx}(\mathbf{x}), \hat{T}^{yx}(\mathbf{0}))}{\int d^3\mathbf{x}(\hat{T}^{0x}(\mathbf{x}), \hat{T}^{0x}(\mathbf{0}))}. \quad (6)$$

In the leading order of the weakly interacting bose gas, the above ratio becomes $\frac{\eta}{\tau_\pi(\varepsilon + P)} = \frac{P}{\varepsilon + P}$ which becomes zero ($\frac{1}{4}$) at $T = 0$ ($T \rightarrow \infty$) for massive bosons. In the following, we focus

on this ratio and calculate it in quenched lattice simulations.

Let us consider the gluonic matter at finite T , and define the energy-momentum tensor for the SU(3) gauge theory in Euclidean space-time as,

$$T_{\mu\nu}(x) = 2\text{tr} [F_{\mu\alpha}(x)F_{\nu\alpha}(x)] - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu} \left(1 + \frac{\beta(g)}{2g}\right) \text{tr} [F_{\rho\sigma}(x)F_{\rho\sigma}(x)], \quad (7)$$

where the trace is taken over color indices, and $\beta(g)$ is a beta function on the lattice [10]. In the standard approach, the field strength tensor squared on the lattice (without the summation over Lorentz indices) is defined from the Hermitian part of the plaquette as $a^4\text{tr} [F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}] = \beta_{\text{LAT}} [1 - \frac{1}{3}\text{Re tr } U_{\mu\nu}]$, where $\beta_{\text{LAT}} = 6/g^2$ is a lattice gauge coupling. This is utilized to define e.g. the standard gauge action. However this does not tell us anything about the off-diagonal part of the energy-momentum tensor, $T_{\mu\nu}(\mu \neq \nu)$. Therefore, the following equality (valid only in the continuum theory with full O(3) rotational symmetry) has been employed to calculate the correlations of the energy-momentum tensor: $\langle T_{ij}(x)T_{ij}(y) \rangle = \frac{1}{2} [\langle T_{ii}(x)T_{ii}(y) \rangle - \langle T_{ii}(x)T_{jj}(y) \rangle]$, ($i, j = 1, 2, 3$). It was however realized recently that this relation receives large errors due to lattice discretization [11]. Moreover, it does not give us a clue to calculate the correlation of T_{i4} (the denominator of the ratio in Eq. (6)) at finite T .

Alternative way to define the field strength would be to take the anti-Hermitian part of the plaquette,

$$a^4\text{tr} [F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}] \equiv -\frac{\beta_{\text{LAT}}}{24}\text{tr}[(Q_{\mu\nu} - Q_{\mu\nu}^\dagger)(Q_{\rho\sigma} - Q_{\rho\sigma}^\dagger)], \quad (8)$$

which can be used both for the first and second terms of the right hand side of Eq.(7). Here we adopt a clover-shaped combination of the plaquette [12]

$$Q_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4} [U_{\mu\nu} + U_{\nu-\mu} + U_{-\mu-\nu} + U_{-\nu\mu}], \quad (9)$$

to respect the space-time symmetry. This definition naturally leads to $\langle T_{\mu\nu} \rangle = 0$ for

$\mu \neq \nu$. In our simulation, we use the energy-momentum tensor obtained from Eq.(8).

In the Euclidean space-time, the Kubo's canonical correlation for the energy-momentum tensors appearing in Eq. (6) becomes a susceptibility

$$G_{\mu\nu}(T) = \frac{T^2}{V} \left\langle \left(\int d^3\mathbf{x} \int_0^{1/T} d\tau T_{\mu\nu}(\mathbf{x}, \tau) \right)^2 \right\rangle_T,$$

where we have used the translation invariance both in spatial and temporal directions, and $\langle \dots \rangle_T$ denotes the thermal average at temperature T . With $T = 1/(aN_t)$, $V = (aN_s)^3$ and $\int d^3\mathbf{x} \int d\tau \rightarrow a^4 \sum_x$ on the lattice, we can rewrite the static susceptibility $G_{\mu\nu}$ in the lattice unit with zero temperature subtraction.

We perform quenched lattice simulations employing a standard plaquette gauge action on a isotropic lattice of $24^3 \times N_t$ with $N_t = 4 - 16$. The lattice coupling is taken to be $\beta_{\text{LAT}} = 6.0$, which corresponds to $a = 0.093$ fm with the Sommer scale $r_0 = 0.5$ fm [13]. The range of N_t corresponds to $T/T_c \sim 0.5-1.8$, where the critical temperature is located between $N_t = 7$ and $N_t = 8$. The zero-temperature subtraction is performed with $N_t = 24$. We generate pure gauge configurations by the pseudo-heat-bath algorithm and measure correlations using 1000-5000 configurations at every 1000 trajectories after thermalization. Statistical errors are estimated by the jackknife analysis.

In order to see the behavior of the energy-momentum tensor constructed from Eq. (8), let us first show results of the trace anomaly,

$$\varepsilon - 3P = \langle \sum_{x,\mu} T_{\mu\mu}(x) \rangle_{T=0} - \langle \sum_{x,\mu} T_{\mu\mu}(x) \rangle_T.$$

Figure 1(top) shows temperature dependence of the trace anomaly together with the energy density and pressure calculated by the T -integral method [13]. Typical enhancement of $(\varepsilon - 3P)/T^4$ around T_c , and the rapid (slow) increase of the energy density (pressure) can be seen. The off-diagonal parts of the energy-momentum tensor are found to be zero within the statistical error, $\langle T_{\mu\nu} \rangle_T \simeq 0$, ($\mu \neq \nu$).

We define the averaged static susceptibilities G_{xy} and G_{x4} as $G_{xy}(T) \equiv \frac{1}{3}(G_{12} + G_{13} + G_{23})$

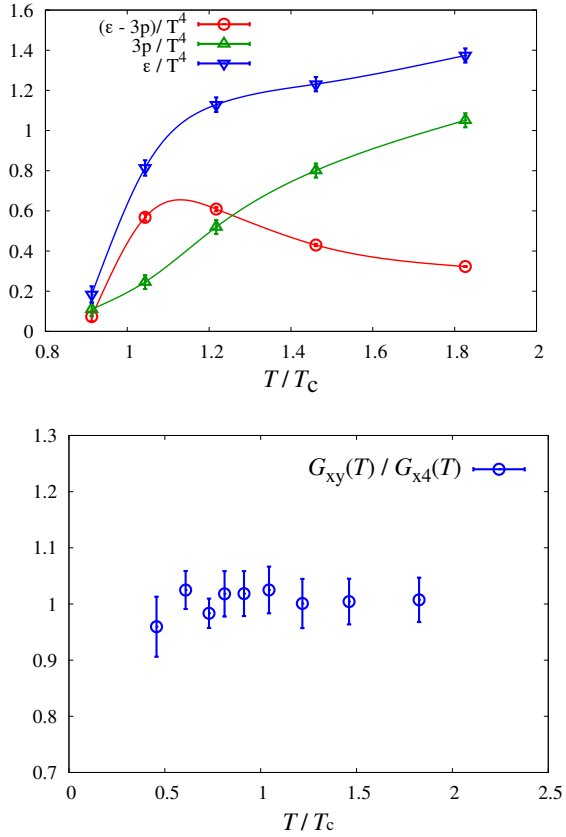


Figure 1: Results of the trace anomaly, energy density and pressure (top) and the ratio of the susceptibilities $G_{xy}(T)/G_{x4}(T)$ (bottom) as a function of temperature.

and $G_{x4}(T) \equiv \frac{1}{3}(G_{14} + G_{24} + G_{34})$. From the simulation, we found that both G_{xy} and G_{x4} increase monotonically with temperature with similar values, so that the ratio G_{xy}/G_{x4} shown in Fig. 1 (bottom) corresponding to $\eta/\tau_\pi(\epsilon + P)$ is almost unity over the range of temperatures we have explored, $0.5 \lesssim T/T_c \lesssim 1.8$. This behavior is in contrast to that expected from the weakly interacting bose gas mentioned above, and is worth to be studied further.

Summary We examined transport coefficients of causal dissipative relativistic fluid dynamics (CDR) in quenched lattice simulations. Based on the microscopic formulae proposed in Refs. [2, 3], a ratio between the shear vis-

cosity and the corresponding relaxation time, $\eta/(\tau_\pi(\epsilon + P))$, was computed from the static correlation functions of the energy-momentum tensor. We calculated these static correlation functions in quenched lattice simulations on $24^3 \times 4-16$ lattices with $\beta_{\text{LAT}} = 6.0$, which correspond to the temperature range of $0.5 \lesssim T/T_c \lesssim 1.8$. In this temperature region, the ratio stays constant and close to unity.

References

- [1] T. Koide, [arXiv:1009.4643].
- [2] T. Koide, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **103** (2009) 052301.
- [3] Xu-Guang Huang, *et al.*, arXiv:1010.4359.
- [4] G. S. Denicol, *et al.*, [arXiv:1003.0780].
- [5] G. S. Denicol, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010) 162501.
- [6] A. Nakamura and S. Sakai, *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 072305.
- [7] H. B. Meyer, *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008) 162001.
- [8] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Pergamon, New York, 1959*.
- [9] G. S. Denicol, *et al.*, *J. Phys. G* **36** (2009) 035103.
- [10] G. Boyd, *et al.*, *Nucl. Phys. B* **469** (1996) 419.
- [11] H. B. Meyer, *JHEP* **0906** (2009) 077.
- [12] M. Luscher, *et al.*, *Nucl. Phys. B* **478** (1996) 365.
- [13] T. Umeda, *et al.*, *Phys. Rev. D* **79** (2009) 051501.

クーロンゲージ格子QCDにおけるQGP相での Gribov-Zwanzigerシナリオ

中川義之¹、中村純²、斎藤卓也³
新潟大自然¹、広大RIISE²、高知大IIC³

1 序

陽子や中性子といったハドロンを構成するクォークやグルーオンはハドロン内部に閉じ込められており、直接観測することはできない。これはカラー閉じ込め現象と呼ばれ、QCD発見当初からその理論的な解明に向けた数多くの研究が行われてきている。またQCDの世界では高温下でクォーク・グルーオンプラズマ (QGP) 相と呼ばれる相への非閉じ込め相転移が起こることが知られており、QGP相ではハドロンではなくその構成要素であるクォークやグルーオンといった自由度があらわに現れることが期待される。近年では相対論的重イオン衝突実験を通して、QGPは従来の予想に反して強結合系であることが明らかになり、その性質の起源について関心を集めている。

本研究では格子QCD計算を用いてグルーオン伝搬関数を求め、ハドロン相とQGP相での振る舞いを調べることでグルーオンの長距離 (赤外) 領域での動力学を明らかにする。

2 Gribov-Zwanzigerシナリオ

QCDのようなゲージ理論ではゲージ自由度が存在するために、連続理論を量子化する際にゲージ固定をする必要がある。経路積分でいえば、ゲージ等価な配位の中から一つを代表元として選び出して配位を足し合わせることになる。Faddeev-Popovによるゲージ固定の処方箋は摂動論の範囲では有効だが、摂動論を超えるとクーロンゲージ条件を満たすゲージ等価な配位がいくつも存在してしまう [1]¹。Gribov、Zwanzigerらは

$$\int \mathcal{D}A_\mu \rightarrow \int_{-\partial_i D_i[A] > 0} \mathcal{D}A_\mu \delta(\partial_i A_i) \det(-\partial_i D_i) \quad (1)$$

というように、Faddeev-Popov演算子 $-\partial_i D_i$ が正の固有値だけをもつ配位に関してのみ足し上げることでこのゲージ固定の曖昧さが解決されると主張した。新たに加えられた条件はYang-Mills作用にホライズン項を加えることで課せることが後に示され、さらにホライズン項は補助場を導入することで局所化できることが明らかになった [2]。

Zwanzigerによって提案されたラグランジアンでは、グルーオン場と新たに加えた補助場

¹ここではクーロンゲージを例にとっているが、ランダウゲージなどの共変ゲージでも同様である。

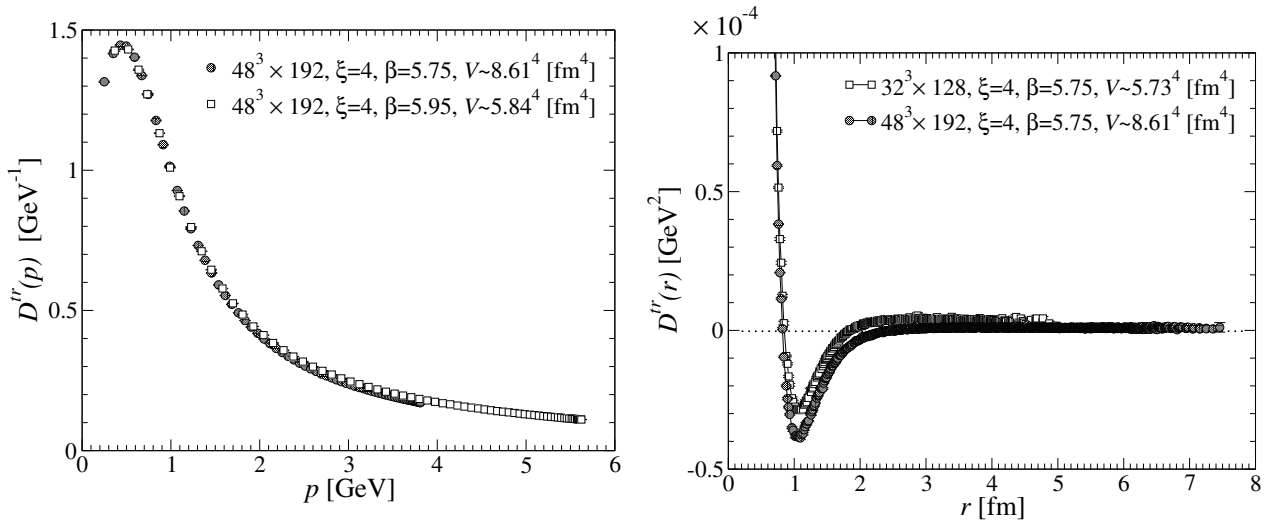


図 1: 閉じ込め相での運動量空間 (左) 及び位置空間 (右) におけるグルーオン伝搬関数。

との混合によって横波グルーオン伝搬関数が

$$D^T(\vec{p}, p_4) = \frac{1}{p_4^2 + E(\vec{p}^2)}, \quad E^2(\vec{p}^2) = \vec{p}^2 + \frac{m^4}{\vec{p}^2} \quad (2)$$

となり赤外極限でゼロになる。 m^4 はホライズン項を加える際に導入されるパラメータに比例しており、それは自由エネルギーを最小にするように決定される。ホライズン条件と呼ばれるこの条件が非自明な解をもつことで非自明な真空解が決まることになる。このようにゲージ固定の曖昧さを取り除くことでグルーオンの赤外領域 (長距離領域) の振る舞いが摂動論でのそれに比べると大きく異なり、その振る舞いからカラー閉じ込めを説明するというのがGribov-Zwanzigerシナリオである。

クーロンゲージではこの議論が有限温度でもそのまま当てはまる。場の理論では時間をコンパクト化することで温度が導入される。クーロンゲージは各時刻毎に $\partial_i A_i(\vec{x}, t) = 0$ を課するため、ゲージ固定の曖昧さを取り除くための条件は各時刻毎に課す必要がある。これは温度に関わらずこのシナリオが成り立つことを意味しており、QGP相においても横波グルーオン伝搬関数は赤外抑制されることが期待される。

3 数値シミュレーション

ここでは同時刻でのグルーオン場の相関関数

$$\langle A_i^a(\vec{x}, t) A_i^b(\vec{y}, t) \rangle = \delta^{ab} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\partial_i^2} \right) D^T(|\vec{x} - \vec{y}|) \quad (3)$$

及び運動量空間へのフーリエ変換 $D^T(|\vec{p}|)$ を計算した。シミュレーションはクエンチ近似で、 $\xi = a_s/a_\tau = 4$ の非等方格子でウィルソンゲージ作用を用いた。格子上では $\sum_{i,\vec{x}} \text{Re Tr } U_i$ を最大化ことでクーロンゲージにゲージ固定できる。この条件は連続極限においてクーロンゲージ条件と Faddeev-Popov 演算子が非負になるという条件に等しくなる。

図1に閉じ込め相での結果を示す。運動量空間での伝搬関数は500[MeV]近傍でピークをもち、深赤外領域で著しく抑制されている。自由場の場合には $p \rightarrow 0$ で発散し、また有質

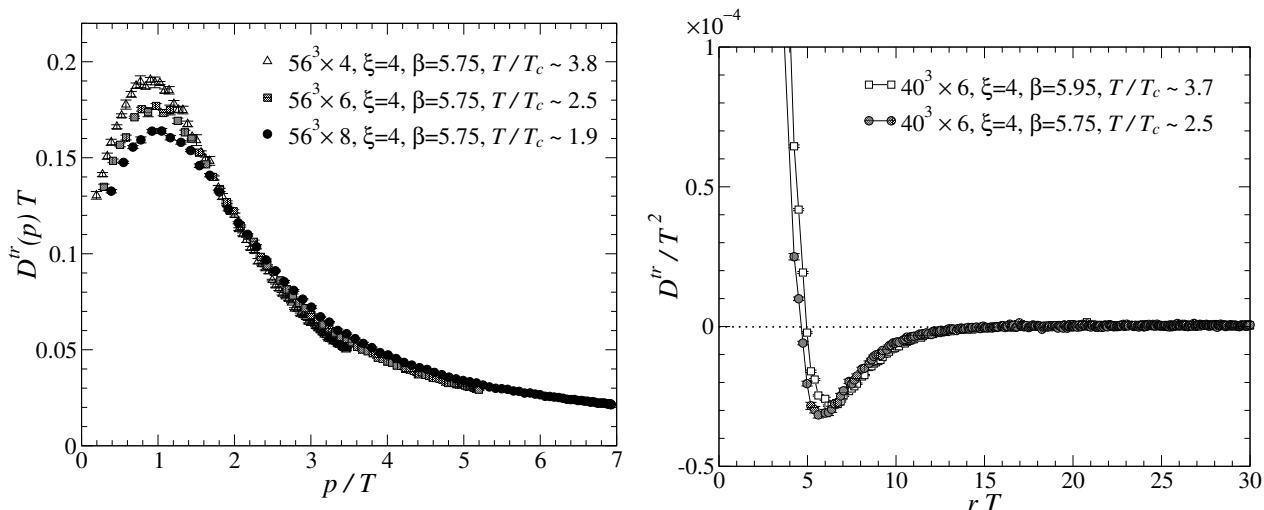


図 2: 非閉じ込め相での運動量空間 (左) 及び位置空間 (右) におけるグルーオン伝搬関数。

量粒子では赤外極限で有限の値をもち常に傾きが負であることから、グルーオンはゼロ質量粒子や有質量粒子のいずれとも異なる振る舞いを示すことがわかる。位置空間では1[fm]以下の近距離では急激に減少し、およそ1~2[fm]の領域で相関が負になり、長距離では相関がなくなることがわかった。これはグルーオンがハドロン内部 (純Yang-Mills理論ではグルーボール) に閉じ込められており、ハドロンスケールを超えて伝搬することはないというカラー閉じ込め現象と矛盾しない結果である。

図2にはQGP相での横波グルーオン伝搬関数が図示されている。グルーオン伝搬関数はQGP相においても閉じ込め相と同様な赤外抑制が見られ、位置空間での相関関数に関してもやはり長距離では相関がなくなることがわかった。同様の振る舞いはランダウゲージでも示されており [3]、横波グルーオンが示す極めて特異な振る舞いだと考えられる。

4 まとめ

本研究ではクーロンゲージQCDにおける横波グルーオン伝搬関数を閉じ込め相、QGP相の両相で計算した。運動量空間での伝搬関数には両相において赤外抑制が見られ、閉じ込め相ではおよそ500[MeV]、非閉じ込め相では $p/T \sim 1$ 近傍でピークをもつことがわかった。また位置空間ではともに近距離で急激に減少し、中距離において負の相関をもち長距離で相関がなくなことを示した。こうした振る舞いは相転移温度の4倍弱という高い温度領域でも見られ、グルーオンに関してはQGP相においても自由粒子的な振る舞いは見られず、ハドロン相で見られた非摂動的な側面が残り続けることを示唆している。

References

- [1] V. N. Gribov, Nucl. Phys. **B139**, 1 (1978).
- [2] D. Zwanziger, Nucl. Phys. **B323**, 513 (1989).
- [3] T. Mendes, talk given at Extreme QCD 2010

The role of magnetic monopole in confinement/deconfinement phase*

柴田章博

高エネルギー加速器研究機構・計算科学センター

1 はじめに

双対超伝導描像は、クォーク閉じ込めを理解する最も魅力的かつ有力なシナリオである。特に、随伴 Higgs 場を含まない Yang-Mills 理論や QCD において、双対マイスナー効果を引き起こすのは、ゲージ場の位相的配位であると考えられる。これまでに多くの研究がなされ、著しい成果が得られた。しかしながら、特定のゲージ固定を必要としており、特別な仮定を設けずに Yang-Mills 理論からゲージ不変な双対超伝導描像が得られること、すなわちゲージ不変な磁気モノポール配位が閉じ込めに支配的な寄与をもたらすことを立証することが求められる。

これらの困難を解決し双対超伝導描像を確立するため、クォーク閉じ込めに効くゲージ不変な位相的配位を特別なゲージ固定に依らずに抽出できるような新しい定式化を提唱した。SU(2) Yang-Mills 場においては、Cho-Faddeev-Niemi-Chabanov (CFNS) 分解の格子ゲージ理論版を提唱し [3][1][2]、その拡張として SU(N) Yang-Mills 場における定式化を行った [5][4]。リンク変数はゲージ群の stability 部分群とその商空間の成分とに分解することができる。SU(2) においては、stability 部分群は U(1) ゲージ群が唯一であるが、SU(3) においては、 $\tilde{H} = U(1) \times U(1)$ (maximal option) と $\tilde{H} = U(2)$ (minimal option) との 2 つの分解が存在する。[7] においては、SU(N) Yang-Mills 場のリンク変数による厳密な分解方程式の解を与えた。この定式化によって、閉じ込めに寄与する位相的配位をゲージに依存することなく抽出することが可能となった。また、ノンアーベリアン・ストークスの定理との関係を議論することで、YM 場の分解で得られた場の閉じ込めに果たす役割を議論することができ、分解で得られた変数を用いてゲージ不変な磁気モノポールが導出される [11]。

*本研究は、近藤慶一（千葉大院・理）、篠原徹（千葉大院・理）、加藤清考（福井高専）との共同研究 [13] に基づく。

本研究では、SU(3) minimal option における解析を行い、クォーク閉じ込め機構における磁気モノポールの果たす役割について調べる。

2 変数分解

YM 場のゲージポテンシャルを分解 $U_{x,\mu} = V_{x,\mu} X_{x,\mu}$ で、連続極限でゲージポテンシャルの分解 $A_\mu(x) = V_\mu(x) + X_\mu(x)$ を与えるものを考える [5]。リンク上の中点で定義された場 $\mathbb{A}_{x',\mu}, \mathbb{V}_{x',\mu}$ 及び、格子上場 $\mathbb{X}_{x,\mu}$ とを用いて次のように対応付けられる。ゲージ変換 $\Omega_x \in SU(3)$ に対して $V_{x,\mu}$ はリンク変数として変換し、 $X_{x,\mu}$ はサイト変数として変換する。

$$U_{x,\mu} \rightarrow \Omega U_{x,\mu} = \Omega_x U_{x,\mu} \Omega_{x+\mu}^\dagger, \quad (1a)$$

$$V_{x,\mu} \rightarrow \Omega V_{x,\mu} = \Omega_x V_{x,\mu} \Omega_{x+\mu}^\dagger, \quad (1b)$$

$$X_{x,\mu} \rightarrow \Omega X_{x,\mu} = \Omega_x X_{x,\mu} \Omega_x^\dagger. \quad (1c)$$

リンク変数の分解は、ゲージ群 $G = SU(3)$ の minimal option の stability group $\tilde{H} = U(2)$ とその商空間 G/H に対応して与えられる。リンク変数の分解は、新たにカラー場 $\mathbf{h}_x = \Theta_x (\lambda_8/2) \Theta_x^\dagger$ ($\in G/H$) を導入した次の定義方程式で与えられる [3][4]。

$$D_\mu^\epsilon[V] \mathbf{h}_x = \frac{1}{\epsilon} (V_{x,\mu} \mathbf{h}_{x+\mu} - \mathbf{h}_x V_{x,\mu}) = 0, \quad (2)$$

$$g_x = e^{-2\pi q_x/N} \exp(-ia_x^{(0)} \mathbf{h}_x - i \sum_{l=1}^3 a_x^{(l)} \mathbf{u}_x^{(l)}) = 1. \quad (3)$$

この方程式は厳密解が得られており、任意の YM 場カラー場が与えられると一意に分解が決定される。

$$L_{x,\mu} = \frac{N^2 - 2N + 2}{N} \mathbf{1} + (N-2) \sqrt{\frac{2(N-1)}{N}} (\mathbf{h}_x + U_{x,\mu} \mathbf{h}_{x+\mu} U_{x,\mu}^{-1}) + 4(N-1) \mathbf{h}_x U_{x,\mu} \mathbf{h}_{x+\mu} U_{x,\mu}^{-1}, \quad (4a)$$

$$\hat{L}_{x,\mu} = \left(\sqrt{L_{x,\mu} \hat{L}_{x,\mu}^\dagger} \right)^{-1} L_{x,\mu}, \quad (4b)$$

$$X_{x,\mu} = \hat{L}_{x,\mu}^\dagger (\det(\hat{L}_{x,\mu}))^{1/N} g_x^{-1}, \quad (4c)$$

$$V_{x,\mu} = g_x \hat{L}_{x,\mu} U_{x,\mu} \left(\det(\hat{L}_{x,\mu}) \right)^{-1/N}. \quad (4d)$$

変数分解で得られた新しい変数で書かれた理論が YM 理論と等価な理論であるためには、カラー場導入で拡大したゲージ対称性をもともとの YM のゲージ対称性に一致させるため、reduction 条件を導入する。reduction 条件は、与えられたリンク変数 $\{U_{x,\mu}\}$ に対して reduction 関数 $F_{\text{reduction}}[\mathbf{h}_x; U_{x,\mu}]$ を最小化する $\{\mathbf{h}_x\}$ として定める。ここでは、 $SU(2)$ YM 理論で CFNS 分解で導入された reduction 関数を $SU(N)$ に拡張したものを導入する。

$$F_{\text{reduction}}[\mathbf{h}_x; U_{x,\mu}] = \sum_{x,\mu,k} \frac{1}{2} \text{Tr} \left((D_\mu^\epsilon[U_{x,\mu}] \mathbf{h}_x)^\dagger D_\mu^\epsilon[U_{x,\mu}] \mathbf{h}_x \right). \quad (5)$$

ここで、変換数はゲージ変換 Ω に対して \mathbf{h}_x はゲージ変換に対して $\mathbf{h}_x \rightarrow \mathbf{h}'_x = \Omega_x \mathbf{h}_x \Omega_x^\dagger$ と変換し、 $F_{\text{reduction}}$ はゲージ不変である。

得られた新しい変数 $V_{x,\mu}$ の物理的な意味は、ノンアーベリアンストークスの定理 (NAST) との対応を見ると明らかになる。基本表現のクォークに対するウイilsonソループは、minimal option¹ のリンク変数で得られたあたらしい変数を用いて書けることが示される [10][12]。

$$W_C[U] = \prod_{\langle x, x+\mu \rangle \in C} U_{x,\mu} \cong \int d\mu(\xi_x) \prod_{\langle x, x+\mu \rangle \in C} \langle \Lambda, \xi_x | V_{x,\mu} | \xi_{x+\mu}, \Lambda \rangle =: W_C[V]. \quad (6)$$

¹Wilson loop は使用するフェルミオンの表現に依存しており、基本表現のフェルミオンに対応する表現は、minimal option であり、 $SU(2)$ の類推で従来考えられてきた最大可換ゲージにおけるアーベリアン射影ではないことが示される。

3 磁気的モノポール

ノンアーベリアンストークスの定理を用いると、ウイilsonソループを境界とする面 $\Sigma : C = \partial\Sigma$ を用いて、ウイilsonソループは対のように書きなおせる。[10]

$$W_C[A] = \int d\mu_\Sigma(\xi) \exp \left(\int_{S: C=\partial\Sigma} dS^{\mu\nu} F_{\mu\nu}[\mathcal{V}] \right), \quad (7)$$

ここで、 $\mathcal{V}_\mu(x)$ は次で与えられ、リンク変数 $V_{x,\mu} = \exp(-ig\epsilon\mathcal{V}_\mu(x))$ の連続極限と一致する。

$$\mathcal{V}_\mu(x) = \mathcal{A}_\mu(x) - \frac{2(N-1)}{N} [\mathbf{h}(x), [\mathbf{h}(x), \mathcal{A}_\mu(x)]] + ig^{-1} \frac{2(N-1)}{N} [\mathbf{h}(x), \partial_\mu \mathbf{h}(x)]. \quad (8)$$

さらに Hodge 分解を適用するとウイilsonソループは、 $\mathcal{V}_\mu(x)$ で定義される電磁的カレント j と磁気的カレント k を用いて書きなおすことができる。

$$W_C[A] = \int d\mu_\Sigma(\xi) \times \exp \left[ig \sqrt{\frac{N-1}{2N}} (k, \Xi_\Sigma) + ig \sqrt{\frac{N-1}{2N}} (j, N_\Sigma) \right]. \quad (9)$$

ここで、 k, j は 1-form の保存カレント $\delta k = 0 = \delta j$ で次で与えられる。

$$k := \delta^* F = *dF, \quad \Xi_\Sigma := \delta^* \Theta_\Sigma \Delta^{-1}, \quad (10a)$$

$$j := \delta F, \quad N_\Sigma := \delta \Theta_\Sigma \Delta^{-1}, \quad (10b)$$

ここで、 $\Delta := d\delta + \delta d$ はラプラス演算子、 $\Theta_\Sigma^{\mu\nu} := \int_\Sigma d^2 S^{\mu\nu}(x(\sigma)) \delta^D(x - x(\sigma))$ は面要素である。したがって、格子上的磁気的モノポールは新しい変数を用いて次で与えられる。

$$\Theta_{\mu\nu}^8 = -\arg \text{Tr} \left[\left(\frac{1}{3} \mathbf{1} - \frac{2}{\sqrt{3}} \mathbf{h}_x \right) V_{x,\mu} V_{x+\mu,\nu} V_{x+\nu,\mu}^\dagger V_{x,\nu}^\dagger \right], \quad (11a)$$

$$k_{x,\mu} := \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \Theta_{\alpha\beta}^8. \quad (11b)$$

定義より、 k_μ はゲージ不変な量であり、tability 部分群 $\tilde{H} = U(2)$ の固有状態 $V_{x,\mu}$ から導かれるノンアーベリアンモノポールである。

したがって、格子上的アーベリアンドミナンス、磁気的モノポールドミナンスは次で与えられる。

$$\langle W_C[U] \rangle \cong \langle W_C[V] \rangle \cong \langle W_M[k] \rangle \quad (12)$$

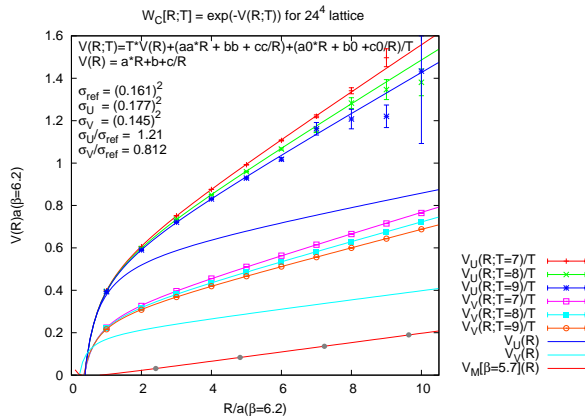


図 1: ウィルソンループ期待値とクォーク間ポテンシャルの $V(R, T)$ と $V(R)$: 上から順にオリジナル YM 場 $\langle W_{(R,T)}[U_{x,\mu}] \rangle$, restricted $U(2)$ -part $\langle W_{(R,T)}[V_{x,\mu}] \rangle$, 磁氣的モノポールパート $\langle W_{(R,T)}[k_{x,\mu}] \rangle$.

4 シミュレーション

図 1 は、ウィルソンループの期待値 $\langle W_C[U] \rangle$, $\langle W_C[V] \rangle$, $\langle W_M[k] \rangle$ と、それぞれから計算されるクォーク・クォーク間ポテンシャルを示している。 (R, T) の長方形のウィルソンループから得られる期待値を次の 2 変数関数形で string tension σ を求めた。

$$\langle W_{(R,T)}[V] \rangle = \exp(-V(R, T)), \quad (13)$$

$$V(R, T) := T \times V(R) + (a_1 R + b_1 + c_1/R) + (a_2 R + b_2 + c_2/R)/T, \quad (14)$$

$$V(R) = \sigma R + b + c/R. \quad (15)$$

$\langle W_C[U] \rangle$ に比して、 $\langle W_C[V] \rangle$ から 85-90% の restricted $U(2)$ ドミナンス (V ドミナンス), $\langle W_M[k] \rangle$ から 75% の $U(2)$ 磁氣的モノポールドミナンスを示している。基本表現のクォークの閉じ込めは、minimail option で構成したノンアーベリアン磁氣的モノポールが支配的役割を果たしていることを示す。

閉じ込め相・非閉じ込め層の相転移と磁氣的モノポールの関係を理解することは、双対超電導描像における閉じ込めの理解において重要である。我々の方法によって、ゲージ不変な (ゲージに依存しない) 磁氣的モノポールを定義し、その配位を抽出し、クォーク間ポテンシャルのすることが可能となった。格子上的磁氣的モノポールは、量子化されたチャージを持ち幾何的な対応物として

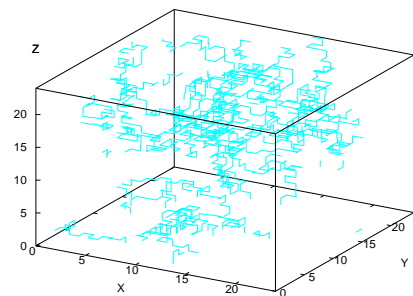
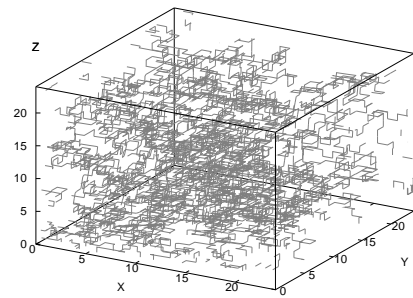


図 2: 磁氣的モノポールの配位 : 4次元ユークリッド空間を 3次元空間に射影した。図は、ある配位の連結した最大クラスターのモノポールを示す。(上図) 24^4 格子 $\beta = 6.0$ (下図) $24^3 \times 8$ 格子 $\beta = 6.0$

記述され、代数幾何の手法を用いて解析することが可能となる。図 2 は、抽出したモノポールの配位の可視化の例を示す。 $\beta = 6.0$ における、 24^4 格子 (上段) と $24^3 \times 8$ 格子 (下段) のモノポールループ²の最大クラスター (モノポールループの連結成分) を示す。代数的幾何の手法を用いて、閉じ込め非閉じ込めの相転移と磁氣的モノポールループの幾何的な指標 (モノポール密度、ループの長さ、 T 軸方向のまきつき数) との対応を調べる研究を現在進めている。

5 まとめ

$SU(2)$ の CFN 分解の方法を $SU(N)$ に拡張した格子上の非線形変換を方法用いて、双対超電導描像におけるクォークの閉じ込め機構に中心的な役割を示すモードを YN 場からゲージに依存することなく抽出し、クォーク閉じ込めの弦張力を再現することを示した。ノンアーベ

²カレント保存則から、モノポールカレントはループをなすことが示される。

リアンストークスの定理との対応から、 $SU(3)$ においては、minimal option によって抽出した restricted $U(3)$ のモードが寄与することを実際にシミュレーションによって示した。ゲージ不変なモノポールの配位を直接シミュレーションの配位から抽出化のであるため、閉じ込め・非閉じ込めの有限温度転移の対し適用し、モノポールの果たす役割の解析できる。

謝辞

本研究は KEK 大型シミュレーション研究 No.09-15 (FY2009) 及び No.09/10-19 (FY2009-2010) のサポートを受けた。また、科学研究費基盤研究 (C) 21540256 の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] A. Shibata, S. Kato, K.-I. Kondo, T. Murakami, T. Shinohara, S. Ito, CHIBA-EP-165, KEK-PREPRINT-2007-19, arXiv:0706.2529 [hep-lat]. Published in Phys.Lett.B653:101-108,2007
- [2] S. Ito, S. Kato, K.-I. Kondo, T. Murakami, A. Shibata, T. Shinohara CHIBA-EP-158,
- [3] Kei-Ichi Kondo, Akihiro Shibata, Toru Shinohara, Takeharu Murakami, Seikou Kato, Shoichi Ito, CHIBA-EP-168, KEK-2008-1, arXiv:0803.2451 [hep-lat]
- [4] A. Shibata, S. Kato, K.-I. Kondo, T. Murakami, T. Shinohara, S. Ito, CHIBA-EP-166, KEK-PREPRINT-2007-50, POS(LATTICE-2007)331,arXiv:0710.3221 [hep-lat];
- [5] Kei-Ichi Kondo, Toru Shinohara, Takeharu Murakami, Phys.Lett.B645:67-74(2007), CHIBA-EP-167, arXiv:0803.0176 [hep-th] KEK-PREPRINT-2006-2,hep-lat/0604016. .
- [6] Kei-Ichi Kondo, Akihiro Shibata, Toru Shinohara, Seikou Kato, CHIBA-EP-185, KEK-PREPRINT-2010-22, arXiv:1007.2696 [hep-th]
- [7] Akihiro Shibata, Kei-Ichi Kondo, Toru Shinohara, (Chiba U.) Phys.Lett.B691:91-98,2010., KEK-PREPRINT-2009-32, CHIBA-EP-181, arXiv:0911.5294 [hep-lat]
- [8] Akihiro Shibata, Kei-Ichi Kondo, Seikou Kato, Shoichi Ito, Toru Shinohara, Nobuyui Fukui, PoS LAT2009:232,2009, KEK-PREPRINT-2009-28, CHIBA-EP-180, Nov 2009. 7pp.
- [9] S. Kato, K.-I. Kondo, A. Shibata, T. Shinohara, S. Ito, PoS LAT2009:228,2009, CHIBA-EP-179, KEK-PREPRINT-2009-27, arXiv:0911.0755 [hep-lat]
- [10] K.-I. Kondo, Phys.Rev.D77 085029 (2008)
- [11] Kei-Ichi Kondo, Akihiro Shibata, CHIBA-EP-170, KEK-PREPRINT-2007-73, arXiv:0801.4203 [hep-th]
- [12] K.-I. Kondo and A. Shibata, , CHIBA-EP-170, KEK-PREPRINT-2007-73, arXiv:0801.4203[hep-th]
- [13] A. Shibata, K.-I. Kondo, S. Kato,T. Shinohara, Talk given at the 28th International Symposium on Lattice Field Theory, Lattice 2010, June 14 –19 at the Tanka Village Resort, Villasimius, Sardinia, Italy.

強結合 U(1) 格子ゲージ理論に基づくグラフェンのカイラル対称性と電子物性

荒木 康史*、初田 哲男

(東京大学)

1 はじめに

2004年に初めて実験的に取り出しが成功して以来 [1]、グラフェン (graphene; 炭素原子の単原子層物質) は理論・実験の双方で多大な関心を集めている [2]。グラフェンの重要な特徴の一つは、その上に存在する電荷の担い手 (準粒子) のエネルギー・スペクトルが運動量空間内の独立な2点 (ディラック・ポイント) においてギャップレスとなり、その周囲で線形の分散関係を示すことである [3]。したがって、これらの準粒子は低エネルギー領域においては、(2+1)次元平面内を伝播するゼロ質量のディラック粒子として記述することができる [4]。この有効理論が持つ“カイラル対称性”は、元々のグラフェンの六角格子を構成する、2つの三角格子の入れ替えに関する対称性に対応する。線形の分散関係により、電気的に中性なグラフェンは半金属として振舞う。

グラフェンの有効理論における大きな問題の一つは、電子間のクーロン相互作用を導入した場合の系の振舞いに関してである。準粒子のフェルミ速度 v_F は光速の1/300倍と非常に小さく、真空中のグラフェンにおけるクーロン相互作用の実効的な強さは v_F の逆数に比例して大きくなる。この強結合性により、真空中の単層グラフェンでは“カイラル対称性”が自発的に破れ、スペクトルにギャップを生じる (絶縁体として振舞う) 可能性が指摘されている [5]。この問題に関して、現在までに Schwinger–Dyson 方程式 [6, 7, 8] や、 $1/N$ 展開 [9, 10, 11]、厳密繰り込み群 [12]、格子モンテカルロ計算 [13, 14, 15, 16] などによる研究が行われている。ただし、これらの研究は主に、半金属-絶縁体相転移点の近傍や、フレーバー数が非常に多い領域に着目したものである。

本研究は、この系の強結合領域における振舞いを解明することを目的とし、正方格子上で正則化された低エネルギー有効理論について強結合展開による解析を行う [17, 18]。強結合展開の0次と1次の項に関して自由エネルギー (有効ポテンシャル) を計算し、自発的に生成されるギャップの大きさ、およびそれに伴って現れる集団励起のモードの分散関係を、元々の六角格子の間隔に対応するカットオフ・スケールと比較して見積もる。

2 低エネルギー有効理論

この系の Euclid 空間における有効作用は、(2+1)次元平面内のフェルミオン ψ_σ と (3+1)次元空間内の電磁場 A_μ が相互作用する、強結合 U(1) ゲージ理論として

$$S_E = \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \int dx^{(3)} \bar{\psi}_\sigma \left[\gamma_4(\partial_4 - iA_4) + \gamma_1\partial_1 + \gamma_2\partial_2 + \frac{m}{v_F} \right] \psi_\sigma + \frac{\beta}{2} \sum_{j=1,2,3} \int dx^{(4)} (\partial_j A_4)^2, \quad (1)$$

と記述される [7, 10]。ただし、ここでは時間方向の変数に関してスケール変換 $x_4 \rightarrow x_4/v_F$, $A_4 \rightarrow v_F A_4$ を行い、クーロン相互作用は瞬間的に伝わるものとして磁場の効果 (ゲージ場の遅延効果) $A_{1,2,3}$ を無視している。 ψ_σ は4成分 (2つの三角格子 \times 2つのディラック・ポイント) のフェルミオンであり、 σ は準粒子の元々のスピンに対応する。 m は外的要因 (他の物質との相互作用、吸着された原子など) によって生成されたフェルミオンのbareな質量であり、 $m=0$ の場合、この系は16種類の演算子 $\{1, \gamma_3, \gamma_5, \gamma_3\gamma_5\} \otimes \{1, \vec{\sigma}\}$ によって生成される大域的 U(4) カイラル対称性をもつ。第2項は U(1) ゲージ場の運動項であり、 $\beta^{-1} = e^2/v_F\epsilon_0$ は実効的な相互作用の強さである (e は電子の電荷、 ϵ_0 は真空の誘電率)。真空中のグラフェンにおいては $\beta = 0.0369$ であるため、 β に関する強結合展開は信頼できると期待される。

次に、式 (1) の有効作用を正方格子上で正則化する。ここで、正方格子の格子間隔 a は、元々の六角格子のカットオフ・スケールを再現するように、六角格子の隣接原子間隔 $a_{\text{hc}} \sim 1.4\text{\AA}$ 程度にとる。(2+1)次元では格子フェルミオンは8個の doubler をもつので、これらを4成分 \times 2 (スピン自由度) の物理的な自由度に対応させれば、単層グラフェンのフェルミオン作用 S_F は1個の staggered fermion $\chi(x)$ を用いて記述することができる。ただし、staggered fermion では taste 対称性が破れているため、格子作用が持つ大域的対称性は $U(1)_V \times U(1)_A$ となる。一方、格子上でのゲージ場はリンク変数 $U_4(x) = \exp[i\theta(x)]$ ($-\pi \leq \theta < \pi$) を用いて記述される。ゲージ場の運動項 S_G に関しては、リンク変数の積 (plaquette) を用いて記述されるコンパクト形式と、ゲージ場の成分 θ の多項式を用いて記述される非コンパクト形式が存在する。コンパクト形式には、非コンパクト形式や連続理論では含まれないようなゲージ場の自己相互作用項が存在する [15, 16]。この研究では、コンパクト形式と非コンパクト形式から導かれる結果を比較する。

*araki@nt.phys.s.u-tokyo.ac.jp

3 強結合展開

分配関数 Z を結合定数の逆数 β で展開し、展開の各次数においてリンク変数を積分することにより、この系の有効作用をフェルミオンのみの関数 S_χ として記述することができる [20]:

$$Z = \int [d\chi d\bar{\chi}] [d\theta] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-S_G)^n}{n!} e^{-S_F} \right] = \int [d\chi d\bar{\chi}] e^{-S_\chi}. \quad (2)$$

ここで、展開の0次の項 $S_\chi^{(0)}$ と1次の項 $S_\chi^{(1)}$ はフェルミオンの4点相互作用を含む。Stratonovich–Hubbard変換を行い、ボソンの補助場 $\phi(x) = \phi_\sigma(x) + i\epsilon(x)\phi_\pi(x)$ を導入することにより、これらの項はフェルミオンの2次形式に書き換えることができる ($\epsilon(x) = (-1)^{x_4+x_1+x_2}$)。ここで、 ϕ_σ と ϕ_π はそれぞれ、フェルミオンから構成されるスカラー密度 $M = \bar{\chi}\chi$ と擬スカラー密度 $P = \bar{\chi}i\epsilon\chi$ に対応する。これらの補助場について平均場近似を行うと、フェルミオンについての積分を行うことができ、系の自由エネルギー（有効ポテンシャル） F_{eff} を ϕ の関数として記述することができる。 S_G をコンパクト形式で導入した場合、

$$F_{\text{eff}}(\phi) = \frac{1}{4}|\phi|^2 - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{k}} \ln [G^{-1}(\mathbf{k}; \phi)] - \frac{\beta}{4} \sum_{j=1,2} \left[\int_{\mathbf{k}} G(\mathbf{k}; \phi) \sin^2 k_j \right]^2 + O(\beta^2), \quad (3)$$

ここで $G^{-1}(\mathbf{k}; \phi) \equiv |\phi/2 - m_*|^2 + \sum_{j=1,2} \sin^2 k_j$ であり、運動量積分は $\int_{\mathbf{k}} \equiv (2\pi)^{-2} \int_{-\pi}^{\pi} dk_1 \int_{-\pi}^{\pi} dk_2$ と定義する。特にカイラル極限 ($m = 0$) においては、 F_{eff} は $|\phi|$ の関数として記述され、図1に示すように、いわゆる“Mexican-hat”型を示す。 F_{eff} を最小とする $|\phi|$ がカイラル凝縮（エキシトン凝縮） $\sigma \equiv |\langle \bar{\chi}\chi \rangle|$ を与え、その値は β が大きくなるほど0に近づく。すなわち、強結合領域においてはこの系の“カイラル対称性”は自発的に破れており、相互作用の強さを弱くしていくと対称性は次第に回復されていくことが分かる。この状態は、六角格子における2つの三角格子のいずれかに、電荷が偏っている状態（電荷密度波状態）に相当する。コンパクト形式の定式化を用いると、カイラル凝縮の値は

$$\sigma^C(\beta, m) \simeq (0.240 - 0.297\beta + 0.0239 ma)a^{-2}, \quad (4)$$

と得られる。したがって、有効作用の質量項から、動的に生成される質量の値を見積もると $M_F \simeq (0.523 - 0.623\beta) \text{ eV} + 3.05m$ となる（ただし、典型的なエネルギー・スケールとして格子間隔 $a^{-1} \simeq a_{\text{Hc}}^{-1} = 1.39 \text{ keV}$ を用いる）。 $\beta = 0$ では S_G はゼロとなるので、強結合展開の0次の項は S_G の定式化の違いによらない。強結合展開の1次では違いが現れ、非コンパクト形式における結果は、コンパクト形式における β を 2β で置き換えることにより得られる。

4 集団励起モード

対称性の破れた状態 $\langle \phi \rangle = -\sigma$ の周囲における $\phi(x)$ の揺らぎは、 ϕ_π （位相成分）の揺らぎに対応するモードと、 ϕ_σ （動径成分）の揺らぎに対応するモードの2種類の集団励起のモードを与える。ここでは、それらを“ π -(σ)-exciton”と呼ぶ。これらのモードの有効質量（励起エネルギー） $M_{\pi,\sigma}$ は、 ϕ の関数として表された有効作用 $S_{\text{eff}}[\phi]$ から導かれる伝播関数 $D_{\phi_{\pi,\sigma}}$ の、虚時間方向の極 $D_{\phi_{\pi,\sigma}}^{-1}(\mathbf{p} = 0, \omega = iM_{\pi,\sigma}/v_F) = 0$ をとることにより得られる。

π -exciton モードの質量を m の leading order まで計算すると、 $M_\pi \simeq \frac{2v_F}{a} \sqrt{\frac{m}{M_F(m=0)}}$ と得られる。特にカイラル極限 ($m = 0$) ではこの質量はゼロとなり、対称性の自発的破れによって生じる pseudo-南部–Goldstone ボソンとして振舞う。軸性カレントを真空状態と π -exciton で挟んだ行列要素によって崩壊定数 F_π^T を定義すれば、無限小の局所カイラル変換を考えることにより、これらの物理量は $(F_\pi^T M_\pi)^2 = m\sigma$ という関係式に従うことが分かる。これは、QCD における Gell-Mann–Oakes–Renner 関係式とよく似た形式である。

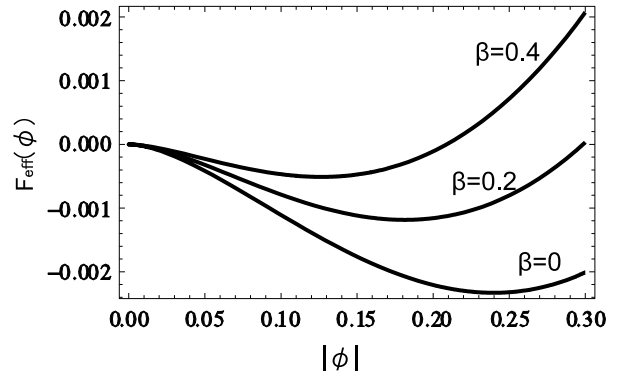


図1: カイラル極限 ($m = 0$) における、補助場 ϕ に対する有効ポテンシャル F_{eff} の振舞い。数値は格子間隔 a を単位とする。

一方、 σ -exciton はカイラル極限でも質量をもち、その数値解は $M_\sigma \simeq (1.30 - 0.47\beta)(v_F/a) + 22.6m$ となる。ただし、この値はカットオフ・スケール $E_\Lambda \sim v_F\pi/a = 13\text{eV}$ と同程度の大きさであり、 σ -exciton に関しては低エネルギー有効理論による近似の信頼性は低いと考えられる。

5 結論

この研究では、U(1) 格子ゲージ理論の強結合展開の手法を用いて、単層グラフェンの強結合極限周辺における振舞いを調べた。その結果、有効理論における“カイラル対称性”は強結合領域では自発的に破れて絶縁体として振舞い、結合定数の逆数 β が大きくなるほどカイラル凝縮（エキシトン凝縮） σ の値は減少することを確認した。特にゲージ場の運動項に関しては、コンパクト形式および非コンパクト形式による定式化から得られる結果を比較した。強結合極限では違いが現れないが、展開の1次においてはコンパクト形式よりも非コンパクト形式の方が、 $\sigma(\beta)$ が速く減少することを示した。これらの解析的に得られた結果は、同じ格子モデルを用いたモンテカルロ計算を強結合・カイラル極限に外挿した値とほぼ一致することが確認できる [16]。

さらに、カイラル対称性の破れに伴って現れる2種類の集団励起モードに関して、それらの分散関係を導出した。その結果、補助場 ϕ の位相揺らぎに対応する“ π -exciton”は、QCDにおける π 粒子と同様にpseudo-南部-Goldstoneボソンとして振舞うことを示した。QCDでの π 粒子と同様に単層グラフェン系での π -excitonにおいても、このような励起モードが実験的に確認できれば、カイラル対称性が破れている有力な証拠になりうると期待できる。一方、カイラル凝縮の大きさの揺らぎに対応する“ σ -exciton”はカットオフ・スケール E_Λ と同程度の大きな質量を持つ。このため、このモードに関しては低エネルギー有効理論のスケールを超えた解析が必要とされている。

現在、筆者たちはグラフェンの元々の六角格子上でゲージ理論を構築し、強結合展開によって系の性質を解明することを試みている。これにより、運動量空間内の全ての運動量モードを取り入れた解析が可能になる。さらに、本研究で扱った電荷密度波状態だけでなく、六角格子構造に起因する豊富な相構造を扱えるようになることが期待される。また、最近多くの関心を集めている二層グラフェン系 [22] に対して、強結合展開の手法を適用することも検討している。

謝辞

青木秀夫氏、大西明氏、岡隆史氏、佐々木勝一氏、新谷栄悟氏、西田祐介氏、山本直希氏には、本研究に関してご議論いただいたことを深く感謝する。本研究の一部（荒木）は、日本学術振興会の特別研究員奨励費 (DC1, No.22.8037) によるものである。本研究の一部（初田）は、新学術領域研究 (No. 2004: 20105003) および文部科学省の科研費 (No. 22340052) によるものである。

参考文献

- [1] K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva, A. A. Firsov, *Science* **306**, 666 (2004).
- [2] See, e.g. A. H. Castro Neto et al., *Rev. Mod. Phys.* **81**, 109 (2009).
- [3] P. E. Wallace, *Phys. Rev.* **71**, 622 (1947).
- [4] G. W. Semenoff, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 2449 (1984).
- [5] See, e.g., A. H. Castro Neto, *Physics* **2**, 30 (2009).
- [6] D. V. Khveshchenko, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 246802 (2001); D. V. Khveshchenko and H. Leal, *Nucl. Phys. B* **687**, 323 (2004); D. V. Khveshchenko, *J. Phys.: Condens. Matter* **21**, 075303 (2009).
- [7] E. V. Gorbar, V. P. Gusynin, V. A. Miransky and I. A. Shovkovy, *Phys. Rev. B* **66**, 045108 (2002).
- [8] O. V. Gamayun, E. V. Gorbar and V. P. Gusynin, *Phys. Rev. B* **81**, 075429 (2010).
- [9] I. F. Herbut, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 146401, (2006).
- [10] D. T. Son, *Phys. Rev. B* **75**, 235423 (2007).
- [11] J. E. Drut and D. T. Son, *Phys. Rev. B* **77**, 075115 (2008).
- [12] A. Giuliani, V. Mastropietro and M. Porta, arXiv:1001.5347 [cond-mat.str-el]; *Phys. Rev. B* **82**, 121418(R) (2010).
- [13] S. Hands and C. Strouthos, *Phys. Rev. B* **78**, 165423 (2008); W. Armour, S. Hands and C. Strouthos, arXiv:0910.5646 [cond-mat.str-el].
- [14] J. E. Drut and T. A. Lähde, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 026802 (2009); *Phys. Rev. B* **79**, 165425 (2009).
- [15] J. Giedt, A. Skinner and S. Nayak, arXiv:0911.4316 [cond-mat.str-el].
- [16] J. E. Drut, T. A. Lähde and L. Suoranta, arXiv:1002.1273 [cond-mat.str-el].
- [17] Y. Araki and T. Hatsuda, *Phys. Rev. B* **82**, 121403(R) (2010).
- [18] Y. Araki, arXiv:1010.0847 [cond-mat.str-el].
- [19] E. V. Gorbar, V. P. Gusynin, V. A. Miransky, *Phys. Rev. D* **64**, 105028 (2001).
- [20] Reviewed in J. M. Drouffe and J. B. Zuber, *Phys. Rept.* **102**, 1 (1983).
- [21] M. Gell-Mann, R. J. Oakes and B. Renner, *Phys. Rev.* **175**, 2195 (1968).
- [22] See e.g., F. Guinea, *Physics* **3**, 1 (2010).

Rescaled Perturbation Theory

早田 智也

(東京大学)

E-mail: t.hayata@nt.phys.s.u-tokyo.ac.jp

1. はじめに

量子多体系や場の量子論を用いて記述される系において、相互作用の大きさを特徴づけるパラメータ g が大きく変化する現象にしばしば出くわすことがある [1]. 例えば、冷却原子系における BEC-BCS クロスオーバーでは Feshbach 共鳴を用いて原子間の相互作用の大きさや符号を変化させることができ [2, 3], また高密度量子色力学におけるハドロン-クォーク間の相転移では化学ポテンシャルに依存して結合の強さ g が変化し [4], クォークグルーオンプラズマの臨界温度付近では温度に依存して g が変化する [5]. このような現象を扱うために、これまでに resummed perturbation, optimized perturbation, variational perturbation というような g についての摂動級数を足しなおす手法や、より収束性の優れた振る舞いをする級数に展開しなおす手法が研究されてきた [6, 7].

本研究では、弱結合展開をもとにした非摂動的手法を考え、一次元の量子系における非調和振動子や二重井戸型ポテンシャルに応用することで、弱結合から強結合まで広い領域の結合の強さ g においてこの手法が適用できることを確認した. 高次まで展開した摂動級数を足しなおすかわりに、最低次の摂動展開を g をスケールしながら繰り返しおこなうことで、ハミルトニアン固有値、固有ベクトルの g 依存性を同時に求めることができる. 基本となる微分方程式は g をカットオフスケールと読みかえれば厳密くりこみ群 [8] の方法と同様の形をしている.

2. 理論形式と応用

次のようなハミルトニアンで記述される量子系を考える.

$$\mathcal{H}(g) = \mathcal{H}_0 + g\mathcal{H}_{\text{int}} \quad , \quad (1)$$

ここで g は無次元の結合定数、 \mathcal{H}_0 は厳密に解けているものとする. 簡単のために \mathcal{H}_0 の固有ベクトルが縮退していないとする. δg が十分小さければ、 $E_n(g)$ と $|\psi_n(g)\rangle$ から $E_n(g + \delta g)$ と $|\psi_n(g + \delta g)\rangle$ を Rayleigh Schrödinger perturbation theory のリーディングを用いて計算することができる. ここで $\delta g \rightarrow 0$ の極限を取ると、次のような連立微分方程式が得られる.

$$\frac{d}{dg} E_i(g) = \mathbf{H}_{\text{int}}^{ii}(g) \quad , \quad (2)$$

$$\frac{d}{dg} \mathbf{H}_{\text{int}}^{ij}(g) = \sum_{i \neq k} \frac{\mathbf{H}_{\text{int}}^{ik}(g)\mathbf{H}_{\text{int}}^{kj}(g)}{E_i(g) - E_k(g)} + \sum_{j \neq k} \frac{\mathbf{H}_{\text{int}}^{ik}(g)\mathbf{H}_{\text{int}}^{kj}(g)}{E_j(g) - E_k(g)} \quad , \quad (3)$$

$$\frac{d}{dg} |\psi_i(g)\rangle = \sum_{i \neq k} \frac{\mathbf{H}_{\text{int}}^{ki}(g)}{E_i(g) - E_k(g)} |\psi_k(g)\rangle \quad , \quad (4)$$

ここで $\mathbf{H}_{\text{int}}^{ij}(g) = \langle \psi_i(g) | \mathcal{H}_{\text{int}} | \psi_j(g) \rangle$ である. 導出の過程に近似はなく、これらの微分方程式は厳密な結果である. また、状態ベクトルの規格化として $\langle \psi_i(0) | \psi_i(g) \rangle = \langle \psi_i(0) | \psi_i(0) \rangle = 1$ を採用することで、結合定数を動かす際にノルムが保存する、つまり $\frac{d}{dg} \langle \psi_i(g) | \psi_i(g) \rangle = 0$. この連立微分方程式は、初期条件 $E_n(0), \mathbf{H}_{\text{int}}^{ij}(0), |\psi_n(0)\rangle$ があれば解くことができ、原理的には任意の大きさの g まで走らせることが可能である.

この手法を一次元の、量子非調和振動子 (AHO): $\mathcal{H}_{\text{AHO}}(g) = (1/2)p^2 + (1/2)x^2 + gx^4$ と、量子二重井戸 (DWP): $\mathcal{H}_{\text{DWP}}(g') = \mathcal{H}_{\text{AHO}}(1/2) - g'x^2$ に適用した. ここで、AHO から DWP に図 2 のように移り変わる

g	E_0	E_1	E_2
0.5	0.69617582	2.3244064	4.3275250
	0.69617582	2.3244064	4.3275250
1.0	0.80377065	2.7378923	5.1792917
	0.80377065	2.7378923	5.1792915
5.0	1.2245874	4.2995081	8.3179758
	1.2245870	4.2995017	8.3179605
10	1.5049814	5.3216308	10.348359
	1.5049724	5.3216080	10.347056

表 1 Comparison of the lowest three eigenvalues of AHO. The upper numbers are obtained from the present method and the lower numbers from Ref. [10].

g'	E_0	E_1
0.50	0.53018104538	1.8998365150
	0.53018104524	1.8998365149
1.0	0.32882650295	1.4172681012
	0.32882650260	1.4172681011
5.5	-10.316788242	-10.316773352
	-10.316788351	-10.316773442
8.0	-25.420689499	-25.420692377
	-25.420693642	-25.420693642

表 2 Comparison of the lowest two eigenvalues for the DWP. The upper numbers are calculated by our method, while the lower numbers are taken from Ref. [11].

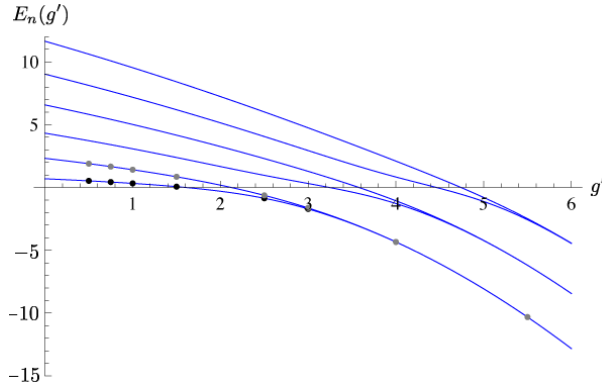


図 1 Lowest six energy eigenvalues for the DWP with $N = 50$. Filled circles are high accuracy numerical results given in Ref. [11].

ようパラメータ g' を定義した. どちらも結合の強さについての摂動展開が収束しないことがよく知られていて, 後者はさらに Borel 和がうまくいかない典型例である [6, 9].

初期条件として, 十分な精度が出せる 50 番目までの調和振動子を用意して, x^4 項のポテンシャルを徐々に入れていったときのエネルギー固有値の g 依存性を, Ref. [10] において対角化の方法によって得られたものと一緒に表 1 に示した.

同様に初期条件として, 十分な精度になる 50 番目までの, ここでは非調和振動子: $\mathcal{H}_{\text{AHO}}(1/2)$ のエネルギー固有値, 波動関数を用意して, 徐々にポテンシャルを一重井戸から二重井戸に変えていったときのエネルギー固有値の g' 依存性を, Ref. [11] において対角化の方法によって得られたものと一緒に表 2 に示した. 図 1 は, 下から 6 番目までのエネルギー準位の g' 依存性をプロットしたものである. 図 1 では, g' が大きくなると, 偶数番目と奇数番目のエネルギー準位が下から順に縮退していくが, これは, 図 3 にあるように, 基底状態と第一励起状態の波動関数をプロットしてみると良く分かる. g' に依存して, 単一の振動子の固有状態から二つの (左右の) 振動子を重ね合わせた状態に移り変わっている.

3. まとめ

本研究では, 結合の強さ g についての微分方程式を立て, 可解なハミルトニアンを初期条件として解くことで, 非摂動的にエネルギー固有値と波動関数の g 依存性を求める手法を導入した. この g についての方程式を利用して, ポテンシャルの強さが時間依存する場合の時間依存した Schrödinger 方程式を解くことも可能であ

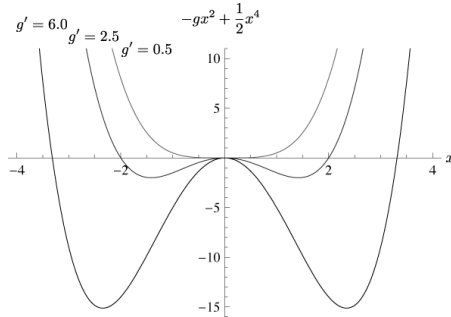


図2 Double-well potential $V(x) = -gx^2 + \frac{1}{2}x^4$ as a function of several values of $g' = g - 1/2$.

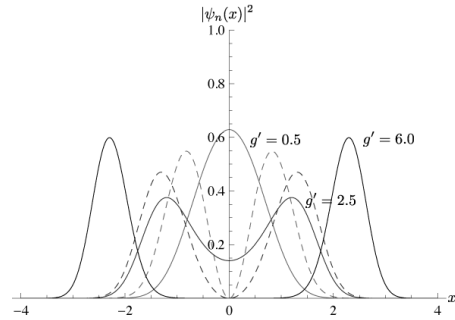


図3 Probability distributions for the lowest two states for the DWP with $N = 50$. The solid line is for the ground state and the dashed line is for the first excited state. The lighter gray line is for $g' = 0.5$, the gray line is for $g' = 2.5$ and the black line is for $g' = 6.0$.

る. 摂動論が破綻することが良く知られている量子非調和振動子と量子二重井戸 (後者は Borel 和が取れない) に応用することで, 弱結合から強結合までの広い領域において, エネルギー固有値と波動関数について, この手法が機能することを確認した.

現在, この手法で用いたアイデアを量子多体系や場の量子論に拡張することを試みている. また, 以上の内容の詳細は, Ref. [12] に発表した.

参考文献

- [1] G. Baym, in *RECENT PROGRESS IN MANY-BODY THEORIES, Proceedings of the 14th International Conference* (World Scientific, Spain, 2007), p. 65.
- [2] I. Bloch, J. Dalibard and W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys.* **80** (2008), 885.
- [3] W. Ketterle and M. W. Zwierlein, in *Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi, Varenna* (IOS Press, Amsterdam, 2008), arXiv:0801.2500.
- [4] K. Fukushima and T. Hatsuda, arXiv:1005.4814.
- [5] J. O. Andersen and M. Strickland, *Ann. of Phys.* **317** (2005), 281.
- [6] G. A. Arteca, F. M. Fernandez and E. A. Castro, *Large Order Perturbation Theory and Summation Methods in Quantum Mechanics* (Springer-Verlag, Berlin, 1990).
- [7] J. Zinn-Justin, arXiv:1001.0675.
- [8] H. Sonoda, arXiv:0710.1662.
- [9] *Large Order Behavior of Perturbation Theory, Current Physics-Sources and Comments Vol. 7*, eds. J. C. Le Guillou and J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam, 1990).
- [10] S. N. Biswas, K. Datta, R. P. Saxena, P. K. Srivastava and V. S. Varma, *J. Math. Phys.* **14** (1973), 1190.
- [11] R. Balsa, M. Plo, J. G. Esteve and A. F. Pacheco, *Phys. Rev. D* **28** (1983), 1945.
- [12] T. Hayata, arXiv:1010.6125.

冷却原子による 1/N 展開の検証 - CP^{N-1} モデルについて

名古屋工業大学工学研究科機能工学専攻
片岡 啓介 服部 真也 一瀬 郁夫

1 Introduction

光学格子は冷却された原子をレーザーで捕獲し、通常物質に見られる格子系を作ることができる。その際にレーザーの波長や強度を変えることにより、原子間の相互作用や格子間隔といったパラメータを任意に調整することができる。これによって、Landau による古典的相転移が適応できない量子相転移の研究がより行いやすくなった。更に光学格子は従来の磁場を用いた原子の捕獲と異なるため、原子にスピン自由度を持たせることを可能にした。これによりスピン自由度を持った BEC などの研究を可能にしている。

スピン自由度が大きい系は、その高い対称性により多彩な相構造をもつと考えられており、精力的に研究されている。しかし、その多くは boson に対して行われており fermion に対する研究は比較的少ない。

そこで本研究は spin-3/2 の fermion の系を想定し、1/N 展開法を用いてその層構造の研究を行った。spin-3/2 の系は、Sp(4) 対称性を持ち、パラメータの調整により SU(4) まで系の対称性を高めることができる。

場の理論による手法は系を格子間隔の極限をとり、連続的なものとして扱っている。その妥当性を検証するため、格子間隔が有限である格子理論のモデルをモンテカルロシミュレーションによる数値実験を行い、連続理論と格子理論の比較を行った。

2 Model

系は 2 次元正方格子で相互作用に異方性があるものとする。各サイトには粒子が 1 つずつある quarter-filling である。また格子間隔 $a = 1$ であるものとする。

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{\langle i,j \rangle} \left(J_1^{i,j} \hat{\Gamma}_i^{a,b} \hat{\Gamma}_j^{a,b} - J_2^{i,j} \hat{\Gamma}_i^a \hat{\Gamma}_j^a \right) \quad (1)$$

$$\hat{\Gamma}_i^a = \hat{\psi}_i^\dagger \Gamma^a \hat{\psi}_i \quad \hat{\Gamma}_i^{a,b} = \hat{\psi}_i^\dagger \Gamma^{a,b} \hat{\psi}_i$$

$\Gamma^a, \Gamma^{a,b} = \frac{1}{2}[\Gamma^a, \Gamma^b]$ ($1 \leq a, b \leq 5$) は $SU(4)$ Lie 代数の生成子である。 $\hat{\psi}$ は spin-3/2 fermion 原子の演算子を表し、 $\hat{\Gamma}_i^a$ は $Sp(4)$ 群のベクトル表現、 $\hat{\Gamma}_i^{a,b}$ は $Sp(4)$ 群の随伴表現となっている。これにより (1) は $Sp(4)$ 対称性を持つことが明かである。

また、 $\hat{\Gamma}^a, \hat{\Gamma}^{a,b}$ は Schwinger boson \hat{b}_α ($1 \leq \alpha \leq 4$) によって表すことができる。ただし、 $\sum_\alpha \hat{b}_\alpha^\dagger \hat{b}_\alpha = 1$ である。これによって、(1) は

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{\langle i,j \rangle} \left(J'_{i,j} \hat{K}_{i,j}^\dagger \hat{K}_{i,j} - J_{i,j} \hat{Q}_{i,j}^\dagger \hat{Q}_{i,j} \right) \quad (2)$$

$$\hat{K}_{i,j} = \hat{b}_{\alpha,i}^\dagger \hat{b}_{\alpha,j} \quad \hat{Q}_{i,j} = \hat{b}_{\alpha,i} \mathcal{J}_{\alpha,\beta} \hat{b}_{\beta,j}$$

と表すことができる。ただし、 \mathcal{J} は次の関係を満たす反対称行列である。

$$\mathcal{J}^T = \mathcal{J}^\dagger = -\mathcal{J}, \quad \mathcal{J}^2 = -1,$$

$$\mathcal{J}^\dagger \Gamma^a \mathcal{J} = (\Gamma^a)^T, \quad \mathcal{J}^\dagger \Gamma^{ab} \mathcal{J} = -(\Gamma^{ab})^T$$

(2) は $J'_{i,j} = 0$ 、または $J_{i,j} = 0$ のときに $Sp(4)$ から $SU(4)$ へと対称性を広げることができる。

このモデル (2) の低エネルギーの有効理論を得るために、コヒーレント状態の経路積分による定式化を行った。これにより Schwinger boson \hat{b}_α は CP^{N-1} 変数 z_α となる。反強磁性状態からの揺らぎを積分することで次のような有効作用を得ることができた。

$$\mathcal{S} = \frac{N}{2g} \int d^3x \{ |\partial_\mu z|^2 - |\bar{z} \partial_\mu z|^2 - \gamma |z \mathcal{J} \partial_\mu z|^2 + \sigma (|z|^2 - 1) \} \quad (3)$$

σ は CP^{N-1} 変数の拘束条件に対する Lagrange 未定乗数である。系には $J_y = \lambda J_x, J'_y = \lambda J'_x$ の異方性があるものとする。この λ によって、結合定数 g 、 $SU(4)$ 対称性からのずれを表すパラメータ γ はそれぞれ

$$g = \frac{1 + \lambda}{\sqrt{2\lambda}}, \quad \gamma = J'_x / J_x$$

となる。は系の異方性が大きくなると結合定数 g 大きくなるのが分かる。

3 1/N expansion

(3) に対して、 $z_0 = (n_0, \dots, 0)$ まわりの鞍点法による $1/N$ 展開を行った。 n_0 は反強磁性状態を表すオーダーパラメータである。それぞれの γ の領域で次のような結果を得ることができた。

$\gamma \ll 1$ の場合、臨界点は $g_c = \frac{\Lambda}{2\pi}$ で与えられる。 $g > g_c$ のときは

$$\begin{cases} n_0 = 0, \quad \sqrt{\sigma_c} = \frac{2\pi}{N}(1/g_c - 1/g), \quad \sigma_0 = \langle \sigma \rangle & (g > g_c) \\ n_0^2 = 1 - g/g_c, \quad \sigma_0 = 0, & (g < g_c) \end{cases}$$

となり、2次転移を示すことが分かる。

$\gamma \lesssim 1$ の場合は、 $z\mathcal{J}\partial_\mu z$ に対応する補助場 ω_μ が $\gamma > \gamma_c$ で $\langle \omega_\mu \rangle \neq 0$ となる。このことにより、スピンは反強磁性状態を表す場 ξ を用いて

$$\begin{cases} z(r) = 0, & (g > g_c) \\ z(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ e^{-i\gamma\langle \omega \rangle x} \xi(r) + e^{i\gamma\langle \omega \rangle x} (i\mathcal{J}\bar{\xi}(r)) \} & (g < g_c) \end{cases}$$

と表すことができる。 $g < g_c$ の場合は反強磁性状態から一定の波数を持ってスパイラルした状態で基底状態をとることを意味する。

4 格子理論 CP^3 モデルのモンテカルロシミュレーションとの比較

(3) に対応する格子モデルは、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} A_L = & c_1 \sum_{r,\mu} \bar{z}_{r+\mu} U_{r\mu} z_r + \text{c.c} \\ & + c_2 \sum_{r,\mu,\nu} U_{r,\mu} U_{r+\nu,\mu} \bar{U}_{r+\nu,\mu} \bar{U}_{r,\nu} + \text{c.c} + c_3 \sum_{r,\mu} |z_r \mathcal{J} z_{r+\mu}|^2 \end{aligned} \quad (4)$$

モンテカルロシミュレーションを行った結果、横軸がエネルギーで縦軸がそのエネルギーをとる頻度を表したものが図1である。これによって、エネルギーが不連続に変化していて、1次転移を示していることがわかる。

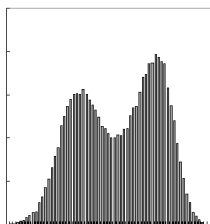


図 1: エネルギーの分布の様子

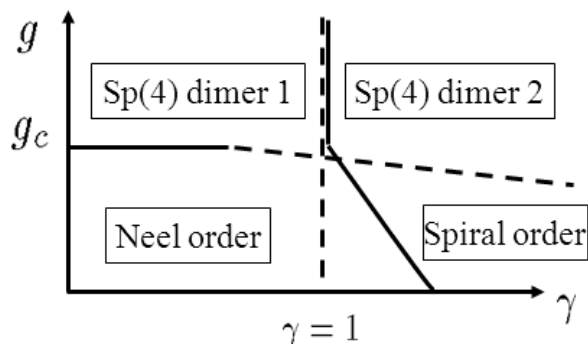


図 2: 連続理論による相図

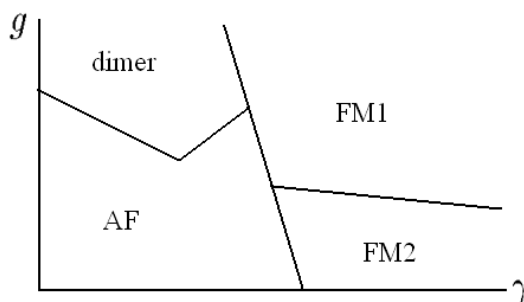


図 3: 格子理論による相図

また、連続理論と格子理論による系の予想される相図は、それぞれ図 2、図 3 で与えられる。いずれも大きく 4 つの相に分かれており、いずれも反強磁性相とダイマー相を確認することができた。 γ が大きくなるとそれぞれ反強磁性相とダイマー相から、連続理論ではスパイラルしたダイマー相とスパイラル相をとり、格子理論では 2 種類の強磁性相をとることがスピン相関を計算することでわかった。

このように連続理論と格子理論では転移の次数について差がみられる。また、相図についても γ の大きい領域では、それぞれ異なる状態が基底状態となると考えられる。格子を連続化した場の理論、 $1/N$ 展開法の正当性を実際の実験によって調べる必要がある。

超流動 Fermi 原子気体の 1 粒子状態と photoemission スペクトル

慶大理工^A、東理大理^B、JST(CREST)^C
渡邊亮太^A、土屋俊二^{ABC}、大橋洋士^{AC}

1 Introduction

2つの Fermion 間に強い引力相互作用がはたらく強結合 Fermion 系は超伝導・超流動に代表される固体電子系や液体 He 系の特異な物性を解明する上で重要な研究対象である。これに対し冷却原子系では、Feshbach 共鳴を利用した原子間相互作用の操作や超流動 Fermi 原子気体の実現により、結晶等の影響を受けないきれいな強結合系の理論的、実験的な解析が盛んに行われている。特に、相互作用の可変性を利用し、金属電子系超伝導 (BCS 超伝導、BCS 超流動) から銅酸化物系の高温超伝導などの強相関超伝導系、強結合超流動系を経て 2 粒子分子ボソン系の Bose-Einstein 凝縮 (BEC) へ連続的に移行するという BCS-BEC クロスオーバーの実験的な観測が ^{40}K 系や ^6Li 系でなされている [1, 2]。近年では BCS-BEC クロスオーバーの強結合領域において、金属電子系の光電子分光測定 (PES、ARPES) に対応した原子の微視的な状態を探る実験 [3, 4] や原子気体の熱力学を解析する実験 [5, 6] 等が行われ、注目を集めている。これらの実験と比較することにより、系の多体性と強結合性による強い揺らぎの影響で超流動転移温度付近で擬ギャップ現象が生じること [7, 8]、さらに、一様な超流動 Fermi 気体の解析により、超流動相においても超流動揺らぎの影響が顕著になる領域があることが明らかになった [9]。擬ギャップ現象は高温超伝導体においても確認されており、高い超伝導転移温度との関係性が注目され、その起源や物性、超伝導性との関連が議論の対象となっている。

そこで、強い揺らぎに由来する擬ギャップ現象と超流動性の関係を明らかにするために、我々は BCS-BEC クロスオーバーにおける超流動 Fermi 原子気体の 1 粒子状態密度とスペクトル強度 (運動量分解された状態密度)、および、実験的に観測される photoemission スペクトルを Nozières と Schmitt-Rink の理論 [10] を拡張して計算した。その結果、揺らぎが特に顕著な相互作用域で擬ギャップ現象と超流動現象の競合が起こることを示した。また、冷却原子系の実験状況を考慮してトラップ系の photoemission スペクトルを解析し、擬ギャップ構造と Fermi 超流動系の特徴である超流動ギャップ構造の移り変わりが実験的に観測され得ることを明らかにした。さらに、トラップポテンシャルによる空間的な非一

様性の影響で非一様な超流動揺らぎが発生することや、その空間依存性を明らかにしてきた。ここではそうした一連の研究成果について報告する。

2 Formalism

冷却原子系の BCS-BEC クロスオーバーを念頭に、2つの超微細構造 (擬スピン) $\sigma = \uparrow\downarrow$ の間に引力相互作用を持つ中性 Fermi 原子気体を考える。現在 BCS-BEC クロスオーバーが実現している ${}^6\text{Li}$ 系や ${}^{40}\text{K}$ 系では Feshbach 共鳴によって操作可能な原子間相互作用はその機構の詳細によらず、接触型相互作用 $-U (< 0)$ で表すことができる。Cooper チャンネルに起因する対形成揺らぎの効果を考慮すると、BCS-BEC クロスオーバーにおける超流動 Fermi 原子気体の南部空間におけるハミルトニアンは次の式で与えられる [11]。

$$H = \sum_{\mathbf{p}} \Psi_{\mathbf{p}}^{\dagger} [\xi_{\mathbf{p}} \tau_3 - \Delta \tau_1] \Psi_{\mathbf{p}} - U \sum_{\mathbf{q}} \rho_{+}(\mathbf{q}) \rho_{-}(\mathbf{q}). \quad (1)$$

ここで $\xi_{\mathbf{p}} = \frac{p^2}{2m} - \mu$ は化学ポテンシャル μ を基準にした運動エネルギー、 $\Delta = U \sum_{\mathbf{p}} \langle c_{\mathbf{p}\uparrow}^{\dagger} c_{-\mathbf{p}\downarrow}^{\dagger} \rangle$ ($c_{\mathbf{p}\sigma}^{\dagger}$ は $\sigma = \uparrow, \downarrow$ の Fermi 原子の生成演算子) は超流動秩序パラメータである。 τ_j ($j = 1, 2, 3$) は粒子-ホール空間に作用する Pauli 行列、 $\Psi_{\mathbf{p}}^{\dagger} = (c_{\mathbf{p}\uparrow}^{\dagger} \ c_{-\mathbf{p}\downarrow})$ は南部表示における Fermi 演算子、 $\rho_{\pm}(\mathbf{q}) \equiv \sum_{\mathbf{p}} \Psi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}^{\dagger} \tau_{\pm} \Psi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}$ [$\tau_{\pm} = (\tau_1 \pm i\tau_2)/2$] は一般化された密度演算子である。

ここではハミルトニアン (1) の第2項を T -行列近似の範囲で議論する [12]。そのために、次の式で与えられる南部表示における 2×2 -行列の1粒子温度 Green 関数を用いる。

$$G_{\mathbf{p}}(i\omega_n) = \frac{1}{G_{\mathbf{p}}^0(i\omega_n)^{-1} - \Sigma_{\mathbf{p}}(i\omega_n)}. \quad (2)$$

ここで、 $G^0(i\omega_n)^{-1} \equiv i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}} \tau_3 + \Delta \tau_1$ は平均場近似の Green 関数、 $\omega_n \equiv (2n+1)\pi/\beta$ ($\beta = 1/T$) は Fermi 松原周波数である。 2×2 -行列の自己エネルギー $\Sigma_{\mathbf{p}}(i\omega_n)$ に相互作用による超流動揺らぎの効果が T -行列近似の範囲 (図1) で含まれており、次の式で与えられる。

$$\Sigma_{\mathbf{p}}(i\omega_n) = -\frac{1}{\beta} \sum_{\mathbf{q}, \nu_n} \sum_{s, s' (= \pm)} \Gamma_{\mathbf{q}}^{ss'}(i\nu_n) \tau_{-s} G_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^0(i\omega_n + i\nu_n) \tau_{-s'}. \quad (3)$$

$\nu_n = 2n\pi/\beta$ は Bose 松原周波数である。散乱行列 $\Gamma_{\mathbf{q}}^{ss'}(i\nu_n)$ は次の式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{\mathbf{q}}^{+-}(i\nu_n) & \Gamma_{\mathbf{q}}^{++}(i\nu_n) \\ \Gamma_{\mathbf{q}}^{-+}(i\nu_n) & \Gamma_{\mathbf{q}}^{--}(i\nu_n) \end{pmatrix} = -U \left[1 + U \begin{pmatrix} \Pi_{\mathbf{q}}^{+-}(i\nu_n) & \Pi_{\mathbf{q}}^{++}(i\nu_n) \\ \Pi_{\mathbf{q}}^{-+}(i\nu_n) & \Pi_{\mathbf{q}}^{--}(i\nu_n) \end{pmatrix} \right]^{-1}. \quad (4)$$

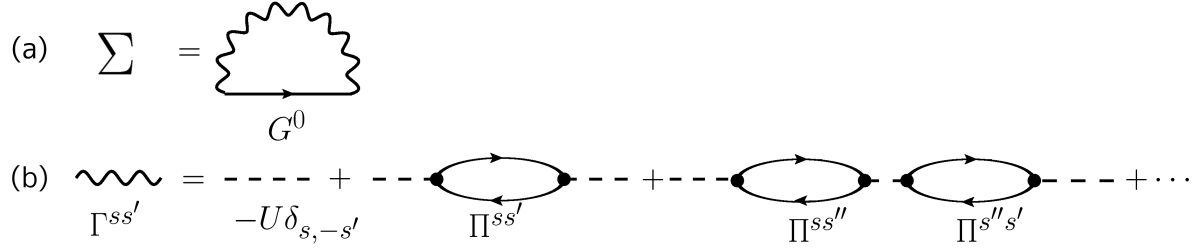


図 1: T 行列近似における超流動揺らぎを表すダイアグラム。(a) 自己エネルギー $\Sigma_{\mathbf{p}}(i\omega_n)$ 、(b) 2 体散乱行列 $\Gamma_{\mathbf{q}}(i\nu_n)$ 。実線、破線はそれぞれ平均場 Green 関数 $G_{\mathbf{p}}^0(i\omega_n)$ と引力相互作用 $-U$ を表す。バブル型のダイアグラムは最低次の 2 体相関関数 $\Pi_{\mathbf{q}}^{ss'}(i\nu_n)$ ($s = \pm$) を表し、黒点は Pauli 行列 τ_s に対応する。

ここで、 $\Pi_{\mathbf{q}}^{ss'}(i\nu_n) = \beta^{-1} \sum_{\mathbf{p}, \omega_n} \text{Tr}[\tau_s G_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}^0(i\omega_n + i\nu_n) \tau_{s'} G_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}^0(i\omega_n)]$ は粒子対形成に関する最低次の 2 体相関関数で、次式で与えられる。

$$\Pi_{\mathbf{q}}^{++}(i\nu_n) = \frac{1}{4} \sum_{j=\pm 1} \sum_{\mathbf{p}} \frac{j\Delta^2}{E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2} E_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}} \frac{E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2} + jE_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}}{\nu_n^2 + (E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2} + jE_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2})^2} \times \left[\tanh\left(\frac{\beta}{2} E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}\right) + j \tanh\left(\frac{\beta}{2} E_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}\right) \right], \quad (5)$$

$$\Pi_{\mathbf{q}}^{--}(i\nu_n) = \Pi_{\mathbf{q}}^{++}(i\nu_n), \quad (6)$$

$$\Pi_{\mathbf{q}}^{+-}(i\nu_n) = \frac{1}{4} \sum_{j=\pm 1} \sum_{\mathbf{p}} \left[\left(1 + j \frac{\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2} \xi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}}{E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2} E_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}}\right) \frac{1}{i\nu_n - (E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2} + jE_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2})} + \left(1 - \frac{\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}}{E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}}\right) \left(1 - j \frac{\xi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}}{E_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}}\right) \frac{i\nu_n}{\nu_n^2 + (E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2} + jE_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2})^2} \right] \times \left[\tanh\left(\frac{\beta}{2} E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}\right) + j \tanh\left(\frac{\beta}{2} E_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}\right) \right], \quad (7)$$

$$\Pi_{\mathbf{q}}^{-+}(i\nu_n) = -\Pi_{\mathbf{q}}^{+-}(-i\nu_n). \quad (8)$$

ここで、 $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{p}}^2 + \Delta^2}$ である。

状態密度 $\rho(\omega)$ やスペクトル強度 $A_{\mathbf{p}}(\omega)$ は解析接続された Green 関数を用いて次のように与えられる。

$$\rho(\omega) = \sum_{\mathbf{p}} A_{\mathbf{p}}(\omega), \quad (9)$$

$$A_{\mathbf{p}}(\omega) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} G_{\mathbf{p}}(i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta)|_{11}. \quad (10)$$

$G_{\mathbf{p}}(i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta)|_{11}$ に含まれる解析接続された自己エネルギーは

$$\begin{aligned} \Sigma_{\mathbf{p}}(i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta)|_{11} &= \Sigma_{\text{HF}} + \frac{1}{\pi} \sum_{\mathbf{q}, j=\pm 1} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{n_{\text{B}}(z) + f(jE_{\mathbf{p}+\mathbf{q}})}{z - jE_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} + \omega + i\delta} \\ &\times \left(1 - j \frac{\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}}{E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}}\right) \text{Im} \left[\Gamma_{\mathbf{q}}^{+-}(z + i\delta) \right], \end{aligned} \quad (11)$$

$$\Sigma_{\mathbf{p}}(i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta)|_{22} = -\Sigma_{\mathbf{p}}(i\omega_n \rightarrow -\omega - i\delta)|_{11}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\mathbf{p}}(i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta)|_{12} &= \frac{1}{\pi} \sum_{\mathbf{q}, j=\pm 1} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{n_{\text{B}}(z) + f(jE_{\mathbf{p}+\mathbf{q}})}{z - jE_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} + \omega + i\delta} \\ &\times \frac{j\Delta}{E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}} \text{Im} \left[\Gamma_{\mathbf{q}}^{++}(z + i\delta) \right], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\Sigma_{\mathbf{p}}(i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta)|_{21} = \Sigma_{\mathbf{p}}(i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta)|_{12}, \quad (14)$$

で与えられる。ここで、 $n_{\text{B}}(z) = (e^{\beta z} - 1)^{-1}$ 、 $f(z) = (e^{\beta z} + 1)^{-1}$ はそれぞれ Bose、Fermi 分布関数であり、

$$\Sigma_{\text{HF}} = -\frac{U}{2} \sum_{\mathbf{p}} \left[1 - \frac{\xi_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}}} \tanh \left(\frac{\beta E_{\mathbf{p}}}{2} \right) \right], \quad (15)$$

は Hartree 項である。

超流動秩序パラメータ Δ と化学ポテンシャル μ は、連続的な対称性が破れた系でギャップレスの集団励起が存在するという Goldstone の定理に矛盾しないように、BCS ギャップ方程式

$$\Delta = U \sum_{\mathbf{p}} \frac{\Delta}{2E_{\mathbf{p}}} \tanh \left(\frac{\beta E_{\mathbf{p}}}{2} \right), \quad (16)$$

および、粒子数方程式

$$N = \frac{2}{\beta} \sum_{\mathbf{p}, \omega_n} G_{\mathbf{p}}(i\omega_n)|_{11} e^{i\delta\omega_n}, \quad (17)$$

を連立して解くことによって決める。実際、 Δ が有限のとき、(4) の 2 体散乱行列 $\Gamma_{\mathbf{q}}^{\pm\pm}(i\nu_n)$ はギャップレスの音波モードを持つ [9, 11]。

冷却原子系の BCS-BEC クロスオーバーでは真空中にトラップされた原子気体を対象とする。そのため、ここでは球対称な調和型トラップの効果をも局所密度近似で考慮する (楕円型トラップの場合、適当なスケール変換によって球対称な系と同様に議論できる)。トラップポテンシャルを化学ポテンシャルのシフトによって考慮し、一様系の表式で

$$\mu \rightarrow \mu(r) \equiv \mu - \frac{m\omega_{\text{tr}}^2}{2} r^2, \quad (18)$$

と置き換え、領域 r ごとに一様系とみなす。ここで ω_{tr} はトラップポテンシャルの周波数である。これに伴って、ギャップ方程式と粒子数方程式は

$$\Delta(r) = U \sum_{\mathbf{p}} \frac{\Delta(r)}{2E_{\mathbf{p}}(r)} \tanh\left(\frac{\beta E_{\mathbf{p}}(r)}{2}\right), \quad (19)$$

$$N = \int_0^{\infty} 4\pi r^2 dr n(r) \quad (20)$$

で与えられる。ただし、 $n(r)$ は気体の中心からの距離 r における粒子数密度で、

$$n(r) = \frac{2}{\beta} \sum_{\mathbf{p}, \omega_n} G_{\mathbf{p}}(i\omega_n, r)|_{11} e^{i\delta\omega_n}, \quad (21)$$

である。ここで、 $G_{\mathbf{p}}(i\omega, r)$ は領域ごとの 1 粒子 Green 関数である。現在までに実験的に観測されている気体全体の photoemission スペクトル $\overline{p^2 A_{\mathbf{p}}(\omega, r) f(\omega)}$ は局所的なスペクトル強度を空間積分することによって得られる。

$$\overline{p^2 A_{\mathbf{p}}(\omega, r) f(\omega)} \equiv \int_0^{\infty} r^2 dr p^2 A_{\mathbf{p}}(\xi_{\mathbf{p}}(r) - \omega, r) f(\xi_{\mathbf{p}}(r) - \omega). \quad (22)$$

以下では、相互作用は接触型有効相互作用 U の代わりに実験的な観測量である s 波 2 体散乱長 a_s を用いる。 U と a_s は次のような関係で結ばれている。

$$\frac{4\pi a_s}{m} = -\frac{U}{1 - U \sum_{\mathbf{p}}^{\omega_c} \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{p}}}}. \quad (23)$$

ω_c は高エネルギー側のカットオフであり、接触型有効相互作用を用いることによって現れる紫外発散を繰り込むことによって、実際の物理量には現れない。 $-U (< 0)$ に対し、 a_s^{-1} は $-\infty$ から ∞ までの値をとり、相互作用が弱い極限が $a_s^{-1} \rightarrow -\infty$ 、相互作用が強い極限が $a_s^{-1} \rightarrow +\infty$ に対応する。特に、自由 Fermi 気体の Fermi 波数 k_F でスケールしたとき、 $(k_F a_s)^{-1} \lesssim -1$ 、 $(k_F a_s)^{-1} \gtrsim 1$ をそれぞれ BCS 領域、BEC 領域と呼び、これらの中間領域はクロスオーバー領域と呼ばれる。また、トラップ系においてトラップポテンシャルに関するパラメータ ω_{tr} は絶対零度における自由 Fermi 気体の半径 (Fermi 半径) R_F および Fermi エネルギー ϵ_F と

$$\frac{\epsilon_F}{R_F^2} = \frac{m\omega_{\text{tr}}^2}{2} \quad (24)$$

の関係にあり、Fermi エネルギーと Fermi 半径でスケールすることができる。

3 Results

図 2 に一様系における BCS 領域 $(k_F a_s)^{-1} = -1$ と BEC 領域 $(k_F a_s)^{-1} = 0.8$ の状態密度の温度依存性を示す。BCS 領域 (a) では、超流動転移温度において完全なギャップではな

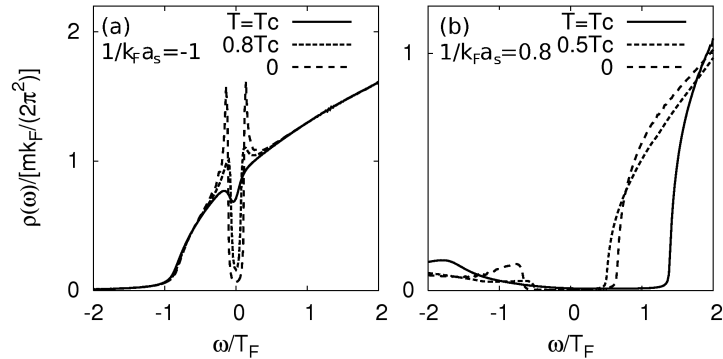


図 2: (a)BCS 領域 $(k_F a_s)^{-1} = -1$ と (b)BEC 領域 $(k_F a_s)^{-1} = 0.8$ における状態密度 $\rho(\omega)$ の温度依存性。

く $\omega = 0$ 付近にディップ構造、いわゆる擬ギャップ構造が生じていることがわかる。この擬ギャップ構造は温度を下げていくと連続的に超流動ギャップへと変化する。同様の振る舞いは高温超伝導体の状態密度の温度変化にも現れることが確認されている。一方、BEC 領域 (b) では、2 粒子分子 Boseon が形成されるために、その結合エネルギーに対応したギャップ構造が $\omega = 0$ 付近に生じている。

Fermi 気体的な領域と分子 Bose 気体的な領域に対し、中間にあたるクロスオーバー領域では状態密度はこれらとは異なる振る舞いをする。図 3 にクロスオーバー領域 $(k_F a_s)^{-1} = 0$ の超流動相における (a) 状態密度 $\rho(\omega)$ と対応する (b) スペクトル強度 $A_p(\omega)$ の温度依存性を示す (一様系)。 $(k_F a_s)^{-1} = 0$ は、2 体系で 2 粒子が対を組む相互作用に対応し、BCS-BEC クロスオーバーにおいて特に多体性による超流動揺らぎの影響が強い領域である。転移温度図 3(a1) においては、状態密度に完全なギャップはなく、 $\omega = 0$ 付近にディップ構造、いわゆる擬ギャップ構造が生じている。また、対応するスペクトル強度 (b1) にも $\omega = 0$ 付近にギャップ様の構造が現れている。この相互作用領域では、温度を下げて $T < T_C$ となっても、Fermi 超流動の特徴である状態密度における超流動ギャップはすぐには開かない (a2)。一方で、スペクトル強度 (b2) から、擬ギャップ構造は徐々に消えていくことがわかる。これは、 T_C 以下で Δ が有限であっても強い揺らぎの影響で超流動ギャップ構造がぼかされると同時に、凝縮体の発達によって多体性 (と強い相互作用) に由来する揺らぎが抑えられることに因るものである。実際に、 Δ が大きくなる低温領域では (a,b3-5) のように $\omega = 0$ 付近の擬ギャップ構造は消え、代わりに明確な超流動ギャップ構造が現れる。

現在のところ、空間分解された photoemission スペクトルを実験的に得ることは簡単ではない。そのため、一様系に見られた擬ギャップ現象を冷却原子系の実験によって確認されるかを議論するためには、トラップポテンシャルの影響を考慮した気体全体の photoemission スペクトルを議論する必要がある。

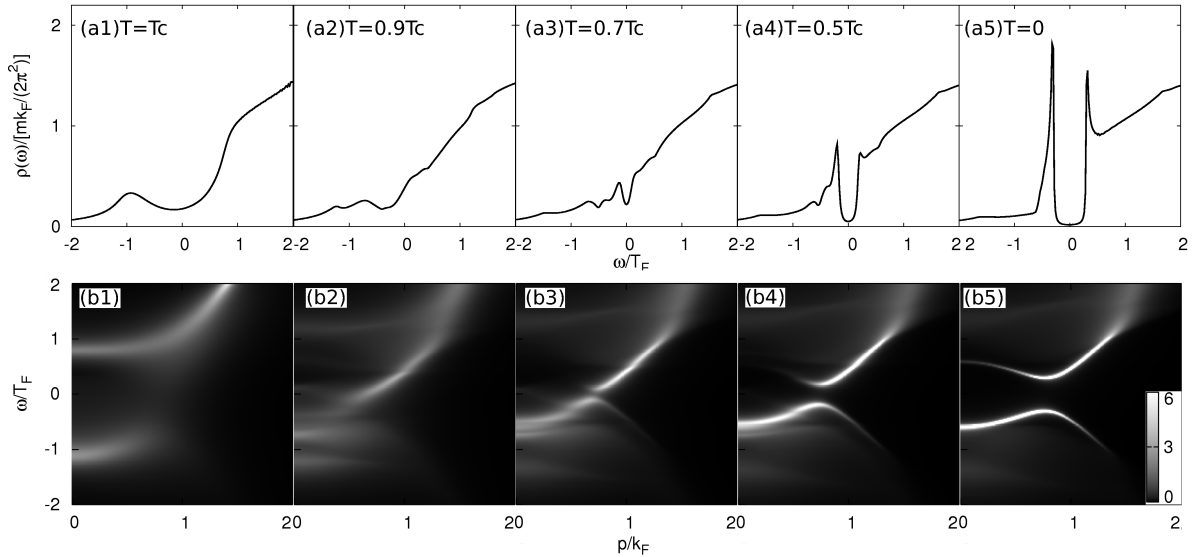


図 3: $(k_F a_s)^{-1} = 0$ における (a) 状態密度 $\rho(\omega)$ と (b) スペクトル強度 $A_p(\omega)$ 。

図 4 にクロスオーバー領域 $(k_F a_s)^{-1} = 0$ における photoemission スペクトル $\overline{p^2 A_p(\omega) f(\omega)}$ の温度依存性を示す。図 3(b) と比較して運動量 p の小さい領域の寄与が小さいのは p^2 の因子に由来し、 $\omega > 0$ の強度が弱いのは Fermi 分布関数 $f(\omega)$ の影響である。 $T = T_C$ の図 4(a) で、高エネルギー側のシャープなピーク構造はトラップの端付近に存在する 1 粒子的 Fermion に由来し、低エネルギー側のブロードな構造が擬ギャップ構造に起因する。一方、 $T = 0.1T_C$ に見られる強度が強い振る舞い (図 4(c)) は超流動ギャップに由来する構造である。クロスオーバー領域では系の化学ポテンシャル $\mu (> 0)$ が小さく、トラップポテンシャルの影響で超流動ギャップ構造の分散関係が空間的に大きく変化するため、photoemission スペクトルにおける超流動ギャップ構造は強い空間依存性を有し、図 4(c) のような扁平な振る舞いをする。(a) T_C と (c) $0.1T_C$ を基に中間温度 $0.5T_C$ では、(a) の気体の端付近の 1 粒子 Fermion に由来するシャープなピーク構造および低エネルギー側のブロードなピーク構造と、これらの間のエネルギー領域に (c) の超流動ギャップ構造が共存している振る舞いが見られる。

前節で述べたように、クロスオーバー領域では擬ギャップ構造と超流動ギャップ構造は競合するから、トラップ系における両構造の共存はトラップによる空間の非一様性の影響に由来するものである。実際、空間分解された状態密度を解析して系の振る舞いを (状態密度にディップあるいはギャップ構造が無い) 1 粒子的 (NF)、図 3(a1-2) に対応する擬ギャップ的 (PG)、図 3(a3-5) に対応する超流動ギャップ的な振る舞い (SF) に分類して温度 T と位置 r に関する相図を描くと図 5(a) のようになる。ただし、 T_C 以外は全て相転移で

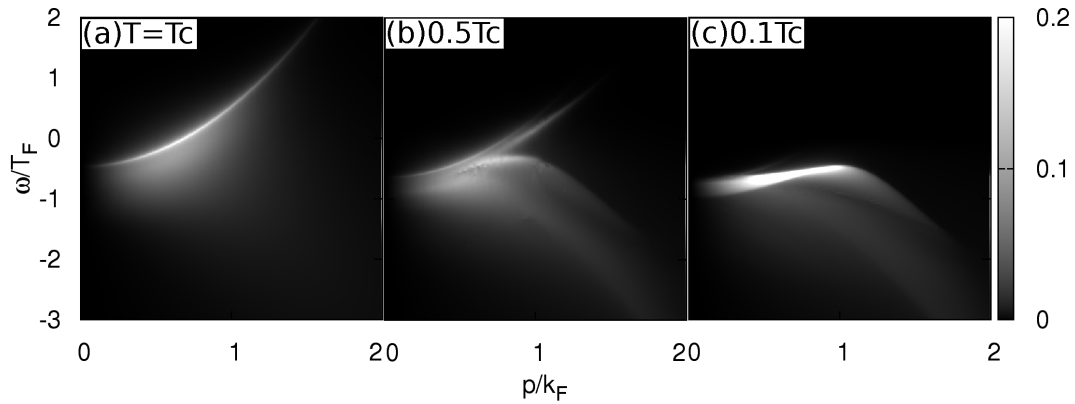


図 4: $(k_F a_s)^{-1} = 0$ における photoemission スペクトルの温度依存性。

はなくクロスオーバー的な目安の線である。また、実線は局所密度近似によって計算される各 r における転移温度で、 r における超流動性の強さの目安となる。実際は $T < T_C$ で気体全体が超流動転移している。温度 T における photoemission スペクトルは (22) の表式に従って、局所的なスペクトル強度 $A_p(\omega, r)$ を横軸 r 方向へ積分することによって得られる。クロスオーバー領域では、転移温度以下、 $T = 0.5T_C$ 程度の低温でも比較的大きな擬ギャップ領域が $r = 0.8$ 付近に存在する。これと同時に気体中心付近では超流動性が顕著であるため、photoemission スペクトルに擬ギャップ構造と超流動ギャップ構造が共存する。このように、 T_C から温度を下げていくと photoemission スペクトルは擬ギャップ的なものから、擬ギャップと超流動ギャップが共存したものを経て、超流動ギャップ的なものへと変化していく。

同様の解析を様々な相互作用において行くと、図 5(b) に示した 3 次元的な相図が得られる。白抜きの擬ギャップ領域 (PG) を中心に、NF は常流動 Fermi 気体的、SF は Fermi 超流動的、NB は分子 Bose 気体的、MBEC は分子 Boson の BEC が支配的であることを示す。なお、 $T = 2|\mu(T_C)|$ は 2 粒子分子ボソンが熱的に解離する目安の温度である。また、 T_C を表す $r = 0$ の実線以外は全てクロスオーバーの目安である。

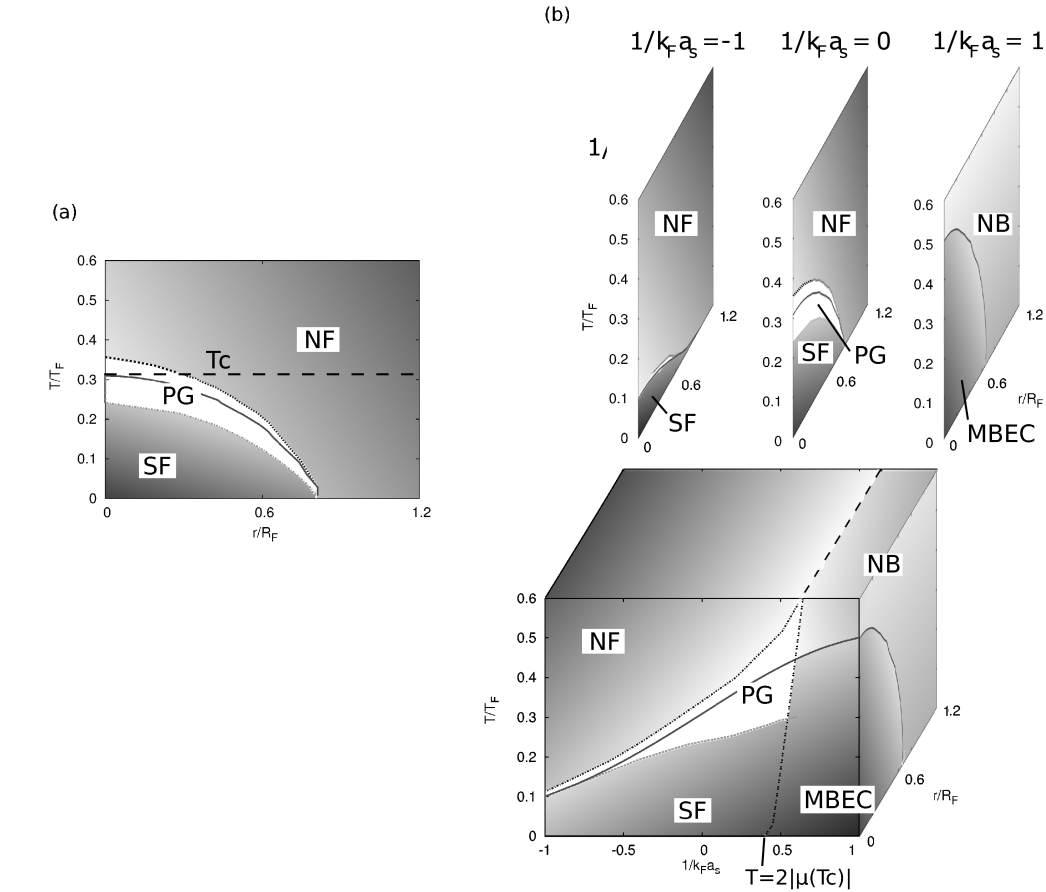


図 5: トラップされた冷却原子気体の (a) $(k_F a_s)^{-1} = 0$ における温度 T と位置 r に関する、(b) $(k_F a_s)^{-1}$ 、温度 T および位置 r に関する相図。PG、NF、NB、SF、MBEC はそれぞれ擬ギャップ的、常流動 Fermi 気体的、常流動分子 Boson 的、Fermi 超流動的、分子 Boson の BEC 的な領域を示す。また、(b) における $T = 2|\mu(T_C)|$ の線は、分子ボソンが熱的に解離される目安の温度である。 T_C 以外は全てクロスオーバーに対応する目安の線である。

4 Summary

ここでは冷却 Fermi 原子気体を念頭に、BCS-BEC クロスオーバーの超流動相における Fermion の 1 粒子状態を議論した。特に、Nozières と Shmitt-Rink の理論を基にした T -行列近似を用いて Fermion の状態密度とスペクトル強度を計算し、超流動転移温度付近に見られる擬ギャップ現象と Fermi 超流動の特徴である超流動ギャップがどのように関係しているかについて考察した。その結果、温度が下がるにつれ、相互作用が弱い、BCS 領

域では両者が連続的に移り変わるのに対して、多体性が顕著なクロスオーバー領域では、擬ギャップ構造が閉じてから新たに超流動ギャップが現れるということを明らかにした。さらに、このような超流動相における擬ギャップ現象の実験的な検証を念頭に、トラップ系の photoemission スペクトルを局所密度近似を用いて計算し、局所的な振る舞いと関連させて解析することにより、擬ギャップ現象が非一様な空間の影響を強く受けること、それが実験的に観測され得ることを示した。この解析で作られたトラップ系の BCS-BEC クロスオーバーに関する相図 (図 5(b)) は、強く相互作用する原子気体を理解する上で非常に重要である。

参考文献

- [1] S. Giorgini, S. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1215 (2008).
- [2] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885 (2008).
- [3] J. T. Stewart, C. A. Regal, and D. S. Jin, *Nature* **454**, 744 (2008).
- [4] J. P. Gaebler, J. T. Stewart, T. E. Drake, D. S. Jin, A. Perali, P. Pieri, and G. C. Strinati, *Nature Phys.* **6**, 569 (2010).
- [5] M. Horikoshi, S. Nakajima, M. Ueda, and T. Mukaiyama, *Science*. **327**, 442 (2010).
- [6] S. Nascimbene, N. Navon, K. Jiang, F. Chevy, and C. Salomon, *Nature*. **463**, 1057 (2010).
- [7] S. Tsuchiya, R. Watanabe, and Y. Ohashi, *Phys. Rev. A* **80**, 033613 (2009).
- [8] S. Tsuchiya, R. Watanabe, and Y. Ohashi, *Phys. Rev. A* **82**, 033629 (2010).
- [9] R. Watanabe, S. Tsuchiya, and Y. Ohashi, *Phys. Rev. A* **82**, 043630 (2010).
- [10] P. Nozières and S. Schmitt-Rink, *J. Low. Temp. Phys.* **59**, 195 (1985).
- [11] Y. Ohashi and A. Griffin, *Phys. Rev. A* **67**, 063612 (2003).
- [12] P. Pieri, L. Pisani, and G. C. Strinati, *Phys. Rev. B* **70**, 094508 (2004).

フェルミ原子ガス超流動における 超流動/強磁性/超流動接合と π -phase の 実現可能性

柏村孝^A, 土屋俊二^{B,C}, 大橋洋士^{A,C}
慶大理工^A, 東理大理^B, JST(CREST)^C

1 序論

近年実現したフェルミ原子ガスの超流動 [1-3] は、背景の物理が金属超伝導と同様であること、また物理パラメータに対する操作性の高さから、金属超伝導の“量子シミュレーター”として期待されている。実際これまでも、BCS-BEC クロスオーバー [4, 5] など、金属超伝導においては観測困難な現象の実現に成功している。しかし一方で、現段階では、フェルミ原子ガスによって超伝導の重要なトピックすべてをカバーできているわけではない。

その1つが超流動に対する磁性効果である。フェルミ原子ガスや多くの超伝導体で実現している s 波超流動は、スピンを1方向に揃える強磁性によって、強く抑制されることが知られており、金属超伝導においては強磁性と超伝導の共存・競合の問題は古くから盛んに研究されてきた。しかしフェルミ原子ガスにおいては“強磁性”に対応するものが存在しないため、これまで調べることができなかった。

そこで我々は、フェルミ原子ガス超流動に対する磁性効果の研究方法を提案する [6]。本研究では、超伝導/強磁性/超伝導 (SFS) 接合 [7] に注目し [図 1(a)], これと同様の系がフェルミ原子ガスにおいて実現することを示す。我々の提案する方法では、スピン偏極したフェルミ原子ガスを用いる。スピン偏極したフェルミ原子ガスは、十分低温で、超流動相と余剰原子から成るノーマル相に相分離することが観測されている [8, 9]。この際、超流動相はトラップポテンシャルの低い領域を、ノーマル相はポテンシャルの高い領域を占有する [図 2(a)]。この相分離の性質を用い、二重井戸型ポテンシャルにスピン偏極したフェルミ原子ガスを閉じ込めると、一部の余剰原子がポテンシャルバリアの周辺に局在すると考えられる [図 2(b)]。この領域を擬スピンの強磁性と見なすと、この系は SFS 接合と同様の接合系になっている。これ

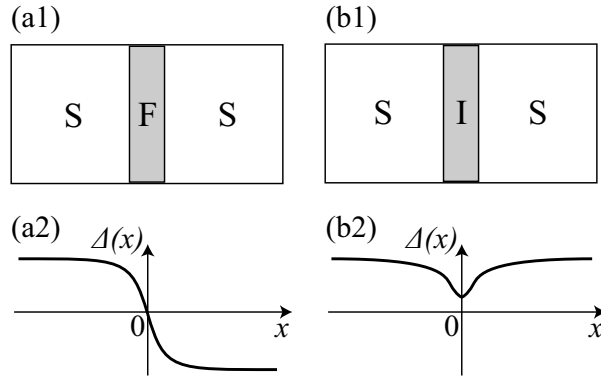


図1 (a1) SFS 接合の模式図. “S”, “F” はそれぞれ超伝導体, 強磁性体を表す. (a2) π -phase における超流動オーダーパラメータの空間変化. (b1) SIS 接合. “I” は絶縁体を表す. (b2) SIS 接合における超流動オーダーパラメータの空間変化 (0-phase).

を超流動/強磁性/超流動 (SFS) 接合と呼ぶことにする. ただし, ここでの強磁性は擬スピン \uparrow に偏極したノーマル相である. これが実際に強磁性として機能するか検証するために, 金属超伝導の SFS 接合で実現する π -phase に注目する [7]. π -phase とは, 強磁性壁の左右で超流動状態の位相が π ずれた状態である [図 1(a2)]. π -phase は, 超伝導/絶縁体/超伝導 (SIS) 接合で実現する状態 (超伝導体の位相が接合の左右で揃う [図 1(b2)]). この状態を 0-phase と呼ぶ.) とは大きく異なり, SFS 接合に特徴的な現象である. そこで本研究ではフェルミ原子ガスを用いた SFS 接合および π -phase の実現可能性を探る.

2 定式化

超流動/強磁性/超流動接合と π -phase の実現可能性を探るために, スピン偏極した 2 成分フェルミ原子ガスを考える. ここでは簡単のため, 引力ハバード模型を用いて解析を行う. ハミルトニアンは

$$H = -t \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} [\hat{c}_{i,\sigma}^\dagger \hat{c}_{j,\sigma} + \text{h.c.}] - U \sum_i \hat{n}_{i,\uparrow} \hat{n}_{i,\downarrow} + \sum_{i,\sigma} [V_i - \mu_\sigma] \hat{n}_{i,\sigma}, \quad (1)$$

で与えられる. ここで, $\hat{c}_{i,\sigma}^\dagger$ は i 番目のサイトに擬スピン $\sigma (= \uparrow, \downarrow)$ の原子を生成する演算子, t は最近接サイトへのホッピングエネルギーである. 右辺第 1 項に現れ

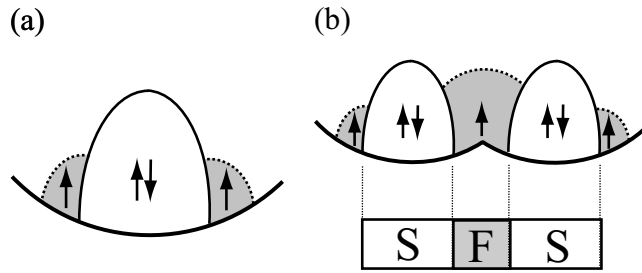


図2 トラップポテンシャル中におけるスピン偏極した超流動フェルミ原子ガス ($N_{\uparrow} > N_{\downarrow}$) の粒子分布を模式的に描いたもの。(a) 調和ポテンシャル中の粒子分布. 擬スピン \uparrow を持つ余剰原子は超流動領域 ($\uparrow\downarrow$) の端に局在する。(b) 二重井戸型ポテンシャル中の粒子分布. 余剰原子は中央のポテンシャルバリア周辺にも局在し得る. この局在した余剰原子を強磁性壁と見なすと, 系は SFS 接合と見なせる.

る $\langle i, j \rangle$ は最近接サイトのペアで和をとることを表す. $-U (< 0)$ はオンサイトの引力相互作用, $\hat{n}_{i,\sigma} \equiv \hat{c}_{i,\sigma}^{\dagger} \hat{c}_{i,\sigma}$ はサイト i における擬スピン σ の粒子数演算子である. スピン偏極した系を考えるため, 化学ポテンシャル μ_{σ} は擬スピン σ に依存する. $V_i (\equiv V_i^t + V_i^b)$ はポテンシャルで, 調和ポテンシャル V_i^t とポテンシャルバリア V_i^b から構成される. その表式は後述する.

実際に想定される実験系は3次元連続系であるが, ここでは1次元および2次元に議論を限定する. ここで仮定した低次元性や格子構造は SFS 接合や π -phase の形成に本質的でないことを強調しておく. ただし, バンドによる効果を抑えるために, 低密度 $\langle \hat{n}_{i,\sigma} \rangle \lesssim 0.3$ の場合を考える.

(1) 式を平均場近似を用いて $T = 0$ で解析する. 与えられたパラメータ $(N, \Delta N, U, V_i)$ に対し, 超流動オーダーパラメータ $\Delta_i \equiv \langle \hat{c}_{i,\downarrow} \hat{c}_{i,\uparrow} \rangle$, 粒子密度 $\langle n_{i,\sigma} \rangle$, 化学ポテンシャル μ_{σ} をセルフコンシステントに決定する. ただし N は全粒子数, ΔN は擬スピン \uparrow と \downarrow の粒子数の差を表す. また, ここでは Δ_i は実数とする. 安定解は, 同一のパラメータにおいて π -phase 解と 0-phase 解を求め, それらのエネルギーを比較することで決定する. これらの状態は一般に化学ポテンシャルが異なるため, エネルギーの比較には, 熱力学ポテンシャル ($T = 0$ では $\langle H_{MF} \rangle$ に等しい. ただし $\langle H_{MF} \rangle$ は平均場のハミルトニアンである.) ではなく自由エネルギーを用いる.

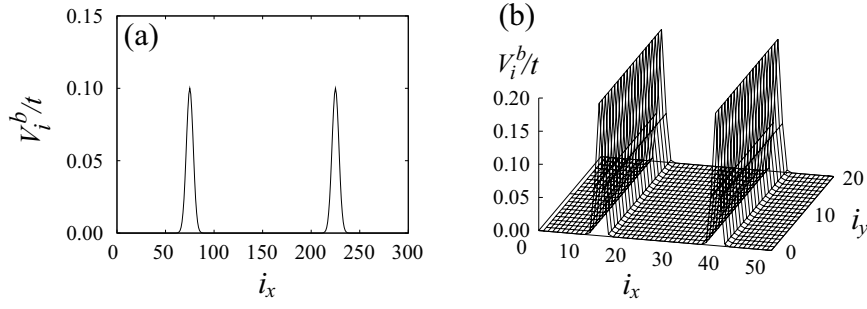


図3 周期系において用いるポテンシャル V_i^b . (a) 1次元系. (b) 2次元系.

自由エネルギーは,

$$E_G = \sum_{j,\sigma} E_{j,\sigma} \theta(-E_{j,\sigma}) + \sum_{\sigma} \mu_{\sigma} N_{\sigma} + \sum_i \left[V_i - \mu_{\downarrow} - U \langle \hat{n}_{i,\uparrow} \rangle + \frac{\Delta_i^2}{U} + U \langle \hat{n}_{i,\uparrow} \rangle \langle \hat{n}_{i,\downarrow} \rangle - E_{i,\downarrow} \right]. \quad (2)$$

で与えられる. ただし, $E_{j,\sigma}$ はボゴリューボフ励起のエネルギー, N_{σ} は擬スピン σ の粒子数である.

ここで, ポテンシャルの形状について記す. 3節では, 簡単のため調和トラップを無視し, ポテンシャルバリアのみから構成される1次元周期系を考える. ただし1つのポテンシャルバリアから成る周期系では, 周期境界条件を満たさないため π -phase 解が得られない. そのため, 次式で与えられる2つのポテンシャルバリアから構成される周期系を考える [図3(a)].

$$V_i^b = \begin{cases} V_0^b e^{-(i_x - L_x/4)^2/\ell^2} & 1 \leq i_x < L_x/2, \\ V_0^b e^{-(i_x - 3L_x/4)^2/\ell^2} & L_x/2 \leq i_x \leq L_x. \end{cases} \quad (3)$$

ここで, L_x は x 方向のサイト数, i_x はサイトのラベルである. また, V_0^b, ℓ はポテンシャルバリアの高さと幅を表すパラメータである. (3) 式ではポテンシャルバリアとしてガウシアンを用いたが, この形状は SFS 接合や π -phase の形成に対し本質的ではない. 2次元系においても (3) 式で記述されるポテンシャル [図3(b)] の下での解析を行う. トラップポテンシャルを考慮した系については4節で議論する. V_i として,

$$V_i = V_0^t \left(i_x - \frac{L_x}{2} \right)^2 + V_0^b e^{-(i_x - L_x/2)^2/\ell^2}, \quad (4)$$

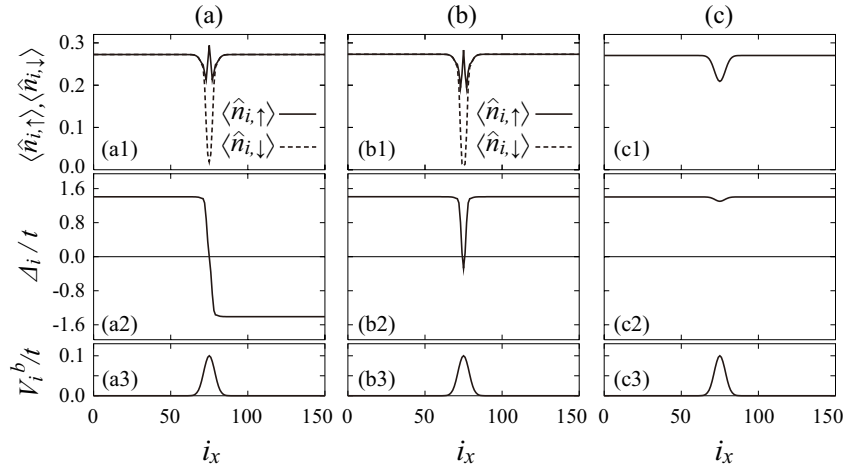


図4 図3(a)に示した1次元周期系における(a) π -phase解と(b) 0-phase解. 偏極のない系の安定状態も(c)に示した. 図は上から粒子密度 $\langle n_{i,\sigma} \rangle$, オーダーパラメータ Δ_i , ポテンシャル V_i を表す. エネルギーの比較から, π -phaseが安定である. 一つのポテンシャルバリアに局在する余剰原子の数 $N_L \equiv \Delta N/2$ は(a), (b)では $N_L = 1$, (c)では $N_L = 0$ である. その他のパラメータは $L_x = 300, N = 160, U/t = 4, V_0^b/t = 0.1, \ell = 5$ である. N_L 以外のパラメータは図5, 6(a)でも同一である. 結果は $i_x = L_x/2$ で対称であるため, $1 \leq i_x \leq L_x/2$ の範囲を示した.

を用いる. ここで V_0^t はトラップポテンシャルの強さを表すパラメータである.

3 SFS 接合および π -phase の形成

1次元周期系 [図3(a)] において得られた π -phase解と 0-phase解を図4に示す. π -phase解, 0-phase解ともに, スピン偏極 $s_i \equiv \langle \hat{n}_{i,\uparrow} \rangle - \langle \hat{n}_{i,\downarrow} \rangle$ はポテンシャルバリアの周辺で有限となっており, 期待された通り, 余剰原子はポテンシャルの高い領域に局在する. 図4では $\Delta N = 2$ であるが, 系は2つのポテンシャルバリアから構成されているため, 1つのポテンシャルバリアに局在している余剰原子の数 N_L は1である. 超流動オーダーパラメータ Δ_i およびスピン偏極 s_i は空間的に連続に変化するため, 厳密には超流動相と余剰原子から成るノーマル相の相境界は定義できないが, ここでは s_i がある程度の大きさを持っている領域を強磁性壁と呼ぶことにする.

π -phase解では, 強磁性壁の左右で超流動オーダーパラメータの符号は反転してい

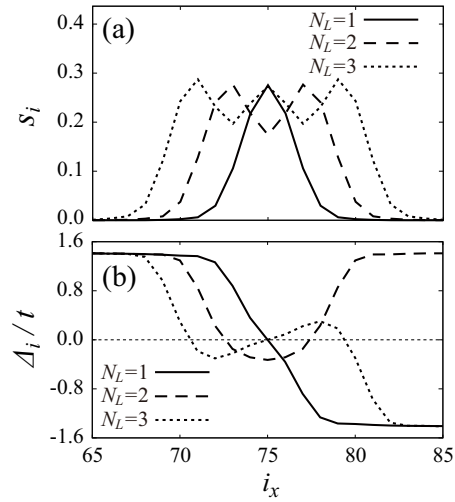


図5 $N_L = 1 - 3$ における安定状態の (a) スピン偏極 $s_i \equiv \langle n_{i,\uparrow} \rangle - \langle n_{i,\downarrow} \rangle$ と (b) オーダーパラメータ Δ_i . ここではスピン偏極が有限の領域 ($65 \leq i_x \leq 85$) を示した. $N_L = 1, 3$ では π -phase, $N_L = 2$ では 0-phase が安定となる.

る [図 4(a2)]. 一方, 0-phase 解においては, 左右の超流動相のオーダーパラメータの位相は等しい [図 4(b2)]. このときの π -phase 解と 0-phase 解のエネルギーはそれぞれ $E_G^{\pi\text{-phase}}/t = -423.617$, $E_G^{0\text{-phase}}/t = -423.583$ であるため, π -phase が安定である. エネルギー差 $\Delta E_G \equiv E_G^{\pi\text{-phase}} - E_G^{0\text{-phase}}$ (このときの ΔE_G は図 6 の $N_L = 1$ に対応する.) の絶対値が $E_G^{\pi\text{-phase}}$ や $E_G^{0\text{-phase}}$ のそれに比べ非常に小さいのは, $E_G^{\pi\text{-phase}}$ や $E_G^{0\text{-phase}}$ がバルクのエネルギーであるのに対し, ΔE_G は接合部分から生じる表面エネルギーに起因するためである.

π -phase はスピン偏極した系に特徴的な現象であり, スピン偏極のない系では安定になることはない. その例として, スピン偏極のない系 ($N = 160, \Delta N = 0$) における安定状態を図 4(c) に示した. オーダーパラメータはポテンシャルバリアの領域でわずかに減少するだけで, ほとんど影響を受けない. つまり π -phase が安定になることは, 余剰原子が強磁性壁として機能することを示している.

π -phase は, 磁場中の超伝導で実現する FFLO 状態 [10, 11] と深く関係している. FFLO 状態では, ゼーマン磁場の影響でクーパー対が有限の運動量を持った状態に凝縮するため, 超伝導オーダーパラメータが空間的に振動することが知られている. 同様の振動が, SFS 接合の強磁性体中においても起こる. そのため, 強磁性壁の両端で

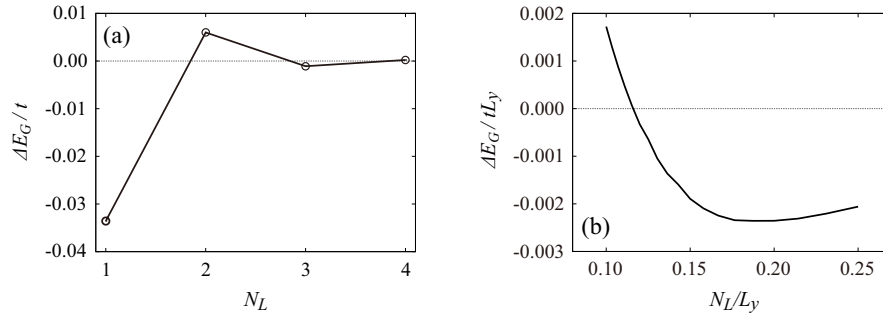


図6 π -phase と 0-phase のエネルギー差 $\Delta E_G = E_G^{\pi\text{-phase}} - E_G^{0\text{-phase}}$ の N_L 依存性. (a) 1次元系. (b) 2次元系. y 方向の単位長さ当たりの N_L , ΔE_G を x, y 軸として表した. 粒子数は $N_\sigma = (N + 2\sigma N_L)/2$, $N = 6L_y$ である. $L_y (= 17 - 48)$ は L_y/N_L が整数となるように選んだ. その他のパラメータは $U/t = 7, V_0^t/t = 0.2, \ell = 1, L_x = 50$ で同じ値を図7においても用いている.

超伝導オーダーパラメータの位相が異なる場合が起こり得て, このとき π -phase が実現する. 一方, 位相が等しい場合には 0-phase が実現する. このように π -phase は強磁性体中での超伝導オーダーパラメータの振動と関係しているため, 強磁性壁の厚さを変化させたとき, π -phase と 0-phase の間で転移 (0- π 転移と呼ばれる.) が起きる [7]. 今考えているフェルミ原子ガスを用いた系においては, 強磁性壁の厚さは余剰原子の数 N_L に依存する [図 5(a)]. そのため N_L の変化に対し, 0- π 転移が期待される. 実際, 図 6(a) に示すように, $N_L = 1$ では π -phase が安定であったが, $N_L = 2$ では 0-phase へと転移する. また, $N_L = 3$ では再び π -phase が安定になる. 図 5(b) はそれぞれの N_L での基底状態の超流動オーダーパラメータである. $N_L = 2, 3$ では, 余剰原子の作る強磁性壁中で超流動オーダーパラメータが振動する様子が見られる.

4 次元性およびトラップの影響

前節では, SFS 接合および π -phase の実現可能性を探るため, トラップを無視した 1次元周期系を考えた. 本節では, 前節の議論を拡張し, 次元性およびトラップの効果について議論する.

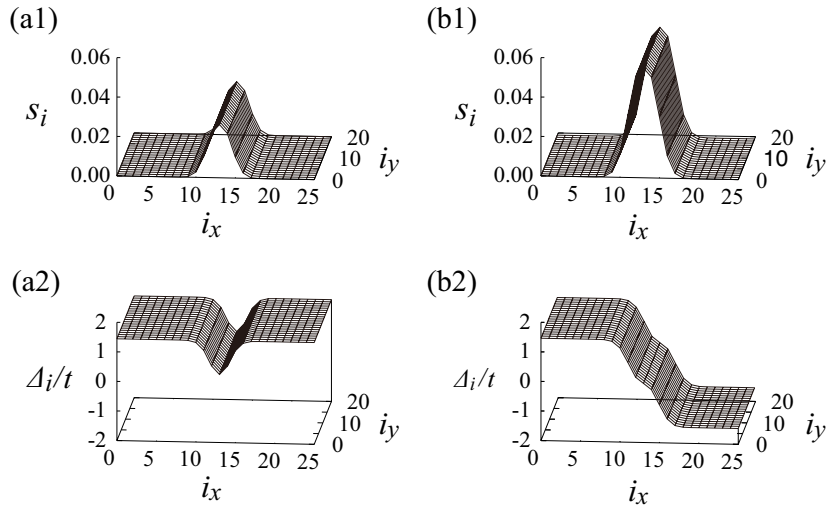


図7 (a) $N_L/L_y = 0.1$ ($L_y = 30$) および (b) $N_L/L_y = 0.25$ ($L_y = 20$) における安定解のスピンの偏極 [(a1), (b1)] と超流動オーダーパラメータ [(a2), (b2)] . (a) では 0-phase, (b) では π -phase が実現している. この図では $1 \leq i_x \leq 25$, $1 \leq i_y \leq 20$ の範囲を示した.

4.1 次元性

3節では、1次元系において、SFS 接合および π -phase が実現し得ることを示した。しかし、図 6(a) に示したように、 π -phase は余剰原子の数 N_L に対して非常に不安定 (N_L に対して $O(1)$ で $0-\pi$ 転移が起きる。) であるため、実験的に π -phase を実現することは難しいと思われるかもしれない。しかし、この不安定性は 1次元系に特有のものであり、高次元系においては取り除かれると考えられる。1次元系では、余剰原子の数が増えたとき、強磁性壁の幅が x 方向に広がり、それに伴って $0-\pi$ 転移が起きた。これに対し、高次元系では余剰原子は y, z 方向にも広がるため、余剰原子の数が少し変化しただけでは強磁性壁の厚さは大きく変わらないと考えられる。そのため、 π -phase は N_L に対して安定になると期待される。

以上のことを確認するため、図 3(b) に示した 2次元周期系において N_L に対する π -phase の安定性を調べる。図 6(b) は π -phase と 0 -phase のエネルギー差 $\Delta E_G = E_G^{\pi\text{-phase}} - E_G^{0\text{-phase}}$ を N_L/L_y の関数としてプロットしたものである。期待

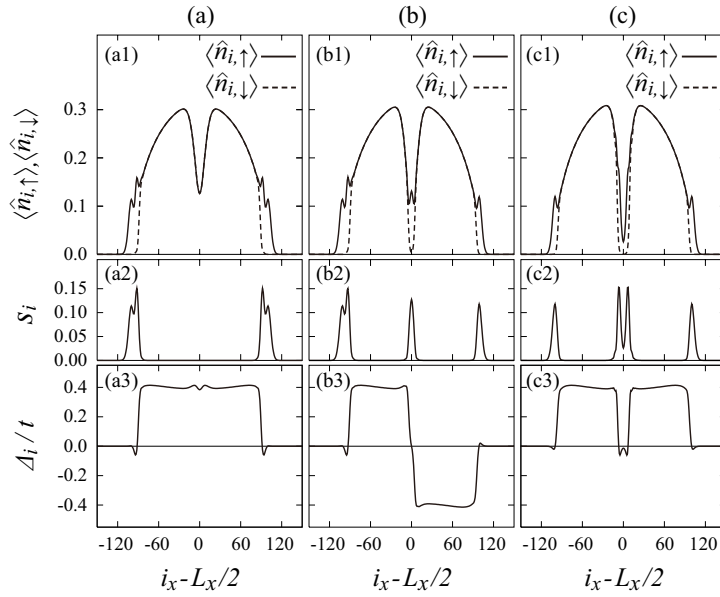


図 8 1次元二重井戸型ポテンシャル中のスピン偏極したフェルミ原子ガス. 図は上から粒子密度 $\langle \hat{n}_{i,\sigma} \rangle$, スピン偏極 s_i , オーダーパラメータ Δ_i を表す. ポテンシャルバリアの高さ V_0^b はそれぞれ (a) $0.4t$, (b) $0.5t$, (c) $0.6t$ である. その他のパラメータは $N = 90, \Delta N = 4, U/t = 2, V_0^t/t = 0.00005, \ell = 12$ である.

された通り, L_y が十分大きければ, π -phase は有限の範囲 ($N_L/L_y > 0.12$) で安定となる. ここで, $N_L/L_y = 0.1$ と $N_L/L_y = 0.25$ におけるスピン偏極 s_i [図 7(a1), (b1)] を比較する. 1次元系の場合 (図 5) と異なり, 余剰原子の数を変えたとき, スピン偏極 s_i はポテンシャルバリアの中心で大きくなるが, 強磁性壁の厚さはほとんど変化しない. もちろん N_L をさらに大きくすれば, 強磁性壁は厚くなり, π -phase から 0-phase への転移が起こり得る.

4.2 トラップの効果

トラップ系においては, 余剰原子はポテンシャルバリアの周辺に局在するとは限らない. 実際, ポテンシャルバリアが低い場合, 余剰原子はポテンシャルバリアの周辺ではなく, トラップの端に局在する [図 8(a2)]. このとき, 超流動相は非磁性のポテンシャルバリアを介して接合されているため, 0-phase が実現する [図 8(a3)]. ポテ

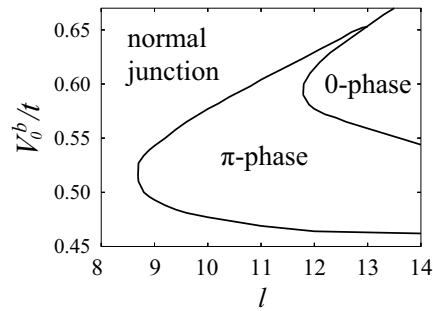


図9 1次元二重井戸型ポテンシャル中におけるスピン偏極したフェルミ原子ガスのポテンシャルバリアの高さ V_0^b と幅 l に対する相図. “normal-junction” は余剰原子がポテンシャルバリアの周辺に局在せず強磁性壁を形成しない領域を表す. パラメータは図8と同一のものを用いている.

ンシャルバリアを高くすると、バリアの周辺に1つの余剰原子が局在する [図8(b2)]. その結果、ポテンシャルバリアは磁化され、 π -phase が実現する [図8(b3)]. バリアの周辺に局在する余剰原子は、ポテンシャルバリアをさらに高くすると、数を増し、再び 0-phase が得られる [図8(c)].

図9はポテンシャルバリアの高さと幅に対する相図である. SFS 接合と π -phase は有限の領域で安定になる. 同様の解析を、2次元の葉巻型トラップにポテンシャルバリアを加えた二重井戸型ポテンシャル中においても行い、この場合にも SFS 接合と π -phase は安定になり得ることを示した [6]. そのため、SFS 接合と π -phase は実験的に観測可能であると考えられる.

5 まとめ

超流動フェルミ原子ガスを用いた SFS 接合と π -phase の実現可能性について議論した. スピン偏極したフェルミ原子ガスの相分離において、余剰原子がポテンシャルエネルギーの高い領域を占有することを利用し、ポテンシャルバリア周辺に余剰原子が局在することを示した. 余剰原子が局在したポテンシャルバリアは強磁性壁として機能し、SFS 接合および π -phase が実現することを明らかにした. これらの結果は、超流動フェルミ原子ガスに対する磁性効果を研究する上で有用であると考えられる.

謝辞

本研究はグローバル COE プログラム「アクセス空間支援基盤技術の高度国際連携」(C12) の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] C. A. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 040403 (2004).
- [2] M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, C. Chin, J. H. Denschlag, and R. Grimm, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 120401 (2004).
- [3] M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, A. J. Kerman, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 120403 (2004).
- [4] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885 (2008).
- [5] S. Giorgini, L. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1215 (2008).
- [6] T. Kashimura, S. Tsuchiya, and Y. Ohashi, *Phys. Rev. A* **82**, 033617 (2010).
- [7] A. I. Buzdin, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 935 (2005).
- [8] M. W. Zwierlein, A. Schirotzek, C. H. Schunck, and W. Ketterle, *Science* **311**, 492 (2006).
- [9] G. B. Partridge, W. Li, R. I. Kamar, Y.-A. Liao, and R. G. Hulet, *Science* **311**, 503 (2006).
- [10] P. Fulde and R. A. Ferrel, *Phys. Rev.* **135**, A550 (1964).
- [11] A. I. Larkin and Y. N. Ovchinnikov, *Sov. Phys. JETP* **20**, 762 (1965).

双極フェルミ分子を含む極低温原子気体の相構造

松田 裕一
立命館大理工

極低温原子気体が分子を形成する過程を含んでいる系を考える。この中の粒子間に双極子—双極子相互作用が働く場合、化学平衡過程が影響を受け、相構造が変化する。この講演では、特にフェルミ分子間に双極子間相互作用が働いている場合を考え、双極フェルミ分子を含んだ **BF** 混合気体の相構造を紹介した。

p 波相互作用するフェルミ気体における 強結合効果と擬ギャップ構造

猪谷 太輔¹, 渡邊亮太¹, Manfred Sigrist², 大橋洋士^{1,3}

1) 慶應義塾大学 2) ETH-Zurich 3) JST(CREST)

1 はじめに

冷却原子気体では Feshbach 共鳴を用いることにより相互作用の強さを操作することができる。近年、⁴⁰K[1]、⁶Li[2] 原子気体において p 波の Feshbach 共鳴が観測され、これにより等方的な s 波相互作用のみならず、異方的な p 波相互作用の強さも操作することが可能になった。このような背景から現在、冷却原子気体の次なる目標として p 波超流動の実現に期待が高まっている。s 波相互作用する Fermi 原子気体ではすでに、弱結合領域における BCS 超流動から、強結合領域における分子ボソンのボースアインシュタイン凝縮への移り変わり (BCS-BEC クロスオーバー) の観測に成功し [3]、また多くの理論的な研究が行われている。それらの先行研究によると、このクロスオーバーでは強結合効果により対形成揺らぎが重要となり、系はその影響を受けることがわかっている。その例として最近、転移温度以上においても対形成揺らぎによって状態密度に超流動ギャップのような窪み、いわゆる擬ギャップが生じることが報告された [4]。そこで我々は p 波相互作用する Fermi 原子気体の 1 粒子状態に対する強結合効果に注目した。擬ギャップは超流動の前駆現象であるため転移温度に近づくにつれて顕著になっていく特徴がある。従って p 波相互作用する Fermi 原子気体においても擬ギャップ構造が生じ、その温度依存性と相互作用依存性の詳細があらかじめわかっていたら、逆に擬ギャップを測定することによってその系がどの程度、転移温度に近づいているか知ることができ、p 波超流動の実現に役立つことが予想できる。本研究では s 波相互作用の場合によく強結合効果を記述する T 行列近似を、p 波相互作用する Fermi 原子気体に拡張し転移温度における状態密度の解析を行った。その結果、p 波の場合にも擬ギャップが生じるが、その相互作用依存性は s 波の場合とは大きく異なることがわかった。

2 p 波相互作用する Fermi 原子気体における状態密度の解析

p 波相互作用する 1 成分 Fermi 原子気体のハミルトニアンは次のように与えられる。

$$H = \sum_{\mathbf{p}} \xi_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}}^{\dagger} c_{\mathbf{p}} - \frac{U}{2} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{q}, i} p_i p'_i c_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}}{2}}^{\dagger} c_{-\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}}{2}}^{\dagger} c_{\mathbf{p}'+\frac{\mathbf{q}}{2}} c_{-\mathbf{p}'+\frac{\mathbf{q}}{2}} \quad (1)$$

ここで、 $c_{\mathbf{p}}$ は、化学ポテンシャル μ から測った運動エネルギーが $\xi_{\mathbf{p}} = \varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu = p^2/2m - \mu$ の Fermi 原子に対する消滅演算子、 U は Feshbach 共鳴によって操作可能な p 波相互作用の結合定数である。相互作用項の波数 \mathbf{p}, \mathbf{p}' の和は紫外発散を避けるためにカットオフ p_c を導入する必要がある。従って p 波相互作用は U と p_c の 2 つの量によって特徴付けられる。本研究では U と p_c の代わりに観測可能量である p 波散乱体積 v と有効距離 k_0 によって相互作用を記述する。なお U, p_c と v, k_0 の間には次のよ

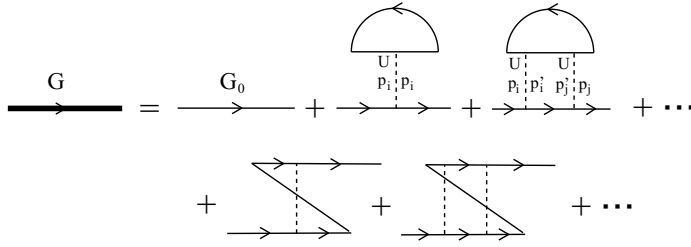


図1 T 行列近似における1粒子 Green 関数に対するダイアグラム。

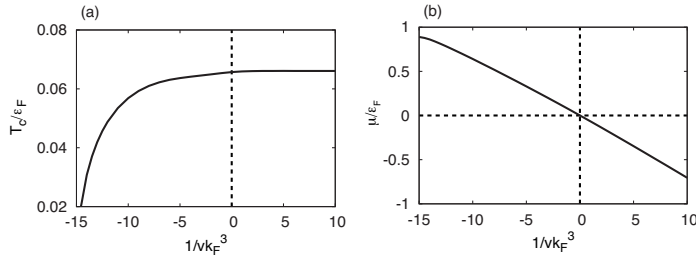


図2 (a) 超流動転移温度 T_c , (b) 転移温度上 ($T = T_c$) における化学ポテンシャル μ の相互作用依存性。 ($k_0 = -30.0k_F$ 。ただし k_F は Fermi 波数。)

うな関係がある。

$$\frac{1}{3}v^{-1} = -\frac{4\pi}{mU} + \frac{2p_c^3}{9\pi}, \quad k_0 = -\frac{4p_c}{\pi} \quad (2)$$

次に強結合効果を議論するために、対形成揺らぎを T 行列近似の範囲内で取り入れる。この近似の範囲内では温度 Green 関数は図1のようなダイアグラムで表される。ただし図1において実線は自由 Fermion の温度 Green 関数 $G_0(\mathbf{p}, i\omega_m) = (i\omega_m - \xi_{\mathbf{p}})^{-1}$ を意味する。粒子数方程式は $N = T \sum_{\mathbf{p}, i\omega_m} G(\mathbf{p}, i\omega_m) e^{i\omega_m \delta}$ で与えられ、これを解くことで T_c 以上の任意の温度における化学ポテンシャルを決定することができる。さらにギャップ方程式を連立して解くことにより転移温度 T_c が求まる。転移温度 T_c 及び、転移温度上における化学ポテンシャルの相互作用依存性を図2に示す。状態密度は Green 関数を解析接続することによって次のように求めることができる。

$$\rho(\omega) = -\frac{1}{\pi} \sum_{\mathbf{p}} \text{Im} G(\mathbf{p}, i\omega_m \rightarrow \omega + i\delta) \quad (3)$$

このように計算した状態密度を図3(a)に示す。また図3(b)はs波相互作用の場合について同様の解析を行った結果である。図3(a),(b)を比較するとs波相互作用の場合には相互作用を強くするにつれて擬ギャップが単調に開いていくのに対して[図3(b)]、p波相互作用の場合、弱結合側では擬ギャップが開いていくがある程度相互作用が強くなると逆に擬ギャップは閉じていき、 $1/v \sim 0$ で消失するという非単調な変化をすることがわかる[図3(a)]。この振る舞いはp波相互作用の波数依存性に注目すると次のように理解できる。擬ギャップの大きさはおよそ Fermi 面における相互作用の強さを反映しており、そのため弱結合側では相互作用を強くするにつれて擬ギャップは広がっていく(図

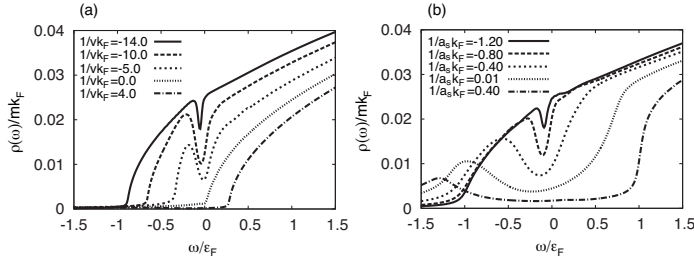


図3 転移温度上における状態密度。(a),(b)はそれぞれ p 波相互作用 ($k_0 = -30.0k_F$), s 波相互作用 [4] の場合の計算結果。

3(a), $1/vk_F^3 = -14.0 \sim -10.0$ 。さらに相互作用を大きくすると今度は強結合効果によって化学ポテンシャルが小さくなり、Fermi 面が低エネルギー側にシフトする [図 2(b)]。このとき Fermi 面における相互作用の強さは $Up^2(\varepsilon_{\mathbf{p}} = \mu) = 2m\mu U$ であるために化学ポテンシャルの減少に伴い弱くなる。その結果、擬ギャップは閉じていき $\mu = 0(1/v \sim 0)$ において擬ギャップが消失する。一方 s 波の場合、相互作用は波数に依存しないため強結合側に行くにつれて擬ギャップは単調に大きくなる。このように s 波と p 波の場合では、擬ギャップ生じる機構はどちらも対形成揺らぎによるものであるが、その相互作用依存性には大きな違いが見られることがわかった。

3 まとめと展望

T 行列近似を p 波相互作用の場合に拡張し、1 粒子状態密度の解析を行った。その結果、転移温度において p 波相互作用の場合にも擬ギャップが生じることが明らかになった。また相互作用の波数依存性から擬ギャップ構造は Fermi 面の位置の影響を大きく受け、非単調な相互作用依存性を示すことがわかった。今度は転移温度以上において同様の計算を行い、一様系における擬ギャップ領域を特定する。さらに実験と直接比較できるトラップ系に拡張し状態密度の解析を行う予定である。

参考文献

- [1] C. A. Regal, C. Ticknor, J. L. Bohn, and D. S. Jin, Phys. Rev. Lett. **90**, 053201 (2003).
- [2] J. Zhang, E. G. M. van Kempen, T. Bourdel, L. Khaykovich, J. Cubizolles, F. Chevy, M. Teichmann, L. Tarruell, S. J. J. M. F. Kokkelmans, and C. Salomon, Phys. Rev. A **70** 030702(R) (2004).
- [3] C. A. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin, Phys. Rev. Lett. **90**, 053201 (2003).
- [4] S. Tsuchiya, R. Watanabe, and Y. Ohashi Phys. Rev. A **80**, 033613 (2009).

Analysis of the chiral phase transition in finite temperature QCD by using non-perturbative renormalization group

Ken-Ichi Aoki, Kazuhiro Miyashita¹ and Daisuke Sato
Kanazawa Univ., ¹Aichi Shukutoku Univ.

I. INTRODUCTION

Protons and neutrons, constituting matter around us, obtain most of their masses by “dynamical chiral symmetry breaking”. At low energy scale, the strong QCD interactions bring about, this spontaneous symmetry breakdown, which we can’t derive by the perturbation theory. Therefore we need some non-perturbative methods to analyze its dynamics.

Non-perturbative renormalization group, abbreviated as NPRG, gives non-perturbative β functions which describes the change of effective interactions when we lower the “scale” of the effective theory. This change is described by a renormalization group flow in the interaction space.

In this article, we develop a new method of evaluating the chiral condensates of quarks in NPRG framework. The chiral condensates play a role of an order parameter of the chiral symmetry, and we also analyze the critical temperature and the critical exponent of the chiral phase transition at finite temperature.

II. NON-PERTURBATIVE RENORMALIZATION GROUP (NPRG)

Throughout this work, the essential ingredient is the Wilsonian effective action $S_{\text{eff}}[\phi; \Lambda]$ at a momentum scale Λ which is the so-called renormalization scale in NPRG. The Wilsonian effective action is obtained by adding fluctuation of high momentum degrees of freedom of the quantum field. Actually, we integrate out the high momentum modes $\phi(p > \Lambda)$ from the ultraviolet cutoff scale Λ_0 to a scale Λ in the functional integral of partition function, and then we define $S_{\text{eff}}[\phi; \Lambda]$ as follows,

$$\begin{aligned} Z &= \int \prod_{|k| < \Lambda} d\phi(k) \prod_{\Lambda < |p| < \Lambda_0} d\phi(p) e^{-S_0[\phi; \Lambda_0]} \\ &= \int \prod_{|k| < \Lambda} d\phi(k) e^{-S_{\text{eff}}[\phi; \Lambda]}, \end{aligned}$$

where S_0 denotes the bare action with the ultraviolet cutoff Λ_0 . By non-perturbatively evaluating the derivative of $S_{\text{eff}}[\phi; \Lambda]$ with respect to Λ , we get NPRG equation [1, 2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{\text{eff}}}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^d \hat{p}}{(2\pi)^d} \delta(1 - |\hat{p}|) \left\{ -\text{str} \ln \left(\frac{\delta^2 S_{\text{eff}}}{\delta \hat{\phi}_p^i \delta \hat{\phi}_{-\hat{p}}^j} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta \hat{\phi}_p^i} \left(\frac{\delta^2 S_{\text{eff}}}{\delta \hat{\phi}_p^i \delta \hat{\phi}_{-\hat{p}}^j} \right)^{-1} \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta \hat{\phi}_{-\hat{p}}^j} \right\} + dS_{\text{eff}} \end{aligned}$$

$$- \int_0^1 \frac{d^d \hat{p}}{(2\pi)^d} \hat{\phi}_{\hat{p}}^i \left(\frac{2-d-\eta^i}{2} - \hat{p}^\mu \frac{\partial'}{\partial \hat{p}^\mu} \right) \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta \hat{\phi}_{\hat{p}}^i}. \quad (1)$$

Here we parameterize the scale Λ by $t = \log(\Lambda_0/\Lambda)$ and transform variables to dimensionless ones, denoted by hatted $\hat{}$ symbols, by using Λ as a moving unit. This functional differential equation is called the Wegner-Houghton equation. Since this equation (of infinite dimensional) can’t be solved directly, we take the local potential approximation, where all fields are approximated to be space-time independent constants in evaluating the right-handed side of Eq(1).

III. $SU(N_c)$ GAUGE THEORY WITH N_f FLAVOURS

An $SU(N_c)$ gauge theory with N_f flavours has a chiral symmetry of

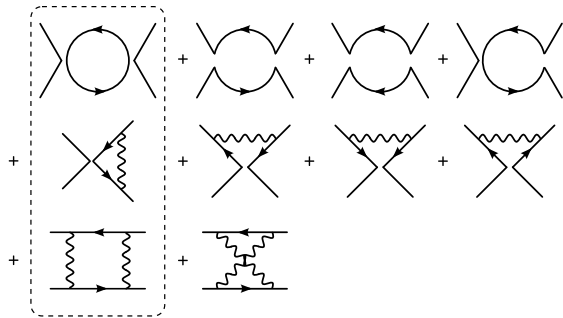
$$SU(N_f)_R \times SU(N_f)_L \times SU(N_c) \times U(1)_V.$$

The effective operators generated by NPRG equation must respect this symmetry guaranteed by the bare action. As for the working ground of NPRG equation, we adopt the complete 4-fermi operator space satisfying this symmetry [3]. Furthermore we limit ourselves to work with the following operators which can be generated by gauge interactions:

$$\begin{aligned} V_4(\bar{\psi}, \psi; \Lambda) &= \frac{1}{2N_f N_c} \left[G_1(\Lambda) \left((\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)^2 - (\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi)^2 \right) \right. \\ &\quad + G_2(\Lambda) \left((\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)^2 + (\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi)^2 \right) \\ &\quad + G_{c1}(\Lambda) \left((\bar{\psi} \gamma_\mu T^a \psi)^2 - (\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu T^a \psi)^2 \right) \\ &\quad \left. + G_{c2}(\Lambda) \left((\bar{\psi} \gamma_\mu T^a \psi)^2 + (\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu T^a \psi)^2 \right) \right], \quad (2) \end{aligned}$$

Here T^a is the generator matrices of $SU(N_c)$. The β functions of these 4-fermi operators are given by 1-loop diagrams in FIG.1, in which gluons and quarks of only the shell mode momentum may propagate. Although 4-fermi operators are generally irrelevant (no effects at the low energy) in the perturbation theory (around the gaussian fixed point), they are transformed into relevant operators when the gauge interaction becomes strong at the low energy scale to make supercritical 4-fermi interactions. This fact is nothing but the origin of the chiral symmetry breaking in NPRG language.

As for the gauge coupling constant, we use the 1-loop perturbative RG running. Also, we introduce the infrared

FIG. 1: β functions for 4-fermi operators.

cutoff effect [4] that the running gauge coupling constant stops increasing at a proper low energy scale, which is natural due to the confinement effects. We use the cutoff scheme adopted by [5], where an artificial infrared cutoff scale parameter Λ_{IF} is introduced. This arbitrariness does not invalidate our calculation since physical quantities like the chiral condensates are not sensitive to the choice of the infrared cutoff scale Λ_{IF} [5].

IV. INTRODUCING COLLECTIVE FIELD

As noted before, no effective operator explicitly breaking the chiral symmetry is generated in the effective action at the low energy scale by NPRG equation. To effectively take account of the spontaneous breakdown of the chiral symmetry, we introduce collective fields [6, 7] after integrating the high momentum part of fields in the bare action to a momentum scale Λ_c , which is set as a typical chiral symmetry breaking scale. Using a simplified notation, a collective field σ , which resembles to the well-known auxiliary field in the path integral, is introduced as follows:

$$Z = \int \prod_{0 < p < \Lambda_c} d\Omega_p^i d\sigma_p e^{-S_{\text{eff}}[\Omega; \Lambda_c]} \times \exp \left\{ - \int d^4x \frac{1}{2} (\sigma - y\bar{\psi}\psi)^2 \right\}, \quad (3)$$

$$\equiv \int \prod_{0 < p < \Lambda_c} d\Omega_p^i d\sigma_p e^{-S_{\text{eff}}[\Omega, \sigma; \Lambda_c]}, \quad (4)$$

where the effective action S_{eff} includes following operators with the collective field,

$$U(\psi, \bar{\psi}, \sigma; \Lambda) = U_0(\sigma; \Lambda) - m(\sigma; \Lambda)\bar{\psi}\psi + V_4(\psi, \bar{\psi}; \Lambda). \quad (5)$$

Next, we expand the collective field $\sigma(x)$ around the zero mode σ and ignore its quantum fluctuation. Then the collective field is treated as a constant external field σ , and we can easily calculate the β functions for each term in Eq.(5). Because the infrared value of U_0 in Eq.(5) corresponds to the free energy, we finally set σ to be the minimum position of $U_0(\sigma; \Lambda \rightarrow 0)$. Hereafter we denote this vacuum value by σ_0 . The non-vanishing mass term and the chiral condensates of quarks are realized by the fact that the minimum position σ_0 becomes non-vanishing.

In particular, the dynamical mass of quark is given by

$$m_{\text{eff}} = \lim_{\Lambda \rightarrow 0} m(\sigma_0, \Lambda) \quad (6)$$

The chiral condensates $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ are evaluated by

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \lim_{\Lambda \rightarrow 0} \frac{1}{N_f} \frac{\partial}{\partial m_0} U_0(\sigma_0, m_0, \Lambda) \Big|_{m_0=0}, \quad (7)$$

where we add a bare mass m_0 to the bare action. Note that this introduction of a bare mass is a must to directly evaluate the chiral condensates renormalized at Λ_0 . Actually the collective field term in Eq.(3) explicitly breaks the full chiral symmetry. We use, precisely speaking, the following form of chiral symmetric collective fields.

$$1 = \int \mathcal{D}\sigma_{ij} \mathcal{D}\pi_{ij} \times \exp \left\{ - \int d^4x \frac{1}{2} [(\sigma_{ij} - y\bar{\psi}_i\psi_j)(\sigma_{ji} - y\bar{\psi}_j\psi_i) + (\pi_{ij} - y\bar{\psi}_i i\gamma_5\psi_j)(\pi_{ji} - y\bar{\psi}_j i\gamma_5\psi_i)] \right\}, \quad (8)$$

where i and j denote flavour indices. The chiral transformation property of each collective field (σ_{ij} , π_{ij}) is exactly same as each corresponding composite operator. Suppose $SU(N_f)_V$ symmetry is preserved at low energy scale, only the unit matrix components of σ_{ij} may take a non-vanishing value, and we obtain m_{eff} and $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ through a non-vanishing value of this collective field.

V. FINITE TEMPERATURE SYSTEM

We can extend our methods to apply the finite temperature system by modifying the β function of NPRG equation appropriately. In the shell mode integration in Eq.(1), we use the finite temperature propagators as follows,

$$\int \frac{d^4\hat{p}}{(2\pi)^2} \delta(1 - |\hat{p}|) \rightarrow \hat{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3\hat{p}}{(2\pi)^3} \delta(1 - |\hat{p}|), \quad \hat{p} = (\hat{\omega}_n, \hat{\mathbf{p}}),$$

where $\omega_n = (2n + 1)\pi T$ is the discrete Matsubara frequencies. Here we do not consider thermal effects of the β function of the gauge coupling constant.

VI. NUMERICAL ANALYSIS

We take scale parameters from realistic QCD physics,

$$\Lambda_0 = M_Z = 91.1 \text{ GeV}, \quad \Lambda_{\text{QCD}} = 241 \text{ MeV}, \\ \Lambda_{\text{IF}} = 300 \text{ MeV},$$

and also we set $N_f = N_c = 3$. Note that these settings are just defining energy scales. Also we have confirmed that Λ_0 is large enough to assure that our NPRG flow is on the renormalized trajectory (infinite cutoff limit).

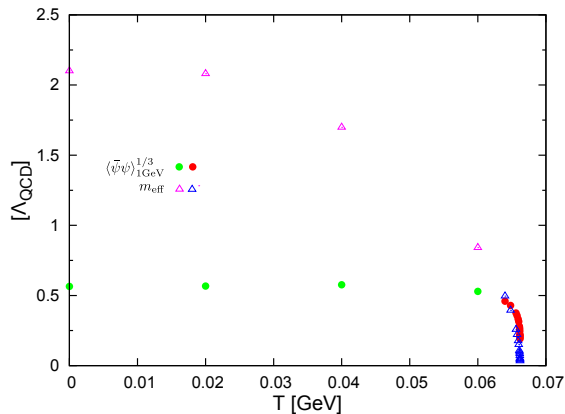


FIG. 2: Temperature dependences of the dynamical mass m_{eff} and the chiral condensates $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{1\text{GeV}}$.

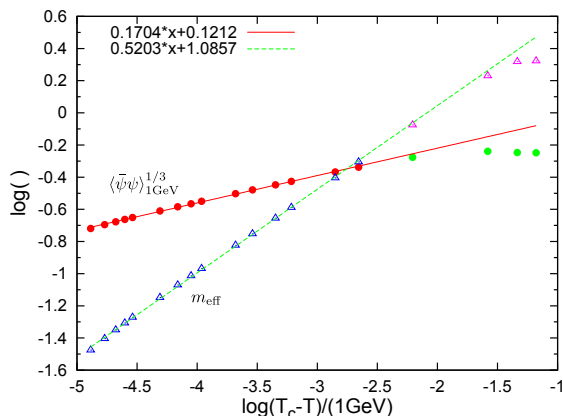


FIG. 3: Temperature dependences of m_{eff} and $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{1\text{GeV}}$ near criticality in the logarithmic scale.

At zero temperature, the dynamical mass m_{eff} and the chiral condensate $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{1\text{GeV}}$ renormalized at 1 GeV are obtained as

$$m_{\text{eff}} = 506 \text{ MeV}, \quad \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{1\text{GeV}} = (136 \text{ MeV})^3.$$

We adopt these quantities as order parameters of the chiral symmetry at finite temperature. We see in FIG. 2 that at some finite temperature these order parameters vanish continuously, which shows the finite temperature chiral restoration with a second order phase transition. We also evaluate the critical exponent β of the chiral condensates $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ defined by

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle(T) \stackrel{T \sim T_c}{\sim} C|T - T_c|^\beta. \quad (9)$$

From numerical results and fitting, we get the following

values

$$T_c = 66.2\text{MeV}, \quad \beta = 0.51.$$

Here, this value of the critical exponent is very close to 1/2, the general result by the mean field method.

VII. SUMMARY AND DISCUSSION

We have developed a new method of evaluating the chiral condensates and the dynamical mass of quark in the framework of non-perturbative renormalization group. We work with general gauge theories of arbitrary color and flavour numbers, and adopt the complete 4-fermi operator space respecting full chiral symmetry of the theory,

$$SU(N_f)_R \times SU(N_f)_L \times SU(N_c) \times U(1)_V.$$

where NPRG equation is solved. In addition, to take account of the chiral symmetry breaking effects, we introduce collective fields, which help us to safely evaluate the infrared values of the dynamical mass and the chiral condensates. By extending this method, we also analyze the chiral restoration at the finite temperature.

Our numerical results of chiral condensates $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{1\text{GeV}}$ at zero temperature and the critical temperature of the chiral restoration are somewhat smaller than ones obtained in lattice QCD. We guess that the chiral condensates will be scaled up, by using 2-loop β function for the gauge coupling constant instead of 1-loop β function. Eventually it is necessary that the gauge beta function should be non-perturbatively evaluated.

The order of the chiral phase transition is found to be second order in our analysis. The order parameter near the critical temperature show a good scaling behavior, and the critical exponent is well consistent with the result by the mean field method.

As for the ‘order’ of the phase transition, lattice QCD simulations and sigma models suggest that it is the first order in case of 3 flavours. There has been arguments that this first order transition is brought about by explicitly breakings of $U(1)_A$ symmetry due to the chiral anomaly. It is a future subject to effectively take account of the quantum anomaly in NPRG framework.

It should be stressed finally that our NPRG formalism does not have any tunable model parameter. It is not an artificial model but a method of calculating renormalizable gauge theory (QCD) with infinite cutoff.

-
- [1] F. J. Wegner and A. Houghton, Phys. Rev. A **8**, 401 (1973).
 [2] T. E. Clark, B. Haeri and S. T. Love, Nucl. Phys. B **402**, 628 (1993) [arXiv:hep-ph/9211261].
 [3] K. I. Aoki and K. Miyashita, Prog. Theor. Phys. **121**, 875 (2009).
 [4] K. Higashijima, Phys. Rev. D **29**, 1228 (1984).
 [5] K. I. Aoki, M. Bando, T. Kugo, M. G. Mitchard and

- H. Nakatani, Prog. Theor. Phys. **84**, 683 (1990).
 [6] K. I. Aoki, K. Morikawa, J. I. Sumi, H. Terao and M. Tomoyose, Phys. Rev. D **61**, 045008 (2000) [arXiv:hep-th/9908043].
 [7] D. Shimizube and J. I. Sumi, Prog. Theor. Phys. **115**, 165 (2006) [arXiv:hep-ph/0311109].

重いクォークに対する非閉じ込め相転移の次数

齋藤華, 江尻信司^a, 青木慎也, 金谷和至, 初田哲男^b,
前沢祐^c, 大野浩史, 梅田貴史^d

筑波大学数理物質科学研究科, ^a新潟大学自然科学研究科, ^b東京大学理学系研究科,
^c理化学研究所, ^d広島大学教育研究科
for WHOT-QCD Collaboration

1 非閉じ込め相転移

近年までに QGP (Quark Gluon Plasma) 実験において多くの進展があり、これから本格的に始まる LHC 実験への期待がさらに高まっている。実験的な成果と並んで、理論的な側面からも盛んに QGP 研究が行われている。理論的な研究の中でも特に格子 QCD シミュレーションは強力なツールの一つであり、スケーリング則や遮蔽質量など、現在までに格子 QCD シミュレーションを用いた研究が数多く行われてきている。

QGP 研究において相転移の次数は、クォークから構成される物質を理解する上で欠かせない情報である。有限温度 QCD の相転移の次数はこれまでも多くの研究がなされている。有限密度が盛んに研究される現在においてもやはり相転移次数は重要な研究テーマである [1, 2]。相転移の次数の解析手法に Binder cumulant と呼ばれる方法があり、これは最も広く用いられている。この方法では系の分布の特徴を用いて相転移の次数を区別している。本研究では、これに類似した方法だが、分布の情報をより直接的に抽出する確率分布関数による解析に注目する。この解析手法に Reweighting [3, 4] と呼ばれる手法を組み合わせることで、一次相転移の特定が容易になることを示す。今回は、そのテストとしてクォーク質量が無限大の極限を考え、そこでの一次相転移を確認する。さらにクォーク質量を小さくしたときにその一次相転移が消失することを確認し、各フレーバー数での臨界点を特定する。

2 確率分布関数

この研究では、ゲージ場の作用としてプラケット作用：

$$S_g = -6\beta N_{\text{site}} P \quad (1)$$

を用いる。ここで N_{site} は格子点の数, P は格子上で最小の Wilson loop (プラケット), また $\beta = 6/g^2$ である。クォークの作用 (S_q) に対しては standard wilson fermion を用い、クォーク質量 m_q に対応したパラメータとしてホッピングパラメータ κ を用いる。パラメータ κ は十分に値が小さい領域では $\kappa \propto m_q^{-1}$ である。本研究では相転移の次数を特定する基本的な量である確率分布関数を用いる。今回はプラケットの確率分布関数：

$$w(P') = \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \delta(P[U] - P') e^{-S} \quad (2)$$

を用いる。ただし、 $S = S_g + S_q$ である。これを用いて有効ポテンシャルを、

$$V(P) = -\ln w(P) \quad (3)$$

と定義する。さらに、確率分布関数の評価に Reweighting という手法を組み合わせる。この手法ではある値のシミュレーションパラメータでの分布をそのシミュレーションを行った値とは異なる値での分布に読み替え、情報を最大限に活用する。 β 方向の Reweighting は以下のように説明できる。シミュレーションを行ったパラメータ β_0 の分布を用いて β の分布を得る場合には、

$$w(P, \beta) = e^{6N_{\text{site}}(\beta - \beta_0)P} w(P, \beta_0). \quad (4)$$

このとき、ポテンシャル微分は式3から、

$$\frac{dV(P, \beta)}{dP} = \frac{dV(P, \beta_0)}{dP} - 6N_{\text{site}}(\beta - \beta_0). \quad (5)$$

これより dV/dP の P 依存性はシミュレーションパラメータ β に依らない。一次相転移がある場合には、 V は相転移点で二つの極小値を持ち、 dV/dP はそこでS字型の形状をもつ。一方、一次相転移がない場合には V は常に極小値が一つで、 dV/dP は単調増加な形状となる。これらの特徴から一次相転移を特定できる。したがって、 β を精度よく決定しなくとも、 dV/dP のS字型さえ確認できれば一次相転移を特定することができるので、シミュレーションによる一次相転移の特定が容易になるはずである。また、 κ 方向への Reweighting を考えることも重要である。この場合はポテンシャルから κ 依存性を抜き出して考える：

$$V(P, \beta, \kappa) = -\ln R(P, \kappa, \kappa_0) + V(P, \beta, \kappa_0). \quad (6)$$

ただし、 κ 方向の Reweighting を示す $R(P, \kappa, \kappa_0)$ は確率分布関数の比によって定義されており、

$$R(P', \kappa, \kappa_0) \equiv \frac{w(P', \beta, \kappa)}{w(P', \beta, \kappa_0)} \quad (7)$$

$$= \frac{\left\langle \delta(P' - P[U]) \left[\frac{\det M(U, \kappa)}{\det M(U, \kappa_0)} \right]^{N_f} \right\rangle_{(\beta, \kappa_0)}}{\langle \delta(P' - P[U]) \rangle_{(\beta, \kappa_0)}}.$$

ここで、 $\det M(U, \kappa)$ はクォーク行列式である。非閉じ込め相転移の次数はクォーク質量に依存する。この表式を用いれば、 κ_0 での分布を用いて、そのクォーク質量依存性を調べることができる。また、クォーク質量が大きい領域における臨界点は κ の値が十分小さい領域にあると考えられるので、本研究では $\kappa_0 = 0$ とする。また、 $\det M(U, \kappa)$ は κ による展開（ホッピングパラメータ展開）によって計算する。

3 シミュレーションの詳細と結果

本研究では $24^3 \times 4$ 格子を用いて、SU(3) pure gauge シミュレーションを行う。シミュレーションパラメータは $\beta = 5.68\text{--}5.7$ の範囲で5点選ぶ。

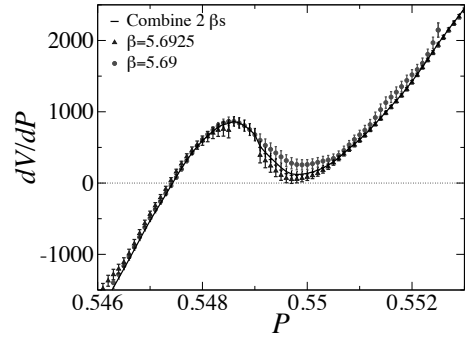


図1: 各 β での有効ポテンシャルの微分（エラーが大きくな点は除外）

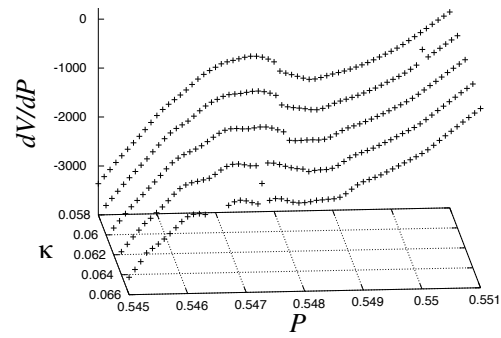


図2: 有効ポテンシャルの微分

これらのシミュレーションから得られる dV/dP を式5を用いてつなぎ合わせる。その結果の一部を図1に示す。これより、 dV/dP の P 依存性が β に依らないことがわかる。また、一次相転移の特徴であるS字型の形状を明確に見ることが出来る。 κ 方向の Reweighting で得られる $\kappa \neq 0$ の場合の dV/dP は図2のようになる。 κ の増加にともなって、S字型の形状が徐々に見られなくなっていく様子が見られる。また、 $\kappa \geq 0.066$ で一次相転移が見られなくなることが予想できる。

臨界点を特定するために有効ポテンシャルの二階微分を計算する。図3の結果から κ の値が大きくなるに連れて、 $d^2V/dP^2 < 0$ となる P の区間が狭くなることがわかる。より詳しく調べるために、各ブライケットの値において κ を増加させた時の d^2V/dP^2 の変化を調べる。一次相転移では二階微分の最小値が負になることに注目し、二階微分の最小値の符号がどの P に対しても正になる κ を探すことで臨界点 (κ_c) を求める。 $N_f = 2$ の

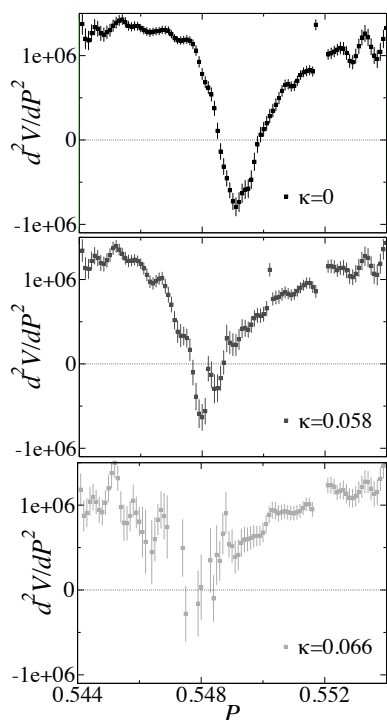


図 3: 有効ポテンシャルの二階微分 (エラーが大きな点は除外)

場合は $\kappa_c = 0.068(7)$ となった。

臨界点はフレーバー数 (N_f) によって変化する。本研究で用いたホッピングパラメータ展開の主要な寄与だけの場合には、フレーバー数が増加すると κ_c の値が小さくなる。これは、フレーバー数が増加するにつれて動的なクォークの寄与が増え、よりクォーク質量が大きい場合 (κ の値が小さい場合) に一次相転移が消失するためである。 $N_f = 1$ の場合、 $\kappa_c = 0.081(8)$ となり [5] と一致している。また、 $N_f = 2+1$ (縮退した u,d クォークと s クォーク) の場合には相転移の次数は図 4 のように表すことができる。

4 まとめ

本研究では確率分布関数による解析方法に Reweighting を加えた方法を用いて、クォーク質量が大きい領域における非閉じ込め相転移の次数の解明を行った。 $\kappa = 0$ の極限での非閉じ込め相転移は一次相転移であることが確認できた。また、 κ の値を小さくしていくと一次相転移の特徴

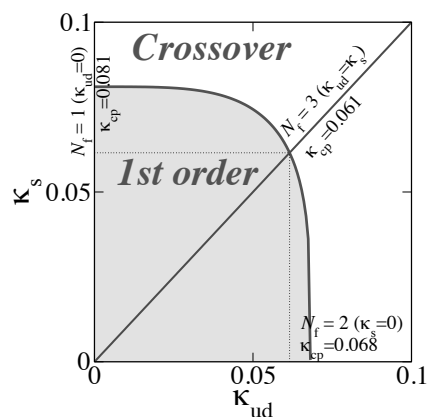


図 4: 重いクォークの QCD 相図 ($N_f = 2 + 1$)

が見られなくなっていく様子が確認できた。最終的に、臨界点が $N_f = 2$ の時には $\kappa_c = 0.068(7)$ であることを特定した。また、 κ_c のフレーバー数依存性についても調べた。 $N_f = 2 + 1$ の場合については図 4 にあるような結果を得ることができた。以上の結果から、この解析手法が上手く機能していることがわかった。

参考文献

- [1] Y. Aoki, G. Endrodi, Z. Fodor, S.D. Katz, K.K. Szabo, *Nature* **443**, 675 (2006) [arXiv:hep-lat/0611014].
- [2] S. Ejiri, F. Karsch, E. Laermann, C. Miao, S. Mukherjee, P. Petreczky, C. Schmidt, W. Soeldner and W. Unger, *Phys. Rev. D* **80**, 094505 (2009) [arXiv:hep-lat/0909.5122].
- [3] A. M. Ferrenberg and R. H. Swendsen, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2635 (1988); *ibid* **63**, 1195 (1989).
- [4] S. Ejiri, *Phys. Rev. D* **77**, 014508 (2008) [arXiv:hep-lat/0706.3549].
- [5] C. Alexandrou, A. Borici, A. Feo, P. de Forcrand, A. Galli, F. Jegerlehner and T. Takaishi, *Phys. Rev. D* **60**, 034504 (1999) [arXiv:hep-lat/9811028].

強結合格子 QCD における Polyakov loop 効果

中野 嵩士^{1,2}, 三浦 光太郎³, 大西 明²

¹ 京都大学理学研究科, ² 京都大学基礎物理学研究所,

³ INFN-Laboratori Nazionali di Frascati

1. 導入

有限温度・密度における量子色力学 (QCD) 相図は, クォーク・ハドロン物理において興味深い問題のひとつである. 有限密度においては, 第一原理計算であるモンテカルロシミュレーション (MC) は符号問題 [1] を含むので, QCD におけるある近似や有効模型が必要となる. 強結合格子 QCD (SC-LQCD) は, 有限温度・密度におけるカイラル・非閉じ込め相転移を研究する上で有用な QCD の近似手法のひとつである. SC-LQCD においてカイラル相転移 [2, 3, 4, 5] や非閉じ込め相転移 [6, 7], また両方のダイナミクスを含むモデルを用いた研究 [8] もある. 先行研究のほとんどは強結合極限であり, 現実の QCD 相図に近づくために, 両方のダイナミクスを含む有限結合定数の効果を調べることは極めて重要である. 本研究では, Polyakov loop 効果 (主要項) と next-to-next-to-leading order (NNLO) クォークの有効作用を考慮した枠組み (P-SC-LQCD) に基づき有効ポテンシャルを求め, クォーク化学ポテンシャル $\mu = 0$ におけるカイラル・非閉じ込め相転移を調べた [9].

2. 手法

Staggered fermion を含む格子 QCD 作用はクォーク部分 S_F とグルーオン部分 S_G からなり,

$$S_F = \frac{1}{2} \sum_x \sum_{\rho=0}^d [\eta_{\rho,x} \bar{\chi}_x U_{\rho,x} \chi_{x+\hat{\rho}} - \eta_{\rho,x}^{-1} (h.c.)] + m_0 \sum_x \bar{\chi}_x \chi_x, \quad S_G = -\frac{2}{g^2} \sum_P \text{Re} U_P, \quad (1)$$

で与えられる (ユークリッド空間). 但し, $\chi(\bar{\chi}), U_{\rho,x}, U_P$ はそれぞれクォーク場 (反クォーク場), リンク変数, プラケットを表す. また, $g, m_0, d, \eta_{\nu,x}$ はそれぞれ結合定数, クォーク質量, 空間次元の数, staggered factor を表す. カイラル・非閉じ込め相転移を同時に扱うために, Polyakov loop 効果の主要項とクォークにおける NNLO の効果を評価する. 有限温度の SC-LQCD においては, 空間方向のリンク積分を行い有効作用を求めた後, 時間方向のリンク積分を行う. これはクォークの熱的効果を考慮するためである [3]. Polyakov loop 有効作用 (主要項) $S_{\text{eff}}^{(P)}$ は, 時間方向に N_τ 個連結したプラケットに対し空間方向のリンク積分を行うこと (図 1) により Polyakov loop の最近接相互作用として求まる.

$$S_{\text{eff}}^{(P)} = - \left(\frac{1}{g^2 N_c} \right)^{N_\tau} N_c^2 \sum_{\mathbf{x}, j > 0} \left(\bar{P}_{\mathbf{x}} P_{\mathbf{x}+j} + h.c. \right), \quad (2)$$

但し, $N_\tau, P_{\mathbf{x}} = \text{tr}_c \prod_\tau U_0(\tau, \mathbf{x}) / N_c$ はそれぞれ時間方向の格子サイズと Polyakov loop を表す. 一方, NNLO クォーク有効作用はクラスター展開により求めることができる [5]. 強結合展開において Polyakov loop と NNLO クォークの有効作用は展開の次数が異なるが, Polyakov loop はクォークの展開では取り込めない効果であり, 非閉じ込め相転移において重要である. 本研究では,

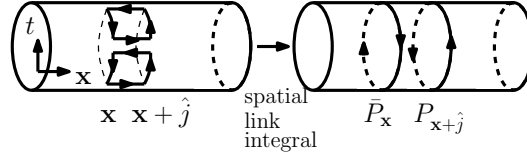


図 1: 強結合展開における Polyakov loop 効果の主要項. 左図の四角と右図のループはそれぞれ時間方向のプラケットと Polyakov loop を表す.

Polyakov loop における時間方向のリンク積分において 2 つの方法; Haar 測度と Weiss 平均場の方法を評価する. Haar 測度の方法 (H-method) は, Polyakov loop を平均場に置き換えて, 時間方向のリンク積分を実行する代わりに Haar 測度を考慮する. 一方, Weiss 平均場の方法 (W-method) は, Polyakov loop 有効作用をボソン化し, 時間方向のリンク積分を行う. この方法では, Polyakov loop の揺らぎの一部が取り込まれる.

3. 結果

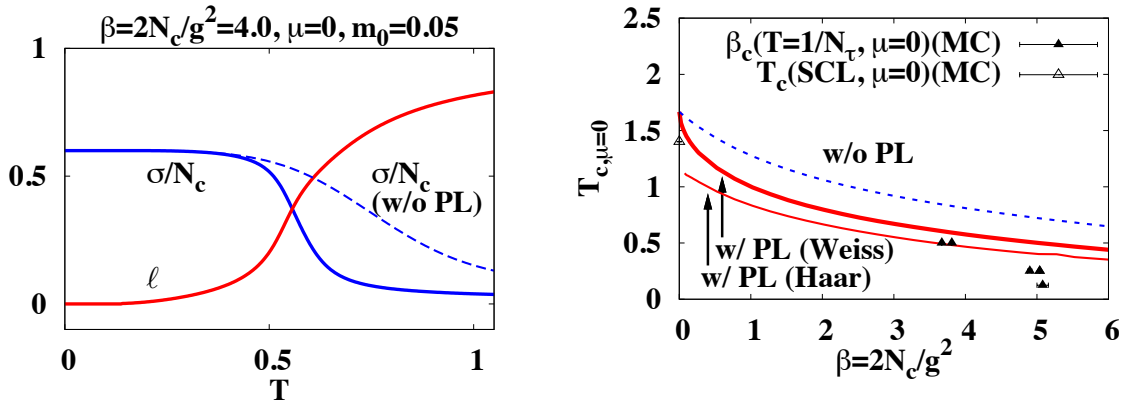


図 2: 左図: $\mu = 0$ における T の関数としてのカイラル凝縮と Polyakov loop (実線), Polyakov loop 効果がないときのカイラル凝縮 (破線). 但し, W-method の結果である. 右図: P-SC-LQCD (実線) と Polyakov loop を含まない SC-LQCD (破線) との比較 ($m_0 = 0.0$). P-SC-LQCD における W-method (太い実線) と H-method (細い実線) を示す. 三角印は, MC の結果を表す [10]. また, 物理量は格子単位 $a = 1$ を用いて格子間隔 a で無次元化してある.

図 2 の右図にカイラル凝縮 (σ) Polyakov loop (ℓ) を左図にカイラル相転移温度を示す. カイラル・非閉じ込め相転移がほぼ同時に起きていることと, Polyakov loop はカイラル凝縮を抑制し, カイラル相転移温度を減少させていることがわかる. Polyakov loop 効果がない場合の SC-LQCD では, カラー一重項状態のみが寄与するためすべての温度で閉じ込められていることが仮定されていた. 一方, Polyakov loop 効果により高温領域では 1-や 2-クォーク励起状態も寄与してくるので, カイラル凝縮を破壊されカイラル対称性の回復が促される. W-method と H-method は共に定性的な振る舞いは同様であるが, W-method の方が H-method より相転移温度が少し大きい. 物理的には, W-method における時間方向のリンク積分はカラー一重項状態を好むのでクォークの励起が抑制されることになる. また, $\beta = 2N_c/g^2 \lesssim 4$ において本研究の結果が MC の結果を大まかに再現していることもわかる. このことは Polyakov loop は QCD の相転移温度を説明するのに重要であることを示している.

4. まとめと展望

Polyakov loop 効果を含む強結合格子 QCD における有効ポテンシャルを導き, $\mu = 0$ における Polyakov loop 効果のカイラル・非閉じ込め相転移に対する影響について調べた. Polyakov loop 効果については 2 つの方法 (Weiss 平均場と Haar 測度の方法) で評価した. Polyakov loop はカイラル凝縮を抑制し, カイラル相転移温度を減少させることや, 相転移温度がモンテカルロシミュレーションの結果をある結合定数領域でおおまかに再現することがわかった. さらにカイラル・非閉じ込め相転移は近い温度で相転移していることもわかった. また Weiss 平均場と Haar 測度の方法は定性的に同じ結果を示したが, Weiss 平均場の方法の方が, Polyakov loop 効果が減少することが示された. 将来の展望としては有限密度領域も含んだ QCD 相図を調べることを考えている [11].

参考文献

- [1] For a recent review, see S. Muroya, A. Nakamura, C. Nonaka and T. Takaishi, *Prog. Theor. Phys.* **110** (2003), 615; F. Karsch, *Prog. Theor. Phys. Suppl. No.* 153 (2004), 106.
- [2] P. H. Damgaard, N. Kawamoto and K. Shigemoto, *Phys. Rev. Lett.* **53** (1984), 2211; *Nucl. Phys. B* **264** (1986), 1.
- [3] P. H. Damgaard, D. Hochberg and N. Kawamoto, *Phys. Lett. B* **158** (1985), 239; G. Faldt and B. Petersson, *Nucl. Phys. B* **265** (1986), 197.
- [4] K. Fukushima, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **153** (2004), 204; Y. Nishida, *Phys. Rev. D* **69** (2004), 094501; Y. Nishida, K. Fukushima and T. Hatsuda, *Phys. Rept.* **398** (2004), 281; N. Kawamoto, K. Miura, A. Ohnishi and T. Ohnuma, *Phys. Rev. D* **75** (2007), 014502.
- [5] K. Miura, T. Z. Nakano, A. Ohnishi and N. Kawamoto, *Phys. Rev. D* **80** (2009), 074034; K. Miura, T. Z. Nakano and A. Ohnishi, *Prog. Theor. Phys.* **122** (2009), 1045; T. Z. Nakano, K. Miura and A. Ohnishi, *Prog. Theor. Phys.* **123** (2010), 825.
- [6] J. B. Kogut, M. Snow and M. Stone, *Nucl. Phys. B* **200** (1982), 211.
- [7] J. Langelage, G. Munster and O. Philipsen, *JHEP* **0807** (2008), 036; J. Langelage and O. Philipsen, *JHEP* **1001** (2010), 089; J. Langelage and O. Philipsen, *JHEP* **1004** (2010), 055.
- [8] A. Gocksch and M. Ogilvie, *Phys. Rev. D* **31** (1985), 877; E. M. Ilgenfritz and J. Kripfganz, *Z. Phys. C* **29** (1985), 79; K. Fukushima, *Phys. Lett. B* **553** (2003), 38; *Phys. Rev. D* **68** (2003), 045004.
- [9] T. Z. Nakano, K. Miura and A. Ohnishi, arXiv:1009.1518 [hep-lat].
- [10] P. de Forcrand and M. Fromm, *Phys. Rev. Lett.* **104** (2010), 112005; P. de Forcrand, private communication; S. A. Gottlieb, W. Liu, D. Toussaint, R. L. Renken and R. L. Sugar, *Phys. Rev. D* **35** (1987), 3972; M. D'Elia and M. P. Lombardo, *Phys. Rev. D* **67** (2003), 014505; Z. Fodor and S. D. Katz, *Phys. Lett. B* **534** (2002), 87; R. V. Gavai et al. *Phys. Lett. B* **241** (1990), 567.
- [11] T. Z. Nakano, K. Miura, A. Ohnishi; K. Miura, T. Z. Nakano, A. Ohnishi, POS (LATTICE2010), to be submitted.

Average Phase Factor in the PNJL model

Yuji Sakai^{*†}, Takahiro Sasaki[†], Hiroaki Kouno[‡], Masanobu Yahiro[†]
 Department of Physics, Kyushu University[†],
 Department of Physics, Saga University[‡],

1 Introduction

The QCD phase diagram is essential for understanding not only natural phenomena such as compact stars and the early universe but also laboratory experiments such as relativistic heavy-ion collisions. Unfortunately, quantitative calculations of lattice QCD (LQCD) have the well-known sign problem at finite chemical potential μ . The success of the approaches is linked to how difficult the sign problem is. As a good index of the difficulty, one can consider the average of the phase factor

$$e^{2i\theta} = \frac{\det(D + \mu\gamma_4 + m)}{\det(D + \mu\gamma_4 + m)^*} \quad (1)$$

of the Fermion determinant. If the average of the phase factor is much smaller than 1, this means that there are severe cancellations in the path integral of the QCD partition function. In this situation, LQCD simulations are not feasible.

The average is obtained by taking the expectation value of the phase factor in the phase-quenched theory in which the Fermion determinant is replaced by the absolute value. In the two-flavor case, the average is $\langle e^{2i\theta} \rangle = Z_{1+1}/Z_{1+1}^*$ where Z_{1+1} stands for the partition function of the ordinary two-flavor theory and Z_{1+1}^* represents that of the two-flavor phase-quenched theory in which one of two flavors is changed into a conjugate flavor. The $1+1^*$ system corresponds to the system with isospin chemical potential because of the relation $\det(D + \mu\gamma_4 + m)^* = \det(D - \mu\gamma_4 + m)$.

In this paper, we evaluate the average phase factor by the Polyakov-loop extended Nambu–Jona-Lasinio (PNJL) model [1-3] in the mean field approximation (MFA) and investigate a relation between the Polyakov-loop and the average phase factor. We consider dynamical mesonic fluctuations effect to compare the PNJL results with LQCD data [4].

^{*}supported by JSPS Research Fellow.

2 Formalism

The two-flavor PNJL Lagrangian in Euclidean spacetime is

$$\mathcal{L} = \bar{q}(\gamma_\nu D_\nu - \gamma_4 \hat{\mu} + m_0)q + G_s[(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 \vec{\tau}q)^2] - \mathcal{U}, \quad (2)$$

where q denotes the two-flavor quark field, m_0 does the current quark mass, and $D_\nu = \partial_\nu - iA_\nu \delta_{\nu 4}$. The spontaneous breakings of the chiral and the isospin symmetry are described, respectively, by the chiral condensate $\sigma = \langle \bar{q}q \rangle$ and the charged pion condensate $\pi = \langle \bar{q}i\gamma_5 \tau_1 q \rangle$. The Polyakov potential \mathcal{U} [2] is a function of the Polyakov loop $\Phi = \frac{1}{N_c} \text{tr}_c L$, $L = e^{-iA_4/T}$. In the Polyakov gauge, L can be written in a diagonal form in color space, $L = e^{i(\phi_3 \lambda_3 + \phi_8 \lambda_8)/T}$. In the MFA, ϕ_3 and ϕ_8 are treated as classical variables.

The average phase factor in the MFA is described by [4]

$$\langle e^{2i\theta} \rangle = \sqrt{\frac{\det H_{1+1^*}}{\det H_{1+1}}} e^{-(\Omega_{1+1} - \Omega_{1+1^*})/T}, \quad (3)$$

where Ω is the thermodynamic potential in the MFA and $H_{ij} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j}$ is the Hessian matrix showing static fluctuations (SF) of mean fields φ_{MF} . The static fluctuations are composed of $(\sigma, \pi, \phi_3, \phi_8)$. We can consider dynamical fluctuations for σ and π , that is, σ and π mesons, but keeping the static fluctuations for ϕ_3 and ϕ_8 . The 1+1 and the 1+1* theory correspond to taking $\hat{\mu} = \mu\tau_0$ and $\hat{\mu} = \mu\tau_3$ respectively.

3 Results

The left panel of Fig. 1 shows the pion condensate π and the average phase factor $\langle e^{2i\theta} \rangle$ as a function of the Polyakov loop Φ at $\mu = 100$ MeV. π and Φ are taken in 1+1 and 1+1* system, respectively. π decreases as Φ increases and finally vanishes. $\langle e^{2i\theta} \rangle$ is always zero at $\pi \neq 0$, where a massless mode appears, then the average phase factor vanishes owing to $\det H_{1+1^*} = 0$. $\langle e^{2i\theta} \rangle$ increases as Φ does at $\pi = 0$. Thus, there is a negative correlation between the average phase factor and the pion condensate. In contrast, there exists a positive correlation between the average phase factor and the Polyakov loop.

The right panel of Fig. 1 shows μ dependence of the average phase factor at $T = T_c$. LQCD result is evaluated from LQCD data at imaginary chemical potential by assuming a polynomial function [5]. The two solid lines delimit the 90% confidence level region for the extrapolation, while the MF+SF calculation is represented by dotted lines. The MF+SF calculation overestimates LQCD data largely. Therefore, we consider dynamical mesonic fluctuations beyond the MF+SF framework.

Below T_c where the system is confined, it is natural to think that mesonic modes dominate rather than quark modes. Therefore, we should take mesonic modes in the bubble summation in the random phase approximation (RPA). The thermodynamic potential, up to order $1/N_c$, is obtained by $\Omega = \Omega_{\text{MF}} + \Omega_{\text{DF}}$, where Ω_{MF} is the mean-field part and $\Omega_{\text{DF}} = -\frac{i}{2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \ln \det[1 - G_s \Pi(q)]$ is the dynamical mesonic fluctuation (DF) part in the ring diagram where $\Pi(q)$ is the mesonic polarization bubbles. This framework is referred to as MF+DF, here the static fluctuations of ϕ_3 and ϕ_8 are taken into account in the Hessian matrix.

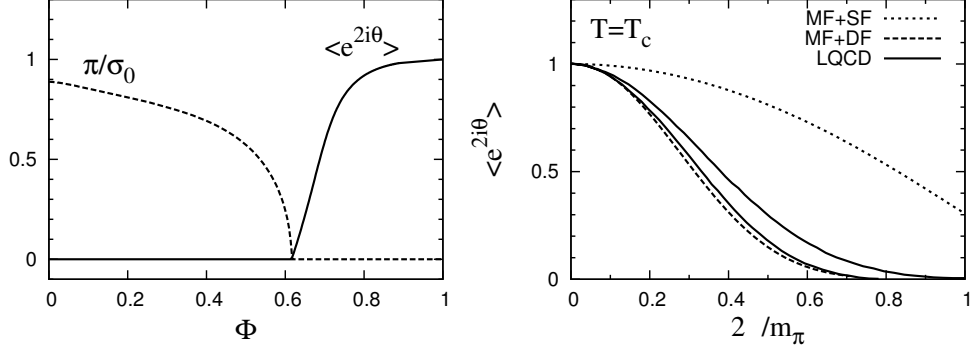


Figure 1: **(Left)** Φ dependence of the scaled pion condensate π/σ_0 and the average phase factor $\langle e^{2i\theta} \rangle$ at $\mu_q = 100$ MeV. Here, σ_0 is a chiral condensate at vacuum. The former is plotted by a dashed curve, while the latter is by a solid curve. **(Right)** Effects of mesonic fluctuations on the average phase factor. In each panel, two solid curves represent LQCD prediction [5] in its upper and lower limits.

The Hessian matrix is obtained by setting $H = G_s[1 - G_s\Pi(q = 0)]$. Thus, the static mesonic fluctuation $\Omega_{\text{SF}} = -\ln \det[H]$ can be regarded as an approximation to the dynamical one Ω_{DF} . The MF+DF calculation almost reproduces LQCD data as a consequence of the strong suppression. Meanwhile, the MF+SF calculation does not include the meson fluctuation with finite q . This means that the MF+SF calculation underestimates the suppression of the average phase factor due to DF.

4 Summary

We have calculated the average phase factor of the QCD determinant, using the PNJL model. There exists a positive correlation between $\langle e^{2i\theta} \rangle$ and Φ . Therefore, LQCD is feasible only in the deconfinement phase with large Φ . The PNJL calculation with static fluctuations cannot reproduce LQCD data [5]. This problem is solved by treating dynamical mesonic fluctuations.

References

- [1] K. Fukushima, Phys. Lett. B **591**, 277 (2004); Phys. Rev. D **77**, 114028 (2008).
- [2] S. Rößner, C. Ratti, and W. Weise, Phys. Rev. D **75**, 034007 (2007).
- [3] Y. Sakai, K. Kashiwa, H. Kouno, and M. Yahiro, Phys. Rev. D **77**, 051901(R) (2008); Phys. Rev. D **78**, 036001 (2008); Phys. Rev. D **79**, 096001 (2009); Y. Sakai, K. Kashiwa, H. Kouno, M. Matsuzaki, and M. Yahiro, Phys. Rev. D **78**, 076007 (2008); Y. Sakai, H. Kouno, and M. Yahiro, J. Phys. G **37**, 105007 (2010).
- [4] Y. Sakai, T. Sasaki, H. Kouno, and M. Yahiro, Phys. Rev. D **82**, 096007 (2010).
- [5] M. D'Elia and F. Sanfilippo, Phys. Rev. D **80**, 014502 (2009).

有限バリオン、有限アイソスピン化学ポテンシャルにおける QCD 相図

佐々木 崇宏^A, 境 祐二^A, 河野 宏明^B, 八尋正信^A
九大院理^A, 佐賀大理工^B

1 はじめに

量子色力学 (QCD) 相図とは、有限温度 (T) ・有限化学ポテンシャル (μ) におけるクォークとグルーオンの状態変化を表した図である。QCD 相図の解明は、宇宙進化の過程である QCD 相転移を理解するのに必要不可欠である。しかし、QCD の第一原理計算である格子 QCD シミュレーションは有限クォーク化学ポテンシャル (μ_q) 領域で符号問題をもち実行困難となる。そこで我々は、有効模型を用いた解析を行っている。有効模型には多くの不定性が伴うが、格子計算が可能な領域で第一原理計算の結果との定量的な比較を行い、模型の信頼性を確認できる。我々はこのような有効模型を用いて、有限 μ_q 領域の相構造を定量的に解明することを目指している。

今回はアイソスピン化学ポテンシャル (μ_I) に着目した。 μ_I は以下の 2 つの点で重要である。まず 1 点目は、現実世界では μ_I が有限の値となる点である。 μ_q と μ_I は、u(d) クォークの化学ポテンシャル μ_u (μ_d) を用いて次のように定義される。

$$\mu_q = \frac{\mu_u + \mu_d}{2}, \quad \mu_I = \frac{\mu_u - \mu_d}{2} \quad (1)$$

u クォークと d クォークのアイソスピン対称性が厳密に成り立つ場合には $\mu_u = \mu_d$ となり、QCD 相図の議論は通常 $\mu_I = 0$ の $\mu_q - T$ 平面で行われる。しかし、重イオン散乱実験や中性星内部では一般に $\mu_u \neq \mu_d$ であるため、 $\mu_I - \mu_q - T$ の 3 次元空間において QCD 相図を理解する必要がある。2 点目は、 $\mu_q = 0$ の $\mu_I - T$ 平面には符号問題が存在せず格子 QCD 計算が可能な点である [1]。そのためこの領域では、有効模型の妥当性を格子計算との比較を通して確かめられる。

2 PNJL 模型

有効模型として、次のラグランジアンで表される Polyakov-loop extended Nambu-Jona-Lasinio 模型 (PNJL 模型) を用いた [2]。

$$\mathcal{L} = \bar{q}(\gamma_\nu D^\nu + \hat{m}_0 - \gamma_4 \hat{\mu})q + G_s [(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 \vec{\tau}q)^2] + G_8 [(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 \vec{\tau}q)^2]^2 - \mathcal{U} \quad (2)$$

q は 2 フレーバーのクォーク場を表し、化学ポテンシャル行列は $\hat{\mu} = \text{diag}(\mu_q + \mu_I, \mu_q - \mu_I)$ 、質量行列は $\hat{m}_0 = \text{diag}(m_0, m_0)$ である。 D^ν はグルーオン場による共変微分、 $\vec{\tau}$ は Pauli 行列である。3 項目の項は、高次相互作用として導入したスカラー型クォーク 8 点相互作用であ

る。グルーオンの効果を静的外場として表す Polyakov ポテンシャルは、以下の関数形を用いた [3]。

$$\mathcal{U} = T^4 \left[-\frac{a(T)}{2} \Phi \Phi^* + b(T) \ln(1 - 6\Phi \Phi^* + 4(\Phi^3 + \Phi^{*3}) - 3(\Phi \Phi^*)^2) \right] \quad (3)$$

$$a(T) = a_0 + a_1 \left(\frac{T_0}{T} \right) + a_2 \left(\frac{T_0}{T} \right)^2, \quad b(T) = b_3 \left(\frac{T_0}{T} \right)^3 \quad (4)$$

この模型に含まれるパラメーターはすべて $\mu_I = 0$ で決定しているため、以下で示す $\mu_I \neq 0$ の領域はすべて新たな可変パラメーターを含まない計算結果である。なお、パラメーターについての詳細は [2] を参照していただきたい。

(2) のラグランジアンから平均場近似の下で熱力学ポテンシャルを計算しそれを最小にするように、系の状態を表すパラメーター $(\sigma, \pi, \Phi, \Phi^*)$ を求めた。ここで Φ は Polyakov loop であり、閉じ込め-非閉じ込めの秩序変数である。 σ と π は以下の真空期待値で定義されており、それぞれカイラル対称性、 $U(1)_{I_{2,3}}$ 対称性の秩序変数である。

$$\sigma = \langle \bar{q}q \rangle, \quad \pi = \langle \bar{q}i\gamma_5\tau_1q \rangle \quad (5)$$

3 計算結果

図 1 は $\mu_q = 0$ の $\mu_I - T$ 平面における QCD 相図であり、図 1(a) は 8 点相互作用を考慮した結果、図 1(b) は考慮しない結果である。実線 (破線) は π の一次相転移線 (二次相転移) を表し、点線 (一点破線) は σ (Φ) のクロスオーバー転移線を表している。▲で示した点は二次相転移が一次相転移に変わる点であり、三重臨界点 (TCP) と呼ばれている。+ および × は格子 QCD による計算結果であり、+ 印は σ および Φ に関する相転移点、× 印は π および Φ に関する相転移点を表している [4]。 σ および π の転移点に顕著のように、8 点相互作用を導入した PNJL 模型は格子計算とよく一致した。また TCP に着目すると、8 点相互作用を加えた場合には低 μ_I 側へ移動している。このことは、格子計算により TCP の位置が確定できれば、有効模型に対し強い制限を与えられることを示唆している。

図 2 は $\mu_I - \mu_q - T$ 空間における QCD 相図を表している。ここではクロスオーバーの転移面は描かず、一次および二次相転移面のみ描いている。両方の図に対し、点 A は $\mu_q = 0$ における TCP、点 C は $\mu_I = 0$ における臨界端点 (CEP)、点 G は $T = 0$ における TCP である。点線は、TCP および CEP の軌跡を表している。図 2(a) は 8 点相互作用を加えた計算結果である。このとき、CEP の軌跡 (線 CD) と TCP の軌跡 (線 GD) は点 D で合流した。そのため、 σ と Φ の一次相転移面 (面 CDGF) と π の一次相転移面 (面 ABHGD) が重なっている。面 ADGE は π の二次相転移面を表している。図 2(b) は 8 点相互作用を加えない計算結果である。このときは、CEP の軌跡 (線 CD) と TCP の軌跡 (線 GA) は合流しなかった。面 CDF は σ の一次相転移面、面 ABHG は π の一次相転移面、面 AGE は π の二次相転移面である。以上のように、 $\mu_I - \mu_q - T$ 空間の相構造には 8 点相互作用の有無によって定性的に変化した。

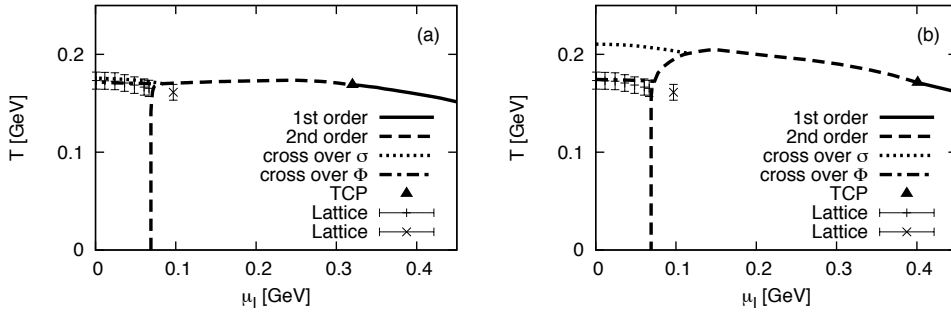


図 1: $\mu_q = 0$ における $\mu_1 - T$ 平面の QCD 相図。(a) は 8 点相互作用を考慮したもの、(b) は考慮していないものである。

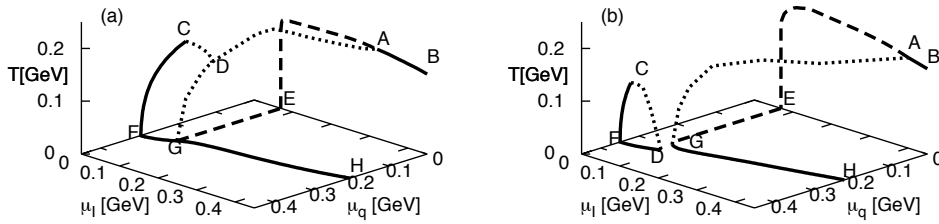


図 2: $\mu_1 - \mu_q - T$ 空間における QCD 相図。(a) は 8 点相互作用を考慮したもの、(b) は考慮していないものである。各相転移面の説明は本文を参照。

4 まとめ

本研究では、8 点クォーク相互作用を導入した PNJL 模型を用いて $\mu_1 - \mu_q - T$ 空間の相構造を計算した。この模型に含まれるパラメーターはすべて、 $\mu_1 = 0$ で決定されている [5]。 $\mu_q = 0$ の μ_1 平面では格子 QCD 計算との比較を行い、この「パラメーターを含まない PNJL 模型」が格子計算の結果を再現することを示した。このことは、PNJL 模型が予言性のある模型であることを示している。さらに、この再現に対して 8 点相互作用が本質的役割を果たすことを示した。この PNJL 模型を用いて $\mu_1 - \mu_q - T$ 空間での相構造を解明し、3次元空間上で CEP と TCP の軌跡を調べた結果、両者が合流する点が存在することを発見した。今後の課題として、有限 μ_q 領域の相構造に影響が大きなベクター型相互作用の寄与を解析することが重要である。

参考文献

- [1] D. T. Son and M. A. Stephanov, Phys. Rev. Lett. **86**, 592(2001)
- [2] T. Sasaki, Y. Sakai, H. Kouno and M. Yahiro, arXiv:hep-ph/1005.0910 (to be published in Phys. Rev. D)
- [3] S. Rößner, C. Ratti and W. Weise, Phys. Rev. **D75**, 034007(2007)
- [4] J. B. Kogut and D. K. Sinclair, Phys. Rev. **D70**, 094501(2004)
- [5] Y. Sakai, K. Kashiwa, H. Kouno, M. Matsuzaki and M. Yahiro, Phys. Rev. **D79**, 096001(2009)

ランダム行列模型による有限密度 QCD 相構造

佐野崇*、藤井宏次†

平成 22 年 8 月 30 日

概要

アノマリーによる $U(1)$ 対称性の破れの効果を取り込んだランダム行列模型に、クォークフレーバごとに異なる化学ポテンシャルを導入し、アノマリー効果が相構造に果たす役割を調べた。アノマリー効果を取り込まない模型による先行研究では、2 フレーバの場合、 u, d クォーク凝縮がそれぞれ独立に相転移することが指摘されていた。一方、アノマリー項は、2 つの秩序変数を混合し、2 回の相転移を 1 回にまとめる働きをもつ。さらに 3 フレーバの場合には、3 つのカイラル凝縮間だけではなく、カイラル凝縮とメソン凝縮の両者が混合される。このため、カイラル凝縮とメソン凝縮についての相転移にも、同時に起きる傾向がある。

1 導入

有限密度 QCD の理論研究は、近年の RHIC, LHC, GSI-FAIR など実施・予定されている実験とも関連し、精力的に行われている [1]。有限密度 QCD を考える場合、軽いクォークフレーバに対して等しい化学ポテンシャルを仮定することが多い。しかし、実際の重イオン衝突実験では、 u, d クォーク密度には有限の非対称性が存在し、さらに s クォーク密度はほぼゼロだと予想できる。また、ベータ平衡に達した中性子星内部でも、3 種のクォークフレーバの密度は異なっている。加えて、アイソスピン化学ポテンシャルのみが有限の場合、格子 QCD 計算が符号問題にとらわれずに可能であるという特徴がある。このように、クォークフレーバごとの化学ポテンシャルを独立変数とした相図を考察することは興味深い。我々は、QCD の有効模型であるカイラルランダム行列 (ChRM) 模型を拡張し、 $U(1)$ アノマリーの効果を取り込んだ [2]。この模型の相構造は、有限温度密度の場合に明らかにされている [3]。本研究は、この模型を、クォークフレーバごとに異なる化学ポテンシャル空間へ拡張し、その相構造を調べることで、アノマリー効果の相図に果たす役割を明らかにすることを目標とする [4]。

2 メソン凝縮相

QCD の分配関数は、Dirac 演算子の行列式を、ゲージ作用による重みで平均したものである。

$$Z_{\text{QCD}} = \int \mathcal{D}A \prod_f^{N_f} \det(D(\mu_f) + m_f) e^{-S_{\text{YM}}} \quad (1)$$

ここで、 $D(\mu_f) = \gamma_\nu(\partial_\nu - igA_\nu + B_\nu\mu_f)$ は、フレーバ f に対する Dirac 演算子、 m_f は質量、 μ_f は化学ポテンシャルである。また、 $B_\nu = (0, 0, 0, 1)$ は定数ベクトルである。

3 つのフレーバに対する化学ポテンシャル μ_u, μ_d, μ_s を、次のような線形結合で書きなおす。

$$\mu_q = \frac{1}{2}(\mu_u + \mu_d), \quad (2)$$

$$\mu_I = \frac{1}{2}(\mu_u - \mu_d), \quad (3)$$

$$\mu_Y = \frac{1}{2}(\mu_u + \mu_d - 2\mu_s). \quad (4)$$

*東大理, e-mail address: tsano@nt1.c.u-tokyo.ac.jp

†東大総文

アイソスピン化学ポテンシャル μ_I 、ハイパーチャージ化学ポテンシャル μ_Y の大きさが、3つのフレーバ間の化学ポテンシャルの非対称性を表す。 $\mu_I = \mu_Y = 0$ のとき、すべてのフレーバで化学ポテンシャルは等しくクォーク化学ポテンシャル μ_q になる。

一般に $\mu_I \neq 0$ または $\mu_Y \neq 0$ のとき、メソン凝縮が生じる可能性が指摘されている [5, 6]¹。このことは、直感的には次のように理解できる: 例として、 $N_f = 2$ の場合を考える。このとき、軽い NG ボゾンである 3つの pion のうち、2つの荷電 pion は、 ± 1 のアイソスピン量子数 (τ_3 の固有値) を持つ。 μ_I はアイソスピン数に共役な化学ポテンシャルであるから、 $\mu_I \neq 0$ では、2つの pion のうちの片方が励起しやすくなり、もう片方は励起しづらくなる。すなわち、片方は質量が下がり、もう片方は質量が増える。したがって、pion 間の相互作用を無視できるならば、片方の pion 質量がゼロになったとき、Bose-Einstein 凝縮がおこる。これが (低密度での) pion 凝縮である。また、この議論から、凝縮の起こる典型的な μ_I が、pion 質量 m_π で特徴づけられることが予想できる。

定量的な計算には、カイラルシグマ模型が用いられる。運動項を無視し、ポテンシャル部分を最小化するユニタリ行列を見つけることで、基底状態は決定される。主な結果は次のようにまとめられる (詳細な結果は文献 [6] の Fig. 1 などを参照)。

- μ_I が有限で μ_Y が小さい場合、 $\mu_I < m_\pi$ では通常のカイラル対称性の破れた相が、 $\mu_I > m_\pi$ では pion 凝縮相が基底状態となる。
- μ_Y が有限で μ_I が小さい場合、 $\mu_Y < m_K$ では通常のカイラル対称性の破れた相が、 $\mu_Y > m_K$ では kaon 凝縮相が基底状態となる。
- μ_I も μ_Y も大きい場合、 $\mu_I - \mu_Y$ 平面上で、pion 凝縮相と kaon 凝縮相とは 1 次相転移線により隔てられる。

これらの結果は、化学ポテンシャルの小さな領域では、QCD に対する信頼できる予言である。一方で、化学ポテンシャルの大きな領域については、カイラル相転移を考慮する必要があるため、NJL 模型 [8, 9] や ChRM 模型 [10, 11] などの、ダイナミカルなカイラル対称性の破れを扱った模型による考察が重要となる。

3 ランダム行列模型

ランダム行列模型 [12] は、カイラル対称性の自発的破れが、Dirac 演算子の low-lying な固有モードによって支配されていることに基づいて構成される (Banks-Casher 関係式)。Dirac 演算子は、次のようにゼロモード空間に truncate できると仮定される。

$$D = \begin{pmatrix} 0 & iR + C \\ iR^\dagger + C^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

ここで、ガンマ行列は $\gamma_5 = \text{diag}(+1, -1)$ となるように選んだ。Dirac 演算子のブロック構造は、 $\{D, \gamma_5\} = 0$ を満たすように決められている。 R は一般に長方形のランダム行列、 C は非ランダムな媒質効果を表す行列である。

R が長方形のとき、 D は $|\nu|$ 個の厳密なゼロ固有値を持つ。ただし、 $|\nu|$ は R の行と列の差である。これは、位相電荷 ν と、Dirac 演算子の厳密なゼロ固有値との間の指数定理を再現している。アノマリー効果を取り込むには、適切に非ゼロの位相電荷の効果を取り入れることが必要である。よって、一般に長方形のランダム行列を取り扱う必要がある。そのために、ゼロモードを、near-zero モードと、位相的ゼロモードに分けて考えることにする [13, 2]。前者は、それぞれ N 個の左右モードであり、複雑なグルーオンダイナミクスを反映している。後者はインスタントンを起源とする、空間的に局在化した、 N_+ , N_- 個の左右モードである。 N_+ , N_- はそれぞれ、背景ゲージ場の持つインスタントン、反インスタントンの個数と考えられる。このときランダム行列 R

¹有限バリオン密度における p -wave pion 凝縮も広く研究されている [7]。

は $(N + N_+) \times (N + N_-)$ 行列となり、対応する位相電荷は $\nu = N_+ - N_-$ である。ゼロモード数 N, N_+, N_- は、それぞれ体積 V に比例する大きさの量である。

次に、媒質効果行列 C の形を与える。フレーバ f に対して、温度 T と化学ポテンシャル μ_f に依存した C_f として、次のようなもっとも単純なものを採用する [14, 3]。

$$C_f = \begin{pmatrix} (\mu_f + iT)\mathbf{1}_{N/2} & 0 & 0 \\ 0 & (\mu_f - iT)\mathbf{1}_{N/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

媒質効果は $N \times N$ の near-zero モードセクタにのみ取り込まれている。こうすることで、位相感受率の非物理的な抑制を避けることができる [15, 16]。物理的には、局在化した位相的ゼロモードは、境界条件である媒質効果の影響を受けにくいと解釈できる。 $\pm iT$ は、2 つあるフェルミオンの最低次の松原周波数を表現している。両方の符号を取り込んだことで、荷電共役変換 $\mu_f \rightarrow -\mu_f$ に対する不変性を、分配関数は持つ。

N_+ と N_- を固定した場合、以上のように定義された Dirac 演算子に対して、ChRM 模型の分配関数は次のように定義される。

$$Z_{N_+, N_-} = \int dR e^{-N\Sigma^2 \text{tr} R R^\dagger} \prod_{f=1}^{N_f} \det(D(\mu_f) + m_f) \quad (7)$$

R の各要素に対して、独立なガウス分布を用いて平均操作を行っている。カイラル対称性の破れのスケールは、パラメータ Σ によって特徴づけられる。全分配関数は、インスタントン数 N_+, N_- について和を取ることで定義される。

$$Z^{\text{RM}} = \sum_{N_+, N_-} P(N_+) P(N_-) Z_{N_+, N_-} \quad (8)$$

ここで、 $P(N_\pm)$ はインスタントン数分布関数である。インスタントン間に相互作用を考えないとき、この関数としてはポアソン分布関数を取るのが自然である [17]。ところが、その場合、最終的に得られる有効ポテンシャルが下に有界でなくなり、安定な基底状態が存在しなくなる [13]。そこで我々は、分布関数を次のような二項分布に変更した。

$$P(N_\pm) = \binom{\gamma N}{N_\pm} p^{N_\pm} (1-p)^{\gamma N - N_\pm}, \quad (9)$$

この分布関数は、体積 V を、 γN 個の細胞に分割し、その内部にインスタントンが 1 つ存在する確率を p とおき、2 個以上存在する確率を無視することで得られる。すなわち、物理的には、インスタントン間に斥力的な相互作用を考えていることになる。この変更が、安定な基底状態の存在する有効ポテンシャルを導く [2]。

ランダム行列を積分し、ボゾン化の手続きを行うことで、 N_+, N_- での和は具体的に実行することができる。

$$Z^{\text{RM}}(\mathcal{M}, \hat{\mu}) = \int dS e^{-2N\Omega} \quad (10)$$

ここで、有効ポテンシャル

$$\Omega(S; \mathcal{M}, \hat{\mu}) = \frac{\Sigma^2}{2} \text{tr} S^\dagger S - \frac{1}{2} \log \det \begin{bmatrix} S + \mathcal{M} & \hat{\mu} \\ \hat{\mu} & S^\dagger + \mathcal{M}^\dagger \end{bmatrix} - \frac{\gamma}{2} \log |\alpha \det(S + \mathcal{M}) + 1|^2 \quad (11)$$

を定義した ($T = 0$)。ボゾン場 $S \in \mathbb{C}^{N_f \times N_f}$ はオーダパラメータ行列であり、 $S_{fg} \sim \bar{\psi}_R^f \psi_L^g$ のようにフェルミオン 2 次形式と対応している。 $\mathcal{M} = \text{diag}(m_u, m_d, \dots, m_{N_f})$ と $\hat{\mu} = \text{diag}(\mu_u, \mu_d, \dots, \mu_{N_f})$ は、それぞれ質量、化学ポテンシャル行列である。 γ と $\alpha = p/(1-p)$ を含んだ項が、アノマリーの効果を表しており、 $\mathcal{M} = 0$ においても、 $U(1)$ 変換 $S \rightarrow S e^{i\theta}$ に対する不変性を破る [18, 17]。熱力学極限 $N \rightarrow \infty$ では、基底状態は按点方

程式 $\partial\Omega/\partial S_{fg}$ の解として求めることができる。按点解 \bar{S} を用いると、フレーバ f に対するカイラル凝縮は次のように計算できる。

$$\langle \bar{\psi}_f \psi_f \rangle = \frac{\partial}{\partial m_f} \Omega(\bar{S}; \mathcal{M}, \hat{\mu}) = -\Sigma^2 \bar{S}_{ff}. \quad (12)$$

有限温度 T と、有限の (フレーバに依存しない) 化学ポテンシャル μ に対する、この模型の振る舞いはすでに研究されている [2, 3]。 $\mu = 0$ のとき、カイラル極限で、 $N_f = 2$ のとき 2 次相転移が、 $N_f = 3$ のとき 1 次相転移が見出される。この違いは、アノマリー効果である行列式相互作用項が、 $N_f = 2, 3$ について、ポテンシャルに異なった寄与をするために生じる。同様に、カイラル極限における T - μ 相図は、 $N_f = 2$ では、低密度高温側に 2 次相転移線が、高密度低温側に 1 次相転移線が現れ、両者は三重臨界点でつながっている。一方、 $N_f = 3$ では、1 次相転移線のみが存在する。有限の質量を導入すると、 $N_f = 2$ の 2 次相転移線はクロスオーバに変わり、三重臨界点の代わりに臨界点が現れる。 $N_f = 3$ の場合、高温側の 1 次相転移が弱まってクロスオーバになり、1 次相転移の端点に臨界点が現れる。すなわち、 $N_f = 2, 3$ の相図は定性的に同様になる。

4 相構造

4.1 $N_f = 2$

ここでは、縮退した質量 $m_u = m_d = m$ を持つ u, d クォークの系に対し、一般に $\mu_u \neq \mu_d$ の場合を考える。オーダパラメータ行列 S は、 $U(2)$ の生成子 λ_a ($a = 0, 1, 2, 3$) を用いて、一般に $S = \lambda_a(\phi_a + i\rho_a)$ とパラメトライズできる。通常のカイラル凝縮は、 $\phi_0 \neq 0$ で特徴づけられる。非ゼロの $\mu_I = (\mu_u - \mu_d)/2$ が存在するとき、 $\rho_{1,2} \neq 0$ で特徴づけられる pion 凝縮が存在しうる。そこで、以下では次のような Ansatz を用いる。

$$S = \begin{pmatrix} \phi_u & i\rho_1 + \rho_2 \\ i\rho_1 - \rho_2 & \phi_d \end{pmatrix} \quad (13)$$

$\phi_u, \phi_d, \rho_1, \rho_2$ は、実のオーダパラメータである。 $\mu_I \neq 0$ が $SU(2)$ 対称性を明示的に壊すため、一般に $\phi_u \neq \phi_d$ となっている。この Ansatz を有効ポテンシャルの表式 (11) に代入すると、

$$\Omega = \frac{\Sigma^2}{2} (\phi_u^2 + \phi_d^2 + 2|\rho|^2) - \frac{1}{2} \log [(\sigma_u + \mu_u)(\sigma_d - \mu_d) + |\rho|^2] - \frac{1}{2} \log [(\sigma_u - \mu_u)(\sigma_d + \mu_d) + |\rho|^2] - \frac{\gamma}{2} \log [\alpha(\sigma_u \sigma_d + |\rho|^2) + 1]^2 \quad (14)$$

を得る。ここで $\sigma_f = \phi_f + m_f$ である。 $\gamma\alpha = 0$ 、すなわちアノマリー効果を無視したとき、この模型は、文献 [10] で研究されたものと一致する。ポテンシャルは、 ρ_1, ρ_2 に対して、 $|\rho|^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2$ の形で依存する。これは、 λ_3 によって生成される $U(1)$ 対称性を反映している。以降では、任意に $\rho_1 = 0, \rho_2 = \rho$ とおくことにする。非ゼロの $\rho = (\langle \bar{u}\gamma_5 d \rangle - \langle \bar{d}\gamma_5 u \rangle)/2$ により、pion 凝縮による $U(1)$ 対称性の自発的破れが明らかになる。

按点方程式は 3 つの連立方程式になる。

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\phi_u} = \Sigma^2 \phi_u - \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_d - \mu_d}{(\sigma_u + \mu_u)(\sigma_d - \mu_d) + \rho^2} + \frac{\sigma_d + \mu_d}{(\sigma_u - \mu_u)(\sigma_d + \mu_d) + \rho^2} \right] - \frac{\gamma\alpha\sigma_d}{\alpha(\sigma_u\sigma_d + \rho^2) + 1} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\phi_d} = \Sigma^2 \phi_d - \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_u + \mu_u}{(\sigma_u + \mu_u)(\sigma_d - \mu_d) + \rho^2} + \frac{\sigma_u - \mu_u}{(\sigma_u - \mu_u)(\sigma_d + \mu_d) + \rho^2} \right] - \frac{\gamma\alpha\sigma_u}{\alpha(\sigma_u\sigma_d + \rho^2) + 1} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\rho} = 2\Sigma^2\rho - \frac{1}{2} \left[\frac{2\rho}{(\sigma_u + \mu_u)(\sigma_d - \mu_d) + \rho^2} + \frac{2\rho}{(\sigma_u - \mu_u)(\sigma_d + \mu_d) + \rho^2} \right] - \frac{2\gamma\alpha\rho}{\alpha(\sigma_u\sigma_d + \rho^2) + 1} = 0. \quad (17)$$

$\rho = 0$ の解は常に存在する。そこで、解を $\rho = 0$ の場合と、 $\rho \neq 0$ の場合に分けて考える。

$\rho = 0$ のとき、解はさらに 4 通りに分けられる: (i) 通常のカイラル凝縮相 ($\phi_u > 0, \phi_d > 0$)、(ii) 対称相 ($\phi_u \sim 0, \phi_d \sim 0$)、(iii),(iv) ひとつのフレーバのカイラル凝縮だけが大きな値を持つ相 ($\phi_u > 0, \phi_d \sim 0$ また

は ($\phi_u \sim 0, \phi_d > 0$)。これら 4 つの相は、1 次相転移線によって分けられている。また、 $m = 0$ でも、アノマリー項によって ϕ_u と ϕ_d が混合しているため、 $\phi_u = 0$ または $\phi_d = 0$ が常に解になるとは限らない。例えば、 $\phi_u = \phi_d = 0$ は解になるが、 $\phi_u \neq 0$ のとき、 $\phi_d = 0$ は一般に解ではない。

次に $\rho \neq 0$ の解が現れる条件を考察する。そのために、まず、有効ポテンシャルを $\rho = 0$ のまわりで展開する。

$$\Omega(\rho; m, \mu_f) = \Omega_0(m, \mu_f) + \Omega_2(m, \mu_f)\rho^2 + \dots \quad (18)$$

係数 Ω_2 は、 $\mathcal{O}(m, \mu_I^2)$ までで次のように求めることができる。

$$\Omega_2 = M_\pi^2 - \frac{2\mu_I^2}{(\phi_0^2 - \mu_q^2)^2} \left(1 + \frac{\mu_q^2}{(\phi_0^2 - \mu_q^2)^2 \Sigma^2} \right)^{-1}, \quad (19)$$

ここで ϕ_0 は、 $m = \mu_I = 0$ のときのスカラー凝縮である。ここから、有限の pion 質量 $M_\pi^2 = m\Sigma^2/\phi_0$ が有限の ρ を嫌い、有限の μ_I が有限の ρ を好む構造が理解できる。 $\Omega_2 = 0$ の条件から、pion 凝縮の生じ始める臨界 $\mu_I = \mu_{Ic}$ を読み取ると、この近似の範囲内では $\mu_{Ic}^2 \propto M_\pi^2$ である。

数値的に求めた相構造を説明する前に、模型の持つ対称性をまとめる。 $\rho = 0$ のとき、有効ポテンシャルは荷電共役変換 $\mu_u \rightarrow -\mu_u, \mu_d \rightarrow -\mu_d$ について不変である。さらに、2 つのフレーバ u, d の入れかえについても対称である。このため、相構造は、 $\mu_u - \mu_d$ (または $\mu_q - \mu_I$) 平面において、eightfold の対称性を持つ。 $\rho \neq 0$ のときは、フレーバごとの荷電共役対称性は、同時変換 $(\mu_u, \mu_d) \rightarrow (-\mu_u, -\mu_d)$ のみを残して破れる。これに u, d フレーバの入れかえ対称性を組み合わせると、fourfold 構造のみが残る。これを踏まえて、以下では、 $\mu_q > 0, \mu_I > 0$ の場合に限って相図を提示する。

$m = 0$ のときの相図を、図 1 の左に示した。点線は、pion 凝縮を無視した場合の、スカラー凝縮に関する 1 次相転移線である。この場合、原点付近では、通常の $\phi_u, \phi_d \neq 0$ である相が存在する。pion 凝縮の存在を許すと、この相は pion 凝縮相に覆い隠されてしまう。まず、 μ_I の小さい部分を考える。 $\mu_I = 0$ のとき、スカラー凝縮相 $\phi_u = \phi_d \neq 0$ と、pion 凝縮相 $\rho \neq 0$ は縮退している。無限に小さい μ_I が導入されると、pion 凝縮相が基底状態として選択される。この振る舞いは、カイラルシグマ模型と同様である [5]。次に μ_I の大きい部分を考える。 μ_q を小さく保ったまま μ_I を増やしていくと、あるところで 2 次相転移が起こり、カイラル対称性の回復した相へ相転移する。 μ_q を動かした場合、 μ_I の大小に応じて、 ϕ_d のみが値を持つ相か、対称相へ 1 次相転移する。

次に、 $m = 0.1 \neq 0$ のときの相図を、図 1 の右に示した。有限の m は、スカラー凝縮 ϕ_u, ϕ_d を選ぶ配列条件である。そのため、ここでは m と μ_I という 2 つの配列条件が競合している。 μ_I の小さい部分では、 m が勝つため、通常のスカラー凝縮相が存在する。 μ_I がある臨界値を超えると、pion 凝縮が現れる。ここで、 μ_I が充分小さく、 $\rho = 0$ の場合に、相転移の回数に注目する。 μ_q をゼロから増加させていくと、 $\phi_u \neq 0, \phi_d \neq 0$ 相から、 $\phi_u \sim 0, \phi_d \sim 0$ 相へ、一度に相転移する。アノマリー効果のない ChRM 模型では、この相転移は、まず $\phi_u \neq 0, \phi_d \neq 0$ 相から $\phi_u \sim 0, \phi_d \neq 0$ 相へ、次に $\phi_u \sim 0, \phi_d \neq 0$ 相から $\phi_u \sim 0, \phi_d \sim 0$ 相へと、2 ステップでおこる [10]。その理由は、文献 [10] の有効ポテンシャルが、 $\rho = 0$ のとき、 u クォーク部分と d クォーク部分の和で書けるため、それぞれのオーダパラメータに関する相転移が独立に起こるからである。一方で、アノマリー効果は、2 つのフレーバを混合する。そのため、2 つの相転移が相関し、非対称性 μ_I が大きくなければ、両者は同時に起こる。じっさい、アノマリー効果を表す γ, α を大きくすると、1 ステップの相転移が 2 ステップにわかれる μ_I の大きさも大きくなる。このような、アノマリーによるフレーバ混合が相転移を 1 つにまとめる傾向は、NJL 模型による研究でも知られている [9]。

最後に、この相転移の回数の、 $T - \mu$ 相構造への影響を指摘する。普通は、相図上には一本の 1 次相転移線と、その端点としての臨界点が 1 つあると考えられている。 $T = 0$ での相転移が 2 回あるということは、1 次相転移線が 2 つあり、臨界点もそれに対応して 2 つ存在することを示唆している。もしも無限小の μ_I に対して直ちに相転移が 2 つにわかれるならば、現実的には常に臨界点は 2 つ存在することになる。ところが、QCD にはアノマリーをはじめとするフレーバ混合があるために、小さな非対称性 μ_I に対しては、定性的な相構造は変化を受けないはずである。ChRM 模型はこのことを端的に再現している。

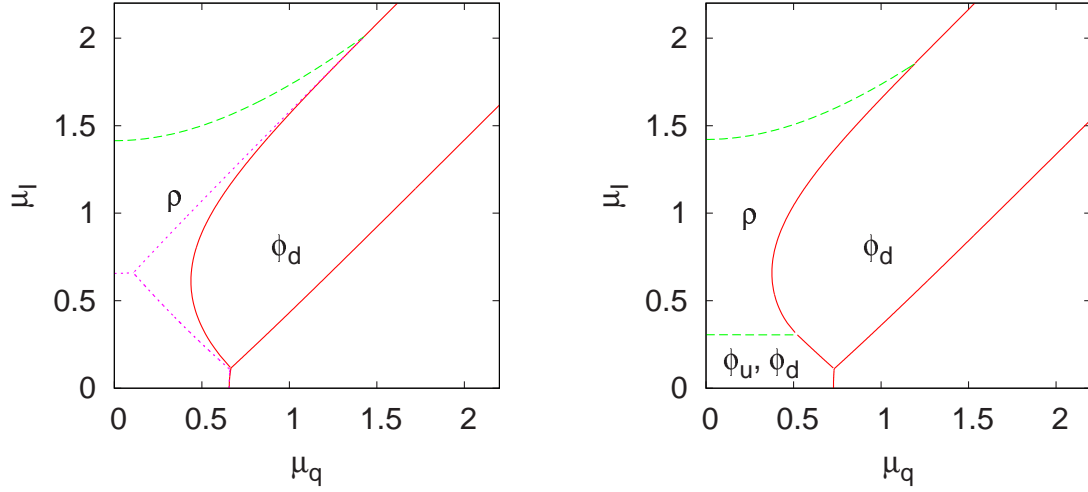


図 1: $N_f = 2$, $\mu_q - \mu_I$ 平面上の相図。左がカイラル極限 ($m = 0$)、右が $m = 0.1$ の場合である。パラメータは、 $\alpha = 0.5$, $\gamma = 1$, $\Sigma = 1$ とした。ラベル ($\rho, \phi_{u,d}$) は、大きな値を持つ凝縮を表す。1次 (2次) 相転移線は、実 (ダッシュ) 線で表される。eightfold 対称性を示すため、左図に、 $\rho = 0$ を仮定した場合の 1次相転移線を点線で示した。

4.2 $N_f = 3$

$N_f = 3$ の場合、一般に 3 つのカイラル凝縮 ϕ_u, ϕ_d, ϕ_s と、pion, kaon (K^0, K^\pm) 凝縮 $\rho_{ud}, \rho_{ds}, \rho_{su}$ がオーダパラメータになる。ここでは、オーダパラメータ行列 S として次のような Ansatz を採用する。

$$S = \begin{pmatrix} \phi_u & \rho_{ud} & -\rho_{su} \\ -\rho_{ud} & \phi_d & \rho_{ds} \\ \rho_{su} & -\rho_{ds} & \phi_s \end{pmatrix}, \quad (20)$$

このとき、有効ポテンシャルは次のように求まる。

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_a, \quad (21)$$

ここで、 Ω_0 は、通常の ChRM 模型の有効ポテンシャルである [11]。

$$\begin{aligned} \Omega_0 = & \frac{\Sigma^2}{2} (\phi_u^2 + \phi_d^2 + \phi_s^2 + 2\rho_{ds}^2 + 2\rho_{su}^2 + 2\rho_{ud}^2) - \frac{1}{4} \log \{ (\sigma_u^2 - \mu_u^2)(\sigma_d^2 - \mu_d^2)(\sigma_s^2 - \mu_s^2) \\ & + [\rho_{ds}^4(\sigma_u^2 - \mu_u^2) + 2\rho_{ds}^2\rho_{su}^2(\sigma_u\sigma_d - \mu_u\mu_d) + 2\rho_{ds}^2(\sigma_u^2 - \mu_u^2)(\sigma_d\sigma_s - \mu_d\mu_s) + (\text{cyclic perm. of u,d,s})] \}^2, \end{aligned} \quad (22)$$

また、 Ω_a はアノマリイ部分である。

$$\Omega_a = -\frac{\gamma}{2} \log [\alpha (\sigma_u\sigma_d\sigma_s + \sigma_u\rho_{ds}^2 + \sigma_d\rho_{su}^2 + \sigma_s\rho_{ud}^2) + 1]^2. \quad (23)$$

Ω は $\rho_{ud}^2, \rho_{ds}^2, \rho_{su}^2$ についての関数であるため、ギャップ方程式は、常に $\rho_{fg} = 0$ という自明な解を持つ。一方で、スカラー凝縮については、アノマリイ項のために、 $m = 0$ でも $\phi_f = 0$ が常に解になるとは限らない。また、ギャップ方程式を数値的に調べることで、2 つ以上のメソン凝縮が同時に値を持つような状態は基底状態にならないことがわかった。

$N_f = 3$ の場合、オーダパラメータが 6 つあるため、相構造はひじょうに複雑になる。そのため、数値計算結果を提示するまえに、定性的に相構造を理解するための助けになる 3 つの見方をまとめる。

(i) カイラルシグマ模型とのアナロジー

文献 [10] で指摘されたように、ChRM 模型のポテンシャルは、カイラルシグマ模型のポテンシャル部分と類似している。そのため、化学ポテンシャルの小さな領域での相構造は、カイラルシグマ模型による予言を再現する。すなわち、 $\mu_I \sim m_\pi$ を境に pion 凝縮が、 $\mu_Y \sim m_K$ を境に kaon 凝縮が生じ、さらにそれらのメソン凝縮相は、1 次相転移により分けられている。

(ii) カイラル対称性の回復

ChRM 模型は、カイラルシグマ模型と異なり、カイラル対称性の回復を記述することができる。このため、pion 凝縮と kaon 凝縮の間に、新たな種類の競合が生じる。例として、 $\mu_Y > \mu_I > \mu_q = 0$ という状況を想定する。ある大きさの μ_Y に対しては、シグマ模型が予言するように、kaon 凝縮相 $\rho_{us} \neq 0$ が基底状態になる。このとき、フレーバ d のカイラル凝縮も存在している ($\phi_d \neq 0$)。ここで、 μ_I を固定したまま、 μ_Y をさらに増加させる。あるところまで増加させると、大きな $|\mu_s|$ のために、フレーバ s についてのカイラル対称性を回復させた方が、より安定な基底状態が得られるようになる。すなわち、 $\rho_{us} = \phi_s = 0$ が基底状態として選ばれる。このとき、 μ_u, μ_d は小さいままであるため、u, d 部分のカイラル対称性は破れたままである。 μ_I が pion 質量を越えていれば、u, d については、それぞれのカイラル凝縮 ϕ_u, ϕ_d が大きな値を持っているよりも、pion 凝縮 ρ_{ud} を組んだ方がより安定な基底状態になる。ここまでをまとめると、 μ_Y の増加に伴い、kaon 凝縮相 $\rho_{us} \neq 0, \phi_d \neq 0$ から、pion 凝縮相 $\rho_{ud} \neq 0, \phi_s = 0$ へと相転移が起きたことになる。同じ議論は、 μ_Y と μ_I の役割を交換しても行うことができ、 μ_I の大きな領域に kaon 凝縮相が見出される。このような振る舞いは、シグマ模型では見られなかったものであり、カイラル相転移が本質的な役割を果たしている。カイラル相転移を記述できる NJL 模型でも同様の振る舞いが見出されている [8]。

(iii) アノマリー効果

アノマリー項は、フレーバ混合効果を表す。 $N_f = 3$ の場合、メソン凝縮が存在しなければ、アノマリー項は $\log(\alpha\sigma_u\sigma_d\sigma_s + 1)$ という形になり、3 つのカイラル凝縮を混合する。1 つのカイラル凝縮が小さくなると、この混合項は小さくなり、他の 2 つのフレーバ間の混合効果は小さくなる。一方、メソン凝縮が有限に存在する場合は、新たな混合が生じる。例えば pion 凝縮 ρ_{ud} が有限のとき、一般に ϕ_u, ϕ_d は小さくなるため、 $\sigma_u\sigma_d\sigma_s$ という項は小さくなる。ところが、(23) 式にあるように、 $\phi_s\rho_{ud}^2$ の項は大きいままである。このため、カイラル凝縮とメソン凝縮が同時に相転移を起こす様子も観察されている。

4.2.1 μ_I - μ_Y 平面

μ_I - μ_Y 平面 ($\mu_q = 0$) における相図を図 2 に示した。このとき、有効ポテンシャルは、 $\mu_Y \rightarrow -\mu_Y$ について対称であり、さらに $\mu_I \rightarrow -\mu_I$ と u, d クォークの入れかえを同時行っても対称であるため、相図は $\mu_I > 0, \mu_Y > 0$ に限って提示する。

まずカイラル極限を考える (左)。化学ポテンシャルの小さな領域では、カイラルシグマ模型の予言と一致して、 $\mu_I > \mu_Y$ では pion 凝縮が、 $\mu_I < \mu_Y$ では kaon 凝縮が好まれる。ところが、ある点を境にして、 $\mu_I > \mu_Y$ で kaon 凝縮が、 $\mu_I < \mu_Y$ で pion 凝縮が基底状態になる。先に説明したように、この理由は、カイラル対称性の回復の効果である。

有限のクォーク質量が存在するとき (右) には、化学ポテンシャルの小さな領域で、通常のスカラー凝縮相が現れている。また、 ϕ_s に関する 1 次相転移線では、 ρ_{ud} も不連続に値を変える。これは、メソン凝縮とカイラル凝縮が、アノマリー項を介して関連しているためである。

4.2.2 μ_q - μ_I 平面

μ_q - μ_I 平面 ($\mu_Y = 0$) における相図を図 3 に示した。このとき、有効ポテンシャルは、 $\mu_q \rightarrow -\mu_q$ について対称であり、さらに $\mu_I \rightarrow -\mu_I$ と u, d クォークの入れかえを同時に行っても対称である。このため、相図は $\mu_q > 0, \mu_I > 0$ の場合のみ提示する。

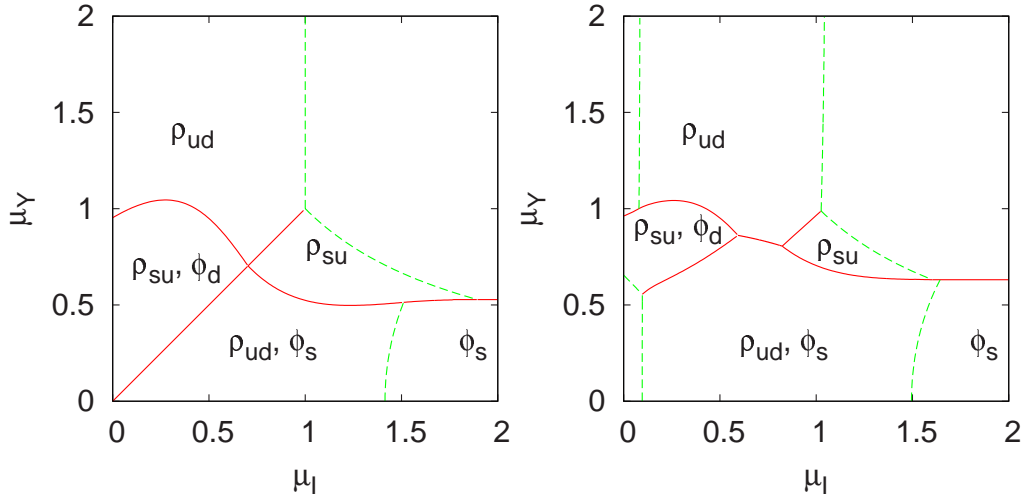


図 2: $N_f = 3$, $\mu_I - \mu_Y$ 平面上の相図 ($\mu_q = 0$)。左がカイラル極限、右が $m_u = m_d = 0.02$, $m_s = 0.1$ の場合である。右の図で、下 (上) の縦に長い領域は、 ϕ_u, ϕ_d, ϕ_s (ϕ_u, ϕ_d) が大きな値をもつ相である。その他のパラメータは図 1 と同じ。

カイラル極限では (左)、無限に小さな μ_I に対して、基底状態は直ちに pion 凝縮相になる。また、相図上には、 μ_q の大きなところで、kaon 凝縮相が存在する。 $\mu_Y = 0$ における相図であるため、この結果は興味深い。kaon 凝縮が現れる理由は、カイラル対称性の回復の効果として説明できる。すなわち、この領域では μ_u が他の 2 つのフレーバの化学ポテンシャルより大きくなるため、フレーバ u のカイラル対称性が先に回復する。いま、カイラル極限を考えているために、kaon 質量がゼロであることに注意すると、残りの d, s フレーバ自由度は、有限の $\mu_s - \mu_d$ により、それぞれ単独でスカラ凝縮を作るよりも、kaon 凝縮を組んだ方がエネルギー的に安定であることが理解できる。

有限のクォーク質量が導入されると (右)、スカラ凝縮相が μ_I の小さい領域に現れる。アノマリーによるフレーバ混合効果として、 ϕ_u, ϕ_d, ϕ_s の 3 つのカイラル凝縮が、同時に相転移する様子が確認できる。さらに、pion 凝縮 ρ_{ud} とカイラル凝縮 ϕ_s の、同時相転移線も存在する。これは、 ρ_{ud} と ϕ_s を混合する、3 フレーバ特有のアノマリー効果の表れである。

4.2.3 $\mu_q - \mu_Y$ 平面

最後に、 $\mu_q - \mu_Y$ 平面 ($\mu_I = 0$) における相図を図 4 に示した。有効ポテンシャルは、 $\mu_q \rightarrow -\mu_q$ と $\mu_Y \rightarrow -\mu_Y$ の変換を同時に行ったときに対称である。そのため、 $\mu_Y > 0$ の場合の相図を示す。また、 $\mu_I = 0 \leq m_\pi$ であるため、相図上に pion 凝縮相は現れない。

カイラル極限 (左) の場合を考える。 $\mu_q = \mu_Y = 0$ のとき、通常のカイラル対称性の破れた相と、pion 凝縮相、kaon 凝縮相が縮退している。 $\mu_Y > 0$ では、 μ_I が負の無限小であると仮定することで、 K^0 凝縮相を基底状態に選ぶことができる (アイソスピン $SU(2)$ 対称性が自発的に破れる)。kaon 凝縮相内部の ϕ_u についての 1 次相転移線では、kaon 凝縮 ρ_{ds} の値も不連続に変化する。これは、アノマリー項によって ϕ_u と ρ_{ds} とが混合しているためである。kaon 凝縮相は、 μ_Y の大きい場所で 2 次相転移を、 μ_q の大きい場所で 1 次相転移を起こし、対称相などに移る。

有限の質量がある場合 (右)、 μ_q を大きくするにつれ、 ϕ_u, ϕ_d, ϕ_s のスカラ凝縮がある相から、一度の相転移で対称相へ移る。フレーバ混合を無視すると、 u, d と s クォークは質量が異なるため、 $\mu_Y = 0$ でも、一般に異

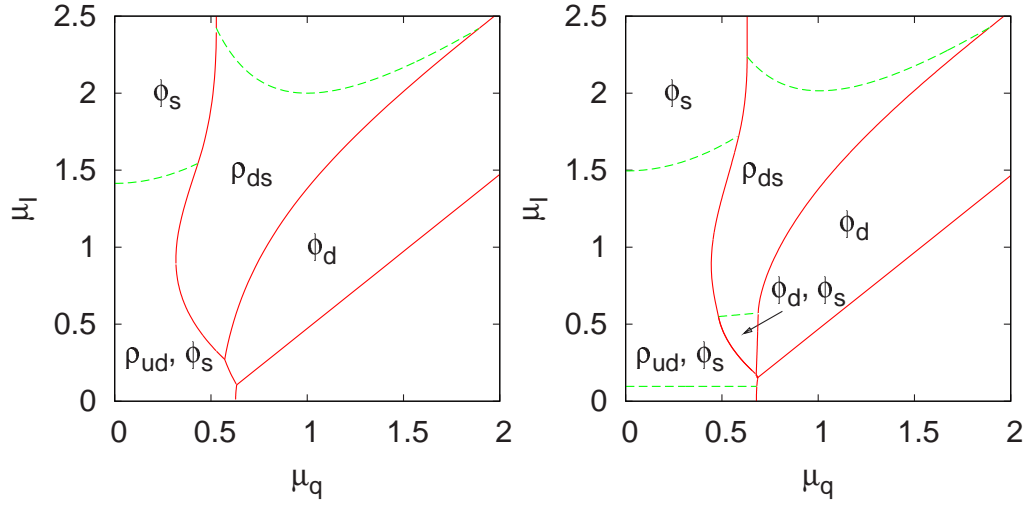


図 3: $N_f = 3$, $\mu_q - \mu_I$ 平面上の相図 ($\mu_Y = 0$)。左がカイラル極限、右が有限質量の場合である。右の図で、横に長い左下の領域は、 ϕ_u, ϕ_d, ϕ_s が大きな値をもつ相である。その他のパラメータは図 2 と同じ。

なる μ_q で相転移がおこる。しかし、この ChRM 模型では、アノマリーによるフレーバ混合のため、それらの相転移は 1 つにまとめられている。

5 結論

U(1) アノマリーの効果を取り込んだ ChRM 模型を、有限アイソスピン、ハイパーチャージ化学ポテンシャルの場合に拡張し、相構造を解析した。

$N_f = 2$ の場合、アノマリー項は u,d フレーバのカイラル凝縮を混合する。この効果により、両者の相転移は、小さな μ_I に対しては同時に起こる。このことは、 $T - \mu_q$ 平面上の臨界点が、小さな μ_I に対しては 1 つであることを示唆している。

$N_f = 3$ の場合、アノマリー項は u,d,s フレーバのカイラル凝縮を混合する。そのため、 $N_f = 2$ の場合と同様に、それらの相転移は同時に起こる傾向がある。さらに、メソン凝縮とカイラル凝縮の間にも混合があることがわかった。これにより、メソン凝縮とカイラル凝縮の相転移も、同時に起きる傾向にある。

さらに、 μ_I の大きな場所での kaon 凝縮や、 μ_Y の大きな場所での pion 凝縮などの、カイラルシグマ模型からは予測されていなかった相を得た。これらは、一部のフレーバに対するカイラル対称性が回復するために起こる効果である。この効果はアノマリーとは直接関係なく、アノマリー効果を取り入れていない ChRM 模型でも見つかっている [11]。

ChRM 模型を用いた以上の考察は、フレーバ混合や、有限密度でのカイラル対称性の回復といった、QCD においても存在すると考えられる現象に基づいている。そのため、同様の相構造は QCD に対しても期待できる。

参考文献

- [1] For review, K. Fukushima and T. Hatsuda, arXiv:1005.4814 [hep-ph].
- [2] T. Sano, H. Fujii and M. Ohtani, Phys. Rev. D **80**, 034007 (2009).
- [3] H. Fujii and T. Sano, Phys. Rev. D **81**, 037502 (2010).

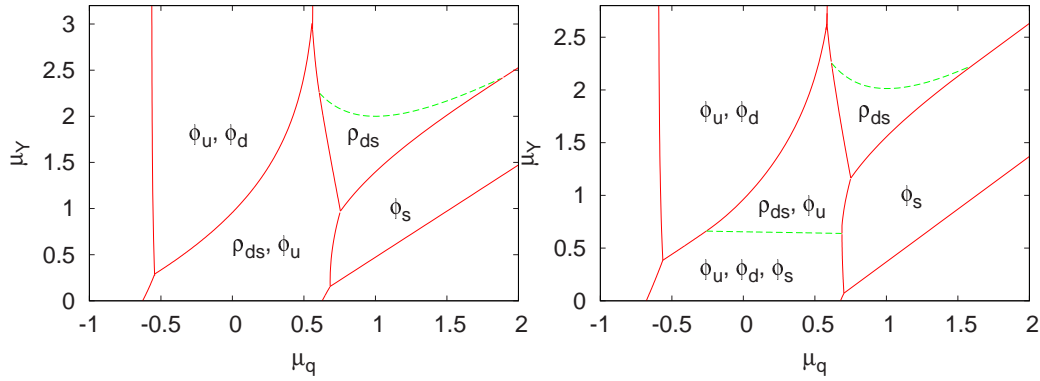


図 4: $N_f = 3$, $\mu_q - \mu_Y$ 平面上的相図 ($\mu_I = 0$)。左がカイラル極限、右が有限質量の場合である。パラメータは図 2 と同じ。

- [4] H. Fujii, T. Sano, [arXiv:1009.5977 [hep-ph]] (to be published in PRD) .
- [5] D. T. Son and M. A. Stephanov, Phys. Rev. Lett. **86**, 592 (2001).
- [6] J. B. Kogut and D. Toublan, Phys. Rev. D **64**, 034007 (2001).
- [7] See, for example, T. Kunihiro, T. Muto, R. Tamagaki, T. Tatsumi and T. Takatsuka, Prog. Theor. Phys. Suppl. **112**, 1 (1993).
- [8] A. Barducci, R. Casalbuoni, G. Pettini and L. Ravagli, Phys. Rev. D **69**, 096004 (2004); D **71**, 016011 (2005); D **72**, 056002 (2005); D. Toublan and J. B. Kogut, Phys. Lett. B **564**, 212 (2003); L.y. He, M. Jin and P.f. Zhuang, Phys. Rev. D **71**, 116001 (2005).
- [9] M. Frank, M. Buballa and M. Oertel, Phys. Lett. B **562**, 221 (2003).
- [10] B. Klein, D. Toublan and J. J. M. Verbaarschot, Phys. Rev. D **68**, 014009 (2003).
- [11] R. Arai and N. Yoshinaga, Phys. Rev. D **78**, 094014 (2008); D **80**, 017501 (2009).
- [12] E. V. Shuryak and J. J. M. Verbaarschot, Nucl. Phys. A **560**, 306 (1993); A. D. Jackson and J. J. M. Verbaarschot, Phys. Rev. D **53**, 7223 (1996); T. Wettig, A. Schäfer and H. A. Weidenmüller, Phys. Lett. B **367**, 28 (1996) [Erratum *ibid.* B **374** (1996) 362]; for review, J. J. M. Verbaarschot and T. Wettig, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **50**, 343 (2000) [arXiv:hep-ph/0003017].
- [13] R.A. Janik, M.A. Nowak and I. Zahed, Phys. Lett. B **392** (1997) 155.
- [14] A. M. Halasz, A. D. Jackson, R. E. Shrock, M. A. Stephanov and J. J. M. Verbaarschot, Phys. Rev. D **58**, 096007 (1998).
- [15] M. Ohtani, C. Lehner, T. Wettig and T. Hatsuda, Mod. Phys. Lett. A **23**, 2465 (2008).
- [16] C. Lehner, M. Ohtani, J. J. M. Verbaarschot and T. Wettig, Phys. Rev. D **79**, 074016 (2009).
- [17] G. 't Hooft, Phys. Rept. **142**, 357 (1986).
- [18] M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **44**, 1422 (1970); M. Kobayashi, H. Kondo and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **45**, 1955 (1971).

一般化された隠れた局所対称性に基づく有限密度 2-color QCD におけるベクトルボソン質量の解析

山岡哲朗、原田正康、野中千穂（名古屋大学大学院理学研究科）

1 導入

我々の構成要素である原子の質量の大部分は、原子核を構成する核子（陽子や中性子）から与えられる。核子は3つのクォークから構成されるが、核子質量はクォークの単純な質量和よりも遥かに大きいことが知られており、その成因は未だに解明されていない。この質量生成機構と密接に関わっていると考えられているのが、クォークとそれを結合するグルーオンを記述する量子色力学 (QCD) の重要な性質の1つであるカイラル対称性の自発的破れであり、有限温度・密度領域においてこのカイラル対称性の自発的破れと回復を調べる研究が盛んに行われている。高温・低密度領域については実験と格子 QCD による研究から、実際にカイラル対称性回復の相転移が起きていることが確認されつつあるが、低温・中間密度、もしくは高密度領域については模型による様々な理論的予想が行われるのみとなっている。この原因の1つとして、有限密度領域においては数値計算上の問題から格子 QCD が適用できなくなる、という困難があることが挙げられる (符号問題)。

この困難を解決するための1つの理論が 2-color QCD であり、実際にハドロン質量の密度依存性が格子 QCD を用いて計算されている [1]。また、2-color QCD の特徴としてバリオン荷を持つボソンが軽い自由度として現れることが挙げられる¹。このため、カイラル対称性の自発的破れから現れる南部-Goldstone ボソン (NG ボソン) を記述する有効模型に有限バリオン密度の効果を一意的に取り入れることができる。一般化された隠れた局所対称性の手法はこの NG ボソンの有効模型にベクトルボソンを導入する一般的な手法であり、我々はこの手法によって構成した模型を用いてベクトルボソンの質量密度依存性を調べ、NG ボソン質量が重い場合に我々の模型が格子 QCD 計算の結果 [1] の一部を再現することを確かめた。

2 ベクトルボソンを含むカイラル有効模型の構成

2-color QCD におけるカイラル対称性の自発的破れは $SU(2N_f)_{\text{global}} \rightarrow Sp(2N_f)_{\text{global}}$ として記述される。この破れに伴って現れる NG ボソン記述する有効模型には一般に局所

¹ $SU(2)_{\text{color}}$ の擬実性より $\bar{q}q$ と同様に qq もカラー 1 重項となるため、通常の $\bar{q}q$ 型の NG ボソンに加えて qq 型のバリオン荷を持つ NG ボソンが現れる。また、本稿で用いる「NG ボソン」は特に断りのない限りクォーク質量の効果により有限の質量 M_π を持った「擬 NG ボソン」を意味する。

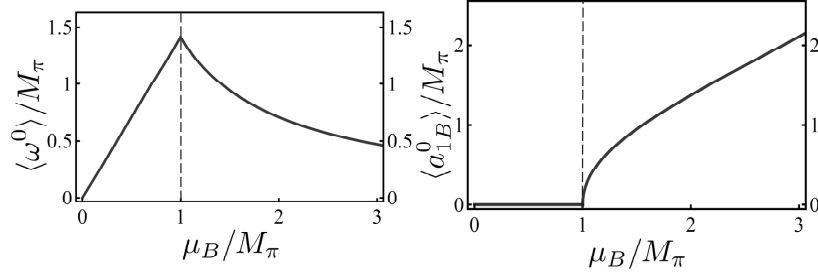


図 1: (左) ω の真空期待値の密度依存性、(右) a_{1B} の真空期待値の密度依存性

対称性 $SU(2N_f)_{\text{local}}$ が含まれており、この対称性も考慮した自発的破れ

$$SU(2N_f)_{\text{global}} \times SU(2N_f)_{\text{local}} \rightarrow Sp(2N_f)_{\text{global}} \quad (2.1)$$

を考え、この下で現れる NG ボソンを基本場とするラグランジアンを構成するのが「一般化された隠れた局所対称性の手法」[2] である。但し $SU(2N_f)_{\text{local}}$ の自発的破れから現れる NG ボソンは、この局所対称性に対応するゲージ場に吸収され質量を持たせる役割を果たすため物理的モードとはならない。また、一般化された隠れた局所対称性の特徴として、カイラル対称性 $SU(2N_f)_{\text{global}}$ の外場としてのゲージ場とは独立に $SU(2N_f)_{\text{local}}$ に対応するベクトルボソンを模型に導入することができる。また、バリオン化学ポテンシャル μ_B はカイラル対称性の外場としてのゲージ場の $U(1)$ 部分に真空期待値を持たせることで取り入れられる。

3 ベクトルボソン質量の密度依存性

3.1 場の真空期待値

具体的なベクトルボソン質量の密度依存性を考えるために、以下では 2 フレーバーの場合を考える。表 1 はこの場合に模型に現れる粒子をアイソスピン (I)、バリオン荷 (B)、スピンパリティ (J^P) の量子数で分類したものである。 π 、 ρ 、 ω 、 a_1 中間子に加えて、2-color QCD の特殊性より、 π_B 、 ρ_B 、 a_{1B} といったバリオン荷を持つ粒子が現れる。また、この模型は $\mu_B > M_\pi$ において、 π_B が有限の真空期待値を持つことで $U(1)_B$ 対称性が自発的に破れる真空構造を持っている [3]。我々はこの真空構造の下で、ベクトルボソン ω 、 a_{1B} の時間成分がそれぞれ図 1 に示すような真空期待値を持つことを示した。特に a_{1B} の時間成分が $\mu_B > M_\pi$ において有限の真空期待値を持つことにより、同じ I 、 J^P の量子数を持つベクトルボソンの混合が引き起こされることが分かった。

Field	I	B	J^P
π	1	0	0^-
π_{B+}	0	+1	0^+
π_{B-}	0	-1	0^+
ρ	1	0	1^-
ω	0	0	1^-
a_1	1	0	1^+
ρ_{B+}	1	+1	1^+
ρ_{B-}	1	-1	1^+
a_{1B+}	0	+1	1^-
a_{1B-}	0	-1	1^-

表 1. 模型に含まれる粒子

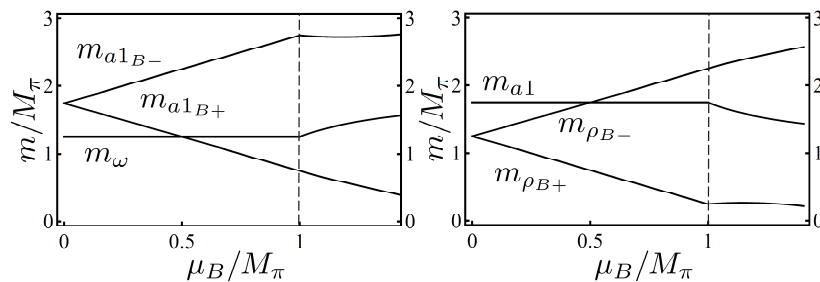


図 2: (左) $I = 0$, $J^P = 1^-$ ベクトルボソン質量の密度依存性、(右) $I = 1$, $J^P = 1^+$ ベクトルボソン質量の密度依存性

3.2 ベクトルボソン質量の密度依存性

ここまで述べた真空の配位の下に得られたベクトルボソン質量の密度依存性を図 2 に示す。ここでは格子 QCD 計算との比較のために、NG ボソン質量が重い状況を考えている²。 $U(1)_B$ 対称性が破れた領域 $\mu_B > M_\pi$ において、同じ量子数を持つベクトルボソンが混合することによる質量の振る舞いの変化が見られる。特に $m_{\rho_{B+}}$ の振る舞いが格子 QCD 計算の結果を再現している。しかしこのモデルでは、同じく格子 QCD 計算によって指摘されている ρ 中間子の質量変化を説明することができず、これを行うためにはモデルに高次項の効果を入れる必要が出てくる³。我々は現在、この点について研究を進めている。

4 謝辞

世話人の方々には発表の機会を与えていただいたことを感謝致します。本研究は名古屋大学グローバル COE プログラム「宇宙基礎原理の探求」の援助を受けて行われました。

参考文献

- [1] S. Muroya, A. Nakamura and C. Nonaka, Phys. Let. B **551**, 305 (2003); S. Hands, P. Sitcha and J-I. Skullerud, Phys. Let. B **662**, 405 (2008).
- [2] M. Bando, T. Kugo and K. Yamawaki, Nucl. Phys. B **259**, 493 (1985); M. Bando, T. Fujiwara and K. Yamawaki, Prog. Theor. Phys. **79**, 1140 (1988); N. Kaiser and U. G. Meissner, Nucl. Phys. A **519**, 671 (1990).
- [3] J. B. Kogut, M. A. Stephanov, D. Toublan, J. J. M. Verbaarschot, A. Zhitnisky, Nucl. Phys. B **582**, 477 (2000).
- [4] M. Harada, C. Nonaka and T. Yamaoka, Phys. Rev. D **81**, 096003 (2010).

²図 2 では、ゼロ密度における ρ 中間子質量を $m_\rho = 5M_\pi/4$ 、 a_1 中間子質量を $m_{a1} = 7M_\pi/4$ とした。

³隠れた局所対称性の枠組で高次項の効果を考え ρ 中間子の質量変化とその他のベクトルボソンの関係を研究したものとして、我々の先行研究 [4] がある。

Anderson-Higgs Mechanism at Finite Density

東京大学大学院理学系研究科物理学専攻 濱 祐介、初田哲男、内野瞬

1 はじめに

近年、対称性の自発的破れ (SSB) の観点から、高密度クォーク物質におけるカラー超伝導体と、超流動ヘリウム 3 や冷却フェルミ原子気体における超流動を、統一的に理解しようという気運が高まっている。本研究ではカラー超伝導体のような有限密度における南部・ゴールドストーン (NG) ボソンの新奇なスペクトルに注目し、有限密度におけるアンダーソン・ヒッグス機構について調べた。

2 有限密度における南部・ゴールドストーン粒子のスペクトル

南部・ゴールドストーン定理の重要な帰結のひとつとして、零質量粒子としての NG ボソンの存在があげられる。カイラル極限における QCD のように Lorentz 共変性を持つ場合、NG ボソンの数は破れた生成子の数に等しい。しかしながら、Lorentz 共変性のない強磁性体の例 (破れた生成子の数=2、NG ボソンの数=1) でもわかるように、一般にはそのような等式は成立せず、同じ SSB のパターンを示しても NG ボソンの数が異なることがある (表 1 の強磁性体と反強磁性体の例を参照)。これまでも NG ボソンの数については様々な研究があり、1976 年に H. Nielsen と S. Chadha は NG ボソンの分散関係に着目し、長波長極限において波数の一次、二次に比例するものをそれぞれ type-I NG ボソン、type-II NG ボソンと称し、NG ボソンの数と破れた生成子の間に成り立つ不等式 (Nielsen-Chadha 不等式) を導出した [1]:

$$[\text{type-I NG ボソンの数}] + 2 \times [\text{type-II NG ボソンの数}] \geq [\text{破れた生成子の数}]. \quad (1)$$

2002 年に Miransky らは、カラー超伝導相中の K 中間子凝縮など、相対論的ではあるがバリオン密度により荷電共役不変性が破れている系においても、type-II NG ボソンが出現することを指摘した [2, 3]。本研究では [2, 3] を踏まえて、有限密度におけるアンダーソン・ヒッグス機構を調べた。このアンダーソン・ヒッグス機構について論じる前に、[2, 3] の有限密度 U(2) Goldstone 模型を通じた NG ボソンのスペクトル (分散関係・出現数) について紹介する。化学ポテンシャルを μ 、基本場の質量 (2 次元複素スカラー場) を m 、真空のまわりで展開した場の成分を ψ, χ_a ($a = 1, 2, 3$) とすると、分散関係は低エネルギー極限 $\vec{p} \rightarrow 0$ において次のようになる。

$$\psi\text{-}\chi_3 \text{ セクター: } E^2 = \frac{\mu^2 - m^2}{3\mu^2 - m^2} \vec{p}^2, \quad E^2 = 2(3\mu^2 - m^2) + O(\vec{p}^2), \quad (2)$$

$$\chi_1\text{-}\chi_2 \text{ セクター: } E = 2\mu + O(\vec{p}^2), \quad E = \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + O(\vec{p}^4). \quad (3)$$

系	SSB-パターン	NG ボソン	N_{NGB}	N_{BG}	分散関係
カイラル極限 QCD	$SU(2)_L \times SU(2)_R \rightarrow SU(2)_V$	パイオン	3	3	$E(p) \propto p$
反強磁性体	$O(3) \rightarrow O(2)$	マグノン	2	2	$E(p) \propto p$
強磁性体	$O(3) \rightarrow O(2)$	マグノン	2	1	$E(p) \propto p^2$

表 1 SSB の例。 N_{NGB} , N_{BG} はそれぞれ NG ボソンの数および破れた生成子の数

化学ポテンシャル μ によって、 $\mu = 0$ では type-I NG ボソンであった χ_a ($a=1,2,3$) が 1 つは有質量場 χ_1 に、1 つは type-II NG ボソン χ_2 へと変化し、結果零質量 NG ボソンの総数は 2 となった (表 2、 $g = 0, \mu \neq 0$ の場合を参照)。このことがこの系におけるアンダーソン・ヒッグス機構を考えるにあたって、ゲージ場の総数 (=3) との間に自由度のミスマッチを生んでいる。本研究では、こうした状況下においてアンダーソン・ヒッグス機構がどのように働くかを調べた。

3 有限密度におけるアンダーソン・ヒッグス機構

本研究では、上記の U(2) Goldstone 模型にゲージ場を導入した、有限密度 SU(2) Higgs-Kibble 模型を通して有限密度におけるアンダーソン・ヒッグス機構の研究を行った。ラグランジアンは以下のように与えられる。

$$L = -\frac{1}{4}F^{\alpha\mu\nu}F_{\mu\nu}^{\alpha} + [(D^0 - i\mu)\phi]^{\dagger}[(D_0 - i\mu)\phi] + (D^i\phi)^{\dagger}(D_i\phi) - m^2\phi^{\dagger}\phi - \lambda(\phi^{\dagger}\phi)^2 + gj^{a\nu}A_{\nu}^a, \quad (4)$$

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \psi + i\chi^a\tau_a] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (a = 1, 2, 3). \quad (5)$$

また (5) 式は場の真空まわりの展開である。 $j^{\mu a}$ は系の SU(2) 電荷中性条件を保証するための Lagrange-multiplier 項である。この項は SU(2) ゲージ対称性が自発的に破れたことで生じたゲージ荷電凝縮体からのゲージ場の寄与を相殺する項である [4]。ゲージ固定関数は R_{ξ} ゲージを用いた。これより場の二次までとったラグランジアンは次式で与えられる。

$$L_0 = -\frac{1}{4}F^{\alpha\mu\nu}F_{\mu\nu}^{\alpha} + \frac{1}{2}M^2(A_{\mu}^a)^2 - \frac{1}{2\alpha}(\partial^{\mu}A_{\mu}^a)^2 + \frac{1}{2}[(\partial_{\mu}\psi)^2 - 2(\mu^2 - m^2)\psi^2] + \frac{1}{2}[(\partial_{\mu}\chi_a)^2 - \alpha M^2\chi_a^2] + i\bar{c}_a(\partial^2 + \alpha M^2)c_a - \mu(\chi_3\overleftrightarrow{\partial}_0\psi + \chi_2\overleftrightarrow{\partial}_0\chi_1) - 2\mu M(-\chi_2A_0^1 + \chi_1A_0^2 + \psi A_0^3). \quad (6)$$

上式を用いて、有質量場および type-II NG ボソン ($\chi_{1,2}$) の伝播関数を求めることによって type-II NG ボソンがゲージ場に吸収されたかどうかを判断することができる。つまり、非物理的粒子は $\alpha \rightarrow \infty$ の極限で質量が無限大となり、物理的粒子と decouple することを確認する。計算の結果を視覚的に示したのが図 1 の質量スペクトルである。図 1 より、type-I NG ボソン χ_3 、有質量場 χ_1 、type-II NG ボソン χ_2 はゲージ対称性が自発的に破れることで $O(\sqrt{\alpha})$ の質量を持つ。よって $\alpha \rightarrow \infty$ の極限で $\chi_{1,2,3}$ は decouple する。つまり零質量粒子 $\chi_{2,3}$ だけでなく、有質量粒子 χ_1 もゲージ場に吸収され、その結果 $\mu = 0$ の場合と同様に SSB の前後で物理的自由度が保存する。

4 まとめと展望

本研究では、化学ポテンシャルの効果によって、NG ボソンのスペクトル (分散関係・出現数) に変化が生じた、有限密度におけるアンダーソン・ヒッグス機構の研究を SU(2) Higgs-Kibble 模型を通じておこなった。

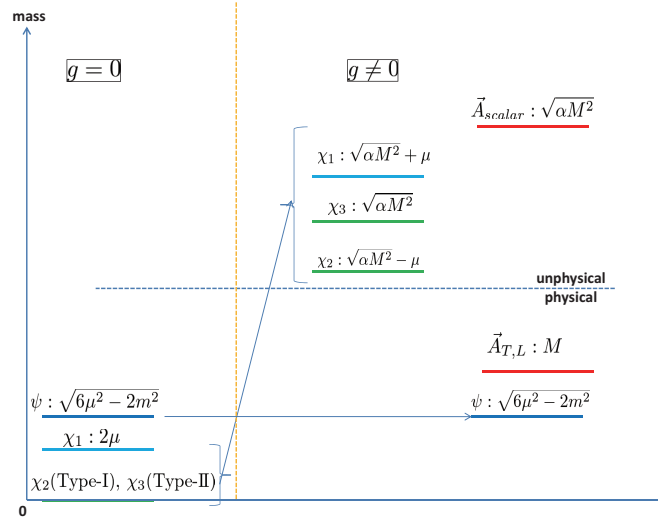


図1 $g = 0$ と $g \neq 0$ に対する質量スペクトル。 g は $SU(2)$ ゲージカップリング。 $SU(2)$ ゲージ対称性が自発的に破れたことによって $\chi_{1,2,3}$ は $O(\sqrt{\alpha})$ の質量を獲得。

場	$g = 0, \mu = 0$	$g = 0, \mu \neq 0$	$g \neq 0, \mu = 0$	$g \neq 0, \mu \neq 0$
ゲージ場	2×3	2×3	3×3	3×3
NG ボソン	3(type-I)	1(type-I), 1(type-II)	0	0
有質量場	1	2	1	1

表2 物理的自由度数。 $g \neq 0, \mu \neq 0$ が有限密度における $SU(2)$ ゲージ対称性が自発的に破れた場合。

有限密度 (本研究では $U(2)$ Goldstone 模型を用いた) においては、表2に示すように本来3つであった零質量 NG ボソンのうちの1つが有質量、1つは type-II NG ボソンになり、ゲージ場の総数3との間に自由度のミスマッチを生んでしまっていた。しかしゲージ場が零質量 NG ボソンだけでなく、零密度において type-I NG ボソンであった有質量粒子もきちんと吸収することがわかった。その結果、有限密度におけるアンダーソン・ヒッグス機構は零密度の場合と同様に SSB の前後で物理的自由度が保存する形で働くことになる。今後の展望として、ゲージ荷電凝縮体が存在するカラー超伝導体への応用を行う。

参考文献

- [1] H. B. Nielsen and S. Chadha, Nucl. Phys. **B105** (1976) 445.
- [2] V. A. Miransky and I. A. Shovkovy, Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 11601.
- [3] T Schafer et al., Physics Letters B **522** (2001)67-75
- [4] Joseph I. Kapusta, Phys. Rev. D **24**, 426-439 (1981)

Topological interactions between non-Abelian vortices and the surrounding environment

Yuji Hirono¹, Takuya Kanazawa¹, Muneto Nitta²

1) Department of Physics, The University of Tokyo, 7-3-1 Hongo, Tokyo 113-0033, Japan

2) Department of Physics, and Research and Education Center for Natural Sciences, Keio University, 4-1-1 Hiyoshi, Kanagawa 223-8521, Japan

1. Introduction

Topological defects are important in condensed matter physics since they can affect the property of matter or even change the phase structure. This can be also the case in the condensed matter physics of QCD. It is shown in [1] that topologically stable vortices can exist in the color-flavor locked (CFL) phase [2] of a color superconductor.

The vortices in the CFL phase have a peculiar nature due to the fact that the isotropy group H is non-Abelian and both local and global symmetry are broken. Just as a vortex in a conventional type II superconductor carries a magnetic flux, a vortex in the CFL phase carries a color magnetic flux. Furthermore, a color superconductor is also a superfluid, due to the breaking of the global $U(1)_B$ symmetry. Another feature of non-Abelian vortices in the CFL phase is that they have internal degrees of freedom, which are called orientational zero modes. Existence of a vortex breaks the color-flavor locked symmetry $SU(3)_{c+F}$ down to its subgroup $SU(2) \times U(1)$. Consequently, there appear further NG modes [3] which parametrize

$$\mathbb{C}P^2 \simeq \frac{SU(3)_{c+F}}{SU(2) \times U(1)}. \quad (1)$$

There are degenerate vortex solutions with different color magnetic fluxes, each of which corresponds to a point in $\mathbb{C}P^2$ space.

We derive a Lagrangian which is dual to the low energy effective theory of the CFL phase by making use of a dual transformation. One of the advantages of the dualization is that one can deal with the interaction of topological defects by the method of ordinary field theory for particles. We clarify how the orientational zero modes interact with quasi-particles in the CFL phase.

2. Application of the dual transformation to the CFL

Low energy effective theory of the CFL phase

At high density where the masses of three light quarks can be neglected, the time dependent Ginzburg-Landau Lagrangian can be written as [4] [5]

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 + K_\mu \text{Tr} \left[(D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi \right] - V(\Phi), \quad (2)$$

where $D_\mu \Phi = (\partial_\mu - ig A_\mu^a T^a) \Phi$, $K_\mu = (K_0, K_1, K_1, K_1)$ and T^a are generators of $SU(N)_c$ in the fundamental representation, normalized as $\text{Tr}[T^a T^b] = \frac{1}{2} \delta^{ab}$ with color indices

$a = 1, 2, \dots, N^2 - 1$. K_0, K_1 , are constant parameters. This Lagrangian is constructed by collecting most general terms that are consistent with the symmetry group of generalized QCD with N colors and N flavors, which is given by $G = \frac{SU(N)_c \times SU(N)_F \times U(1)_B}{(Z_N)_{c+B} \times (Z_N)_{F+B}}$, where $SU(N)_c$ is the local color symmetry, $SU(N)_F$ is the global flavor symmetry and $U(1)_B$ is the global baryon number conserving symmetry. We consider the parameter region where the CFL phase is realized.

Dual transformation

The partition function of the CFL phase is written as

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu^a(x) \mathcal{D}\Phi(x) \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}(x) \right\}, \quad (3)$$

with the Lagrangian defined by (2).

We perform the dual transformation of gluons as follows. First, we introduce a massive non-Abelian 2-form field $B_{\mu\nu}^a$ by the Hubbard-Stratonovich transformation [6]. Then we integrate out the original gluon field A_μ . After this procedure, the gluons are described by a massive 2-form field $B_{\mu\nu}^a$. Detailed derivation will be given in [7]. As a result, we obtain the following partition function

$$Z \propto \int \mathcal{D}B_{\mu\nu}^a (\det K_{\mu\nu}^{ab})^{-1/2} \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_G^*(x) \right\}, \quad (4)$$

where \mathcal{L}_G^* denotes the gluonic part of the dual Lagrangian

$$\mathcal{L}_G^* = -\frac{1}{2} \left(\frac{m}{g} \right)^2 \left(\partial_\rho \tilde{B}^{a,\mu\rho} - \frac{g}{m} J^{a,\mu} \right) (K^{-1})_{\mu\nu}^{ab} \left(\partial_\sigma \tilde{B}^{b,\nu\sigma} - \frac{g}{m} J^{b,\nu} \right) - \frac{1}{4} m^2 (B_{\mu\nu}^a)^2 \quad (5)$$

with $J_\mu^a \equiv -iK_\mu \text{Tr} \left[\Phi^\dagger (\overleftarrow{\partial}_\mu - \overrightarrow{\partial}_\mu) T^a \Phi \right]$ and $K_{\mu\nu}^{ab} \equiv \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \sqrt{K_\mu K_\nu} \text{Tr} \left[\Phi^\dagger T^a T^b \Phi \right] - \frac{m}{g} f^{abc} \tilde{B}_{\mu\nu}^c$.

The interaction between gluons and the vorticity is identified as

$$\mathcal{L}_G^* \supset -\frac{1}{2} \left(\frac{m}{g} \right) B_{\lambda\sigma}^a \omega^{a,\lambda\sigma} \quad (6)$$

where we have defined the vorticity tensor $\omega_{\mu\nu}^a$ as

$$\omega^{a,\lambda\sigma} \equiv \epsilon^{\lambda\sigma\mu\nu} \left[\partial_\nu \left\{ (\Phi^{-1})_{(\mu\rho)}^{(ab)} J^{b,\rho} \right\} + J^{\epsilon,\alpha} (\Phi^{-1})_{\alpha\mu}^{\epsilon c} f^{cda} (\Phi^{-1})_{\nu\beta}^{db} J^{b,\beta} \right] \quad (7)$$

with $\Phi_{\mu\nu}^{ab} \equiv \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \sqrt{K_\mu K_\nu} \text{Tr} \left[\Phi^\dagger T^a T^b \Phi \right]$ and $A_{\mu\nu}^{(ab)}$ is symmetrized summation defined by $A_{\mu\nu}^{(ab)} \equiv A_{\mu\nu}^{ab} + A_{\nu\mu}^{ba}$. This expression for the non-Abelian vorticity is valid for general vortex configurations. The information of vortex configuration is included in Φ and J_μ^a .

The NG boson due to the breaking of $U(1)_B$ symmetry can be parametrized as $\Phi(x) = e^{i\pi(x)} \psi(x)$, where $\pi(x)$ is a real scalar field. The dualization of $\pi(x)$ can be performed in the same way as the Abelian case [8]. We obtain the dual Lagrangian for the $U(1)_B$ phonon part

$$\mathcal{L}_{Ph}^* = - \left(\frac{1}{2M} \right)^2 K_\mu (m^0 \partial_\nu \tilde{B}_{\mu\nu}^0 - J_\mu^0)^2 - 2\pi m^0 B^{0,\mu\nu} \omega_{\mu\nu}^0 \quad (8)$$

with $M^2 \equiv \text{Tr} \left[\Phi^\dagger \Phi \right]$ and $\omega_{\rho\sigma}^0 \equiv \frac{1}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu \partial^\mu \pi(x)_{MV}$, where $\pi(x)_{MV}$ is multi-valued part of $\pi(x)$. The $U(1)_B$ phonons are now described by 2-form fields $B_{\mu\nu}^0$ and vortices appear as a source for $B_{\mu\nu}^0$.

Expression of the vorticity tensor

Let us consider a concrete solution $\Phi(x) = \text{diag}(f(r)e^{i\theta}, g(r), g(r))$ [9] and express the vorticity tensors in terms of profile functions $f(r)$ and $g(r)$ and orientational zero modes.

The Abelian component of vorticity tensor $\omega_{\mu\nu}^0$ can be identified as

$$\omega_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2\pi N} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\sigma \partial_\rho \theta. \quad (9)$$

The non-Abelian component of vorticity tensor $\omega_{\mu\nu}^a$ is obtained by substituting J_μ^a and Φ^{-1} into (7). $\omega_{\mu\nu}^a$ can be represented as

$$\begin{aligned} \omega_{\lambda\sigma}^a = \epsilon_{\lambda\sigma\mu\nu} \left\{ \partial_\nu \left\{ -\frac{16}{N} \gamma(r) \partial_\mu \theta \phi^\dagger T^a \phi \right. \right. \\ + i\alpha(r)(1 + \beta(r)) (\phi^\dagger T^a \partial_\mu \phi - \partial_\mu \phi^\dagger T^a \phi + 2\phi^\dagger T^a \phi \partial_\mu \phi^\dagger \phi) \left. \right\} \\ - \frac{4}{N} \alpha(r) \gamma(r) (1 + \beta(r)) \left\{ \partial_{<\mu} \phi^\dagger T^a \phi + \phi^\dagger T^a \partial_{<\mu} \phi \right\} \partial_{>\nu} \theta \\ - \frac{i}{2} \alpha(r)^2 (1 + \beta(r)^2) \left[\phi^\dagger T^a \phi \partial_{<\mu} \phi^\dagger \partial_{>\nu} \phi + \partial_{<\mu} \phi^\dagger T^a \partial_{>\nu} \phi \right. \\ \left. \left. + \phi^\dagger T^a \partial_{<\mu} \phi \partial_{>\nu} \phi^\dagger \phi + \partial_{<\mu} \phi^\dagger T^a \phi \partial_{>\nu} \phi^\dagger \phi \right] \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

where $\alpha(r)$, $\beta(r)$ and $\gamma(r)$ are written in terms of vortex profile functions $f(r)$ and $g(r)$. The leading contribution is given by the first term. $\alpha(r)$ and $\gamma(r)$ are finite only around the vortex, so the vorticity tensor (10) vanishes at far from the center of the vortex.

3. Summary

We have derived a dual Lagrangian starting with the Ginzburg-Landau effective Lagrangian for the CFL phase, which include the interaction of non-Abelian vortices with quasi-particles such as $U(1)_B$ phonons and gluons. Our dual Lagrangian can be used as a starting point to discuss the radiation of gluons and phonons from moving vortices, the vortex-vortex interaction which is mediated by gluons and phonons and possible collective structures of vortices such as lattices or the quantum turbulence.

References

- [1] A. P. Balachandran, S. Digal, and T. Matsuura, Phys. Rev. **D 73**, 074009 (2006).
- [2] M. Alford, K. Rajagopal, and F. Wilczek, Nuclear Physics **B 537**, 443-458 (1999).
- [3] E. Nakano, M. Nitta, and T. Matsuura, Phys. Rev. **D 78**, 045002 (2008).
- [4] M. Eto and M. Nitta, Phys. Rev. **D 80**, 125007 (2009).
- [5] M. Eto, M. Nitta, and N. Yamamoto, Phys. Rev. Lett. **104**, 161601 (2010).
- [6] K. Seo, M. Okawa, and A. Sugamoto, Phys. Rev. **D 19**, 3744 (1979).
- [7] Y. Hirono, T. Kanazawa, and M. Nitta, in preparation.
- [8] K. Lee, Phys. Rev. **D 48**, 2493 (1993).
- [9] M. Eto, E. Nakano, and M. Nitta, Phys. Rev. **D 80**, 125011 (2009).

Analysis of fermionic soft mode with resummed perturbation theory

佐藤大輔, 日高義将, 国広悌二 (京大 理)

1 導入

重イオン衝突実験および初期宇宙においては、クォーク・グルーオンプラズマ (QGP) 相が実現されていると考えられている。QGP 中でどのような集団運動が存在するのかを研究することは、QGP をよく記述する基本的な自由度を突き止める、つまり QGP 中の準粒子描像を確立するという観点から大変重要である。しかし後で述べるように、摂動的にすら全てのエネルギースケールでの解析が行われているわけではない。このため未発見の集団運動が存在する可能性がある。

まず現在どこまで摂動的に集団運動が解析されているかを見てみよう。粒子の質量が無視できる程の超高温 (T) においては、摂動論が信頼できるような弱結合領域 ($e \ll 1$) で、量子電磁力学 (QED)、量子色力学 (QCD) などのボソン-フェルミオン系において以下の集団運動 (図 1) が存在すると考えられている。 T 程度のエネルギーを持つ粒子は、ほぼ自由な粒子として記述できる。一方 eT 程度のエネルギー領域においては、分散関係などの性質は変更を受けそれぞれボソンはプラズモン、フェルミオンはノーマルフェルミオンと呼ばれる集団運動として記述される [1] (ここで e はボソンとフェルミオンの結合定数である。なお、 eT 程度のエネルギー領域での摂動論は Hard Thermal Loop 近似と呼ばれる。以下 HTL 近似。)。さらにプラズミーノと呼ばれる、真空中に対応物のないフェルミオンホール的な集団運動の存在も示唆されている [1]。さらに低いエネルギースケール ($\ll e^2T$) では、フェルミオン数及びエネルギー・運動量の保存に対応して流体力学的なモード (ボソンの) が存在すると考えられている。

一方、そのエネルギー領域 ($\ll e^2T$) でのフェルミオンの集団運動の有無は十分研究されていない¹。これは、赤外領域は後で述べるピンチ特異性と呼ばれる赤外発散²により、通常摂動論による解析が困難なためである。我々はこの領域におけるフェルミオンの伝播関数を以下で述べる手法により解析し、フェルミオンの集団運動の存在及びその性質を議論する。

2 Resummation

以後 QED に限定して話を進める事にする。ゲージはランダウゲージを採用し、虚時間形式を使って計算を進める。紙面の都合のため詳細は省くが、上で述べたピンチ特異性は、今の赤外領域の解析においてはボソンとフェルミオンの分散関係が同じ場合に現れる。超高温を考えているためボソンもフェルミオンも質量を無視でき、単純に摂動論を適用するとピンチ特異性が出現する。

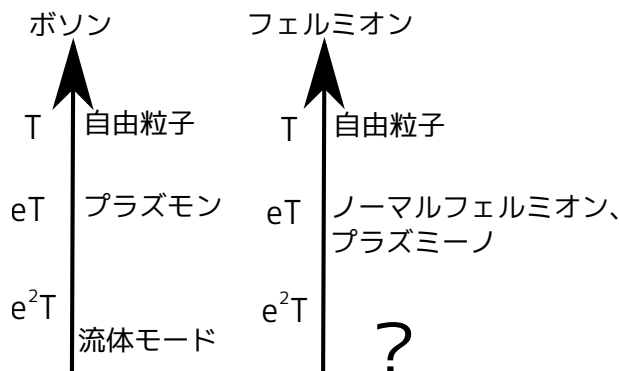


図 1: 有限温度における様々な集団運動。左側がボソンの、右側がフェルミオンのものである。縦軸はエネルギースケールである。

¹ただし、ボソンがゼロ質量ではなく温度と同じ程度の質量を持つ場合においては、上で紹介したノーマルフェルミオンおよびプラズミーノに加えて新しい集団運動の存在が示唆されている [2]。

²これと同様の発散は輸送係数の摂動論的な計算を行う際にも現れる [3]。

この困難を除去するため我々は以下に述べる新たな摂動級数の総和法を構築した³。有限温度においては一般に、粒子の分散関係は真空中のものとは異なる。特に、今の場合フェルミオンとボソンの分散関係は異なる。この事を考慮するとピンチ特異性は緩和される。ここで、今の場合主要な寄与をするのはエネルギーが T 程度の粒子であるため、内線のエネルギーは T 程度と考えてよい事に注意する。エネルギーが T 程度の場合、粒子は有限温度効果によって eT 程度の大きさの有効質量を獲得する。具体的には、ボソンの場合 $m_B \equiv eT/3$ 、フェルミオンの場合 $m_F \equiv eT/(2\sqrt{2})$ である [5]。したがってピンチ特異性の原因となる箇所においては、フェルミオンとボソンの伝播関数は以下に記す熱質量の効果を含んだものを用いる。

$$G_m(p) = -\frac{1}{\not{p} - m_F}, \quad D_m^{\mu\nu}(p) = -\frac{P_T^{\mu\nu}(p)}{p^2 - m_B^2}. \quad (1)$$

ここで、 $n^\mu \equiv (1, \mathbf{0})$ を使うと横波成分への射影演算子 $P_T^{\mu\nu}(p)$ は $P_T^{\mu\nu}(p) \equiv g^{\mu\nu} - (n^\mu p^\nu + n^\nu p^\mu)/p^0 + p^\mu p^\nu / (p^0)^2$ と書ける。(以後引数がエネルギーと運動量に分けて書かれていない場合、その量は虚時間形式における量であるとする。例えば今の場合だと、 $G_m(p) \equiv G_m(\mathbf{p}, i\omega_m)$ 、 $\omega_m \equiv (2m+1)\pi T$ 。) また伝播関数の関数形の決定においては、運動量が T 程度の場合を考えているので、ボソンの縦波成分は無視できる事、および留数は真空中の値と同じであることを使った。この伝播関数を用いるとピンチ特異性は緩和され、1ループダイアグラムの寄与は有限になる。

しかしながら、1ループダイアグラムを考えるだけでは不十分である。梯子型のダイアグラムが1ループダイアグラムと同じオーダーの寄与をするため、この種のダイアグラムも考えなくてはならない。梯子型のダイアグラムを全て足すため、以下の積分方程式で定義される頂点関数 $e\Gamma^\mu(p; k)$ を導入する。

$$\Gamma^\mu(p; k) = \gamma^\mu - e^2 T \sum_n \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \gamma_\nu \frac{1}{\not{l} - \not{p} + \not{k}} \gamma^\mu G_m(l) D_m^{\nu\rho}(p-l) \Gamma_\rho(p; l). \quad (2)$$

ここで、 $l^0 = i\omega_n \equiv i(2n+1)\pi T$ はフェルミオンにおける松原振動数である。この式をダイアグラム表示したものが図2である。この頂点関数を用いることで、梯子型ダイアグラムを全て足すことができる。以下にそれを行ったときのフェルミオンの自己エネルギー $\Sigma(p)$ の表式を示す。

$$\Sigma(p) = -e^2 T \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \gamma_\mu G_m(k) D_m^{\mu\nu}(p-k) \Gamma_\nu(p; k). \quad (3)$$

3 結果

我々は式(2)および(3)から $\Sigma(p)$ を計算し、さらにフェルミオンの遅延伝播関数を求めた。その結果、フェルミオンの遅延伝播関数が赤外領域 ($|\mathbf{p}| \ll e^2 T$) に極を持つ事が判明した。この事は今まで知られていなかったフェルミオンの集団運動が赤外領域に存在する事を意味する。フェルミオン数+1のセクターでは、その集団運動の分散関係、留数はそれぞれ

$$\omega = -\frac{|\mathbf{p}|}{3}, \quad Z = \frac{4\delta m^4}{\pi^2 e^2 T^4} \left(1 + \frac{e^2 T^2}{8\delta m^2}\right)^2 \sim e^2 \quad (4)$$

である。ここで、 $\delta m^2 \equiv m_B^2 - m_F^2$ である。なお、今の場合化学ポテンシャルがゼロであるため、対称性からフェルミオン数+1と-1の集団運動が独立ではない。したがってフェルミオン数+1のセクターのみを調べれば十分であることに注意する。そのセクターではプラズミーノの代わりに反プラズミーノが出現する。

式(4)の分散関係の表式からわかるように、この集団運動は反プラズミーノと同様エネルギーが負であるため、反フェルミオンホール的な性格が強いと解釈できる。分散関係はHTL近似の結果とともに図3に示した。また、留数は e^2 程度である。これは $|\mathbf{p}| \ll e^2 T$ におけるノーマルフェルミオンおよび反プラズミーノの留数(1程度) [1] に比べると e^2 のオーダーだけ小さい。

³これとはほぼ同様の手法を用いた解析は [4] においても行われている。ただし、Eq. (2) に相当する頂点関数を決定する方程式は解かれていない。

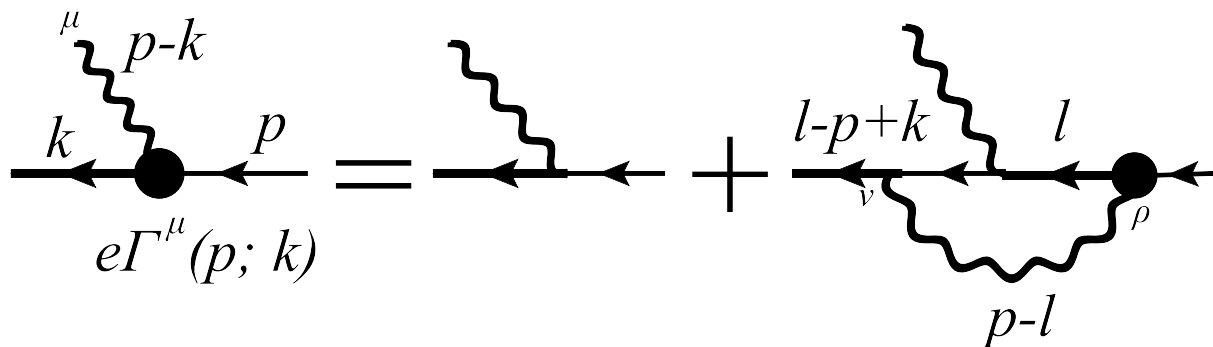


図 2: 頂点関数を決定する積分方程式 (2) のダイアグラム表示。実線はフェルミオンの伝播関数、波線はボソンの伝播関数である。それぞれの太線がそれぞれの resummed propagator である。黒丸は頂点関数である。

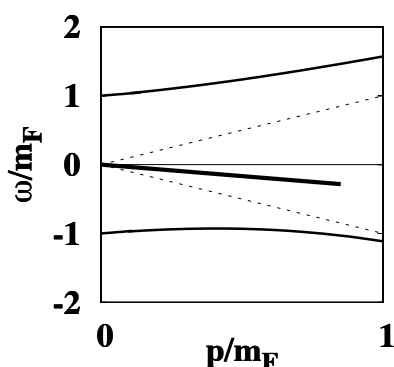


図 3: フェルミオン数+1 の集団運動の分散関係。単位を m_F として横軸が運動量 $|\mathbf{p}|$ 、縦軸がエネルギー ω である。2つの破線は自由粒子の分散関係 $\omega = \pm|\mathbf{p}|$ である。3つの実線は上からノーマルフェルミオン、新しく見つかったフェルミオンの集団運動、反プラズメーノである。ここで $e = 0.3$ とした。我々の計算の結果見つかった集団運動は制限 $|\mathbf{p}| \ll e^2 T$ のため、 $|\mathbf{p}| = e^2 T \simeq 0.85 m_F$ から先は描いていない。

4 まとめと今後の課題

我々は QED において、赤外領域 ($\omega, |\mathbf{p}| \ll e^2 T$) におけるフェルミオンの伝播関数を、新しく開発した摂動級数の総和法を用いて解析した。その結果、新しいフェルミオンの集団運動の存在が示唆された。また、その集団運動の分散関係および留数も計算した。

今後の研究の方向としては、粒子の熱質量のみならず崩壊幅を考慮した計算を行う事が挙げられる。これにより赤外領域における集団運動の持つ崩壊幅が評価できると期待される。

参考文献

- [1] H. A. Weldon, Phys. Rev. D **26**, 2789 (1982); **40**, 2410 (1989).
- [2] M. Kitazawa, T. Kunihiro and Y. Nemoto, Prog. Theor. Phys. **117**, 103 (2007).
- [3] S. Jeon, Phys. Rev. D **52**, 3591 (1995); Y. Hidaka and T. Kunihiro, arXiv:1009.5154 [hep-ph].
- [4] V. V. Lebedev and A. V. Smilga, Annals Phys. **202**, 229 (1990).
- [5] U. Kraemmer, A. K. Rebhan and H. Schulz, Annals Phys. **238**, 286 (1995).

Critical dynamics near QCD critical point based on nonlinear Langevin equation

南 佑樹、国広 悌二 (京大理)

1 導入

QCD 相図には閉じ込め相と非閉じ込め相を隔てる一次相転移線の端点として臨界点の存在がさまざまな有効模型により予想されている。しかしながら、実験的にはその存在はまだ確かめられていない。そのため実験的に検証可能な QCD 臨界点のシグナルとなる様な臨界現象の探索が精力的に行われている。QCD 臨界点で期待される現象のひとつとして Karsch 等によって指摘された体積粘性率の発散が挙げられる [1]。しかし、文献 [1] で用いられている ansatz には疑問が出されており [2]、また、相対論的ボルツマン方程式に基づく解析では [3]、発散せず有限に留まるなど、その振る舞いには議論の余地が存在する。

輸送係数の臨界発散は、一般に、巨視的な揺らぎの動的な非線形結合に由来することが知られており [4]、通常、一般化された非線形ランジュバン方程式に動的くりこみ群理論を適用することで解析される [5, 6]。一般化された非線形ランジュバン方程式は微視的運動方程式 (リウビルまたはハイゼンベルグ方程式) を森の射影演算子の方法により [7]、形式的に、遅い変化と速い変化に分解することで導出されている。この分解は形式的なものであるため非線形ランジュバン方程式は、任意のゆっくり変化する力学量 (遅い変数) について考えることができ、QCD 臨界点の場合であっても成り立つと期待できる。従って、本研究では QCD 臨界点近傍のダイナミクスを記述する非線形ランジュバン方程式を構成し動的繰り込

み群により輸送係数の臨界挙動を明らかにする。以下で、非線形ランジュバン方程式と動的くりこみ群について簡単に紹介する。

非線形ランジュバン方程式は一般に次の形で与えられる [7]。

$$\frac{\partial}{\partial t} A_j(t) = v_j(A) - \sum_k L_{jk}(A) \frac{\delta(\beta H(A))}{\delta A_k} + \theta_j(t), \quad (1)$$

ここで A_j : 遅い変数、 $v_j(A(t))$: 流れ項、 $H(A(t))$: 熱力学ポテンシャル、 L_{jk} : 運動学的係数、 $\theta_j(t)$: ランダムノイズ。右辺第一、二項がゆっくりとした変化を表しており、遅い変数について非線形になっている。流れ項は可逆的な変化を表している。また、この項に含まれる非線形項は動的な非線形結合を表しており、静的な場合には存在しない。右辺第二項は散逸項、つまり、不可逆的な変化を表している。この項の非線形結合は熱力学ポテンシャルに由来するもので、静的な場合にも存在する。最後の項、 $\theta_j(t)$ は速い変化を表しており、次の揺動散逸関係で特徴づけられる、確率変数として扱われる。

$$\langle \theta_j(t) \theta_k(t'); a \rangle = 2L_{jk}(a) \delta(t - t'), \quad (2)$$

この関係は手で与えているのではなく、形式的な分解の過程で自動的に得られるものであることに注意。また、非線形ランジュバン方程式は赤外有効理論であるので紫外カットオフ Λ を持つことにも注意。

動的くりこみ変換は非線形ランジュバン方程式を波数が $\Lambda - \delta\Lambda < k < \Lambda$ の成分を持つ遅い変数について平均することで与えられる [6, 5]。つまり、カットオフを $\Lambda \rightarrow \Lambda - \delta\Lambda$ と変化させてランジュバン方程式の応答をみる。このとき、輸送係数の応答から

輸送係数に対する繰り込み群方程式が得られ、静的くりこみ群と同様の議論から臨界指数を得ることができる。ここで、臨界指数はランジュバン方程式の関数形のみから決定され、ランジュバン方程式に含まれるパラメーターの具体的な値は必要としないことに注意する。

2 QCD 臨界点における非線形ランジュバン方程式

QCD 臨界点近傍のダイナミクスを記述する非線形ランジュバン方程式を構成する。まず、QCD 臨界点における遅い変数を決める。遅い変数は、一般に、ソフトモードと保存量密度であたえられるが、QCD 臨界点におけるソフトモードはなんであろうか？答えは、カイラル極限と異なり、保存量密度の長波長成分、つまり、バリオン数密度、エネルギー密度、運動量密度であることが明らかにされている [8, 9]。ソフトモードが保存量密度なので、遅い変数として保存量密度のみを選ぶことができる。つまり、QCD 臨界点における遅い変数は

$$A_j = \{\delta n, \delta e = (\delta T^{00}), \delta J^i = (\delta T^{0i})\}. \quad (3)$$

である。保存量密度の遅い力学は基本的に流体力学に従うので、QCD 臨界点近傍の系は相対論的臨界液体として扱えるであろうことが期待できる。**基本的に**流体というだけで、通常の流体力学には無い、臨界点固有の非線形揺らぎの効果を含むことに注意。

以下の構成で注意すべきことは臨界点近傍で全ての揺らぎが増大するわけではないということである。揺らぎのおおまかな振る舞いは、相対論的線形流体方程式（線形レベルでの遅い変数の運動方程式）に静的なスケール則により熱力学量の特異性を加味することで解析される [10]。その結果として、 δn と δe は増大するが δJ は増大しないという事が得られる。つまり、 δJ の非線形性は無視してよい。

以下、スペースの都合上、細かい導出は省略するが相対論的線形流体方程式（線形ランダウ方程式）に、非線形ランジュバン方程式の一般形、式 (1) に

基づいて非線形揺らぎの効果を取り込むことによって、次の非線形ランジュバン方程式が得られる。

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} = \nabla \cdot (n \delta \mathbf{v}) - L_{nn} \frac{\delta(\beta H)}{\delta n} + \theta_n, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \delta e}{\partial t} = \nabla \cdot ((e + P_c) \delta \mathbf{v}), \quad (5)$$

$$\frac{\partial \delta \mathbf{J}}{\partial t} = n \nabla \cdot \frac{\delta H}{\delta n} - (e + P_c) \nabla \cdot \frac{\delta H}{\delta e} - L_{JJ} \frac{\delta(\beta H)}{\delta \mathbf{J}} + \theta_J, \quad (6)$$

ここで $\delta \mathbf{v} = \delta H / \delta \mathbf{J}$: 流速揺らぎ、 $n = n_c + \delta n$ 、 $e = e_c + \delta e$ 。添え字 c が付いている量は、平衡状態での値を表す。また

$$L_{nn} = \kappa_0 \left(\frac{n_c T_c}{e_c + P_c} \right)^2 \nabla^2, \quad (7)$$

$$L_{JJ}^{ij} = T_c [\eta_0 \delta_{ij} \partial_i \partial_j + (\zeta_0 + (1 - 2/d) \eta_0) \partial_i \partial_j], \quad (8)$$

ここで、 κ_0 : 熱伝導率、 η_0 : ずれ粘性率、 ζ_0 : 体積粘性率、 d : 空間次元。さらに

$$H(\delta n, \delta e, \delta \mathbf{J}) = H_{\text{Ising}}(\beta, m) + \frac{1}{2(e_c + P_c)} \delta \mathbf{J}^2, \quad (9)$$

である。QCD 臨界点の静的普遍類がイジング系の臨界点と同じであることから

$$\delta n = \beta^{-1} + \beta_1 m, \quad (10)$$

$$T_c^{-1} \delta e = \beta^{-1} + \beta_2 m. \quad (11)$$

の写像関係のもとイジング系の熱力学ポテンシャル H_{Ising} を用いた [6, 11]。ここで、 β : スピン密度、 m : イジング系のエネルギー密度。繰り込み群による解析では、写像関係における係数 β_1, β_2 は決めなくても良いことに注意。

3 動的繰り込み群による解析

詳しい導出は省略するが、 ϵ 展開法を用い $O(\epsilon)$ で計算すると以下の繰り込み群方程式が得られる。

$$\Lambda \frac{\partial (\Lambda)}{\partial \Lambda} = \frac{3}{4} f(\Lambda) (\Lambda), \quad (12)$$

$$\Lambda \frac{\partial \eta(\Lambda)}{\partial \Lambda} = \frac{1}{24} f(\Lambda) \eta(\Lambda), \quad (13)$$

$$\Lambda \frac{\partial f(\Lambda)}{\partial \Lambda} = f(\Lambda) \left(\epsilon - \frac{19}{24} f(\Lambda) \right), \quad (14)$$

$$\Lambda \frac{\partial \zeta(\Lambda)}{\partial \Lambda} = A^{-2} (\Lambda) \Lambda^{-1} (\Lambda) \Lambda^{-\epsilon}, \quad (15)$$

ここで $f(\Lambda) \equiv B/(\eta(\Lambda) (\Lambda)\Lambda^\epsilon)$ 、 $\epsilon = 4 - d$ 、 A, B : 結果に影響しない定数。この繰り込み群方程式から、静的繰り込み群と同様の議論により、輸送係数の臨界指数を得ることができる。 $d = 3$ における、relevant な固定点近傍での漸近的振る舞いとして

$$\chi_R \sim \xi^{0.95}, \quad (16)$$

$$\eta_R \sim \xi^{0.053}, \quad (17)$$

$$\zeta_R \sim \xi^{2.8}. \quad (18)$$

を得る。体積粘性率と熱伝導率が強い発散を示し、ずれ粘性率が非常に弱い特異性を持つことがわかる。

4 まとめ

相対論的線形流体方程式に非線形ランジュバン方程式の一般形に基づいて臨界点特有の非線形揺らぎを取り込むことで QCD 臨界点近傍のダイナミクスを記述する非線形ランジュバン方程式を構成した。また、得られたランジュバン方程式に動的くりこみ群を適用することで QCD 臨界点近傍での輸送係数の臨界挙動を解析した。この結果から、通常、重イオン衝突の解析では無視される、体積粘性率と熱伝導率が非常に強い発散を示すことを明らかにした。つまり、QCD 臨界点近傍ではずれ粘性率より体積粘性率および熱伝導率が重要になるであろう。また、重イオン衝突で生成される物質の完全流体としての記述も QCD 臨界点近傍では成り立たないと考えられる。Karsch 等 [1] による結果と比較すると体積粘

性率の発散的な振る舞いは同じだが発散の強さが大きく異なることに注意する。

今後の展望としてはここで得られた輸送係数の臨界発散に基づく実験的に検証可能な QCD 臨界点のシグナルとなる現象の探索が考えられる。

参考文献

- [1] F.Karsch, D.Kharzeev and K.Tuchin, Phys. Lett. B **663**, (2008), 217.
- [2] P. Romatschke and D. T. Son, arXiv:0903.3946 [hep-ph]. G. D. Moore and O. Saremi, JHEP **0809** (2008) 015.
- [3] C. Sasaki and K. Redlich, Nucl. Phys. A **832** (2010), 62.
- [4] 川崎恭治、「非平衡と相転移」、朝倉書店 (2000)
- [5] G.F. Mazenko, *Nonequilibrium Statistical Mechanics*, (WILEY-VCH, 2006).
- [6] A. Onuki, *Phase Transition Dynamics*, (Cambridge University Press, 2007).
- [7] H. Mori and H. Fujisaka, Prog. Theor. Phys. **49**, 764 (1973).
- [8] H. Fujii, Phys. Rev. D **67** (2003), 094018; H. Fujii and M. Ohtani, Phys. Rev. D **70** (2004), 014016; H. Fujii and M. Ohtani, Prog. Theor. Phys. Suppl. **153** (2004), 157; H. Fujii and N. Tanji, J. Phys. G **35** (2008), 104060.
- [9] D.T.Son and M.A.Stephanov, Phys. Rev. D **70** (2004), 056001.
- [10] Y. Minami and T. Kunihiro, Prog. Theor. Phys. **122**, 881 (2010), and references therein.
- [11] A. Onuki, Phys. Rev. E **55**, 403 (1997) and references therein.

Relativistic Dissipative Hydrodynamics with Conserved Currents and Onsager Reciprocal Relations

東京大学大学院 理学系研究科物理学専攻
門内晶彦、平野哲文

1 はじめに

相対論的重イオン衝突型加速器 (RHIC) 実験で生成されるとされるクオークグルーオンプラズマ (QGP) の時空発展の解析においては相対論的完全流体モデルが有効であるが [1]、より第一原理的なパラメータのもとでは粘性補正の評価が必要となる。大型ハドロン衝突型加速器 (LHC) での重イオン衝突実験 [2] においては QCD の漸近的自由性により QGP の強結合性が弱まる可能性があり、粘性流体モデルが重要度を増すと期待される。一方で流体モデルには未だ粒子流が保存する単成分系における流体力学が用いられる。この研究では、実際に必要な複数保存荷電流・多成分系における相対論的散逸流体力学を因果律を破らないように構築する。この中で得られる構成方程式はオンサーガーの相反定理 [3] を満たし、相対論的なソレー効果やデュフォー効果などを表す交差項を含むことを見る。

2 相対論的粘性流体方程式の導出

多成分かつ複数保存流のある系における相対論的散逸流体力学をエネルギー運動量保存則 $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ 、荷電保存則 $\partial_\mu N_J^\mu = 0$ およびエントロピー増大則 $\partial_\mu s^\mu \geq 0$ と状態方程式 $P_0 = P_0(e_0, \{n_{J0}\})$ を用いて定式化する [4]。ここで J はバリオン数やフレーバー等の保存流の種類を表し、 N 種類あるとする。

エネルギー運動量テンソル及び保存流を流速 u^μ とそれに直交する $\Delta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu$ で射影すると

$$T^{\mu\nu} = (e_0 + \delta e) u^\mu u^\nu - (P_0 + \Pi) \Delta^{\mu\nu} + W^\mu u^\nu + W^\nu u^\mu + \pi^{\mu\nu}, \quad N_J^\mu = (n_{J0} + \delta n_J) u^\mu + V_J^\mu, \quad (1)$$

となる。ここで未知数は $2 + N$ 個の平衡量と $10 + 4N$ 個の散逸流に分けることができる。局所静止系においては e_0 はエネルギー密度、 P_0 は静水圧、 n_{J0} は種類 J の荷電密度であり、 Π は体積粘性応力、 δe はエネルギー密度補正、 W^μ はエネルギー散逸流、 $\pi^{\mu\nu}$ はずれ粘性応力テンソル、 δn_J は種類 J の荷電密度補正、 V_J^μ は種類 J の荷電散逸流である。 δe と δn_J は熱力学的安定性から後に 0 となる。

完全流体力学では未知数は平衡量と流速を併せて $5 + N$ 個であるので保存則と状態方程式で系が記述できるが、散逸流体力学では増えた $10 + 4N$ 個の未知数に相当する構成方程式が必要となる。そのためモーメント方程式 $\partial_\alpha I^{\mu\nu\alpha} = Y^{\mu\nu}$ と $\partial_\alpha I_J^{\mu\alpha} = Y_J^\mu$ を導入し、エントロピー増大則からその具体形を決める方法を採用。相対論的運動学の枠組みでは $I^{\mu\nu\alpha}$ と $I_J^{\mu\alpha}$ はエネルギー運動量テンソルと保存流の分布関数 f^i に対する高次のモーメントとして以下のように定義される。

$$I^{\mu\nu\alpha} = \sum_i \int \frac{g_i d^3 p}{(2\pi)^3 E_i} p_i^\mu p_i^\nu p_i^\alpha f^i, \quad I_J^{\mu\alpha} = \sum_i \int \frac{q_i^J g_i d^3 p}{(2\pi)^3 E_i} p_i^\mu p_i^\alpha f^i, \quad (2)$$

ここで g_i と q_i^J はそれぞれ i 番目の粒子種の縮重度と保存量子数である。

モーメント方程式を見積もるため、まず分布関数の局所熱平衡分布からの歪み $\delta f^i = f^i - f_0^i$ を決定する必要がある。ここでグラッドのモーメント法 [5] を複数保存流を含んだ場合に拡張すると

$$\delta f^i = -f_0^i (1 + \epsilon f_0^i) (p_i^\mu \sum_J q_i^J \epsilon_\mu^J + p_i^\mu p_i^\nu \epsilon_{\mu\nu}), \quad (3)$$

となる。 ϵ はフェルミオンに対し+1を、ボゾンに対し-1をとる量子統計の符号で、古典極限は $\epsilon=0$ に相当する。この展開の正当性については、ここから得られる構成方程式がオンサーガーの相反定理を満たしていることを後に見る。ここで導入された歪みテンソル $\varepsilon_{\mu\nu}$ と ε_{μ}^J は $T^{\mu\nu}$ と N_J^{μ} の定義式および式(1)から散逸流の線形結合で表される。導出の詳細については文献[6]を参照。

一方、エントロピー生成は

$$\partial_{\mu} s^{\mu} = -\partial_{\mu} \sum_i \int \frac{g_i d^3 p}{(2\pi)^3 E_i} p_i^{\mu} \left[f^i \ln f^i - \frac{1}{\epsilon} (1 + \epsilon f^i) \ln(1 + \epsilon f^i) \right] = \sum_J \varepsilon_{\nu}^J Y_{\nu}^J + \varepsilon_{\nu\rho} Y^{\nu\rho} \geq 0, \quad (4)$$

と表され、任意の粘性歪みに対して半正定値性を保つには上式が二次形式で書かれる必要がある。これは $Y^{\mu\nu}$ と Y_J^{μ} の独立成分がそれぞれ $\varepsilon_{\mu\nu}$ と ε_{μ}^J の独立成分の線形結合で表されることに相当する。以上のことから結局、モーメント方程式の $Y^{\mu\nu}$ および Y_J^{μ} は散逸流の線形結合で表されることがわかる。一方 $\partial_{\alpha} I^{\mu\nu\alpha}$ と $\partial_{\alpha} I_J^{\mu\alpha}$ に δf^i の具体形を代入し定義に従って計算するとモーメント方程式は

$$\begin{aligned} \Pi &= -\zeta \nabla_{\mu} u^{\mu} - \zeta_{\Pi\delta e} D \frac{1}{T} + \sum_J \zeta_{\Pi\delta n_J} D \frac{\mu_J}{T} - \tau_{\Pi} D \Pi \\ &+ \sum_J \chi_{\Pi\Pi}^{aJ} \Pi D \frac{\mu_J}{T} + \chi_{\Pi\Pi}^b \Pi D \frac{1}{T} + \chi_{\Pi\Pi}^c \Pi \nabla_{\mu} u^{\mu} + \chi_{\Pi\pi} \pi_{\mu\nu} \nabla^{(\mu} u^{\nu)} \\ &+ \sum_J \chi_{\Pi W}^{aJ} W_{\mu} \nabla^{\mu} \frac{\mu_J}{T} + \chi_{\Pi W}^b W_{\mu} \nabla^{\mu} \frac{1}{T} + \chi_{\Pi W}^c W_{\mu} D u^{\mu} + \chi_{\Pi W}^d \nabla^{\mu} W_{\mu} \\ &+ \sum_{J,K} \chi_{\Pi V_J}^{aK} V_{\mu}^J \nabla^{\mu} \frac{\mu_K}{T} + \sum_J \chi_{\Pi V_J}^b V_{\mu}^J \nabla^{\mu} \frac{1}{T} + \sum_J \chi_{\Pi V_J}^c V_{\mu}^J D u^{\mu} + \sum_J \chi_{\Pi V_J}^d \nabla^{\mu} V_{\mu}^J, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} W^{\mu} &= -\kappa_W \left(\frac{1}{T} D u^{\mu} + \nabla^{\mu} \frac{1}{T} \right) + \sum_J \kappa_{WV_J} \nabla^{\mu} \frac{\mu_J}{T} - \tau_W \Delta^{\mu\nu} D W_{\nu} \\ &+ \sum_J \chi_{WW}^{aJ} W^{\mu} D \frac{\mu_J}{T} + \chi_{WW}^b W^{\mu} D \frac{1}{T} + \chi_{WW}^c W^{\mu} \nabla_{\nu} u^{\nu} + \chi_{WW}^d W^{\nu} \nabla_{\nu} u^{\mu} + \chi_{WW}^e W^{\nu} \nabla^{\mu} u_{\nu} \\ &- \sum_J \tau_{WV_J} \Delta^{\mu\nu} D V_{\nu}^J + \sum_{J,K} \chi_{WV_J}^{aK} V_{\nu}^J D \frac{\mu_K}{T} + \sum_J \chi_{WV_J}^b V_{\nu}^J D \frac{1}{T} + \sum_J \chi_{WV_J}^c V_{\nu}^J \nabla^{\nu} u_{\mu} \\ &+ \sum_J \chi_{WV_J}^d V_{\nu}^J \nabla_{\nu} u^{\mu} + \sum_J \chi_{WV_J}^e V_{\nu}^J \nabla^{\mu} u_{\nu} + \sum_J \chi_{W\pi}^{aJ} \pi^{\mu\nu} \nabla_{\nu} \frac{\mu_J}{T} + \chi_{W\pi}^b \pi^{\mu\nu} \nabla_{\nu} \frac{1}{T} \\ &+ \chi_{W\pi}^c \pi^{\mu\nu} D u_{\nu} + \chi_{W\pi}^d \Delta^{\mu\nu} \nabla^{\rho} \pi_{\nu\rho} + \sum_J \chi_{W\Pi}^{aJ} \Pi \nabla^{\mu} \frac{\mu_J}{T} + \chi_{W\Pi}^b \Pi \nabla^{\mu} \frac{1}{T} + \chi_{W\Pi}^c \Pi D u^{\mu} + \chi_{W\Pi}^d \nabla^{\mu} \Pi, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} V_J^{\mu} &= \sum_K \kappa_{V_J V_K} \nabla^{\mu} \frac{\mu_K}{T} - \kappa_{V_J W} \left(\frac{1}{T} D u^{\mu} + \nabla^{\mu} \frac{1}{T} \right) - \sum_K \tau_{V_J V_K} \Delta^{\mu\nu} D V_{\nu}^K \\ &+ \sum_{K,L} \chi_{V_J V_K}^{aL} V_{\nu}^K D \frac{\mu_L}{T} + \sum_K \chi_{V_J V_K}^b V_{\nu}^K D \frac{1}{T} + \sum_K \chi_{V_J V_K}^c V_{\nu}^K \nabla_{\nu} u^{\nu} + \sum_K \chi_{V_J V_K}^d V_{\nu}^K \nabla_{\nu} u^{\mu} + \sum_K \chi_{V_J V_K}^e V_{\nu}^K \nabla^{\mu} u_{\nu} \\ &- \tau_{V_J W} \Delta^{\mu\nu} D W_{\nu} + \sum_K \chi_{V_J W}^{aK} W^{\mu} D \frac{\mu_K}{T} + \chi_{V_J W}^b W^{\mu} D \frac{1}{T} + \chi_{V_J W}^c W^{\mu} \nabla_{\nu} u_{\nu} \\ &+ \chi_{V_J W}^d W^{\nu} \nabla_{\nu} u^{\mu} + \chi_{V_J W}^e W^{\nu} \nabla^{\mu} u_{\nu} + \sum_K \chi_{V_J \pi}^{aK} \pi^{\mu\nu} \nabla_{\nu} \frac{\mu_K}{T} + \chi_{V_J \pi}^b \pi^{\mu\nu} \nabla_{\nu} \frac{1}{T} \\ &+ \chi_{V_J \pi}^c \pi^{\mu\nu} D u_{\nu} + \chi_{V_J \pi}^d \Delta^{\mu\nu} \nabla^{\rho} \pi_{\nu\rho} + \sum_K \chi_{V_J \Pi}^{aK} \Pi \nabla^{\mu} \frac{\mu_K}{T} + \chi_{V_J \Pi}^b \Pi \nabla^{\mu} \frac{1}{T} + \chi_{V_J \Pi}^c \Pi D u^{\mu} + \chi_{V_J \Pi}^d \nabla^{\mu} \Pi, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
\pi^{\mu\nu} &= 2\eta\nabla^{\langle\mu}u^{\nu\rangle} - \tau_\pi D\pi^{\langle\mu\nu\rangle} \\
&+ \sum_J \chi_{\pi\pi}^{aJ} \pi^{\langle\mu\nu\rangle} D \frac{\mu_J}{T} + \chi_{\pi\pi}^b \pi^{\langle\mu\nu\rangle} D \frac{1}{T} + \chi_{\pi\pi}^c \pi^{\langle\mu\nu\rangle} \nabla_\rho u^\rho + \chi_{\pi\pi}^d \pi^{\langle\mu\nu\rangle} \nabla_\rho u^\rho + \chi_{\pi\pi} \Pi \nabla^{\langle\mu}u^{\nu\rangle} \\
&+ \sum_J \chi_{\pi W}^{aJ} W^{\langle\mu\nu\rangle} \frac{\mu_J}{T} + \chi_{\pi W}^b W^{\langle\mu\nu\rangle} \frac{1}{T} + \chi_{\pi W}^c W^{\langle\mu\nu\rangle} Du^\nu + \chi_{\pi W}^d \nabla^{\langle\mu}W^{\nu\rangle} \\
&+ \sum_{J,K} \chi_{\pi V_J}^{aJ} V_J^{\langle\mu\nu\rangle} \frac{\mu_K}{T} + \sum_J \chi_{\pi V_J}^b V_J^{\langle\mu\nu\rangle} \frac{1}{T} + \sum_J \chi_{\pi V_J}^c V_J^{\langle\mu\nu\rangle} Du^\nu + \sum_J \chi_{\pi V_J}^d \nabla^{\langle\mu}V_J^{\nu\rangle}, \quad (8)
\end{aligned}$$

と構成方程式の形になる。ここで時間微分と空間微分を $D = u^\mu \partial_\mu$ 及び $\nabla^\mu = \Delta^{\mu\nu} \partial_\nu$ と定義している。添え字の山括弧はトレースなしの対称化 $A^{\langle\mu\nu\rangle} = [\frac{1}{2}(\Delta^\mu_\alpha \Delta^\nu_\beta + \Delta^\mu_\beta \Delta^\nu_\alpha) - \frac{1}{3} \Delta^{\mu\nu} \Delta_{\alpha\beta}] A^{\alpha\beta}$ を表す。 ζ , κ および η は一次の係数であり、特に ζ を体積粘性係数、 κ_W をエネルギー伝導率、 $\kappa_{V_J V_J}$ を荷電伝導率、 η をずれ粘性係数と呼ぶ。 τ は緩和時間、 χ は二次の輸送係数である。

得られた構成方程式には一次の交差項が存在し、スカラー・ベクトル・テンソルそれぞれについてオンサーガーの相反定理を満たしている。一般的な定式化では交差項は考慮されていない事が多いが、物理的に無視できない重要な項であり、例えば化学勾配に対するエネルギー散逸はデュフォー効果を、熱勾配に対する荷電散逸はソレー効果をそれぞれ表す。また二次の項がない相対論的なナビエ-ストークス方程式は不安定かつ非因果的であることが知られている [7]。ここで τ を含む緩和項は理論が因果律を破らないよう情報の伝搬を制限する。二次の項のテンソル構造は、単成分・単保存流の極限でもイスラエル-スチュワート理論 [5] の枠組みを超えたものを含んでおり、AdS/CFT 対応の方法 [8]、くり込み群の方法 [9] およびグラッドの 14 モーメント法 [10] から導出された式のものの一部の項を除きコンシステントである。比較の詳細は文献 [4] に記載している。

3 まとめと展望

相対論的な散逸流体力学を多成分かつ複数保存流の系において構築し、オンサーガーの相反定理が満たされていることを確認した。現在、高エネルギー重イオン衝突反応で生成される高温物質の解析において、粘性流体方程式を数値的に解くための準備を進めている。

参考文献

- [1] T. Hirano, N. van der Kolk and A. Bilandzic, Lect. Notes Phys. **785** (2010) 139.
- [2] K. Aamodt *et al.* [The ALICE Collaboration], arXiv:1011.3914 [nucl-ex]; K. Aamodt *et al.* [The ALICE Collaboration], arXiv:1011.3916 [nucl-ex].
- [3] L. Onsager, Phys. Rev. **37** (1931) 405; L. Onsager, Phys. Rev. **38** (1931) 2265.
- [4] A. Monnai and T. Hirano, Nucl. Phys. A **847** (2010) 283.
- [5] W. Israel and J. M. Stewart, Annals Phys. **118** (1979) 341.
- [6] A. Monnai and T. Hirano, Phys. Rev. C **80** (2009) 054906.
- [7] W. A. Hiscock and L. Lindblom, Phys. Rev. D **31** (1985) 725.
- [8] R. Baier, P. Romatschke, D. T. Son, A. O. Starinets and M. A. Stephanov, JHEP **0804** (2008) 100.
- [9] T. Tsumura, T. Kunihiro and K. Ohnishi, Phys. Lett. B **646** (2007) 134; T. Tsumura, T. Kunihiro, Phys. Lett. B **690** (2010) 255.
- [10] B. Betz, D. Henkel and D. H. Rischke, J. Phys. G **36** (2009) 064029.

Dyson-Schwinger Approach to Structure of the Thermal Quasi-Particle and Phase Transition

奈良大学教養部

中川 寿夫, 横田 浩, 吉田 光次

熱 QED と QCD について, 特に熱 QCD の温度・密度に依存する相構造と相転移現象の研究は, 現在理論と実験の両面から注目されている。過去において, 主として Lattice Simulation, Dyson-Schwinger (DS) 方程式によるフェルミオンの質量項の分析がなされてきた [1]。我々は, 解析的な分析を可能にして, なおかつ先行する数々の分析結果と比較検討がしやすい, 熱場理論の硬熱ループ (Hard Thermal Loop: HTL) 再加算を考慮した DS 方程式を用いて分析をしてきた [2-4]。本稿では, これらと関係する熱ゲージ場の相転移ならびに熱的準粒子構造について行った分析 (の現時点での) 結果を報告する。

フェルミオンに対する硬熱ループ再加算を考慮した DS 方程式等の詳細は文献 [2,3] にあるので, ここでは必要な以下の式のみ与える。

$$\Sigma_R(P) = (1 - A(P))p_i\gamma^i - B(P)\gamma^0 + C(P) \quad (1)$$

本稿での解析は, ladder 近似, 一部修正した Instantaneous Exchange 近似の下で行った。

初めに, 相構造に関する結果を述べる。Landau ゲージ, Feynman ゲージとゲージパラメータを on-shell で $A(P) \sim 1$ という Ward 恒等式を満足するように求めた Nonlocal ゲージでの結果を図 1 に示す。図 1 左には, $\text{Re}[A]$ の値を与えた (Feynman ゲージでは 1.3 以上のため図の範囲外にある)。 $A \sim 1$ を満たす解が得られていることを示している。図 1 右は, Phase diagram である。参考までに, $T = 0$ の結果も与えた [5]。結合定数は $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ で定義される。

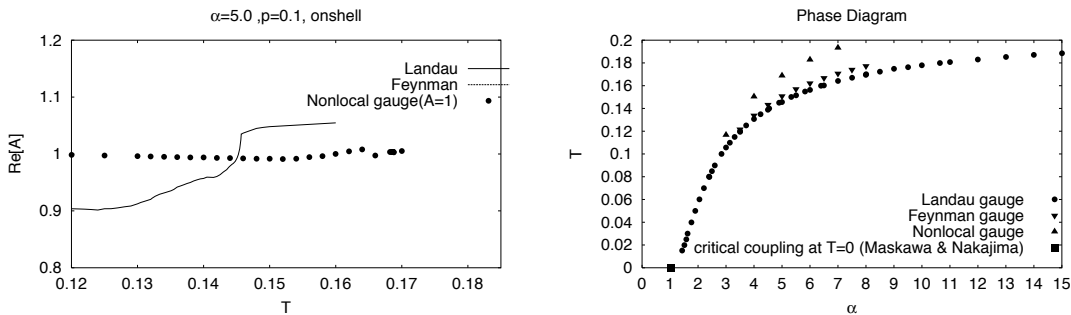


図 1: 左: $\text{Re}[A]$, 右: Phase diagram

次に準粒子構造を調べるために, symmetric phase ($C = 0$) でのスペクトル関数 $\rho_{\pm}(p_0, p)$ [6,7], Dispersion Relation および崩壊定数 $\gamma \sim \text{Im}[B(p_0, p)]$ の振る舞いをそれぞれ図 2~4 に示す。なお, スペクトル関数 ρ_{\pm} は

$$\rho_{\pm}(p_0, p) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{1}{D_{\pm}(p_0, p)} = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{1}{p_0 + B(p_0, p) \mp pA(p_0, p)}$$

$$S_R = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{D_+} \left(\gamma^0 + \frac{p_i \gamma^i}{p} \right) + \frac{1}{D_-} \left(\gamma^0 - \frac{p_i \gamma^i}{p} \right) \right]$$

で与えられる。また、Dispersion Relation は $\text{Re}[D_+(p_0, p)] = 0$ の解の $(p_0 = \omega, p)$ の関係として与えられる。準粒子構造の分析は、Landau ゲージの下で行った。

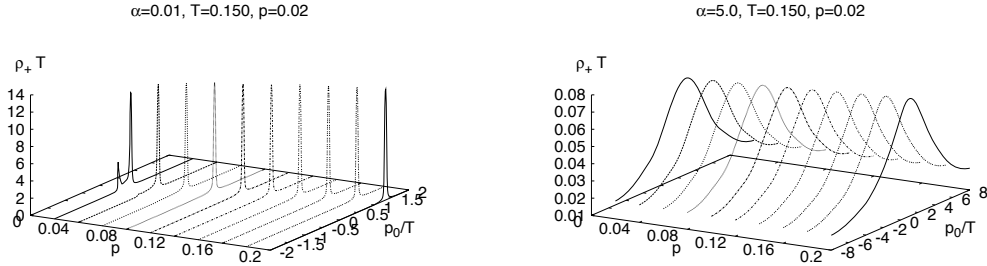


図 2: スペクトル関数

スペクトル関数は、small coupling では 2 ピーク構造で、large coupling では 1 ピーク構造である (図 2)。論文 [7] で指摘されている、3 ピーク構造は现阶段でははっきりしてない。

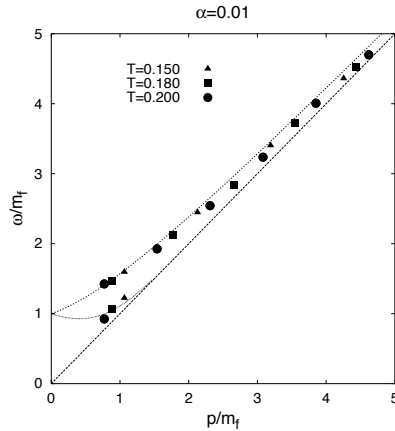


図 3: Dispersion Relation : 実線・点線は HTL, $m_f^2 = \frac{\alpha T^2}{2}$

Dispersion Relation は small coupling では、ほぼ HTL と一致する (図 3)。

崩壊定数は、small coupling では $\gamma \sim \alpha T \log \frac{1}{\alpha T}$, large coupling では $\gamma \sim \alpha T \log \frac{1}{\alpha}$ の振る舞いをする (図 4)。その間の振る舞いは、現在検討中である。

結果は、以下のようにまとめられる。

- a) ゲージパラメータをエネルギー・運動量に依存させることによって “on-shell” 付近で $A \sim 1$ を満足する解が得られた。
- b) 準粒子の振る舞いは、small coupling では HTL 近似をほぼ再現し、large coupling での振る舞いも得られた。ただ、その間の振る舞いの理解には更なる検討が必要である。

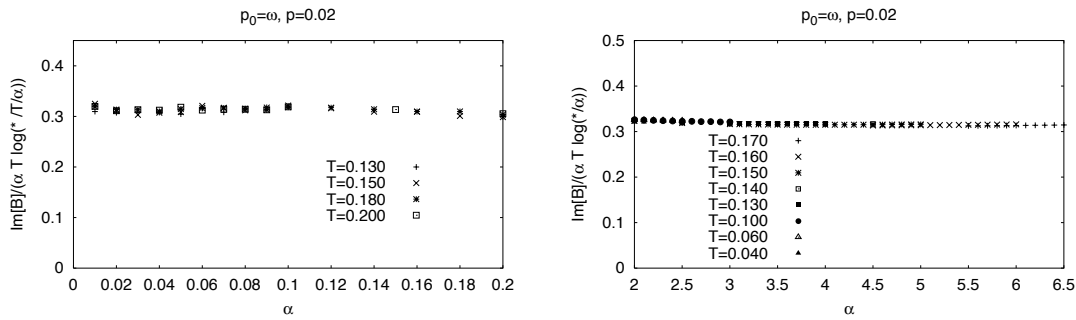


図 4: 崩壊定数の振る舞い

今後の課題として

- $p_0 = 0$ 付近での 3 番目の peak についての分析 (スペクトル関数の $p = 0$ の結果が必要)。
- 詳細な相図の作成および臨界指数などの分析。
- 更には, QCD, すなわち Running coupling での分析および有限密度 ($\mu \neq 0$) の場合の分析。

があげられ, 現在解析中である。

参考文献

- 例えば,
K.-I. Kondo and K. Yoshida, Int. J. Mod. Phys. **A10** (1995) 199;
M. Harada and A. Shibata, Phys. Phys. D **59** (1999) 014010;
K. Fukazawa, T. Inagaki, S. Mukaigawa and T. Muta, Prog. Theor. Phys. **105** (2001) 979.
- Y. Fueki, H. Nakkagawa, H. Yokota and K. Yoshida, Prog. Theor. Phys. **107** (2002) 759.
- Y. Fueki, H. Nakkagawa, H. Yokota and K. Yoshida, Prog. Theor. Phys. **110** (2003) 777.
- H. Nakkagawa, H. Yokota and K. Yoshida, in: Nagoya Mini-workshop on "Strongly Coupled Quark-Gluon Plasma: SPS, RHIC and LHC" (2007), p.173; in: The Origin of Mass and Strong Coupling Gauge Theories (2008), p.220.
- T. Maskawa and H. Nakajima, Prog. Theor. Phys. **54** (1974) 1326.
- H. A. Weldon, Phys. Rev. D **61** (2000) 036003.
- M. Harada, Y. Nemoto and S. Yoshimoto, Prog. Theor. Phys. **119** (2008) 117;
M. Harada and Y. Nemoto, Phys. Rev. D **78** (2008) 014004;
M. Harada and S. Yoshimoto, arXiv:0903.5495.

有限密度 QCD の臨界点近傍の特異性

新潟大学自然科学研究科 江尻信司、 佐賀大学工学系研究科 米山博志¹

1 はじめに

有限温度・有限密度における QCD の相構造を決定することは、重イオン反応実験の進展と相まって重要な課題になっている。特に QCD の臨界点については様々の方法によってその存在が予言されているが、定量的なばらつきが大きく確証の段階に至っていない。それは、格子 QCD シミュレーションにおける、クォーク化学ポテンシャル μ が有限のときの深刻な符号問題のためである。この符号問題を回避するため、通常、テーラー展開法、虚数化学ポテンシャル法などの様々の方法がとられている。これらの方法は複素化学ポテンシャル平面における特異性と密接に関係している。テーラー展開法における収束半径は複素化学ポテンシャル平面における特異点の位置により決まり、後者は分配関数の零点の分布と関係している。本研究では、この特異性に注目し、平均場理論を用いた収束半径の振る舞いについて調べる。

2 分配関数の零点と edge singularity

分配関数の零点と相転移との関係は 1952 年 Lee と Yang によって明らかにされた [1]。Ising 模型を例にとると、外部磁場 h と温度 T の関数としての分配関数は零点を持たないが、 h を複素数に広げることにより零点が生じる。このとき零点は複素 h 平面の虚軸上に分布することが示され (Lee-Yang の定理)、有限体積ではこれらの点は実軸から離れて通常孤立して分布する。体積無限大の極限では、零点は集積することによって一般に曲線を形成し、この曲線の端点が分岐点となり特異点が現れる。相転移がある場合、この端点が実軸上に達し相転移が発現する。この相転移によって生じる自発磁化の大きさは、実軸上での零点の密度によって決まる。また、臨界点近傍では熱力学的諸量がスケーリング則を示すように、零点の分布の仕方にもスケーリング則が成り立つ [2]。

μ がそれほど大きくない領域において理解されている QCD (2 フレーバー) の相構造は次の通りである。カイラル極限では $\mu = 0$ で温度 T_c において O(4) 普遍性をもつ 2 次相転移を示し、この臨界点から $\mu \neq 0$ 方向へ延びる 2 次の臨界線 (A) が 1 次の相転移線 (B) に移行する。この境目が 3 重臨界点 (C) である。クォーク質量 m が入ると、A の臨界線は特異性が発現せずクロスオーバー線に変わり、一方 B の 1 次の相転移線は 1 次に留まる。それらの境の点 C の 3 重臨界点は臨界点に変わる。現実には、この臨界点の存在が重イオン反応によって確認されるかどうかに関心の的の一つになっている。

この臨界点近傍での特異性を調べるために、ここでは QCD の相構造について平均場理論 [3] を用いた分析を行う。この模型の特徴は以下の通りである。カイラルオー

¹ 講演者

ダークパラメーターを σ とするランダウポテンシャルを考える。

$$\Omega = -m\sigma + \frac{a}{2}\sigma^2 + \frac{b}{4}\sigma^4 + \frac{c}{6}\sigma^6$$

$m = 0$ のときの 3 重臨界点 (T_t, μ_t) は上部臨界次元が $d = 3$ であり、有限温度における平均場に基づく記述を正当化する。ポテンシャルの係数を次のように (T_t, μ_t) からの 1 次のずれで表し、

$$a(T, \mu) = C_a(T - T_t) + D_a(\mu - \mu_t), \quad b(T, \mu) = C_b(T - T_t) + D_b(\mu - \mu_t) \quad (1)$$

m に関する摂動で臨界点 $(T_{cep}, \mu_{cep}, \sigma_0)$ を求め、そのまわりの理論を考える (σ_0 は臨界点における σ の値)。その結果得られる $(T_{cep}, \mu_{cep}, \sigma_0)$ のまわりで展開し得られた熱力学的ポテンシャル

$$\Omega(T, \mu, \sigma) = \Omega(T_{CE}, \mu_{CE}, \sigma_0) + A_1\hat{\sigma} + A_2\hat{\sigma}^2 + A_3\hat{\sigma}^3 + A_4\hat{\sigma}^4, \quad \hat{\sigma} \equiv \sigma - \sigma_0$$

を用いて、臨界点近傍での複素 μ 平面上の特異性を調べる。ここで、 A_1, A_2, A_3, A_4 は $T - T_{cep}, \mu - \mu_{cep}$ の線形結合で表されており、(1) 中の係数 $\{C_i\}$ と m によって決まっている。特異点は、 Ω の極値が不安定になり bifurcation が生じる複素パラメータ空間での点として得られる。

3 結果

(1) に現れる係数については、許される条件の中で数値を変化させ特異点の位置を調べた。臨界点近傍では、特異点の実部および虚部の温度依存性は平均場理論の臨界指数によって決まるスケーリング則を満たす結果が得られた。また、それから得られる収束半径は $T > T_{cep}$ で T の増加と伴に一緒に減少し、先行研究であるカイラルランダム行列模型に基づく結果 [4] と定性的に同じ結果が得られた。一方、モンテカルロシミュレーションに基づく計算結果 [5] とは定性的に異なっている。これは、シミュレーションのパラメータがスケーリング領域からはずれていることによるものと推測されるが、更なる詳しい考察によってその理由を明らかにしたい。

References

- [1] C. N. Yang and T.D. Lee, Phys. Rev. **87**, 404 (1952).
T.D. Lee and C. N. Yang, Phys. Rev. **87**, 410 (1952).
- [2] C. Itzykson, R.B. Pearson and J.B. Zuber, Nucl. Phys. **B220**(1983), 415.
- [3] Y.Hatta and T.Ikeda, Phy. Rev. D **67**, 014028(2003).
- [4] M.A. Stephanov, Phy. Rev. D **73**, 094508(2006).
- [5] S. Ejiri and H. Yoneyama, arXiv:0911.2257[hep-lat] (2009).

C and P violations in the PNJL model

H. Kouno¹, Y. Sakai², T. Sasaki², K. Kashiwa² and M. Yahiro²

1) *Department of Physics, Saga University, Saga 840-8502, Japan*

2) *Department of Physics, Kyushu University, Fukuoka 812-8581, Japan*

Using the PNJL model, we investigate C and P violations when $\theta = \pi$ and $\Theta = \mu/(iT) = \pi/3$, where T , θ and μ are the temperature, the parameter of θ -vacuum and the quark number chemical potential, respectively. There is no region of T where both P and C are preserved. It is also shown that the C violation and the P restoration happen almost simultaneously at $\theta = \pi$ and $\Theta = \pi/3$, if the deconfinement and the chiral symmetry restoration happen almost simultaneously at $\theta = \Theta = 0$.

To say exactly, in the realistic QCD, the deconfinement and the chiral restoration transitions have no exact symmetry which characterized these transitions, although the chiral symmetry is a good approximate symmetry. This fact makes it difficult to study these transitions analytically. In particular, the relation between these two transition is not clear. (See Ref. [1] and references therein.)

In pure gauge system, \mathbb{Z}_3 symmetry is the symmetry related to deconfinement transition and Polyakov-loop Φ is the order parameter of the deconfinement transition. In full QCD which includes dynamical quark, the system is not \mathbb{Z}_3 -invariant any more. However, instead of the \mathbb{Z}_3 symmetry, there is the Roberge-Weiss (RW) periodicity [2] with respect to the imaginary chemical potential $\mu = i\Theta T$ where T is the temperature of the system and Θ is a dimensionless real parameter. Roberge and Weiss found that QCD has a periodicity $\Omega_{\text{QCD}}(\Theta) = \Omega_{\text{QCD}}(\Theta + 2\pi k/3)$, where k is an arbitrary integer and Ω_{QCD} is the thermodynamic potential in QCD.

Roberge and Weiss also found that there is a phase transition from one \mathbb{Z}_3 -pseudo-degenerate vacuum to another at $\Theta = (2k + 1)\pi/3$, if T is larger than some critical temperature T_{RW} [2]. The results of Roberge and Weiss are based on the perturbative QCD (pQCD) and the strong coupling QCD. Afterward, the RW periodicity and the RW transition have been confirmed by the lattice QCD (LQCD) simulation. (See the references in [1].) Recently, in Ref. [3], it was pointed out that the deconfinement transition at zero chemical potential could be regarded as a remnant of the RW transition at $\Theta = \pi/3$, in which spontaneous breaking of the Charge conjugation (C) symmetry takes place. A Θ -odd quantity such as a phase ψ of modified Polyakov loop Ψ which defined by $\Psi \equiv \Phi e^{i\Theta}$ is an order parameter of this phase transition.

On the other hand, Dashen pointed out [4] that spontaneous parity (P) violation could arise at $\theta = \pi$, where θ is the parameter of θ -vacuum. Using the NJL model, Boer and Boomsma analyzed the Dashen's phenomenon [5]. A parity odd quantity such as η condensate is an order parameter of this phase transition. At low temperature, η is nonzero and the P symmetry is broken. At high temperature, the η condensate vanishes and the P symmetry is restored. This behavior of η resembles the behavior of the chiral condensate σ at $\theta = 0$ which is large at low temperature and (almost) vanishes at low temperature. It seems that the chiral symmetry breaking $\theta = 0$ is related to the P breaking at $\theta = \pi$. Therefore, studies on the relation between the C and P violations may give us an insight on the relation between the deconfinement and the chiral restoration at $\theta = \Theta = 0$ and vice versa.

In this study, using the PNJL model [6] and the EPNJL model [1], we investigate spontaneous C and P violations at $\Theta = \pi/3$ and $\theta = \pi$. We compare the result with the deconfinement and the chiral symmetry breaking at $\theta = \Theta = 0$. Detail descriptions of the analyses will appear in the forthcoming paper [7]. The definitions of the parameters of the PNJL(EPNJL) model are the same as those in Ref. [1] and the values for the parameters are also the same as those in Ref. [1] if it is not mentioned explicitly. We put $c = 0.2$ where the definition of the parameter c is the same as that in ref. [5].

Figure 1(a) shows the T -dependence of chiral condensate σ and Polyakov loop Φ at $\theta = \Theta = 0$ calculated by using the original PNJL model. Since both of the deconfinement and the chiral restoration transitions are crossover, the transition temperatures are defined by the positions of the peaks of the susceptibilities of Φ and σ [1]. The transition temperature T_χ of the chiral restoration is larger than the transition temperature T_d of the deconfinement. In this case, $\Delta T_{\chi d} \equiv T_\chi - T_d \sim 40\text{MeV}$.

Figure 2(a) shows the T -dependence of η condensate and a phase ψ of modified Polyakov loop Ψ at $\theta = \pi$ and $\Theta = \pi/3$ calculated by using the original PNJL model. At low temperature ($T < T_P$), η is finite and P symmetry is spontaneously broken, while, at high temperature ($T > T_C$), ψ is finite and C symmetry is spontaneously broken. There is no region of T where both P and C are preserved. The transition temperature T_P of the P restoration is larger than the transition temperature T_C of the C violation. In this case, $\Delta T_{PC} \equiv T_P - T_C \sim 80\text{MeV}$.

Very recently, it is pointed out that $\Delta T_{\chi d}$ becomes smaller if the coupling constant G_s of the four quark interaction in the PNJL model replaced by [1]

$$G_s(\Phi) = G_s[1 - \alpha_1 \Phi \Phi^* - \alpha_2 (\Phi^3 + \Phi^{*3})],$$

where G_s , α_1 and α_2 are constant parameters. Here, the new model is called entanglement PNJL (EPNJL) model. Figure 1(b) shows the T -dependence of chiral condensate σ and Polyakov loop Φ at $\theta = \Theta = 0$ calculated by using the EPNJL model. In this case, $\Delta T_{\chi d} \equiv T_\chi - T_d \sim 0\text{MeV}$.

Figure 2(b) shows the T -dependence of η condensate and a phase ψ of modified Polyakov loop Ψ at $\theta = \pi$ and $\Theta = \pi/3$ calculated by using the EPNJL model. In this case, $\Delta T_{PC} \equiv T_P - T_C \sim 8\text{MeV}$. Comparing figures 1(b) and 2(b), we see that the C violation and the P restoration happen almost simultaneously at $\theta = \pi$ and $\Theta = \pi/3$, if the deconfinement and the chiral symmetry restoration happen almost simultaneously at $\theta = \Theta = 0$. This result suggests that there may be a strong correlation between the C violation and the P restoration at $\theta = \pi$ and $\Theta = \pi/3$ if the deconfinement and the chiral restoration are strongly correlated at $\theta = \Theta = 0$.

References

- [1] Y. Sakai, T. Sasaki, H. Kouno and M. Yahiro, arXiv:1006.3648 [hep-ph] (2010).
- [2] A. Roberge and N. Weiss, Nucl. Phys. B **275**, 734 (1986).
- [3] H. Kouno, Y. Sakai, K. Kashiwa and M. Yahiro, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **36**, 115010(2009).
- [4] R. Dashen, Phys. Rev. D **3**, 1879 (1971).
- [5] D. Boer and K. Boomsma, Phys. Rev. D **78**, 054027(2008).
- [6] K. Fukushima, Phys. Lett. B **591**, 277 (2004).
- [7] H. Kouno, Y. Sakai, T. Sasaki, K. Kashiwa and M. Yahiro, in preparation.

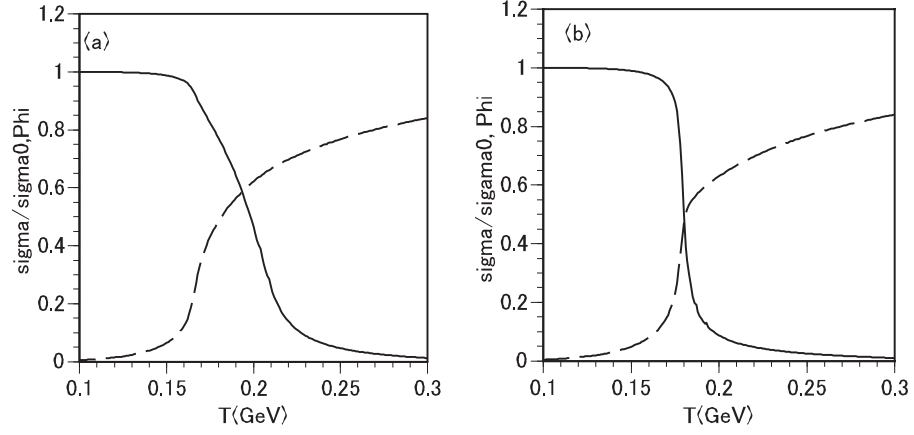


Figure 1: T -dependence of the chiral condensate σ (solid curve) and the Polyakov loop Φ (dashed curve) at $\theta = \Theta = 0$. σ is normalized by $\sigma_0 \equiv \sigma(T = 0)$. (a) Original PNJL model with $T_0 = 200\text{MeV}$. (b) EPNJL model with $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.2$ and $T_0 = 200\text{MeV}$.

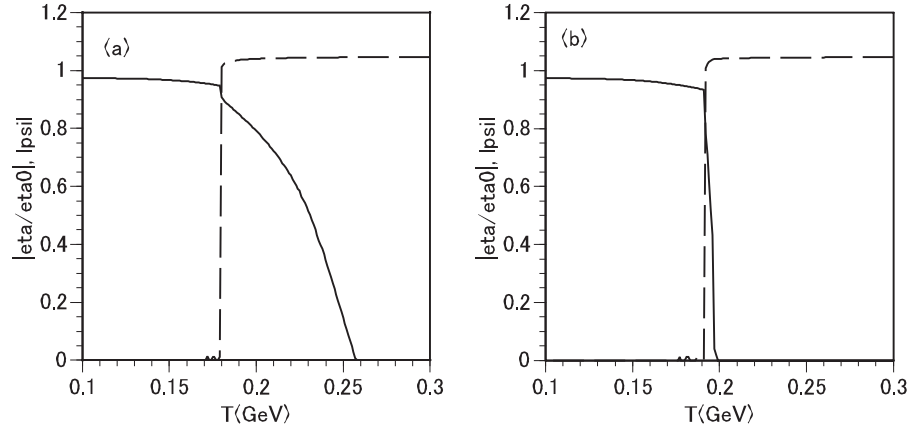


Figure 2: T -dependence of the absolute values of the η condensate (solid curve) and the phase ψ (dashed curve) of modified Polyakov loop Ψ at $\theta = \pi$ and $\Theta = \pi/3$. η is normalized by $\eta_0 \equiv \eta(T = 0)$. (a) Original PNJL model with $T_0 = 200\text{MeV}$. (b) EPNJL model with $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.2$ and $T_0 = 200\text{MeV}$.

Quarkyonic Chiral Spirals

日高 義将 (京大理)

導入

高温、高密度等の極限状態での強い相互作用をするハドロンの性質を明らかにする事はハロン物理のひとつの大きな課題である。特に強い相互作用を記述する基礎理論である量子色力学 (QCD) の持つ2つの重要な性質であるクォーク、グルーオンの閉じ込め及びカイラル対称性の自発的破れが、高温高密度の極限状態でどのようになるか明らかにする事は理論的に面白いだけでなく、宇宙初期や中性子星の内部の状態を明らかにする上で必要不可欠である。本稿では、低温高密度領域に注目し、近年新しく提唱された Quarkyonic 相と呼ばれる相について議論する。特に Quarkyonic 相でどのようなカイラル対称性が実現するかを考察する。

Quarkyonic 相

Quarkyonic 相は L. McLerran と R. Pisarski によって 2007 年に提案された高密度閉じ込め相である [1]。この相はカラーの数が無限大の極限 (Large- N_c) において提唱された。ここでは Large- N_c での議論を離れ、有限密度ハロン物質に現れる典型的なスケールを用いて Quarkyonic 相がどのような条件で存在するか議論し、実際 Large- N_c でこの条件を満たす領域が存在する事を見る。

まず、QCD の持つ固有な典型的なスケールとして陽子や中性子の大きさ $R = 1/\Lambda_{\text{QCD}}$ を考えよう。 Λ_{QCD} はクォークの質量を無視した場合の QCD の唯一の固有なスケールとみなすことができる。次に、有限密度を考えるためにクォークの化学ポテンシャル μ を導入し、さらに、有限密度によるクォーク間の相互作用の遮蔽の効果を表す典型的なスケール m_D を考える。摂動論が使えるような超高密度領域においては、 m_D は Debye 遮蔽質量に対応する。 m_D は独立なパラメータではなく一般に $\mu, \Lambda_{\text{QCD}}$ に依存するが、ここでは独立とみなして議論する。

これら3つの典型的なスケール $\Lambda_{\text{QCD}}, \mu, m_D$ の大小関係を用いて質的に異なる相を定性的に分類しよう。摂動論で議論されるような超高密度非閉じ込め相は、QCD の典型的スケールである Λ_{QCD} が無視できる極限 $\Lambda_{\text{QCD}} \ll \mu$ かつ $m_D \gg \Lambda_{\text{QCD}}$ に対応し、また、通常の原子核物質は、密度がそれほど高くない閉じ込め相である $\mu \sim \Lambda_{\text{QCD}}$ かつ $m_D \ll \Lambda_{\text{QCD}}$ に対応する。新しく提唱された Quarkyonic 相はこれらと異なる条件

$$m_D \ll \Lambda_{\text{QCD}} \ll \mu \quad (1)$$

によって定義される。 $m_D \ll \Lambda_{\text{QCD}}$ は、グルーオンが作るポテンシャルは変更をほとんど受けずに閉じ込めポテンシャルを作り、グルーオン自身も閉じ込められたままである事を意味し、 $\Lambda_{\text{QCD}} \ll \mu$ は高密度であることを意味する。従って Quarkyonic 相はこの意味で高密度閉じ込め相である。

Quarkyonic 相の物理的描像を考えよう。高密度であるためにバリオンは境界を失い、もはやクォークはどのバリオンに属しているかわからず(この意味でクォークは非閉じ込め相である)大きく縮退しフェルミ海を形成する。しかし、励起モードは、強い閉じ込めポテンシャルのためにバリオンやメソンの励起(閉じ込め相)になると考えられる。このクォーク (quark) とバリオン (baryon) の両方の性質を持つことからこの相は Quarkyonic と名付けられた。

問題は、式1を満たす領域が実際に存在するかであるが、少なくとも Large- N_c ではそれが存在する。 Large- N_c の解析において、内線にあるクォークのループ寄与はグルーオンの内線のループの寄与に比べて $1/N_c$ の寄与になる事が知られている。従ってクォークループの寄与は $m_D^2 \sim \mu^2/N_c$ と見積もることが出来る。またグルーオンのループの寄与を Λ_{QCD}^2 とすると、 $\Lambda_{\text{QCD}} \gg \mu/\sqrt{N_c} \sim m_D$ である限りクォークの寄与を無視できることがわかる。従って、 Large- N_c 極限では、 Eq. (1) の条件を満たす領域が確かに存在する事がわかる。

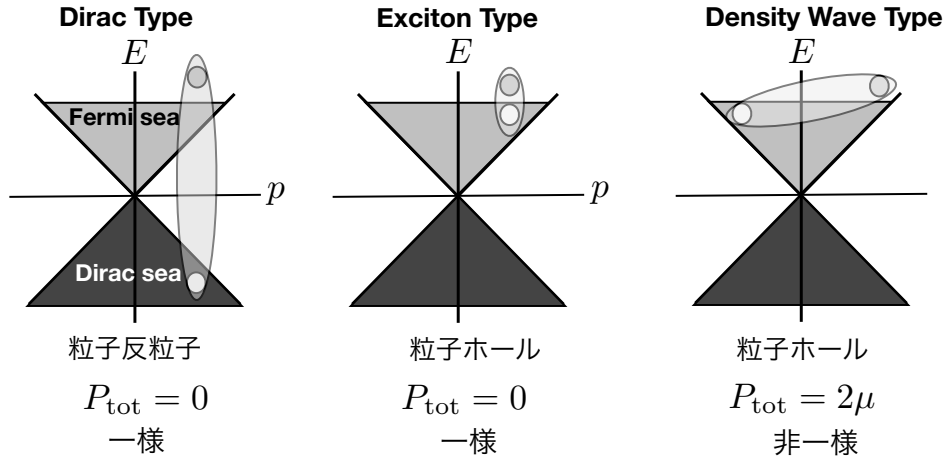


図 1: カイラル凝縮のパターン

Quarkyonic Chiral Spirals

ここまでの議論では、QCD の閉じ込めの性質に注目し Quarkyonic 相を議論した。この節では、もうひとつの QCD の重要な性質であるカイラル対称性の自発的破れが、Quarkyonic 相ではどのようなようになるか議論する。カイラル対称性の自発的破れを考えるために、以下の秩序変数を考える:

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0. \quad (2)$$

物理的には、式 (2) は、真空中においては粒子反粒子対凝縮に対応し、有限密度中では、粒子反粒子対凝縮に加えて、粒子ホール対凝縮に対応する。これらの可能な凝縮パターンを図 1 に示す。まず、図 1 左に対応した真空と同様なクォーク反クォーク対の凝縮 (Dirac 型) を考えよう。この対の重心運動量はゼロであり空間的に一様な凝縮を与える。しかし、このような凝縮は、高密度では反粒子をフェルミ面の上まで励起するに 2μ 程度のエネルギーが必要であり、エネルギー的有利になるとは考えにくい。実際にいくつかの模型を用いた解析では、Dirac 型の凝縮は起きていない [2]。従って、以下では、Dirac 型の凝縮は考えず粒子ホール対凝縮の可能性について考える。

粒子ホール対の凝縮もさらに 2 種類の可能性が考えられる。これらは粒子ホールの重心運動量がゼロとなって対を組むエキシトン型の凝縮 (図 1 中) と、粒子とホールが同じ程度の運動量を持ち、重心運動量が 2μ 程度の対が凝縮する密度波型 (図 1 右) である。密度波型の凝縮は、カイラル対称性だけでなく並進対称性や回転対称性も自発的に破る。これらの粒子ホール対の凝縮はフェルミ面近傍からの寄与が主要になると考えられるので、フェルミ面付近の運動量に注目して有効理論を構築すれば良い。ここでは、簡単のために z 軸方向のフェルミ面に注目して解析し、他の方向での凝縮は考えない。 z 軸に平行なフェルミ面付近の運動量は、典型的に $p_z \sim \mu \gg \Lambda_{\text{QCD}}$ を持つ。一方、垂直方向の運動量は典型的に $p_{\perp} \sim \Lambda_{\text{QCD}} \ll \mu$ であると考えられる。このため z 方向のフェルミ面近傍では、その垂直方向の自由度は無視でき z 方向の自由度を持つ 1+1 次元系の問題に帰着する。一方グルーオンは真空と同じ性質のままに閉じこめられており、またグルーオンが作るクォーク間のポテンシャルは、線形ポテンシャルになっていると考えられる。このようなグルーオンを QCD から直接解析的に計算することは困難であるので、これらの性質を反映する模型を採用する [3]。さらにグルーオンの z 軸に垂直方向の運動量を積分することによって、最終的に Quarkyonic 相でのカイラル対称性の問題は、1+1 次元の有限密度 QCD のカイラル対称性の問

題に帰着する事ができる。そこでの有効ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}(\mu) = \bar{\Phi}(\gamma_{2d}^\mu(i\partial_\mu + g_{2d}A_\mu) + \gamma_{2d}^0\mu)\Phi - \frac{1}{2}\text{tr}G_{\mu\nu}^2 \quad (3)$$

と書くことができる。ここで Φ は 1+1 次元でのクォーク場, A_μ はゲージ場, g_{2d} は結合定数, $G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig_{2d}[A_\mu, A_\nu]$ である。 γ_{2d}^μ は 2 次元のガンマ行列で, 元の 3+1 次元のガンマ行列と必ずしも直接対応しないことに注意する。例えば, 1+1 次元での γ_{2d}^5 は 3+1 次元での $\gamma^0\gamma^3$ に対応する [3].

1+1 次元 QCD の特殊性によって化学ポテンシャルは, カイラル変換によってラグランジアンから消去することが可能である:

$$\Phi' = e^{-i\mu z\gamma_{2d}^5}\Phi. \quad (4)$$

この変換によって $\mathcal{L}_{\text{eff}}(\mu) \rightarrow \mathcal{L}_{\text{eff}}(0)$ へ変換しゼロ密度の理論に帰着する。この変換でゼロ密度と有限密度が一見等価に見えるが, 密度依存性はアノマリーを通じて現れる。しかしアノマリーによって現れる項は相構造の解析には寄与しないのでここでは無視することにする。また, ラグランジアンからは密度依存性が消えたが, カイラル凝縮等のカイラル対称性を破る局所演算子は, (4) 式の変換に対して不変ではなく, $\bar{\Phi}\Phi = \cos 2\mu z\bar{\Phi}'\Phi' + \sin 2\mu z\bar{\Phi}'i\gamma_{2d}^5\Phi'$ のように変換する。

ゼロ密度では一様なカイラル対称性が破れ $\langle\bar{\Phi}'\Phi'\rangle \neq 0$ となるであろう。よって変換前のカイラル凝縮は非一様になる。3+1 次元との対応関係 [3] を用いて最終的にカイラル凝縮は,

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle = \langle\bar{\Phi}\Phi\rangle = \langle\bar{\Phi}'\Phi'\rangle \cos 2\mu z, \quad \langle\bar{\psi}\gamma^0\gamma^3\psi\rangle = \langle\bar{\Phi}'i\gamma_{2d}^5\Phi'\rangle = \langle\bar{\Phi}'\Phi'\rangle \sin 2\mu z, \quad (5)$$

となる。従って Quarkyonic 相では, $(\bar{\psi}\psi, \bar{\psi}\gamma_0\gamma_3\psi)$ のペアが螺旋状に凝縮する非一様相 (Quarkyonic chiral spiral) が実現する。

まとめと展望

本稿では低温, 高密度領域で新しく相提唱されている Quarkyonic 相とそのカイラル対称性の自発的破れについて議論した。我々の解析では Quarkyonic 相では, カイラル対称性が非一様に破れる事がわかった。この凝縮は空間的に平均を取るとゼロになりこの意味では, 大域的にカイラル対称性は回復している。本稿では螺旋状の凝縮が 1 方向のみに起こる場合を考えたが, 一般に運動量空間で複数の方向に螺旋状の凝縮が起きる可能性も考えられている [4]。また, カラー超電導相は Large- N_c の議論では, ダイクォーク凝縮はカイラル凝縮に比べて $1/N_c$ の因子で小さくなるため無視できるので考慮しなかったが現実の QCD を考える上では重要になるかもしれない。今回はゼロ温度に限って議論したが有限温度での励起を考えるのも興味深い。これは Quarkyonic 相が中性子性の内部で実現した場合, 中性子星中での輸送現象や冷却現象を考える上で重要になるであろう。

参考文献

- [1] L. McLerran and R. D. Pisarski, Nucl. Phys. A 796, 83 (2007). Y. Hidaka, L. D. McLerran and R. D. Pisarski, Nucl. Phys. A 808, 117 (2008).
- [2] L. Y. Glozman and R. F. Wagenbrunn, Phys. Rev. D **69**, 016002 (2004); L. McLerran, K. Redlich and C. Sasaki, Nucl. Phys. A **824**, 86 (2009).
- [3] T. Kojo, Y. Hidaka, L. McLerran and R. D. Pisarski, Nucl. Phys. A **843**, 37 (2010).
- [4] T. Kojo, R. D. Pisarski and A. M. Tsvelik, Phys. Rev. D **82**, 074015 (2010).

Wilson 繰り込み群におけるカイラルアノマリーについて

五十嵐尤二, 伊藤克美 (新潟大教育)

園田英徳 (神戸大理)

佐藤雅尚 (新潟大自然)

1 はじめに

クォークの閉じ込めやカイラル対称性の力学的破れといった QCD の強結合領域での現象に代表されるように, 場の理論には非摂動論的效果が本質的であるような現象が多く存在する. Wilson 繰り込み群 (Wilson RG) 法は, そのような効果を評価するためのひとつの有力な視点を与える. Wilson RG ではパラメータとして運動量の (IR) cutoff scale Λ を導入し, それより高い運動量モードに関する相互作用を “integrate out” することによって低運動量モードの有効理論を定義する. パラメータ Λ を下げることによって有効作用には徐々に量子効果が繰り込まれてゆき, これが摂動論では扱えなかった寄与を取り込むことを可能にする.

しかし一方で運動量 cutoff の導入はゲージ対称性などの対称性を壊してしまう. ゲージ対称性は場の全ての運動量モードに同時に関与するものだからである. (正則化法と対称性の競合という問題は, 格子正則化など他の正則化においても同様に見られる). そこで Wilson RG において如何に対称性 (特にゲージ対称性) を実現するかという問題が様々に調べられてきたが, その中で “有効対称性” の考え方が発展してきた. これは有効理論を定義すると同時に, 対称性の定義もパラメータ Λ に依存して変形させてゆくというものである. ここではこの有効対称性を導入し, またこれをカイラルアノマリーの計算に (限定的だが) 適用した例を紹介する. (Wilson 繰り込み群における対称性についての全般的なレビューとしては [1] をご参照ください)

2 Wilson 有効作用と composite operator

上記の IR cutoff Λ を実装するため, (また UV scale Λ_0 での紫外正則化を導入するため), ここでは Polchinski [2] による smooth cutoff を用いる. まず一般的な汎関数積分を

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \phi \cdot K_0^{-1} D \cdot \phi + S_I[\phi] + K_0 J \cdot \phi \right\} \quad (1)$$

と書く. ここで $\phi = \{\phi^A\}$ はすべての場をまとめて表していて, また “ \cdot ” は運動量変数を含む添字の contraction の略記である: $\phi \cdot K_0^{-1} D \cdot \phi \equiv \int_p \phi^A(-p) (K_0^{-1} D)_{AB}(p) \phi^B(p)$ など. また $K_0(p)$ は UV scale Λ_0 での smooth cutoff function

$$K_0(p) \sim \begin{cases} 1 & (p^2 < \Lambda_0^2) \\ 0 & (p^2 > \Lambda_0^2) \end{cases} \quad (2)$$

であり, これの逆を inverse propagator $D_{AB}(p)$ に乗ずることで高運動量モードの propagate を抑制している. これが smooth cutoff である.

一方, (1) は直接

$$Z[J] = N_J \int \mathcal{D}\Phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \Phi \cdot K^{-1} D \cdot \Phi + S_{I,\Lambda}[\Phi] + K^{-1} J \cdot \Phi \right\}, \quad (3)$$

$$\text{where } \exp S_{I,\Lambda}[\Phi] \equiv \int \mathcal{D}\chi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \chi \cdot (K_0 - K)^{-1} D \cdot \chi + S_I[\Phi + \chi] \right\}, \quad (4)$$

$$\ln N_J \equiv -\frac{(-)^{\epsilon_A}}{2} J \cdot K_0^{-1} K^{-1} (K_0 - K) D^{-1} \cdot J \quad (5)$$

と変形可能である. ここで $K(p)$ は IR scale Λ での cutoff function であり, (3) の積分は低運動量領域での有効理論を定義している. またその相互作用部分 $S_{I,\Lambda}[\Phi]$ の定義 (4) は (運動項に挿入された $(K_0 - K)^{-1}$ に注意すると) UV モードに関する汎関数積分であり, まさに前述の意味の有効作用を表している (“Wilson 有効作用” とよばれる).

Wilson 有効作用の定義と同様の考え方で, 任意の operator $X[\phi]$ の “IR 版” $X_\Lambda[\Phi]$ が定義され, これを Composite operator とよぶ:

$$\begin{aligned} X_\Lambda[\Phi] \exp S_{I,\Lambda}[\Phi] \\ \equiv \int \mathcal{D}\chi X[\Phi + \chi] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \chi \cdot (K_0 - K)^{-1} D \cdot \chi + S_I[\Phi + \chi] \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

3 Ward-Takahashi operator と有効対称性

“UV 理論” (1) において (Grassmann odd な) 変数変換 $\delta\phi$ を行うと

$$\int \mathcal{D}\phi \left[K_0 J \cdot \delta\phi + \delta S[\phi] + \frac{\partial^r}{\partial \phi^A} \delta\phi^A \right] e^{S[\phi] + K_0 J \cdot \phi} \quad (= 0). \quad (7)$$

ここで $S[\phi] \equiv -\frac{1}{2} \phi \cdot K_0^{-1} D \cdot \phi + S_I[\phi]$ で, $[\dots]$ 内の第 3 項は変換の Jacobian である. ($= 0$ は任意の変数変換に対して積分は不変であることによる). このとき

$$\Sigma[\phi] \equiv \delta S[\phi] + \frac{\partial^r}{\partial \phi^A} \delta\phi^A \quad (8)$$

は Ward-Takahashi (WT) operator と呼ばれ, “WT identity” $\Sigma[\phi] = 0$ が量子論的な対称性を表す.

“IR 理論” (3) に対する “有効対称性” は, WT operator $\Sigma[\phi]$ の IR 版 (Composite operator) $\Sigma_\Lambda[\Phi]$ を用いて議論される. 特に composite operator に対する Exact Renormalization Group Equation (Exact RGE) は線形であることから, $\Sigma[\phi] = 0$ は $\Sigma_\Lambda[\Phi] = 0$ を導き, IR 理論に変形された対称性が存在することを表す.

4 Ward-Takahashi operator とカイラルアノマリー

一方, アノマリーは WT identity の破れ $\Sigma_\Lambda[\Phi] \neq 0$ として現れる. ここではユークリッド 4 次元時空上のカイラルゲージ理論のカイラルアノマリーを例に, WT operator がアノマリーを含むことを確認した. (Wilson RG の枠組みでアノマリーを扱った論文としては [3–5] がある. ここでの計算は [1, §9] に従った)

カイラルゲージ理論の古典作用

$$S[\phi] = \bar{\psi} \cdot i \gamma_\mu (\partial_\mu + A_\mu P_+) \cdot \psi, \quad (9)$$

$$\text{where } A_\mu = A_\mu^a T^a \in su(N), \quad P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5) \quad (10)$$

は, 以下の古典 BRST 変換で不変である:

$$\delta\psi = CP_+\psi, \quad \delta\bar{\psi} = \bar{\psi}P_-C, \quad \delta A_\mu = \partial_\mu C + [A_\mu, C] \quad (11)$$

(ここで $C = C^a T^a \in su(N)$ は ghost 場).

一方この対称性は量子論的には破れていて, それは IR WT operator, 特にその fermion 測度の Jacobian 部分

$$\Sigma_\Lambda[\Phi] \ni \frac{\partial^r}{\partial\Psi} \cdot K[\delta\Psi]_\Lambda - \frac{\partial^l}{\partial\bar{\Psi}} \cdot K[\delta\bar{\Psi}]_\Lambda \quad (12)$$

に反映される. ここで $[\delta\Psi]_\Lambda, [\delta\bar{\Psi}]_\Lambda$ は上記の古典 BRST 変換に対応する composite operator であり, その定義には Wilson 有効作用 $S_{I,\Lambda}[\Phi]$ が含まれる. これを計算するため, ここでは $\Lambda_0 \rightarrow \infty$ の極限の存在を仮定し, UV 汎関数積分 (4), (6) の摂動展開を用いて (12) (の anomalous part) の 1-loop での評価をした. さらにその $\Lambda \rightarrow \infty$ での値を見ることで, 摂動論でよく知られた 1-loop カイラルアノマリーの表式が含まれること

$$\Sigma_{\Lambda \rightarrow \infty}[\Phi] \ni \frac{1}{24\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_x \text{tr} \left[C \partial_\mu \left(A_\nu \partial_\rho A_\sigma + \frac{1}{2} A_\nu A_\rho A_\sigma \right) \right]$$

を確認した.

参考文献

- [1] Y. Igarashi, K. Itoh and H. Sonoda, Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 181 (2010), 1.
- [2] J. Polchinski, Nucl. Phys. B **231** (1984), 269.
- [3] M. Bonini, M. D’Attanasio, and G. Marchesini, Phys. Lett. B **329** (1994), 249.
- [4] M. Bonini and F. Vian, Nucl. Phys. B **511** (1998), 479.
- [5] M. Pernici, M. Raciti, and F. Riva, Nucl. Phys. B **520** (1998), 469.

非摂動くりこみ群による $SU(N)$ ゲージ理論におけるカイラル凝縮の解析

青木健一, 宮下和洋^{a1}, 佐藤大輔^b
 金沢大・数物, 愛知淑徳大・人間情報^a, 金沢大・自然^b

本研究ではフレーバー数 N_f , カラー数 N_c をもつ一般的なゲージ理論におけるカイラル対称性を考慮した4フェルミ相互作用のくりこみ群に, ゲージ結合定数については2ループ摂動くりこみ群を採用し, 赤外固定点が現れるフレーバー数の領域において, カイラル対称性の自発的破れの有無を調べ, フレーバー数依存性と臨界のフレーバー数 N_{fc} を調べた. カイラル対称性の自発的破れは赤外領域でのゲージ相互作用の強さに大きく依存するものと考えられる. $SU(N_c)$ ゲージ理論はその結合定数のベータ関数より $N_f < 11N_c/2$ で漸近自由性をもつ理論である. しかし2ループまで考慮するとフレーバー数 $N_f < 11N_c/2$ の範囲で赤外に固定点が現れる. 赤外固定点は, フレーバー数が漸近自由性を保つ範囲で大きい場合でも小さくなるため, ゲージ結合定数の大きさに依存するカイラル対称性の破れが起きない理論が存在するという議論がある. われわれはこの問題について非摂動くりこみ群の方法による評価を試みた.

カイラル対称性の自発的破れの秩序変数として, フェルミオンの有効質量とカイラル凝縮がある. 非摂動くりこみ群におけるカイラル対称性の秩序変数の評価は補助場を導入する方法 [1] があるが, ここでは有効質量のくりこみをおこなうことにより評価した [2]. 非摂動くりこみ群では, くりこみ変換をしても対称性を破る相互作用は生成されない, そこでくりこみの紫外カットオフにおいて外場の作用をする質量項を導入し, 十分赤外までくりこみを実行した後, ベア質量0極限を求める. 次で定義される Wilsonian effective action についての非摂動くりこみ群を解析に用いた.

$$S_{\text{eff}}[\bar{\psi}, \psi, A; \Lambda] = \int d^4x \left\{ \bar{\psi}(\not{\partial} - g_s A)\psi + \frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\mu)^2 + V_{\text{eff}}(\bar{\psi}, \psi; \Lambda) - m(m_0; \Lambda)\bar{\psi}\psi \right\} \quad (1)$$

$V_{\text{eff}}(\bar{\psi}, \psi; \Lambda)$ は, $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times SU(N_c) \times U(1)$ 対称性をもち, かつゲージ相互作用により生成される4体フェルミ相互作用であり, これは以下のものに限られる.

$$V_{\text{eff}}(\bar{\psi}, \psi; \Lambda) = \frac{1}{N_c N_f} \left\{ G_1(\Lambda) ((\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi)^2) + G_2(\Lambda) ((\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi)^2) \right. \\ \left. + G_{c1}(\Lambda) ((\bar{\psi}\gamma_\mu T^a\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5 T^a\psi)^2) + G_{c2}(\Lambda) ((\bar{\psi}\gamma_\mu T^a\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5 T^a\psi)^2) \right\} \quad (2)$$

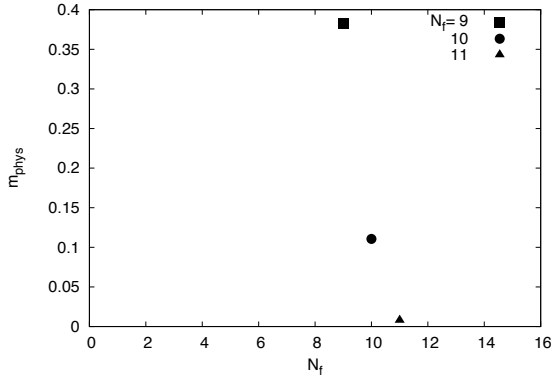
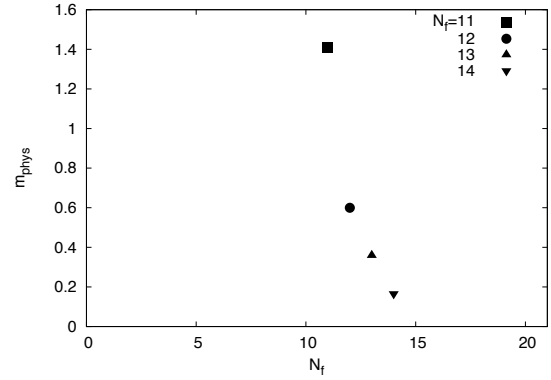
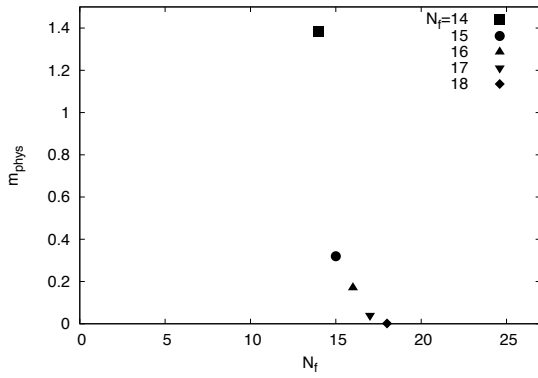
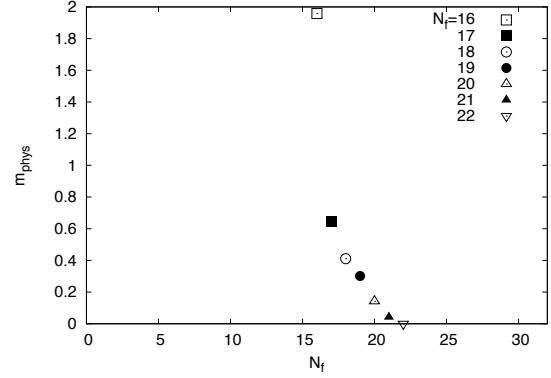
ここで T^a は $SU(N_c)$ の生成子である. 有効質量のくりこみ群方程式は

$$\frac{dm}{dt} = m + \frac{2m}{1+m^2} \frac{1}{N_c N_f} (g_1 + C_2(N_c)g_{c1}) + \frac{3m}{2\pi(1+m^2)} C_2(N_c)\alpha_s \quad (3)$$

ここで $t = \log(\Lambda_0/\Lambda)$, $g_i = G_i/4\pi^2$, $\alpha_s = g_s/4\pi$ とした. この有効質量のベータ関数を紫外カットオフから十分赤外まで走らせ, ベア質量0極限を外挿し生成質量を評価する.

$$m_{\text{phys}} = \lim_{m_0 \rightarrow +0} \lim_{\Lambda \rightarrow 0} m(m_0; \Lambda) \quad (4)$$

この方法では紫外カットオフでのベアのパラメータは裸の質量である m_0 とゲージ結合定数 α_s で, 赤外でベア質量0極限をとるので実質 α_s のみを与えてカイラル対称性の破れを評価することができる.

図 1: $N_c = 3$ 図 2: $N_c = 4$ 図 3: $N_c = 5$ 図 4: $N_c = 6$

N_c	3	4	5	6
N_f^{cr} (DS eq.)	11	15	19	23
N_f^{cr} (NPRG)	11	14	18	22

表 1: カイラル対称性の自発的破れの臨界 flavor 数: N_f^{cr}

以上の方法により各カラー数の $SU(N_c)$ ゲージ理論で生成質量を, $N_c = 3, 4, 5, 6$ について評価した結果が図 1 から図 4 である. $N_c = 3, 4$ では $\alpha_s(1) = 1.0$, $N_c = 5, 6$ では $\alpha_s(1) = 0.5$ となるように rescale し, 同一のカラー数をもつゲージ理論において, 生成質量の大きさの比較をした. 図 1 は $N_c = 3$ の場合の有効質量のプロットである. フレーバー数の増加に伴い生成される有効質量は減少し, $N_c = 12$ では外挿値はほぼ 0 になり, これより $N_f^{\text{cr}} = 11$ であるとした. これは赤外固定点の値の大きさが小さくなるために生成される 4 体フェルミ相互作用の寄与が小さくなるので, その結果, 質量生成が小さくなる. 表 1 に N_f^{cr} の Dyson-Schwinger 方程式による解析との比較をまとめた. 今回はカラー数が小さい場合に限り解析したが, ほぼ consistent な結果となった. カイラル凝縮についての評価については, 同様に外場を導入した, いわゆるルジヤンドル有効ポテンシャルのくりこみによって可能であり, この評価が今後の課題と考えている.

[1] K-I. Aoki, K. Morikawa, J-I. Sumi, H. Terao, M. Tomoyose, Phys. Rev. **D61**(2000), 045008

[2] K-I. Aoki and K. Miyashita, Prog. Theor. Phys. **121**(2009), 875

¹miya@asu.aasa.ac.jp

Phase structure of Topologically massive gauge theory with fermion by spectral function

星野裕一
釧路高専

平成 22 年 12 月 27 日

1 初めに

2 + 1 次元のゲージ場の理論に Chern-Simon 項があるとゲージ場は質量 μ を持ち得る。この項が fermion propagator に与える影響を Bloch-Nordsieck 近似で調べました。QED の場合には対応する Schwinger-Dyson 方程式の解析 [1, 2] があり其処にフェルミオンの真空期待値と質量の μ 依存性が報告されておりそれとの一致は良い。QCD の場合には Chern-Simon 項の係数はインスタントン効果により量子化を受け $\mu = ng^2/4\pi (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ になる。この為 fermion propagator は n に依存し 真空で平均を取れば CP の破れも期待される。

2 スペクトル関数

ゲージ場の propagator は

$$D_{\mu\nu}^0(k) = -\frac{i}{k^2 - \mu^2} \left[g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - i\mu \frac{\epsilon_{\mu\nu\rho}}{k^2} \right] - i \frac{k_\mu k_\nu}{k^4} \quad (1)$$

と書ける [3]。フェルミオンのスペクトル関数は行列要素 [1]

$$T_1 = -ie \frac{\gamma_\mu \frac{\mu}{\lambda}(k) U(p, s)}{(p+k) \cdot \gamma - m + i} \quad (2)$$

とゲージ場の偏極に対する和

$$\sum_\lambda \frac{\lambda}{\mu}(k) \frac{\lambda}{\nu}(k) = -\left[g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - i\mu \frac{\epsilon_{\mu\nu\rho}}{k^2} \right] \quad (3)$$

を使い摂動二次での 2 成分スピンの時に

$$\sum_{\lambda, S} T_1 \bar{T}_1 = -\frac{e^2 (\gamma \cdot p + m)}{2m} \left[\frac{m^2}{(p \cdot k)^2} + \frac{1}{p \cdot k} + \frac{-1}{k^2} \right] - \frac{e^2}{4\mu} \frac{\gamma \cdot p}{m} \frac{m}{p \cdot k} \quad (4)$$

を得る。Chern-Simon 項からは波動関数の繰り込みのみである事が分かる。この点は現在 Schwinger-Dyson 方程式で解析中です。この式をフーリエ変換

$$F(x) = \int \frac{d^3k}{i(2\pi)^2} (k^2 - \mu^2) (k_0) \exp(ik \cdot x) \sum_{\lambda, S} T_1 \bar{T}_1 \quad (5)$$

すると

$$F(x) = \frac{e^2}{8\pi} \frac{\gamma \cdot p + m}{2m} \left[\frac{e^{-\mu|x|}}{\mu} - x \operatorname{Ei}(\mu|x|) - \frac{\operatorname{Ei}(\mu|x|)}{m} + (-1) \frac{e^{-\mu|x|}}{2\mu} \right] - \frac{e^2}{32\pi\mu} \frac{\gamma \cdot p}{m} \operatorname{Ei}(\mu|x|) \quad (6)$$

が得られる。関数 $\operatorname{Ei}(\mu|x|)$ は近距離で $\operatorname{Ei}(\mu|x|) \simeq -\gamma - \ln(\mu|x|)$ の様に展開され

$$F(x) \simeq \frac{e^2}{8\pi} \frac{\gamma \cdot p + m}{2m} \left[\frac{+1}{2\mu} + \frac{\gamma + \ln(\mu|x|)}{m} + x(\gamma + \ln(\mu|x|)) - \frac{(-1)|x|}{2} - x \right] + \frac{e^2}{32\pi\mu} \frac{\gamma \cdot p}{m} (\gamma + \ln(\mu|x|)). \quad (7)$$

を得る。此処で $= -1$ のゲージを選び近距離で

$$S(x) = -(i\partial \cdot \gamma) \frac{\exp(-m|x|)}{4\pi\sqrt{x^2}} \exp(F_V(x)) - m \frac{\exp(-m|x|)}{4\pi\sqrt{x^2}} F_S(x) \simeq -(i\partial \cdot \gamma) \frac{\exp(-m|x|)}{4\pi\sqrt{x^2}} (\mu|x|)^{E+C|x|} - m \frac{\exp(-m|x|)}{4\pi\sqrt{x^2}} (\mu|x|)^{D+C|x|} \quad (8)$$

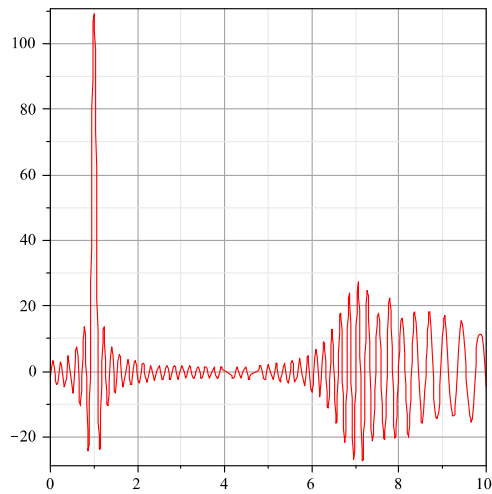
$D = e^2/(8\pi m)$, $C = mD$. $E = D + e^2/32\pi\mu$, $D = 1$ ならば $x = 0$ で第 2 項目有限になり凝縮が起きます。また真空期待値は $D = 1$ の時確かに μ に比例します。有効質量は $m = e^2/8\pi/E$ になります。Schwinger-Dyson 方程式では運動量ゼロの質量を調べています。それが殆ど μ に依らない。Fermion のスペクトル関数

$$\rho_2(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i(s-1)m^2x) \exp(F_S(x)) dx, s = \frac{p^2}{m^2} \quad (9)$$

を調べてみました。 μ の影響を観る為近距離での $\exp(F(x))$ を見ると

$$\int_0^{1/\mu} \frac{d|x|}{\pi} \mu|x| \cos((s-1)|x|) = \frac{-\mu + \sqrt{(s-1)^2 + \mu^2} \cos(s/\mu +)}{(s-1)^2}, \tan = \mu/s. \quad (10)$$

となり振動があります。数値計算では図のようになりました。



3 QCD

QCD では Chern-Simon 項の係数はゲージ変換に対する作用の不変性より $\mu = ng^2/4\pi$ ($n \neq 0$ の整数) になります [3]。この時 $E = 1 + 1/8n$ なので異常次元は分数になります。真空中で平均を取る場合に未だ十分な結論に至っていません。これ以外に繰り込みによる μ の変化と赤外発散に関しては文献 [4] で詳しく議論されています。

4 参考文献

- [1] 星野裕一、素粒子論研究 118 巻 1 号 2010 年 5 月 A85-87.
- [2] Toyoki Matsuyama, Hideko Nagahiro, Modern Physics Lett. A15(2000)2373.
- [3] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Annals of Physics **281**, 409–449 (2000),
R. Jackiw. Preprint CTP #1000 (1982)
- [4] Robert Pisarsky, Sumathi Rao, Phys. Rev. **D32.8(1985)2085**.

鉄系超伝導体

東京大学大学院 理学系研究科 物理学専攻 青木秀夫

E-mail: aoki@phys.s.u-tokyo.ac.jp

2008年に発表され、最近の物性物理学におけるハイライトの一つである鉄系超伝導体についてレビューした。特に、多バンド超伝導体に特有なペアリング対称性や、同じ鉄系のファミリーの中でもハミルトニアン物質依存性により複数のペアリング対称性が生じる可能性を解説した。また、超伝導体における集団励起に phase mode があるが、これが多バンド超伝導体においてどのような特徴をもつかという点にも触れた。

超伝導は、発見から1世紀以上の歴史をもち、また、BCS理論からも半世紀以上の歴史をもつが、毎年のように新たな超伝導体が発見されるのは驚きである。特に、最近のハイライトは、最近我が国で発見された鉄系超伝導体であり、発見から数年しか経っていないのに、一分野に発展している。ここでは、鉄系超伝導の何がそれ程面白いのか、ということをも、「多バンド超伝導」をキーワードに、個人的な観点から overview した。

● 多バンド超伝導

超伝導体の歴史を振り返ると、我が国で発見された MgB_2 は典型的な2バンド超伝導体である。また、最近発見された鉄系超伝導体も5バンド系であり、そのうち3バンドが超伝導に参与する多バンド超伝導体である [1]。また、やはり我が国で発見され2010年に発表された芳香族分子(ピセン)結晶にカリウムをドーブした有機超伝導体も、複数の分子軌道に由来する多バンド系であることが示唆されている [2]。こうしてみると、多くの興味深い超伝導が多バンド超伝導ということになる。

理論的には、以下がいえる。まず、伝統的な(低温)超伝導については、超伝導機構はフォノン交換によるペアリング相互作用であるが、多バンド系の場合は、たとえ基本的には一つのバンドの上で超伝導が起きていても、ペアが異なるバンドに跳ぶ量子力学的遷移確率が存在する場合には、超伝導が増大される (T_c が高くなる) ことが、既に1950年代から知られている (Suhl et al 1959; Kondo 1963)。

一方、電子機構超伝導は、スピン揺らぎに媒介されたペアリング相互作用により生じ、この強さは、フェルミ面を平行移動させたときにどの程度重なるか (nesting の強さ) で決まる。1バンドの場合と比べて、多バンド超伝導体では、

(i) フェルミ面の形状が、より複雑に決まっている。遷移金属を周期律表で見ると、銅は右端に位置し、そのために Cu^{2+} は正孔が単一バンド上に存在する。一方、鉄は中程に位置し、そのためもあって、フェルミ・エネルギーは3枚のバンドを横切り、フェルミ面は電子ポケットと正孔ポケットの合計3枚からなる。

(ii) 一枚のフェルミ面を見ても、その上で軌道の性格を表示したときに、一般に、場所によって異なる軌道が主要成分になり得る。Nesting から発生するスピン感受率の増大は、同じ軌道成分の間の nesting のみが効くので、多バンド系ではフェルミ面形状のみでは決まらない。このため、それから発生する超伝導についても、注意深い解析が必要となる。

- s_{\pm} 波超伝導

結果、鉄系超伝導では、それぞれのポケットにフル・ギャップが開き、異なるポケットの間は符号反転する、という、現在では s_{\pm} 波と呼ばれているペアリングとなることが理論的に示唆されている [1, 3]。

実験的には、このような特徴的な超伝導ギャップ関数は、ARPES(角度分解光電子分光)、準粒子励起、NMR などから調べられており、特に s_{\pm} 波ペアリングを観測するには、超伝導の位相に敏感な方法を探る必要がある。現在、多結晶 s_{\pm} 波超伝導体の粒界に発生することが期待される half flux を直接観測すること [4]、超伝導体の表面を STM(走査トンネル顕微鏡) で観察し、そのフーリエ変換から運動量空間でのギャップ関数の振る舞いを抽出する方法 [5] などにより、 s_{\pm} 波にコンシステントな結果が得られている。

- 物質依存性

また、このような多バンド超伝導体では、超伝導の現れ方が物質に強く依存し得る。実際、鉄系超伝導体では、LaFeAsO の組成において砒素を磷に置き換えた LaFePO では低温超伝導体となり、また、ランタンをネオジムに置き換えた NdFeAsO では鉄系としては最高級の Tc (55K) になることが実験的に知られている。

これらの物質においては、鉄原子の上下に位置するニクトゲン原子 (As や P) の高さが異なる軌道間の飛び移り積分を敏感に変化させ、ひいては多バンド構造ならびにフェルミ面上での軌道の性格を変える、ということが鍵となることが黒木等により指摘されている [6]。これにより、ニクトゲン高さを変えるにつれて s_{\pm} 波が d 波になり得て、また、 s 波と d 波の境界の状況においては $s + id$ という、時間反転を自発的に破った超伝導になる可能性も指摘されている [7]。

- 多バンド超伝導体における集団励起

超伝導体ではゲージ対称性が自発的に破れており、それに伴い集団励起モードが発生する。これは位相モードであり、中性粒子の超流動では、massless Nambu-Goldstone mode である(超伝導体のような荷電粒子系では、Anderson-Higgs 機構のために massive になる)。以上は単一バンド系の話であるが、多バンド超伝導では、多バンドに亘りゲージ対称性が破れている訳である。多バンド系では複数の秩序変数が共存するため、異なるギャップ関数間の相対位相が同位相で揺らぐモードに加え、逆位相で揺らぐ massive な集団励起モード (Leggett モード) が発生することは 1960 年代から知られている [8]。これは 2 バンド理論で精力的に研究され、MgB₂ においてその検証実験も行われている。太田等は、 N バンド BCS 理論に基づき多バンド超流動/超伝導を調べた。鉄系超伝導体のように、 $N \geq 3$ の場合は、複数個のバンド間ジョセフソン電流が存在するため、集団励起モードにも複数のダイナミックスが発生する。これはバンド間ジョセフソン電流のパリティで分類でき、偶パリティの場合はバンド間ジョセフソン電流の和が系に寄与する一方、奇パリティの場合は電流間で相殺が起き、パリティの違いに応じて Leggett モードの質量に劇的な影響を与えることを示している [9]。このように、多バンド超流動/超伝導を特徴付けるのに “dynamical class” の概念が重要であり、複数のギャップ関数の相対位相が convention ではなく本質的に効く。また、電子機構超伝導において、3 個のバンドの間のペアリング相互作用が拮抗している場合は、ギャップ関数が互いに反対符号(複素平面上で 180 度)をとろうとするが、3 個の間で “フラストレー

ト”するために、互いに 120 度を取り、ギャップ関数が複素（時間反転が自発的に破れた超伝導）になる可能性があり、この場合は Leggett モードの振動数が複素となり不安定化する [10, 9]。

なお、図は

<http://www.riise.hiroshima-u.ac.jp/TQFT/>

に掲載の powerpoint file を参照。最後に、本 review の中で触れた私自身の仕事に関しては、黒木和彦、有田亮太郎、大成誠一郎、田仲由喜夫、臼井秀知、紺谷 浩、太田幸宏、町田昌彦、小山富男の各氏との共同研究を感謝したい。また、鉄系超伝導体の発見者である細野秀雄氏との議論を感謝したい。

References

- [1] K. Kuroki, S. Onari, R. Arita, H. Usui, Y. Tanaka, H. Kontani and H. Aoki, Phys. Rev. Lett. **101**, 087004 (2008) [**102**, 109902(E) (2009)]; 黒木和彦、有田亮太郎、青木秀夫、日本物理学会誌 **64**, 826 (2009).
- [2] T. Kosugi, T. Miyake, S. Ishibashi, R. Arita and H. Aoki, J. Phys. Soc. Jpn **78**, 113704 (2009).
- [3] I.I. Mazin et al, Phys. Rev. Lett. **101**, 057003 (2008).
- [4] C.-T. Chen et al, Nature Phys. **6**, 260 (2010).
- [5] T. Hanaguri et al, Science **328**, 474 (2010).
- [6] K. Kuroki, H. Usui, S. Onari, R. Arita and H. Aoki, Phys. Rev. B **79**, 224511 (2009).
- [7] W.-C. Lee et al, Phys. Rev. Lett. **102**, 217002 (2009).
- [8] A. J. Leggett, Prog. Theor. Phys. **36**, 901 (1966).
- [9] Y. Ota, M. Machida, T. Koyama and H. Aoki, arXiv:1008.3212.
- [10] V. Stanev and Z. Tešanović, Phys. Rev. B **81**, 134522 (2010).

Keldysh形式による量子輸送における揺らぎの定理

内海裕洋 三重大学工学部物理工学科

1 はじめに

完全計数統計 (*Full counting statistics*) 理論はメゾスコピック系の物理において活発に研究されている [1]. これは量子導体を透過する電子の数の分布に着目し, 非平衡状態での量子輸送の分析をする理論である. この理論とは全く独立に, 非平衡統計力学分野において「揺らぎの定理」に代表される一連の関係式が見出されている [2]. 揺らぎの定理によるとエントロピーの確率分布 $P(\Delta S)$ は, 以下の関係式を満たす.

$$P(\Delta S)/P(-\Delta S) = e^{\Delta S}. \quad (1)$$

この関係式は微視的可逆性のみ依存しているために, 平衡から大きく離れた非平衡状態においても成り立つ. 揺らぎの定理は熱力学の第2法則を温度揺らぎの大きい微視的な場合に拡張したものと理解される. さらに揺らぎの定理からは線形応答理論, すなわち揺動散逸定理とオンサガーの相反定理を含んでいることも知られている.

通常の金属の電気の伝導はエントロピーの生成を常に伴う. そのため揺らぎの定理と揺らぎを扱う完全計数統計理論が関係することは容易に想像がつく. ここでは完全計数統計理論に基づいて量子揺らぎの定理を導出し [3], オンサガーの相反定理 [4, 5] を超えて, 非線形輸送係数の間の普遍的な関係式を導く.

2 完全計数統計理論

量子系において電流の確率分布を議論するとき, 異なる時間での演算子の順序が問題となる. Levitov と Lesovik は仮想的なスピン 1/2 検流計 [1] を導入することで, 電流の分布を定義した. ここでは, それと等価な結果を与える「2回測定のプロトコル」を用いる. まずセットアップを説明する [図1(a)] [3]. 量子導体は量子ドットのネットワークでモデル化し, それが m 個のリード線に結合している. ハミルトニアンはリード線の部分 H_r ($r=1, \dots, m$) と量子ドットの部分 H_d と電子間相互作用 H_{int} および量子ドットとリード線のトンネルを表す部分 H_T に分けられる. $H = \sum_{r=1}^m H_r + H_d + H_{\text{int}} + H_T$. $a_{rk\sigma}^\dagger$ をスピン σ , 波数ベクトル k の電子をリード r 内に生成する演算子として, リードの部分 $H_r = \sum_{k\sigma} \epsilon_{rk} a_{rk\sigma}^\dagger a_{rk\sigma}$, とする. 量子ドットネットワークの部分については $d_{i\sigma}^\dagger$ をスピン σ , サイト i に電子を生成する演算子として $H_d = \sum_{ij\sigma} t_{ij} d_{i\sigma}^\dagger d_{j\sigma}$ とかける. 電子が量子ドットネットワークにある場合のみに電子間相互作用を考える $H_{\text{int}} = \sum_{ij\sigma\sigma'} (U_{ij\sigma\sigma'}/2) d_{i\sigma}^\dagger d_{j\sigma'}^\dagger d_{j\sigma} d_{i\sigma}$. リード線と量子ドットの結合は $H_T = \sum_{rk\sigma} t_{rk} d_{i\sigma}^\dagger a_{rk\sigma} + \text{H.c.}$ である. 磁場 B が印加された場合, 電子は磁場に関して奇関数の位相 $\phi(-B) = -\phi(B)$ をトンネルやドット間のホッピングするとき得る: $t_{ij} = |t_{ij}| \exp(i\phi_{ij})$, $t_{rk} = |t_{rk}| \exp(i\phi_{rk})$.

さて始状態では, リード線と量子ドットのトンネル結合は切れているとし, 時刻 $t=0$ でトンネル結合が入り, 測定時間 τ 後にまたトンネル結合を切る. そのため始状態と終状態ではそれぞれの領

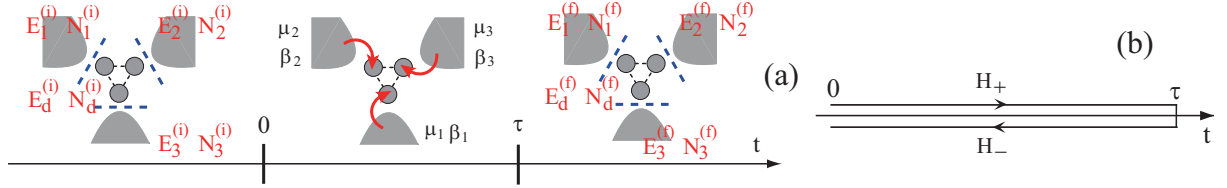


図 1: (a) 他端子 ($m = 3$) 量子導体の熱流・電流測定の様式図. (b) Keldysh 経路.

域において電子数とエネルギーは良い量子数となっている: $H_s|n\rangle_s = E_s^{(n)}|n\rangle_s$, $N_s|n\rangle_s = N_s^{(n)}|n\rangle_s$. ここで $s = d$ は量子ドットを $s = 1, \dots, m$ はリードを表す指標である. 始状態と終状態はテンソル積, $|n\rangle = |n\rangle_d \otimes |n\rangle_1 \otimes \dots \otimes |n\rangle_m$ でかける. 始状態ではそれぞれの領域は逆温度 β_s , ケミカルポテンシャル μ_s の平衡状態にあるとする. すると密度行列は各々の領域での密度行列 $\rho_s \propto \exp[-\beta_s(H_s - \mu_s N_s)]$ の積 $\rho_0 = \prod_s \rho_s$, ($s = 1, \dots, m, d$) となる. 系の状態が始め $|i\rangle$ であり, τ 後に $|f\rangle$ である同時確率分布は, $P_{\tau;|i\rangle \rightarrow |f\rangle} = \left| \langle f | e^{-iH\tau} | i \rangle \right|^2 \langle i | \rho_0 | i \rangle$, で与えられる. これを用いると, 時間 τ の間にリードまたはドットから電荷 q_{cs} かつエネルギー q_{hs} から流れでる同時確率分布は,

$$P(\{q_{\alpha s}\}) = \sum_{if} P_{\tau;|i\rangle \rightarrow |f\rangle} \prod_{s'} \delta_{q_{cs'}, N_{s'}^{(f)} - N_{s'}^{(i)}} \delta(q_{hs'} - E_{s'}^{(f)} + E_{s'}^{(i)}), \quad (\alpha = c, h).$$

としてあらわされる. フーリエ変換をすると, 特性関数を得る.

$$\mathcal{Z}(\{\chi_{\alpha s}\}; B) = \sum_{q_{cd}, q_{c1}, \dots, q_{cm}} \int dq_{hd} dq_{h1} \dots dq_{hm} P(\{q_{\alpha s}\}; B) \exp\left(i \sum_{\alpha s} q_{\alpha s} \chi_{\alpha s}\right).$$

ここで $|f\rangle$ と $|i\rangle$ は, 演算子 H_s と N_s の固有ベクトルであったので,

$$\mathcal{Z}(\{\chi_{\alpha s}\}; B) = \langle V^\dagger e^{iH\tau} V^2 e^{-iH\tau} V^\dagger \rangle, \quad V = \prod_s V_s, \quad V_s = \exp[-i(\chi_{hs} H_s + \chi_{cs} N_s)/2],$$

となるが, 期待値 $\langle \dots \rangle$ は始状態の密度行列 ρ_0 についてとる. ここで V_s が時間並進およびゲージ変換の演算子であることに注意すると, Keldysh 経路 K [図 1(b)] を用いて,

$$\mathcal{Z}(\{\chi_{\alpha s}\}; B) = \left\langle T_K \exp\left(-i \int_K dt H'(t)_I\right) \right\rangle, \quad H' = \begin{cases} H_+ = V H' V^\dagger & (t \in C_+) \\ H_- = V^\dagger H' V & (t \in C_-) \end{cases},$$

と Keldysh 生成関数の形でかくことができる. ここで $H' = H_T + H_{\text{int}}$ である.

3 揺らぎの定理とオンサガー相反定理の非線形応答への拡張

微視的可逆性つまり, 運動量, 角運動量, スピン演算子および磁場の反転操作についての対称性から,

$$\text{Tr} \left[\rho_0 V^\dagger e^{iH\tau} V^2 e^{-iH\tau} V^\dagger \right] = \text{Tr} \left[\rho_0 V^\dagger e^{-iH\tau} V^2 e^{iH\tau} V^\dagger \right] \Big|_{B \rightarrow -B},$$

をしめすことが出来る. また始状態の密度行列 ρ_s は, ユニタリ演算子 V_s^2 の χ_{hs} および χ_{cs} をそれぞれ $i\beta_s$ と $i\beta_s \mu_s$ に置き換えたものに比例することに注意すると, 電流のキュミュラント生成関数 $\mathcal{F}(\{\chi_{\alpha r}\}; B) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \ln \mathcal{Z}(\{\chi_{\alpha r}\}; B) / \tau$ について,

$$\mathcal{F}(\{\chi_{\alpha r}\}; B) = \mathcal{F}(\{-\chi_{\alpha r} + i\mathcal{A}_{\alpha r}\}; -B), \quad \chi_{\alpha r} = \chi_{\alpha r} - \chi_{\alpha m}, \quad (2)$$

が成り立つことを示せる．ここでアフィニティは $\mathcal{A}_{cr} = \beta_r \mu_r - \beta_m \mu_m$ と $\mathcal{A}_{hr} = \beta_m - \beta_r$ であり，式 (2) は，量子導体の電気伝導および熱輸送における定常揺らぎの定理と解釈できる．

関係式 (2) から電流の期待値や高次の電流揺らぎの相関についての非線形応答係数の間の普遍的な関係式を導出できる．以下では $\beta_1 = \dots = \beta_m = \beta$ かつリード 1 と 2 のケミカルポテンシャル μ_1 と μ_2 のみを変えて，リード 1 と 2 での電流を測定する場合を考える．電流のキュミュラントをアフィニティで展開した係数を線形および非線形の輸送係数とする：

$$\langle\langle I_{c1}^{k_1} I_{c2}^{k_2} \rangle\rangle = \frac{\partial^{k_1+k_2} \mathcal{F}(\{0\}; B)}{\partial (i\chi_{c1})^{k_1} \partial (i\chi_{c2})^{k_2}} = \sum_{\ell_1, \ell_2=0}^{\infty} \frac{L_{\ell_1 \ell_2}^{k_1 k_2}(B)}{\ell_1! \ell_2!} \mathcal{A}_{c1}^{\ell_1} \mathcal{A}_{c2}^{\ell_2}.$$

等式 (2) の両辺について χ とアフィニティで展開すると，輸送係数について無限個の関係式を得ることができる．例えば平衡状態では電流が流れないことを意味する自明な関係式 $L_{00}^0(B) = L_{00}^1(B) = L_{10}^0(B) = L_{01}^0(B) = 0$ や，線形応答理論，つまり揺動散逸定理 $L_{10}^1(B) = L_{00}^2(B)/2$ と $L_{00}^1(B) = L_{10}^1(B) = L_{01}^1(B)$ およびオンサガー・カシミヤの関係式 [5], $L_{01}^0(B) = L_{10}^0(-B)$ と $L_{10}^1(B) = L_{10}^1(-B)$ $L_{01}^1(B) = L_{01}^1(-B)$ を得る．ここで磁場について対称化または反対称化した輸送係数 $L_{\ell_1 \ell_2, \pm}^{k_1 k_2} = L_{\ell_1 \ell_2}^{k_1 k_2}(B) \pm L_{\ell_1 \ell_2}^{k_1 k_2}(-B)$ を用いた．同じように線形応答領域を超えた関係式も得ることができる．

$$\begin{aligned} L_{00,+}^3 &= 0, & L_{20,+}^1 &= L_{10,+}^2, & L_{20,-}^1 &= L_{10,-}^2/3 = L_{00,-}^3/6, & L_{00,+}^2 &= 0, \\ L_{20,+}^0 &= L_{10,+}^1 = 2L_{11,+}^0 - L_{01,+}^2, & L_{01,-}^2 &= L_{10,-}^1 = L_{00,-}^2/2 = L_{20,-}^0 + 2L_{11,-}^0. \end{aligned} \quad (3)$$

これらは微視的可逆性のみによるという意味で，オンサガー相反定理の非線形応答領域への拡張といえる．これらの関係式は最近アハロノフ・ボーム干渉計を用いて検証されている [6].

4 結論

微視的な可逆性から完全計数統計理論のキュミュラント生成関数すなわち Keldysh 生成関数の対称性を導いた (2)．これは量子導体における電気および熱伝導の揺らぎの定理となっている．これから導かれる非線形輸送係数間の関係式は，微視的可逆性のみによるという意味で，オンサガー相反定理の非線形応答領域への拡張といえる．本研究は東京大学理学部齊藤圭司博士との共同研究である．

参考文献

- [1] L. S. Levitov and G. B. Lesovik, JETP Lett. **58**, 230 (1993).
- [2] D. J. Evans, E. G. D. Cohen, and G. P. Morriss, Phys. Rev. Lett. **71**, 2401 (1993).
- [3] K. Saito and Y. Utsumi, Phys. Rev. B **78**, 115429, (2008).
- [4] L. Onsager, Phys. Rev. **37**, 405, (1931); H. B. G. Casimir, Rev. Mod. Phys. **17**, 343, (1945).
- [5] M. Büttiker, Phys. Rev. Lett. **57**, 1761 (1986).
- [6] S. Nakamura, Y. Yamauchi, M. Hashisaka, K. Chida, K. Kobayashi, T. Ono, R. Leturcq, K. Ensslin, K. Saito, Y. Utsumi, A. C. Gossard, Phys. Rev. Lett. **104**, 080602 (2010).

Critical comparison of closed time path formalism and Thermo Field Dynamics in nonequilibrium situation

中村祐介, 山中由也

早大基幹理工電子光システム

1 はじめに

Closed time path (CTP) 形式 [1] と Thermo Field Dynamics (TFD) [2] はともに非平衡現象を記述する熱場の量子論の有力な手法である。CTP の Keldysh 伝搬関数と TFD の熱的 Bogoliubov 変換された伝搬関数は共に 2×2 -行列であることなど、共通の性質がある。伝搬関数に関して言えば、平衡系においては両者は同じ結果を与えることが示されているが、非平衡系においては本質的に異なったものであるという認識が重要である。本研究では両手法を比較しながら、Feynman ダイグラム法を用いた計算における違いを明らかにする。なお同様の議論は Fermion 系に対しても成り立つが、簡単のため本稿では Boson のみを扱う。

2 Closed time path 形式

始めに系のハミルトニアン H を $H = H_0 + H_{\text{int}}$ と分割し、相互作用描像を定義する。非摂動ハミルトニアンは $H_0 = \sum_{\ell} a_{\ell}^{\dagger} a_{\ell}$ と生成消滅演算子 a_{ℓ} で対角化され、この a_{ℓ} で真空とその上の粒子数状態 $|m\rangle$ が定義される。熱的な状態を記述する密度行列は以下のように仮定される：

$$\rho = (1-p) \sum_{m=0}^{\infty} p^m |m\rangle \langle m|. \quad (1)$$

ここで p ($0 \leq p < 1$) は時間に依存しないパラメータであり、逆温度 β の熱平衡系では $p = e^{-\beta\omega}$ となる。熱的期待値 $\langle A \rangle$ はトレース演算と密度演算子を用いて $\langle A \rangle = \text{Tr}[\rho A]$ と与えられる。この密度行列の特別な構造により

$$a \rho - p \rho a = 0, \quad (2)$$

が成立し、この関係式により熱的期待値に対しても Wick の定理が成立することが保証される。

Heisenberg 描像と相互作用描像が一致する時刻を $t = -\infty$ として、熱的期待値を以下のように書き換える：

$$\langle A_{\text{H}}(t) \rangle = \langle U(-\infty, t) A(t) U(t, -\infty) \rangle = \langle T_c [A(t) S_c] \rangle. \quad (3)$$

ただし $S_c = U(-\infty, \infty) U(\infty, -\infty)$ である。添字の c は $-\infty \rightarrow \infty \rightarrow -\infty$ という積分経路 (Keldysh 経路) を、 T_c は Keldysh 経路上における時間順序積をそれぞれ表している。このように Keldysh 経路を採用により、Heisenberg 描像の熱的期待値を時間順序積と S_c 行列だけで表現され、非平衡状況でも Feynman 図法が使えるようになっていることが、CTP において重要である。

Keldysh 経路上の伝搬関数は

$$G(x_1^c, x_2^c) = -i \langle T_c [\psi_{\text{H}}(x_1^c) \psi_{\text{H}}^{\dagger}(x_2^c)] \rangle, \quad (4)$$

と定義される。ただし添字の c は時間が Keldysh 経路上にあることを意味している。さらに Keldysh 経路を往路と復路に分ける：

$$\int_c dt = \int_{-\infty}^{\infty} dt^+ + \int_{\infty}^{-\infty} dt^- = \int_{-\infty}^{\infty} dt^+ - \int_{-\infty}^{\infty} dt^-, \quad (5)$$

そして伝搬関数の時間引数が往路 t^+ か復路 t^- のどちらにあるかで場合分けし、以下の Keldysh 伝搬関数を定義する：

$$G(x_1^c, x_2^c) = G^c(x_1, x_2) \quad (t_1^c, t_2^c \text{ がともに往路の場合}), \quad (6)$$

$$G(x_1^c, x_2^c) = G^<(x_1, x_2) \quad (t_1^c, t_2^c \text{ がともに復路の場合}), \quad (7)$$

$$G(x_1^c, x_2^c) = G^>(x_1, x_2) \quad (t_1^c \text{ が往路、} t_2^c \text{ が復路の場合}), \quad (8)$$

$$G(x_1^c, x_2^c) = G^{\tilde{c}}(x_1, x_2) \quad (t_1^c \text{ が復路、} t_2^c \text{ が往路の場合}). \quad (9)$$

元々の設定 (p が時間依存しない) より、明らかに非摂動分布関数 $n \equiv \langle a^\dagger a \rangle$ は時間依存しない。CTP では伝搬関数の Wigner 表示に対して 1 次の勾配展開近似を行うことで、Heisenberg 描像の分布関数 n_H に対する輸送方程式を導出する。

3 Thermo Field Dynamics

TFD でも CTP と同じ密度行列の構造を仮定する。ただし非平衡 TFD は p の時間依存性も取り入れていることが重要である。それは、各時刻で背景の粒子数分布の変化と準粒子描像の変化を取り入れていることになる。

密度行列に「左から a を掛ける」、「右から a を掛ける」という超演算を、それぞれ a, \tilde{a} と定義する [3]。この超演算子形式では密度行列 ρ は被作用素 $|\rho\rangle\rangle$ となり、(2) 式は

$$(a - p\tilde{a}^\dagger)|\rho\rangle\rangle = 0, \quad (10)$$

と書き換えられる。また元の空間のトレース演算は超ブラ $\langle\langle 1|$ となり、これらは倍加された Fock 空間に写像することが出来る：

$$|\rho\rangle\rangle = \sum_m (1-f)f^m |m\rangle\langle m| \longrightarrow \sum_m (1-f)f^m |m\rangle \otimes |m\rangle \equiv |0\rangle, \quad (11)$$

$$\langle\langle 1| = \sum_m \langle m| \bullet |m\rangle \longrightarrow \sum_m \langle m| \otimes \langle m| \equiv \langle 0|. \quad (12)$$

すなわち熱的期待値は倍加された真空（熱的真空）の純粋状態期待値で与えられる：

$$\langle A \rangle = \text{Tr}[\rho A] = \langle 0|A|0\rangle. \quad (13)$$

TFD における熱的真空 $|0\rangle$ を消去する生成消滅演算子は a, \tilde{a} ではなく、以下の熱的 Bogoliubov 変換で定義される $\xi, \tilde{\xi}$ である：

$$\begin{pmatrix} a \\ \tilde{a}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 1 & 1+n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \tilde{\xi}^\dagger \end{pmatrix}, \quad (14)$$

ただし非摂動分布関数 $n = \langle 0|a^\dagger a|0\rangle$ は p と $n = p/(1-p)$ の関係がある。TFD でも Heisenberg 描像と相互作用描像が一致する時刻を $t = -\infty$ とする： $A_H(t) = \hat{U}(-\infty, t) A(t) \hat{U}(t, -\infty)$ 。もし p の時間依存性を取り入れないのならば、 \hat{S} 演算子は非チルダ演算子と非チルダ演算子の積に分解できる： $\hat{S} = S \tilde{S}$ 。ただし $S = U(-\infty, \infty)$ 。すると演算子の縮約は

$$\begin{aligned} \langle 0|T[A(t_1)\tilde{B}(t_2)\hat{S}]|0\rangle &= \langle 0|T[\tilde{B}(t_2)\tilde{S}]T[A(t_1)S]|0\rangle \\ &= \langle U(-\infty, t_2)B^\dagger(t_2)U(t_2, \infty)U(\infty, t_1)A(t_1)U(t_1, -\infty)\rangle \\ &= \langle T_c[A(t_1^+)B^\dagger(t_2^-)S_c]\rangle \end{aligned} \quad (15)$$

となる。このように倍加された Fock 空間の縮約から Keldysh 経路の時間順序積が自然に現れる。これは TFD の伝搬関数は CTP の伝搬関数と同一であることを意味する。また、TFD におけるチルド演算子は CTP における復路の演算子のエルミート共役と一対一対応していることが分かる。

しかし非平衡 TFD は一般に時間依存する $p(t)$ の元で定式化されている。その時間依存性は、非摂動 Hamiltonian に

$$-\hat{Q}(t) = i \sum_{\ell} \dot{n}_{\ell}(t) \xi_{\ell}^{\dagger} \tilde{\xi}_{\ell}^{\dagger}. \quad (16)$$

という非チルドとチルド演算子の混合項をもたらす。同時に相互作用ハミルトニアンに熱的カウンター項として $\hat{Q}(t)$ が現れる。この熱的カウンター項の存在により、 \hat{S} はもはや非チルド演算子とチルド演算子の積に分解できなくなり、Eq. (15) で示されたような CTP と TFD の同等性も失われる。ここで $\hat{Q}(t)$ の定義には $\dot{n}(t)$ が含まれているが、これは導入の時点では未知パラメータである。非平衡 TFD ではこの未知パラメータ $n(t)$ は自己無撞着な繰り込み条件によって決定される [4]。この際に導出される方程式が量子輸送方程式である。

4 まとめ

非平衡系に対する熱場の量子論である CTP と TFD の定式化のエッセンスを比較した。CTP では初期の非摂動分布関数（当然時間依存しない） n に基づいて定式化されている。通常の摂動論を用いて計算すると、 n_H が時間依存しない事は自明である。そこで CTP では Φ 微分近似で伝搬関数・自己エネルギーを非摂動的に評価し、Wigner 表示において 1 次の勾配展開近似を行う。この操作により分布関数 n_H に対する輸送方程式が導出される。

平衡系、もしくは $\dot{n} = 0$ という仮定が正当化されるような非平衡系に限り、TFD と CTP の伝搬関数の意味は一致することが示される。この場合、TFD における非チルド演算子 A ・チルド演算子 \tilde{B} は CTP における Keldish 経路の往路の A ・復路の B^{\dagger} にそれぞれ対応している。しかし CTP とは異なり、非平衡 TFD では時間依存する n に基づいて定式化できる。その際、関数 $n(t)$ は未知なパラメータとして導入され、最後に自己無撞着な繰り込み条件によって決定される。この n に関する扱いの相違が CTP と TFD の最も本質的な違いである。CTP では $t = -\infty$ で定義される粒子描像のまま有限の時刻における分布関数の発展を記述しようとしているのに対して、TFD では自己無撞着な繰り込み条件によって、各時刻ごとに分布関数の変化や粒子描像の変化を取り込める形式となっている。

参考文献

- [1] 北孝文, 物性研究 **90**, 1 (2008); J. Schwinger, J. Math. Phys. **2**, 407 (1961); L. V. Keldysh, Sov. Phys. JETP **20**, 1018 (1965); L. P. Kadanoff and G. Baym, *Quantum Statistical Mechanics* (Benjamin, New York, 1962); K. Chou, Z. Su, B. Hao and L. Yu, Phys. Reports **118**, 1 (1985).
- [2] H. Umezawa, *Advanced Field Theory — Micro, Macro, and Thermal Physics* (AIP, New York, 1993).
- [3] M. Scumutz, Z. Physik B **30**, 97 (1978).
- [4] H. Chu and H. Umezawa, Int. J. Mod. Phys. **A10**, 1693 (1995).

熱的 Schwinger-Dyson 方程式から得られる Boltzmann-like 方程式の解析

水谷友一, 稲垣知宏^A

広大理, 広大総^A

1 はじめに

粒子の生成, 消滅による熱的分布の時間発展を伴う高エネルギー物理現象は, 非平衡過程に拡張された相対論的場の量子論によって記述されるべきである. このような物理現象に現れる非平衡状態の緩和過程は, 通常, 粒子数分布の発展方程式である Boltzmann 方程式によって記述されるが, この方程式の解析では, エネルギーを保存する散乱状態のみが考慮されている. この時, 非平衡緩和過程に対して, この散乱過程に含まれていない量子的な Off-Shell mode の寄与は自明ではない. そこで本研究では, 実時間形式の熱場の量子論のひとつである, 非平衡 Thermo Field Dynamics (NETFD) を, $\lambda\phi^4$ 相互作用模型に応用して得られる Boltzmann-like 方程式を求めた. そして, 得られた Boltzmann-like 方程式に対して, On-Shell 近似を課した時間発展に依る緩和と, Off-Shell mode を含む緩和過程との比較を行い, Off-Shell mode の寄与を明らかにする事を目的とした研究を実施した. なお, 本研究では, 空間方向に対しては一様な系を考えている.

2 Bose 粒子に対する Boltzmann-like 方程式の導出

先ず初めに, 本研究で用いた Thermo Field Dynamics(TFD) の構造について, ごく簡単に説明する. 高橋, 梅沢らによって提唱された TFD は, 通常の場合の量子論に対して, 元々含まれている振動子, a , と可換なチルダ共役振動子, \tilde{a} , を導入することにより, 理論に含まれる自由度を倍加した Fock 空間を用いて定義される [1]. また, 有限温度系において, 熱的粒子数分布を変換の重みとして, a 振動子と \tilde{a} 振動子を混ぜ合わせる熱的 Bogoliubov 変換により, 新たな ξ 振動子を導入する. そして, この ξ 振動子に対する真空状態を熱的真空状態として定義し, 通常の場合の量子論と同様な定義で表される力学的観測量演算子の熱的真空状態に対する真空期待値を取る事によって, 力学的観測量の熱的平均値が得られる. さらに, 本研究で用いた NETFD は, 有限温度系において熱的粒子数分布を用いて定義されていた熱的 Bogoliubov 変換のパラメータを実時間に依存するパラメータに置き換えることによって, 熱的 Bogoliubov 変換を拡張し導入される. この時, 実時間に依存する熱的 Bogoliubov 変換のパラメータと観測粒子数分布との関係は自明ではないが, 非相対論的場の量子論においては, 熱的真空状態の自己無撞着条件と呼ばれるくりこみ条件を課す事によって, この変換パラメータと観測粒子数分布が一致することが知られている [2].

本研究では, 空間方向に一様等方な系に対して, 以下のハミルトニアン密度により定義される $\lambda\phi^4$ 相互作用模型について調べた.

$$\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2}[\pi(x)^2 + \phi(x)(-\nabla_x^2 + m^2)\phi(x)] + \frac{\lambda}{4!}\phi(x)^4. \quad (1)$$

ここで, ϕ は中性 Scalar 場, π は ϕ の正準変数をそれぞれ表している. TFD では, チルダ共役振動子の導入に伴い, 通常の場合の量子論で用いられる Eq.(1) のハミルトニアンの他にチルダ振動子の時間発展記述するチルダ共役ハミルトニアン, $\tilde{\mathcal{H}}$, を導入する. この $\tilde{\mathcal{H}}$ は, Eq.(1) と以下で定義されるチルダ共役則で結びついている. チルダ共役則は, $A_i (i \in \mathbf{N})$ を演算子, c_i を c 数として次式により定義される.

$$(A_1 A_2)^\sim = \tilde{A}_1 \tilde{A}_2, \quad (c_1 A_1 + c_2 A_2)^\sim = c_1^* \tilde{A}_1 + c_2^* \tilde{A}_2, \quad (\tilde{A})^\sim = A. \quad (2)$$

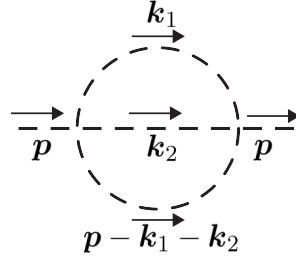


図 1: $\lambda\phi^4$ 相互作用模型から得られる 2 ループ量子補正

TFD では, \mathcal{H} と $\tilde{\mathcal{H}}$ を用いて定義されるハットハミルトニアン, $\hat{\mathcal{H}} \equiv \mathcal{H} - \tilde{\mathcal{H}}$, によって量子補正項を計算する. 本研究では, 求める Boltzmann-like 方程式に寄与する量子補正として, 図 1 で表される 2 ループの量子補正項を計算した.

TFD で用いられる場合は, 振動子の倍化に伴い, 熱的二重項表現と呼ばれる a 振動子と \tilde{a} 振動子の成す 2 成分ベクトル表現を基に展開される. そのため, このベクトル成分を持つ場によって定義された 2 点伝播関数には, 2×2 の行列構造が現れる [1]. 量子補正の寄与を取り入れた摂動伝播関数は, 通常の場合の量子論と同様に Schwinger-Dyson 方程式 (SD 方程式) を満たす. この時, SD 方程式の左側と右側から, それぞれ非摂動伝播関数の逆関数を作用させて得られた式を差し引き, 外線の同時刻極限を取る事によって, 粒子数保存則に対応する関係式が得られる事が非相対論的な場の量子論の場合に知られている [3]. この条件を NETFD の SD 方程式に対して適用すると, 摂動伝播関数の行列構造における対角成分から同時刻極限で自明に成り立つ関係式が現れ, 非対角成分からは, 下式のような熱的 Bogoliubov パラメータに対する時間微分方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \dot{n}_{H,p}(t_x) &= \frac{\lambda^2}{3!} \sum_{i_1=1}^2 \sum_{i_2=1}^2 \sum_{i_3=1}^2 \int_{-\infty}^{t_x} dt_s \int \frac{d^2\mathbf{k}_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2\mathbf{k}_2}{(2\pi)^2} \frac{1}{16\omega_p\omega_{k_1}\omega_{k_2}\omega_q} \\ &\times \cos\{(-\omega_p + E_{k_1,i_1} + E_{k_2,i_2} + E_{q,i_3})(t_x - t_s)\} \\ &\times \left[(1 + n_{H,p}(t_s)) f_{k_1,i_1,a}(t_s) f_{k_2,i_2,a}(t_s) f_{q,i_3,a}(t_s) - n_{H,p}(t_s) f_{k_1,i_1,b}(t_s) f_{k_2,i_2,b}(t_s) f_{q,i_3,b}(t_s) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

上式において, 以下のような表記を用いた.

$$\mathbf{q} \equiv \mathbf{p} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \quad (4)$$

$$E_{q,1} \equiv \omega_q, \quad E_{q,2} \equiv -\omega_q, \quad (5)$$

$$f_{q,1,a}(t) \equiv n_q(t), \quad f_{q,2,a}(t) \equiv 1 + n_q(t), \quad (6)$$

$$f_{q,1,b}(t) \equiv 1 + n_q(t), \quad f_{q,2,b}(t) \equiv n_q(t). \quad (7)$$

ここで, ω_p は相対論的な On-Shell エネルギー固有値を表しており, また, $n_{H,p}$ と n_p はそれぞれ外線と内線に対応する運動量 p のエネルギー固有値を持つ熱的 Bogoliubov パラメータに対応している. Eq.(3) で表される時間発展には, 4 体 Bose 粒子の衝突過程に対応する散逸項が含まれているが, この式の右辺は, 散乱過程に対して成り立つエネルギー保存則を満たさない場合にも有限の値を持つため, この時間発展方程式は量子的な Off-Shell mode の寄与を含んでいる. 本研究では, この熱的 Bogoliubov パラメータの時間発展方程式を Boltzmann-like 方程式と見なす事により粒子数分布の時間発展方程式を解析した.

次に, このような Boltzmann-like 方程式の解析の際によく用いられる On-Shell 近似について簡単に述べる. On-Shell 近似では, 量子補正項に含まれる相対的な実時間に対してフーリエ変換を課す事により現れる運動量の第 0 成分, p_0 , を外線の On-Shell エネルギー固有値, ω_p , に置き換え

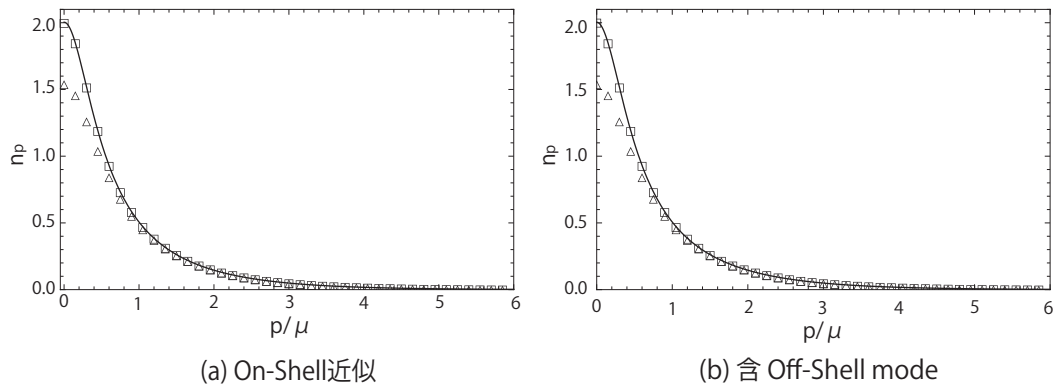


図 2: 三角の点が、始状態 ($t = 0$) における粒子数分布を表し、四角の点が、 $t = 1.0 \times 10^2 \mu^{-1}$ の分布を表している。また、図中の実線は、エネルギー保存則より導かれた終状態の満たすボーズ粒子数分布を表している。

る。この近似の下では、量子補正項に含まれる時間依存性がデルタ関数に置き換わる。この近似を課した量子補正を用いて先の条件により Boltzmann-like 方程式の導出を行うと、Eq.(3)に含まれる時間に対する振動項が、4体 Bose 粒子散乱過程において成り立つエネルギー保存則を表すデルタ関数に置き換わり、いわゆる Boltzmann 方程式が得られる。

3 粒子数分布の時間発展の解析

本研究で我々が行った数値解析について説明する。本研究では、空間 2 次元の系において、 μ を任意の物理スケールとして、質量、 $m = 0.5\mu$ 、温度、 $T = \mu$ 、のボーズ粒子が成す熱的分布を始状態として定めた。そして、時刻、 $t = 0$ 、でボーズ粒子の質量が $m = 0.4\mu$ へ急激に変化したと仮定し、粒子数分布の時間発展の解析を行った。また、今回の解析では、エネルギー保存則より、終状態が満たすべき粒子数分布を求めることができる。Eq.(3)に含まれる内線の粒子数分布は、終状態の分布が成す熱浴として近似した下で、数値解析を実施した。

このような条件の下で、On-Shell 近似を課した Boltzmann 方程式に依る粒子数分布の時間発展と、Eq.(3)で表される Off-Shell mode を含む時間発展を図 2 に示す。解析の結果、今回のような時間発展にエネルギー保存則を満たす状態を含む場合には、On-Shell 近似を課した Boltzmann 方程式に依る時間発展と、Off-Shell mode を含む時間発展との間に大きな差は見られなかった。しかし、同種粒子の 3 体散乱過程のように、散逸過程にエネルギーが保存する状態からの寄与がない場合には、Off-Shell mode の寄与は自明ではない。このような、散逸過程における Off-Shell mode の寄与を調べる事は今後の課題である。

参考文献

- [1] H.Umezawa, *Advanced Field Theory: Micro, Macro, and Thermal Physics* (American Institute of Physics, New York, 1993)
- [2] H.Umezawa and Y.Yamanaka, *Mod. Phys. Lett. A7* (1992) 3509
- [3] L. Kadanoff and G. Baym, *Quantum Statistical Mechanics Green's Function Methods in Equilibrium and Nonequilibrium Problems*, (Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1962).

Nelson's Stochastic Quantization in Thermo Field Dynamics

小林恵太, 山中由也^A

早大理工学研究所, 早大基幹理工電子光システム^A

量子化法のひとつとして Nelson 流確率過程量子化が知られている [1]. この方法は Schrödinger 方程式と等価な体系であり, 粒子の運動は Ito 型の確率微分方程式により記述されることになる. Nelson 流確率過程量子化の熱的状況への拡張は, 調和振動子ポテンシャル中の粒子に対し, 論文 [2] において現象論的に行われた. 本研究では Thermo Field Dynamics[3] を用いることにより Nelson 流確率過程量子化の熱的状況下への拡張を行う. Thermo Field Dynamics では密度行列を純粋状態として扱うことが可能であり, 密度行列の時間発展を Liouville-von Neumann 方程式と等価な TFD 型の Schrödinger 方程式により扱うことが可能となる. 我々は Nelson 流確率過程を拡張し TFD 型の Schrödinger 方程式と等価な体系となるように定式化した [4]. また Nelson 流確率過程における有限温度での不確定性について論じる.

Nelson の量子力学では二つの要請: (I) 時間前向き, 後向きに独立な確率微分方程式, (II) Newton-Nelson 運動方程式, から成り立っており, これら二つの要請から Schrödinger 方程式を導出することができる. 我々は Thermo Field Dynamics(TFD) の手法を Nelson の量子力学に適用することにより, Nelson の量子力学を熱的状況下に拡張する. TFD では倍加された Hilbert 空間 ($\mathcal{H} \rightarrow \hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$) を用いて定式化される. 倍加された Hilbert 空間上の状態ベクトル

$$|\Psi\rangle = \sum_n f_n |u_n, \tilde{u}_n\rangle, \quad (1)$$

を用いると, 物理量の期待値は以下のように表される.

$$\langle \Psi | A | \Psi \rangle = \sum_n f_n^2 \langle u_n | A | u_n \rangle = \text{Tr}[\rho A], \quad (2)$$

$$\rho = \sum_n f_n^2 |u_n\rangle \langle u_n|, \quad (3)$$

式 (2) は倍加された Hilbert 空間を用いて混合状態を記述できることを表しており, 実際に TFD は量子統計力学と等価な結果を与える. また, TFD の枠組みではチルダ・ノンチルダ粒子間の量子相関により熱揺らぎが現れると解釈できる. 状態ベクトル $|\Psi(t)\rangle$ の時間発展は以下の TFD 型の Schrödinger 方程式 $i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = (H - \tilde{H}) |\Psi(t)\rangle$ に従う. TFD 型の Schrödinger 方程式は Liouville-von Neumann 方程式 $i\hbar \frac{d}{dt} \rho(t) = \mathcal{L} \rho(t)$ と等価である. 我々は Nelson の量子力学を用いて座標表示での TFD 型の Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{x}, t) + \frac{\hbar^2}{2m} \tilde{\nabla}^2 - V(\tilde{\mathbf{x}}, t) \right] \Psi(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, t), \quad (4)$$

の導出を行う. ここで, チルダ・ノンチルダ自由度の Heisenberg 方程式, $i\hbar \frac{d}{dt} \tilde{A} = [\tilde{A}, H - \tilde{H}] = -[\tilde{A}, \tilde{H}]$, $i\hbar \frac{d}{dt} A = [A, H - \tilde{H}] = [A, H]$ から, チルダ自由度はノンチルダ自由度に対し時間逆向きの振る舞いをするようになる.

出発点として $\mathbf{x}(t), \tilde{\mathbf{x}}(t)$ は時間前向き発展に対しては, 以下の確率微分方程式に従うとする.

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}(\mathbf{x}(t), \tilde{\mathbf{x}}(t), t) dt + \sqrt{\frac{\hbar}{m}} d\mathbf{W}, \quad (d\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+dt) - d\mathbf{x}(t)), \quad (5)$$

$$d\tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{b}}_*(\mathbf{x}(t), \tilde{\mathbf{x}}(t), t) dt + \sqrt{\frac{\hbar}{m}} d\tilde{\mathbf{W}}_*, \quad (d\tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t) - d\tilde{\mathbf{x}}(t-dt)). \quad (6)$$

また時間後ろ向き発展に対しては以下の確率微分方程式に従うものとする.

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_*(\mathbf{x}(t), \tilde{\mathbf{x}}(t), t) dt + \sqrt{\frac{\hbar}{m}} d\mathbf{W}_*, \quad (d\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - d\mathbf{x}(t-dt)), \quad (7)$$

$$d\tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{x}(t), \tilde{\mathbf{x}}(t), t) dt + \sqrt{\frac{\hbar}{m}} d\tilde{\mathbf{W}}, \quad (d\tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t+dt) - d\tilde{\mathbf{x}}(t)). \quad (8)$$

ここで $d\mathbf{W}$, $d\tilde{\mathbf{W}}_*$, $d\mathbf{W}_*$, $d\tilde{\mathbf{W}}$ はそれぞれ独立なガウス型ホワイトノイズである. チルダ自由度の時間逆向きの振る舞いを再現するために, チルダ粒子 $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ は時間逆向きに振る舞うように設定する. そのため時間前向き微分, 後ろ向き微分を新たに以下のように定義する.

$$\bar{D}f(\mathbf{x}(t), \tilde{\mathbf{x}}(t), t) = \lim_{dt \rightarrow 0^+} E \left[\frac{f(\mathbf{x}(t+dt), \tilde{\mathbf{x}}(t), t+dt) - f(\mathbf{x}(t), \tilde{\mathbf{x}}(t-dt), t)}{dt} \middle| \mathbf{x}(t), \tilde{\mathbf{x}}(t) \right], \quad (9)$$

$$\bar{D}_*f(\mathbf{x}(t), \tilde{\mathbf{x}}(t), t) = \lim_{dt \rightarrow 0^+} E \left[\frac{f(\mathbf{x}(t), \tilde{\mathbf{x}}(t+dt), t) - f(\mathbf{x}(t-dt), \tilde{\mathbf{x}}(t), t-dt)}{dt} \middle| \mathbf{x}(t), \tilde{\mathbf{x}}(t) \right]. \quad (10)$$

$E[\cdots | \mathbf{x}(t), \tilde{\mathbf{x}}(t)]$ は条件付き期待値である. 更に, Newton-Nelson 方程式

$$m\mathbf{a} = -\nabla(V - \tilde{V}), \quad (11)$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\bar{D}_* \bar{D} + \bar{D} \bar{D}_*}{2} \mathbf{x}(t) \quad (12)$$

を要請する. 以上の要請から次の運動学的方程式, 力学的方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} = -\frac{\hbar}{2m} (\nabla^2 - \tilde{\nabla}^2) \mathbf{v} - \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}), \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} = \frac{\hbar}{2m} (\nabla^2 - \tilde{\nabla}^2) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla - \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla}) \mathbf{u} - (\mathbf{v} \cdot \nabla + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla}) \mathbf{v} - \frac{1}{m} \nabla(V - \tilde{V}) \quad (14)$$

を得る. ここで $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{b}_*)$, $\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{b}_*)$, $\tilde{\mathbf{u}} = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{b}} - \tilde{\mathbf{b}}_*)$, $\tilde{\mathbf{v}} = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{b}} + \tilde{\mathbf{b}}_*)$ である. 運動学的方程式, 力学的方程式は TFD 型の Schrödinger 方程式と等価である. 実際に $\mathbf{u} = \frac{\hbar}{m} \nabla \text{Re} \ln \Psi$, $\tilde{\mathbf{u}} = \frac{\hbar}{m} \tilde{\nabla} \text{Re} \ln \Psi$, $\mathbf{v} = \frac{\hbar}{m} \nabla \text{Im} \ln \Psi$, $\tilde{\mathbf{v}} = \frac{\hbar}{m} \tilde{\nabla} \text{Im} \ln \Psi$ と変数変換することにより, TFD 型 Schrödinger 方程式を導出することができる.

具体的に TFD 形式による Nelson 量子力学を調和振動子中の粒子の運動に適用する. TFD 型 Schrödinger 方程式は以下で与えられる.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, \tilde{x}, t) = (H - \tilde{H}) \Psi(x, \tilde{x}, t), \quad H = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\omega^2 m}{2} x^2 \right). \quad (15)$$

有限温度における TFD 型 Schrödinger 方程式の平衡解は解析的に以下の形で与えられ

$$\Psi_{\text{eq}}(x, \tilde{x}) = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \exp \left(-\frac{m\omega}{\hbar} \frac{(x^2 + \tilde{x}^2) \cosh(\beta\hbar\omega/2) - 2x\tilde{x}}{2 \sinh(\beta\hbar\omega/2)} \right), \quad (16)$$

対応する確率微分方程式は以下のようなになる.

$$d\mathbf{x}(t) = -\omega \left(x(t) \frac{\cosh(\beta\hbar\omega/2)}{\sinh(\beta\hbar\omega/2)} - \tilde{x}(t) \frac{1}{\sinh(\beta\hbar\omega/2)} \right) dt + \sqrt{\frac{\hbar}{m}} d\mathbf{W}, \quad (d\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+dt) - d\mathbf{x}(t)), \quad (17)$$

$$d\tilde{\mathbf{x}}(t) = \omega \left(\tilde{x}(t) \frac{\cosh(\beta\hbar\omega/2)}{\sinh(\beta\hbar\omega/2)} - x(t) \frac{1}{\sinh(\beta\hbar\omega/2)} \right) dt + \sqrt{\frac{\hbar}{m}} d\tilde{\mathbf{W}}_*, \quad (d\tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t) - d\tilde{\mathbf{x}}(t-dt)). \quad (18)$$

我々の確率微分方程式では熱揺らぎは速度場項に現れていることが解る. また絶対零度 $\beta \rightarrow \infty$ の極限では通常の Nelson の確率微分方程式が再現される. 図 1 に $(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}})$ 平面でのサンプルパスを示した. 温度が高くなると \mathbf{x} 粒子, $\tilde{\mathbf{x}}$ 粒子の間に強い相関が現れることが解る. これは TFD において熱揺らぎが \mathbf{x} 粒子, $\tilde{\mathbf{x}}$ 粒子の量子相関として現れることを反映している. 図 2 には TFD 型 Schrödinger 方程式から解析的に求めた有限温度における粒子の確率分布 (図 2-A) と多数回の施行によりサンプルパスから作成したヒストグラムを示した. 両者はよく一致していることが確かめられる.

最後に Nelson 量子力学における不確定性関係について触れる. 前向き運動量 $\mathbf{p} = m\mathbf{b}$, 後ろ向き運動量 $\mathbf{p}_* = m\mathbf{b}_*$ 分散と粒子の位置 $\mathbf{x}(t)$ の分散には次の不等式が成り立つことが証明できる [5].

$$\sqrt{\text{Var}[\mathbf{x}_i]} \sqrt{\text{Var}[(p_i - p_{*i})/2]} \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (19)$$

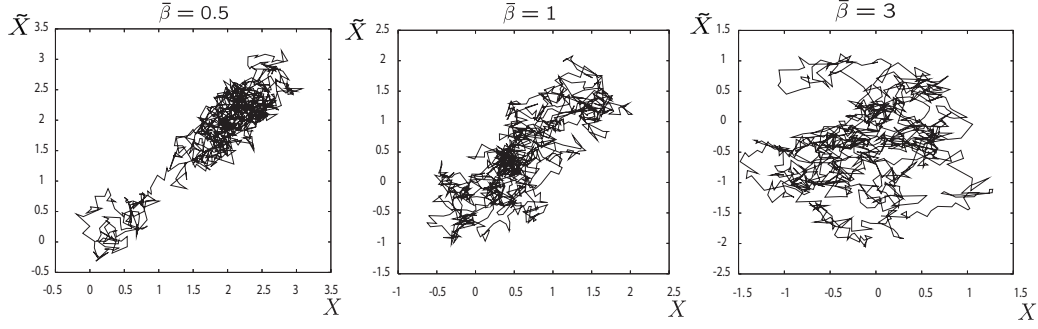


図 1: The typical sample path on (X, \tilde{X}) plane for $\tilde{\beta} = 0.5$, $\tilde{\beta} = 1$ and $\tilde{\beta} = 3$ with $\tilde{\beta} = \hbar\omega\beta$ and $X = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$.

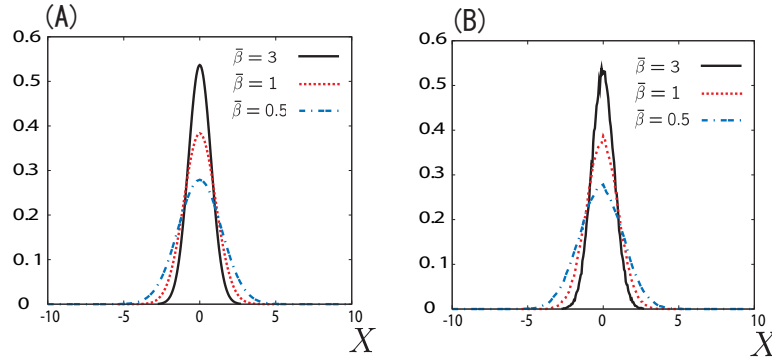


図 2: Figure (A): The analytic solutions of the probability distribution for $\tilde{\beta} = 3$, $\tilde{\beta} = 1$ and $\tilde{\beta} = 0.5$ with $\tilde{\beta} = \hbar\omega\beta$ and $X = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$. Figure (B): The probability distribution which is obtained numerically from 10^5 sample paths of the non-tilde and tilde stochastic equations.

この不等式が Nelson の量子力学における位置と運動量の不確定性関係を表している。いま位置と運動量の不確定性の積 $\sqrt{\text{Var}[x_i]}\sqrt{\text{Var}[(p_i - p_{*i})/2]}$ を有限温度調和振動子ポテンシャル中の確率微分方程式から計算すると以下の関係式を得る。

$$\sqrt{\text{Var}[x_i]}\sqrt{\text{Var}[(p_i - p_{*i})/2]} = \frac{\hbar}{2} + \hbar n \quad \left(n = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \right). \quad (20)$$

有限温度における不確定性関係は量子揺らぎ $\frac{\hbar}{2}$ と熱揺らぎ $\hbar n$ から成り立つことが解る。この結果は有限温度における不確定性関係 [3] と一致しており、我々の定式化は量子統計力学の結果を再現するものであることが解る。

参考文献

- [1] Nelson E 1966 *Phys. Rev.* **150** 1079
- [2] Ruggiero P and Zannetti M 1982 *Phys. Rev. Lett.* **48** 963.
- [3] Umezawa H 1993 *Advanced Field Theory — Micro, Macro and Thermal Physics*, (AIP, New York).
- [4] K.Kobayashi and Y.Yamanaka WU-HEP-10-07,arXiv: 1007.3603v1[quant-phy]
- [5] Falco D, Martino S, and Siena S 1982 *Phys. Rev. Lett.* **49** 181

Entropy Production in Gluodynamics with Kadanoff-Baym equation

A. Nishiyama

Yukawa Institute for Theoretical Physics, Kyoto University,

1 Introduction

Recent experimental and theoretical analyses suggest that a new form of matter made of quarks and gluons is created in heavy ion collisions at relativistic heavy ion collider (RHIC). Hydrodynamic models can quantitatively describe radial and elliptic flows of created matter at RHIC very well. They suggest that local thermalization of partons occurs in very early stage of collisions (0.6-1.0fm/c) from the numerical analyses of elliptic flows [1]. This short thermalization time is compatible with the formation time of partons and can not be explained by naive parton picture [2]. This means that a normal approach with Boltzmann equation has serious problems in describing the early stage of heavy ion collisions. Furthermore we should not apply Boltzmann approach to a dense system, such as a glasma.

Hence we are trying to adopt nonequilibrium quantum field theoretical approach in the dynamical description of local thermalization processes in the early stage of heavy ion collisions. As a representative method, we apply the Kadanoff-Baym (KB) equation to thermalization processes of glasma [3, 4, 5]. This equation is quantum time evolution equation of two point Green's functions. The merits of solving this equation are that it is possible to trace quantum nonequilibrium dynamics with conservation law, such as energy, momentum, charge, and so on [6], and to include off-shell dynamics due to parton decay width and memory effects of the equation, which is for example expressed by particle number changing processes, such as $g \leftrightarrow gg$, $g \leftrightarrow ggg$ and so forth. This off-shell dynamics is prohibited in a normal Boltzmann approach. Thus it might play a significant role in the local thermalization of glasma and give a new insight in heavy ion collisions.

This paper is organized as follows. In Sec. 2 we first write down KB equation in gluodynamics for two-point Green's functions in temporal axial gauge (TAG). Then by use of kinetic entropy current based on this equation, we show the H-theorem with respect to off-shell particle number changing process $g \leftrightarrow gg$. In Sec. 3 we show equilibration of gluons in 2+1 dimensions by solving KB equation with transverse scattering processes. We find that the off-shell particle number changing processes can contribute to thermalization of glasma. We summarize our work in Sec. 4.

2 Kadanoff-Baym equation and H-theorem for Gluodynamics

In this section we review KB equation for gluons in temporal axial gauge $A^0 = 0$ and show the H-theorem for a given self-energy. We neglect classical field $\langle A \rangle = 0$ and concentrate on quantum fluctuations. (Here brackets mean statistical average for a proper density matrix.) With respect to symmetric $F \equiv \langle \{A(x), A(y)\} \rangle$ and antisymmetric fluctuations $\rho \equiv i[A(x), A(y)]$ for the exchange of x and y we can write down KB equations as follows,

$$\begin{aligned} \left[(\delta_{ij} \partial_x^2 + \partial_{x,i} \partial_{x,j}) \delta^{ab} + \Pi_{\text{loc},ij}^{ab}(x) \right] F_{jk}^{bc}(x, y) &= \int_{t_0}^{y^0} dz \Pi_{F,ij}^{ab}(x, z) \rho_{jk}^{bc}(z, y) \\ &- \int_{t_0}^{x^0} dz \Pi_{\rho,ij}^{ab}(x, z) F_{jk}^{bc}(z, y), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\left[(\delta_{ij} \partial_x^2 + \partial_{x,i} \partial_{x,j}) \delta^{ab} + \Pi_{\text{loc},ij}^{ab}(x) \right] \rho_{jk}^{bc}(x, y) = - \int_{y^0}^{x^0} dz \Pi_{\rho,ij}^{ab}(x, z) \rho_{jk}^{bc}(z, y), \quad (2)$$

where $\{i, j\} = 1, 2, \dots, d$ (d : spatial dimension) and $\{a, b, c\} = 1, 2, \dots, N^2 - 1$. The function F is called statistical function which contains information of distribution of partons, and the ρ is spectral function that gives which state partons are occupied in and how large decay width of partons are. The self-energy Π has two parts. It is for example expressed in Fig. 1 for the leading order of the coupling expansion. The local part of the self-energy Π_{loc} is contribute mass-shift, while the nonlocal

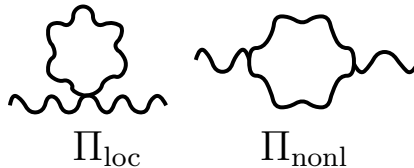


Figure 1: Leading order self energy for gluons.

parts Π_F (symmetric for the exchange of x and y) and Π_ρ (antisymmetric) parts couple two different momentum mode for the leading order of coupling expansion and contribute to $g \leftrightarrow gg$ while in the hard thermal loop approximation they contribute to a mass shift (Debye mass).

Next we give the divergence of kinetic entropy current s^μ based on KB equation by Fourier transforming (2) with respect to $x - y$, assuming spatial uniformity and isotropy of Green's functions in color index, decomposing Green's function and self-energy into transverse (T) and longitudinal (L) part and taking 1st order of the gradient expansion. The exact form of s^μ given in [7] is derived by the extension of scalar theory [8] and tends to normal expression $\int_{\mathbf{k}} v^\mu [(1 + n_{\mathbf{k}}) \ln(1 + n_{\mathbf{k}}) - n_{\mathbf{k}} \ln n_{\mathbf{k}}]$ in quasiparticle approximation where v^μ is velocity and $n_{\mathbf{k}}$ is number distribution function. For the given entropy current s^μ and leading order self-energy in Fig. 1 we can derive the following relations

$$\partial_\mu s^\mu = (\text{TTT}) + (\text{TTL}) + (\text{TLL}) \geq 0 \quad (3)$$

where {T,L} is labeled on each Green's function. These terms represent three gluonic scattering processes, such as $g \leftrightarrow gg$ and $0 \leftrightarrow ggg$, where (T) or (L) is labeled on each gluon. It is possible to show each term is semi-positive definite. Equality holds when local equilibration is achieved. We find that analytical calculation shows that off-shell dynamics, such as $g \leftrightarrow gg$, contributes to entropy production.

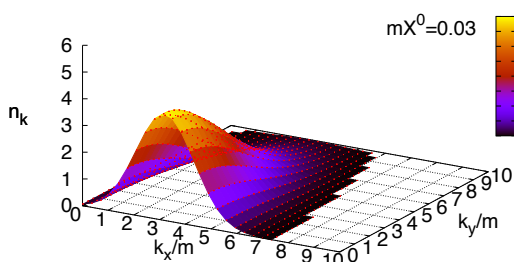


Figure 2: Number distribution function $n_{\mathbf{k}}(mX^0 = 0.03)$ with $g^2/m = 0.08$ and $N = 3$.

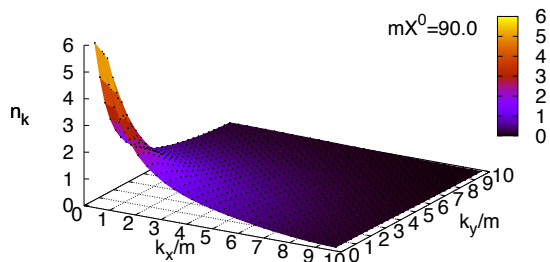


Figure 3: Number distribution function $n_{\mathbf{k}}(mX^0 = 90.0)$ with $g^2/m = 0.08$ and $N = 3$.

3 Numerical analysis

In this section we numerically show the KB dynamics (1)-(2) with only transverse modes which describes the thermalization of gluons in 2+1 dimensions. We shall assume uniformity in coordinate

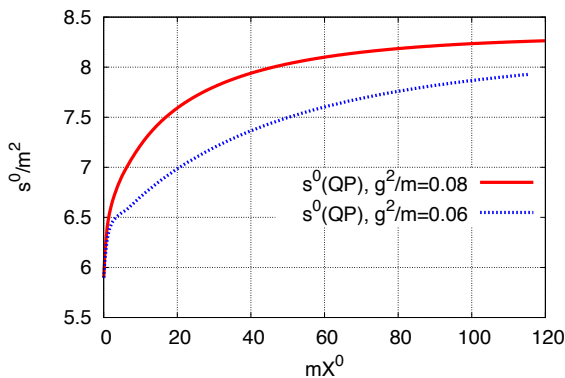


Figure 4: Time evolution of entropy density in quasiparticle approximation for $g^2/m = 0.08$ and 0.06 with $N = 3$.

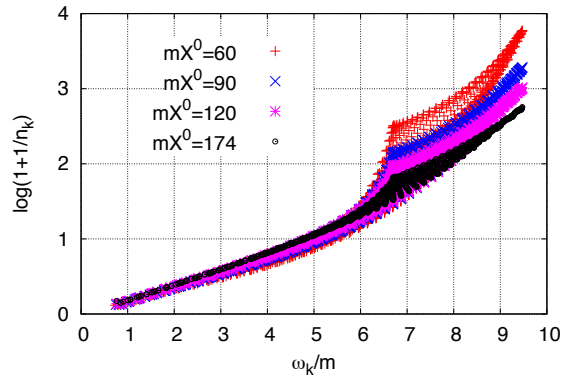


Figure 5: Logarithmic plot of number distribution function $\ln(1 + 1/n_{\mathbf{k}})$ at late times. ($g^2/m = 0.08$, $N = 3$)

space, use the replacement $\Pi_{\text{loc}} \rightarrow m^2$ to see off-shell effects and consider nonthermal (Gaussian, anisotropic in momentum space) distribution functions described in Fig. 2. Starting with this initial condition, KB dynamics shows that the distribution function $n_{\mathbf{k}}$ extracted in solving KB equation approaches to that shown in Fig. 3 as time goes by. Other initial conditions also show similar behaviors. In the time evolution we observe the entropy production (we have used entropy density $\int_{\mathbf{k}} (1+n_{\mathbf{k}}) \ln(1+n_{\mathbf{k}}) - n_{\mathbf{k}} \ln n_{\mathbf{k}}$) as shown in Fig. 4. A rapid increase at early time and a saturation at late time are observed. In the end we find that distribution functions approach Bose-Einstein distribution at late time from logarithmic plot in Fig. 5. As shown here, entropy production and resultant local thermalization due to off-shell dynamics are realized numerically, which are prohibited in normal on-shell Boltzmann analyses. This result is consistent with analytical results in the previous section.

4 Summary

In this paper we have written the KB equation for gluodynamics in temporal axial gauge. As an interaction we have adopted leading order self-energy of coupling expansion. Next we have introduced kinetic entropy current and showed the H-theorem for the off-shell dynamics in analytical calculation in order to confirm whether leading order self-energy (which contributes to such as $g \leftrightarrow gg$) contributes to thermalization of the system. Finally we have given numerical analyses. We find that entropy production and resultant local thermalization occurs due to the given off-shell processes. This numerical result is consistent with analytic proof of H-theorem. These off-shell effects have been neglected in normal on-shell approaches. They might play a significant role in the early thermalization of the glasma and help the understanding of heavy ion collisions. Our next step is to simulate KB equation in 3+1 dimensions with fine tuning of initial condition of glasma.

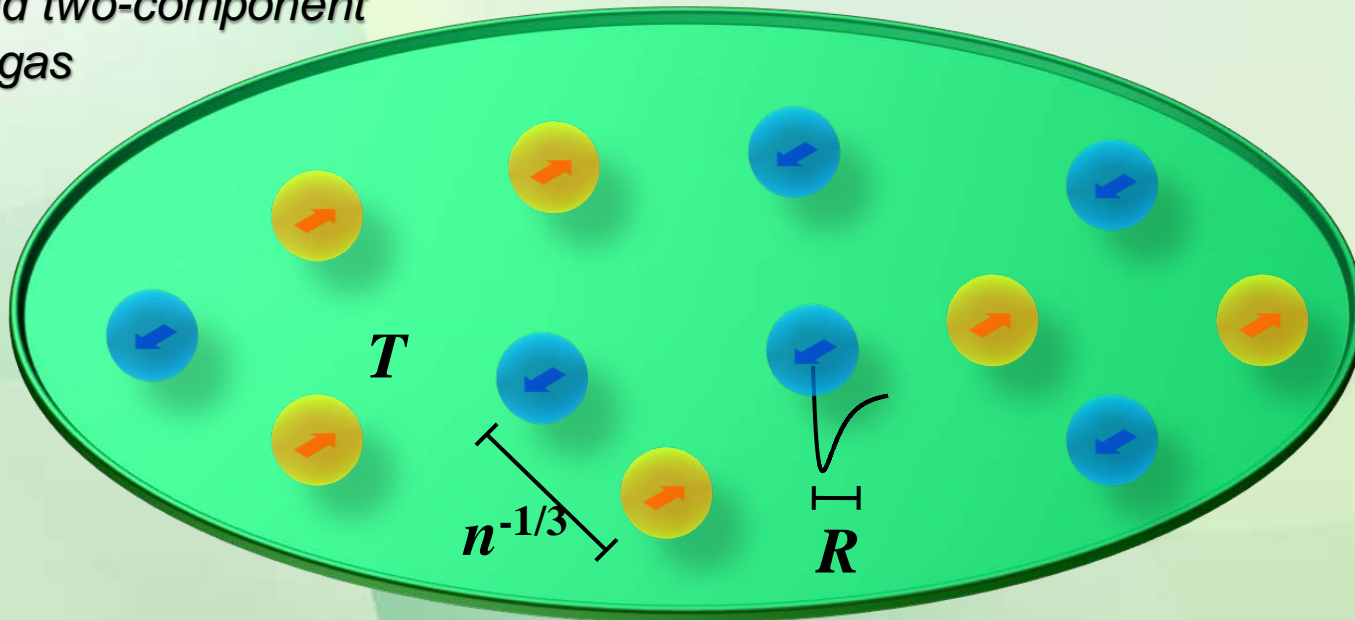
References

- [1] U. W. Heinz and P. F. Kolb, Nucl. Phys. **A702** (2002) 269; U. W. Heinz, AIP Conf. Proc. **739** (2005) 163.
- [2] R. Baier, A. H. Nueller, D. Schiff and D. T. Son, Phys. Lett. **B502** (2001) 51
- [3] G. Baym and L. Kadanoff, Phys. Rev. **124** (1961) 287.
- [4] L.P. Kadanoff, G. Baym, *Quantum Statistical Mechanics* (Benjamin, New York, 1962).
- [5] J. Berges, AIP Conf. Proc. **739** (2005) 3 [hep-ph/0409233].
- [6] G. Baym, Phys. Rev. **127** (1962) 1391.
- [7] A. Nishiyama and A. Ohnishi, [nucl-th/10114750].
- [8] Y.B. Ivanov, J. Knoll, and D.N. Voskresensky, Nucl. Phys. **A672** (2000) 313; T. Kita, J. Phys. Soc. Jpn. **75** (2006) 114005; A. Nishiyama, Nucl. Phys. A **832** (2010) 289, [nucl-th/08105003].

強く相互作用するフェルミ粒子系の熱力学

電気通信大学 向山敬

ultracold two-component
Fermi gas



- ultracold : s-wave is the dominant channel.

→ yellow collide only with blue

- dilute : details of the potential is much smaller than $n^{-1/3}$

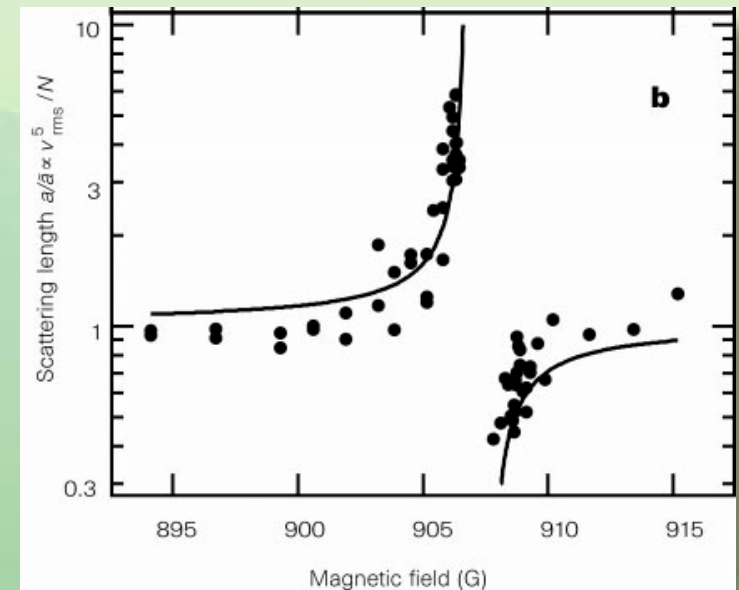
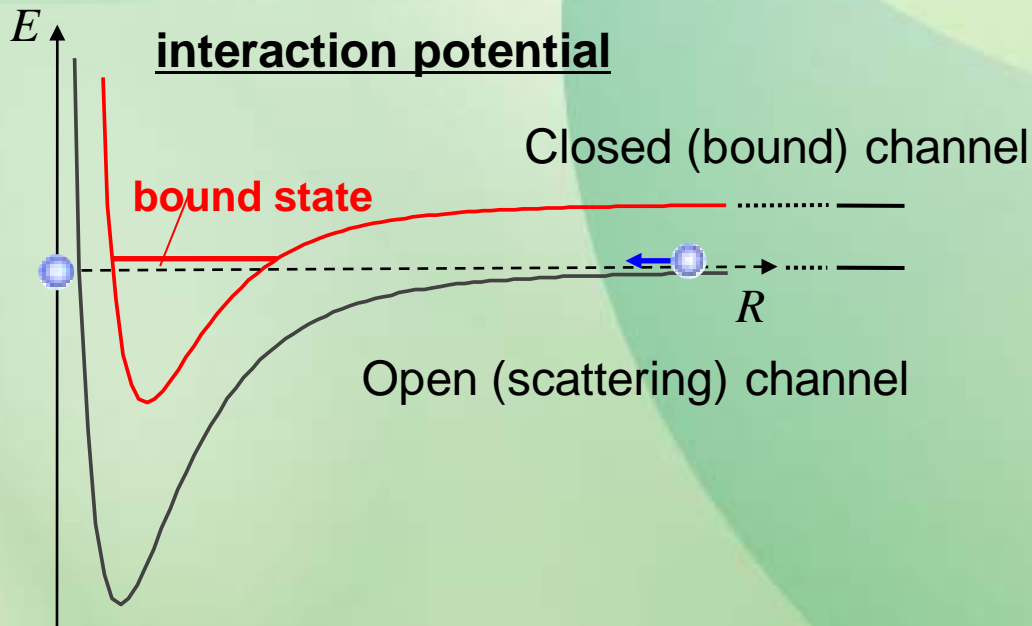
→ The collision process can be described by a single parameter, so-called **scattering length** a_s .

Interaction is tunable!!

Feshbach resonance

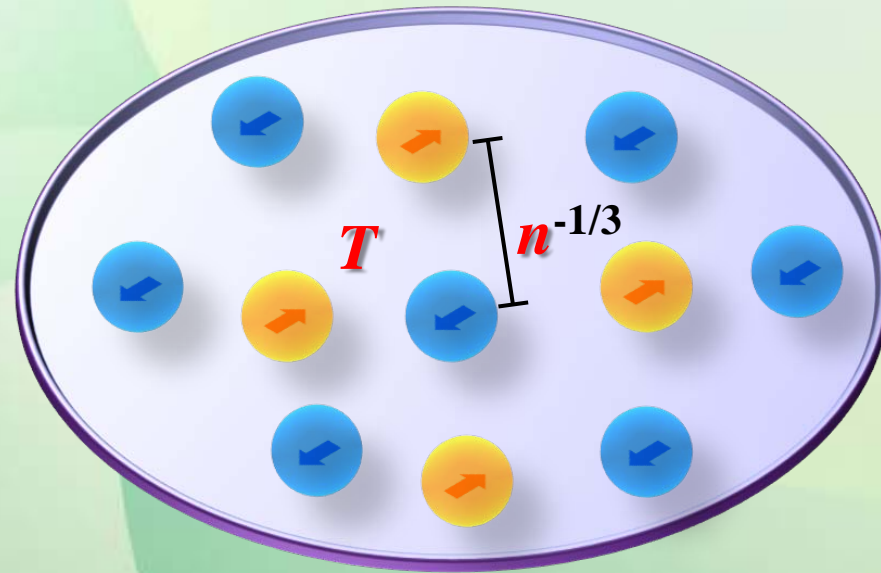
Two channels corresponding to different spin states.

Resonance occurs when open and closed channel are energetically degenerate.



S. Inouye, et al.,
Nature **392**, 151 (1998).

By taking advantages of the tunability of the scattering length, one can achieve the condition of infinite scattering length. Under such a condition, the thermodynamics only depends on the temperature and the atomic density of the gas.



Since a_s diverges, a_s drops out of the thermodynamic description.

Universal hypothesis (UH) : “ Universal thermodynamics can be described only by the **density n** and **temperature T** ”

Universal thermodynamics

According to the UH, all thermodynamics should obey the universal functions of

$$\text{Fermi energy : } \varepsilon_F(n) = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}$$

$$\text{reduced temperature : } \theta(n, T) = \frac{k_B T}{\varepsilon_F(n)} = \frac{T}{T_F(n)}$$

$$\text{Internal energy : } E = N\varepsilon_F(n) f_E[\theta]$$

$$\text{Helmholtz free energy : } F = N\varepsilon_F(n) f_F[\theta]$$

$$\text{Chemical potential : } \mu = \varepsilon_F(n) f_\mu[\theta]$$

$$\text{Entropy : } S = Nk_B f_S[\theta]$$


Dimensionless universal functions

, which have not been determined experimentally so far.

inhomogeneous density profile of a trapped gas

T is constant over the cloud (thermal equilibrium).

T_F depends on the density.


 $\theta = \frac{T}{T_F(n)}$ is position-dependent.



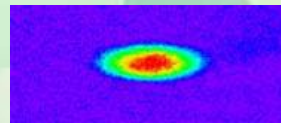
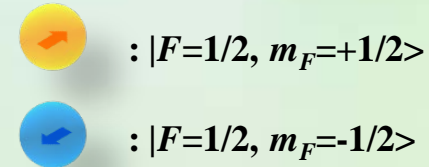
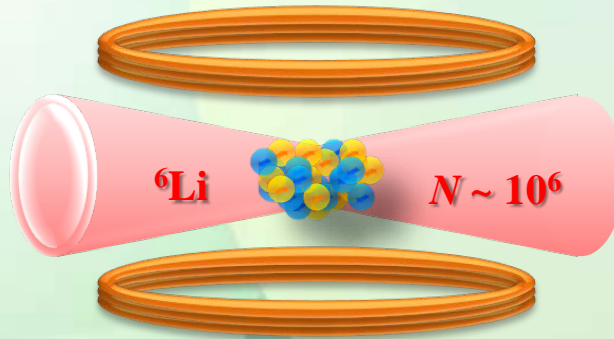
$$\frac{T}{T_F(n_0)}$$

$$\frac{T}{T_F[n(\mathbf{r})]} \geq \frac{T}{T_F(n_0)}$$

Global measurement only gives you the integration of all the different phases.

834Gauss

(Resonance magnetic field of Feshbach resonance)

Optical dipole trap
(1064nm)

density profile

$$\longrightarrow n(\mathbf{r})$$

Local internal energy density : $\frac{\mathcal{E}(\mathbf{r})}{n(\mathbf{r}) \varepsilon_F [n(\mathbf{r})]} = f_E [T/T_F]$

Determination of \mathcal{E}

Equation of state : $p = \frac{2}{3} \mathcal{E}$ at any temperature at the unitarity limit

mechanical equilibrium (eq. of force balance) :

$$\nabla p(\mathbf{r}) + n(\mathbf{r}) \nabla V_{\text{Trap}}(\mathbf{r}) = 0$$

Scheme

Local internal energy density : $\frac{\mathcal{E}(\mathbf{r})}{n(\mathbf{r}) \varepsilon_F [n(\mathbf{r})]} = f_E [T/T_F]$

Thermometry

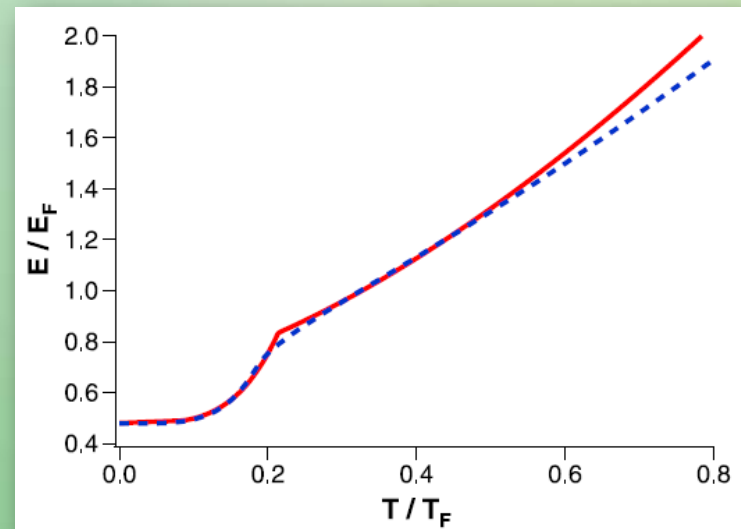
$$p = \frac{2}{3} \mathcal{E} \quad \text{and} \quad \nabla p(\mathbf{r}) + n(\mathbf{r}) \nabla V_{\text{Trap}}(\mathbf{r}) = 0 \quad \longrightarrow \quad E_{\text{total}} = 2 \times E_{\text{potential}}$$

virial theorem!!

Adiabatic B-field sweep to an ideal Fermi gas condition (isentropic process) \longrightarrow entropy S

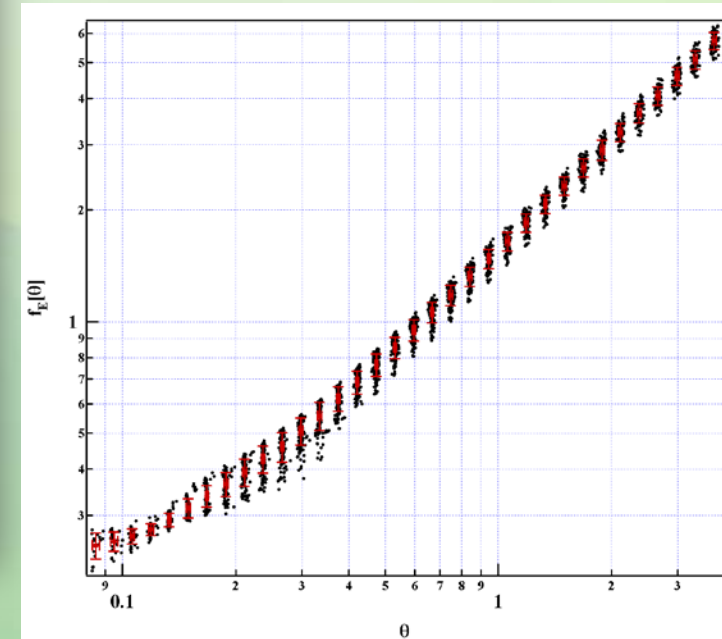
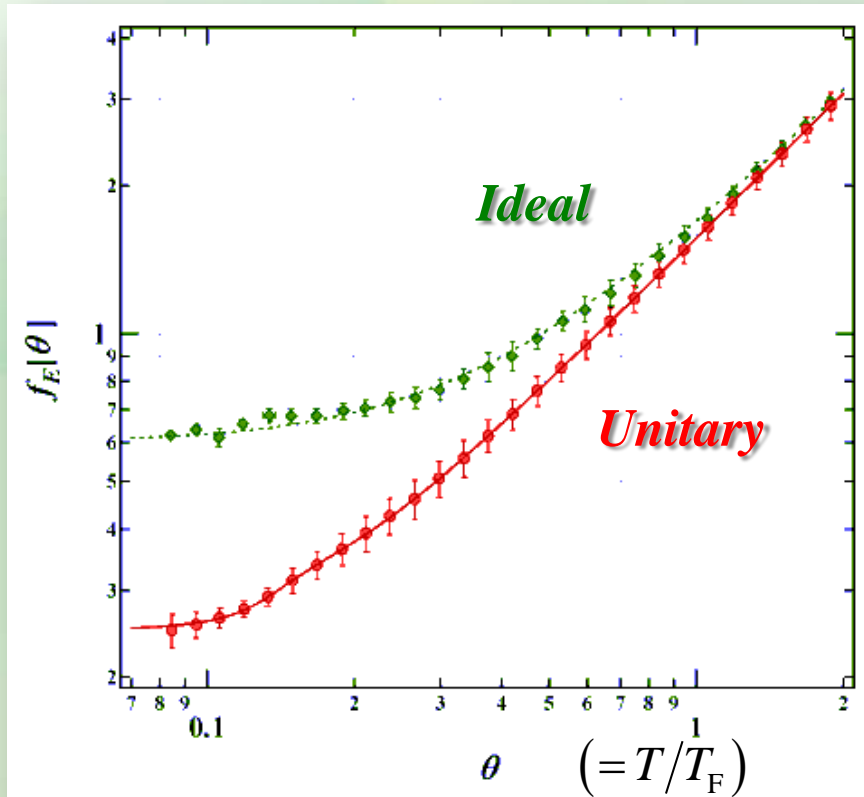
$$E_{\text{total}} \text{ vs } S \quad \longrightarrow \quad E_{\text{total}} \text{ vs } T$$

\uparrow
 $1/T = \partial S / \partial E$



Experimental determination of $f_E[\theta]$

$$f_E[T/T_F] = \frac{\mathcal{E}(\mathbf{r})}{n(\mathbf{r}) \varepsilon_F[n(\mathbf{r})]}$$



M. Horikoshi, S. Nakajima,
M. Ueda and T. Mukaiyama,
Science, **327**, 442 (2010).

About 800 images are analyzed.

Experimental double check of the determined energy function

Check 1

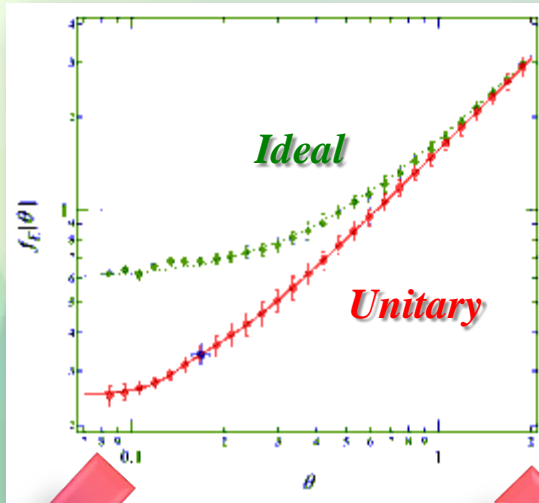
At the unitarity, $E_{\text{potential}} = E_{\text{internal}}$ holds.

$$E_{\text{potential}} = \frac{3}{2} m \omega_z^2 \langle z^2 \rangle$$

can be calculated directly from the density profile. And

$$E_{\text{internal}} = \int n \varepsilon_F(n) f_E[\theta] dV / N$$

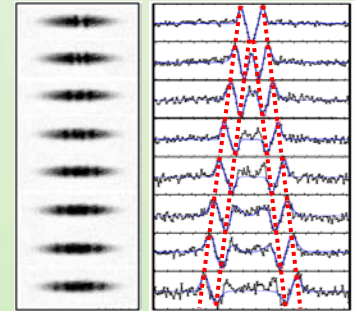
can be calculated using the energy function and the density profile.



Check 2

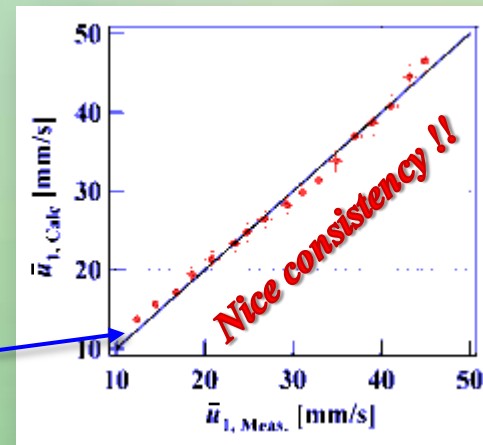
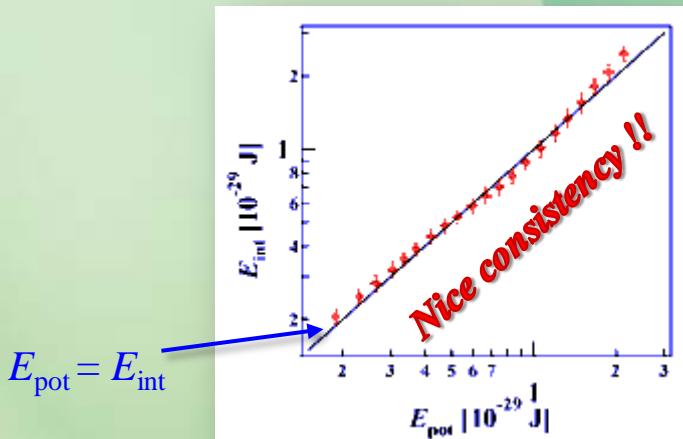
Speed of sound can be calculated from the energy function, and can also be measured experimentally.

$$u^2[n, \theta] = \frac{\iint n \, dx dy}{m \iint n \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)^{-1} \, dx dy} \Bigg|_{z=0}$$



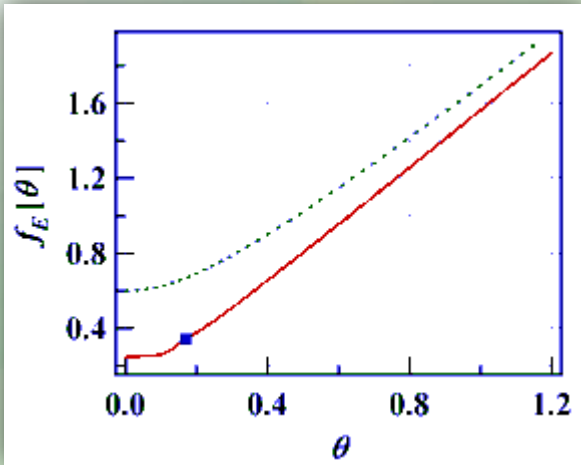
Energy comparison

Speed of the first sound



The critical values at the unitarity limit

Internal energy

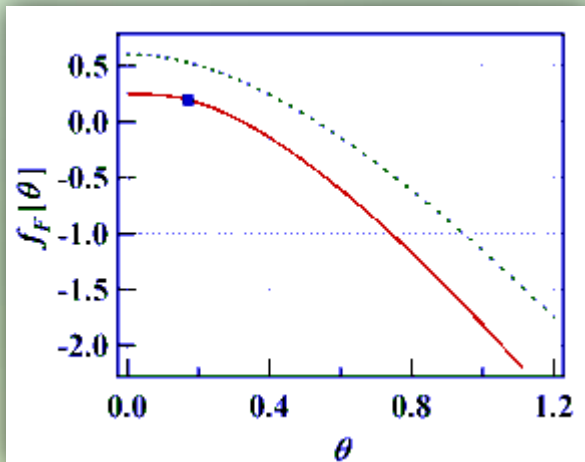


$$f_E[\theta] = f_F[\theta] - \theta f'_F[\theta]$$

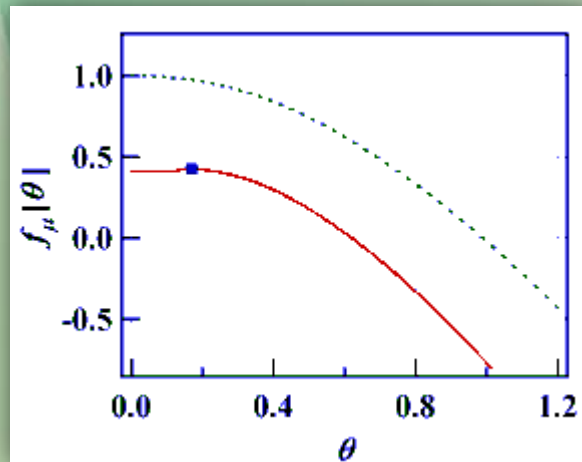
$$f_\mu[\theta] = (5f_E[\theta] - 2\theta f'_F[\theta])/3$$

$$f_S[\theta] = -f'_F[\theta]$$

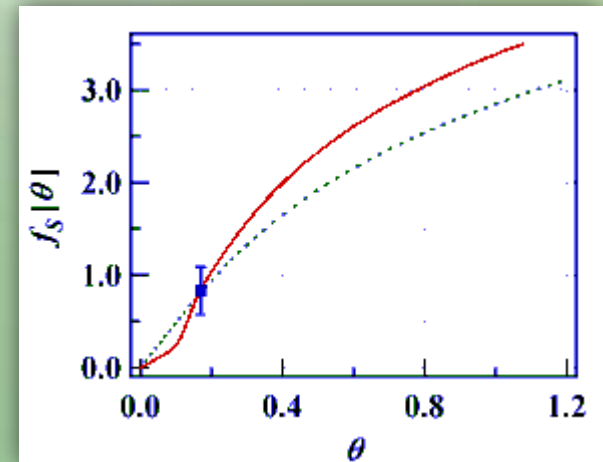
Helmholtz free energy



Chemical potential



Entropy



Summary

- *The universal function of the internal energy was determined at the unitarity limit*

Universal hypothesis : $\mathcal{E} = n\varepsilon_F(n)f_E[\theta]$

Equation of state : $p = \frac{2}{3}\mathcal{E}$

Mechanical equilibrium : $\nabla p(\mathbf{r}) + n(\mathbf{r})\nabla V_{\text{Trap}}(\mathbf{r}) = 0$

- *The other thermodynamic functions were derived from the thermodynamic relationship*
- *The critical parameters were determined at the superfluid transition temperature*

冷却原子系における Bose-Einstein 凝縮と Hawking 輻射

京都大学基礎物理学研究所 森成 隆夫

E-mail: morinari@yukawa.kyoto-u.ac.jp

ブラックホールに関連した興味深い現象に Hawking 輻射がある。ブラックホールは物を吸い込むだけでなく輻射をだしているという Hawking の指摘以来、精力的に研究がなされてきた。しかしながら、現実のブラックホールから見積もられる Hawking 輻射の温度はせいぜい数 10 nK 程度であり、観測はほとんど不可能である。この Hawking 輻射という現象を、流体のアナロジーを用いて検証しようという試みがある。特に、冷却原子系の Bose-Einstein 凝縮体を用いることで Hawking 輻射の物理を検証できる可能性がある。この稿では、そのような試みの定式化と数値シミュレーション結果について紹介する。

1 はじめに

古典的にはブラックホールは何でも物を吸い込む存在であるが、Bekenstein[1] によるブラックホールが持つ熱力学性質に関する指摘の後、Hawking が量子効果によってブラックホールが輻射を出しているという主張を 1974 年に行った [2, 3]。その後、関心が持たれ精力的な研究がなされてきた。しかしながら、この Hawking 輻射を実験的に検証しようという試みはほとんど無い。太陽程度の質量を持つ星がブラックホールになったとして、Hawking 輻射の温度を評価すると 60nK 程度である。Hawking 輻射の温度はブラックホールの質量に反比例するので、より重いブラックホールでは、Hawking 輻射の温度はさらに低くなる。宇宙背景輻射の温度が 3K 程度であるから、現実のブラックホールからの Hawking 輻射を観測することはほとんど絶望的である。

このように現実のブラックホールを用いて、Hawking 輻射の物理を検証することは非常に難しい。そこで流体とのアナロジーを用いて、その核心となる部分を検証しようという試みがある。Unruh が 1981 年に曲がった時空の場の理論と流体の方程式の間に対応関係があることを見いだした [4, 5]。最初の提案は古典流体に関してのものであったが、その後、量子流体や類似のアナロジーが提案された [6]。この稿では、近年物性分野で盛んに研究されている冷却原子系を用いて、Hawking 輻射の物理を検証する試みについて紹介する。次の節で、Bose-Einstein 凝縮と冷却原子について述べ、3 節でブラックホールと Hawking 輻射について簡単に述べる。4 節で Bose-Einstein 凝縮系とブラックホールとの対応関係を示し、5 節で数値シミュレーション結果について述べる。

2 Bose-Einstein 凝縮と冷却原子

まず Bose-Einstein 凝縮について要点をまとめる。相互作用していない粒子系を考え、一体の量子力学的なエネルギー準位が $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ と与えられているとする。この準位に N 個の粒子を詰めていくことを考える。フェルミオンの場合には、Pauli の排他原理に注意しながら詰めていくことになるが、ボソンを詰めていく場合にはひとつの準位を占める粒子数に特に制限はない。各準位をどれだけの粒子が占めているかは、次の Bose-Einstein 分布で与えられる:

$$n(\varepsilon) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{k_B T}\right) - 1}, \quad (1)$$

ここで μ は化学ポテンシャルで k_B は Boltzmann 定数、 T は温度である。高温のときには、ひとつの準位を多数の粒子が占めるということは起きない。しかし、温度を下げていくと、ある温度以下で最低エネルギー準位を占める粒子数が $O(N)$ になる。この現象を Bose-Einstein 凝縮と呼び、転移温度以下では $\mu = \varepsilon$ となる。¹

この Bose-Einstein 凝縮という現象は Bose と Einstein による指摘によって古くから知られていたが、実際に実験的に実現したのは 1995 年のこと²である。Bose-Einstein 凝縮が実現したのは冷却原子系と呼ばれる系である [7]。冷却原子系では、まず原子集団を準備し、レーザー光を照射する。原子の量子力学的準位の共鳴振動数に相当するレーザー光を当てると原子はレーザー光を吸収し、レーザー光の運動量を受け取る。この性質を利用して、共鳴振動数よりわずかに小さいレーザー光を原子集団にあてる。ドップラー効果によって、レーザー光に向かって運動する原子のみがレーザー光を吸収する。励起された原子は、しばらくたって光を放射するが、放射される光は等方的であるので、全体として原子は減速される。このドップラー冷却というテクニックを用いて、原子の運動はどんどん遅くなっていく。そのままでは、原子は拡散してしまうが、磁場とレーザー光の偏向を調節することで、原子集団を保持することができる。(磁気光学トラップと呼ばれる。)そして、運動エネルギーの大きな原子を捨てていくことで(蒸発冷却)、温度をさらに下げることができる。こうして Bose-Einstein 凝縮が実現する。

この冷却原子系における Bose-Einstein 凝縮は、冷却原子系における Bose-Einstein 凝縮を達成した 3 人の実験家が 2001 年の Nobel 賞を受賞したことからもわかるように実験的には高度な技術が要求される。しかし、理論的な扱いは単純である。通常の気体との違いは、冷却原子系におけるトラップポテンシャルの存在で、このトラップポテンシャルは 3 次元調和振動子のポテンシャルで表される:

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega_{ho}^2 r^2,$$

ここで m は捕獲された原子の質量である。

冷却原子系が他の系と比較して有利な点はいくつかある。まず、系のパラメータを制御することが可能であり、相互作用やトラップポテンシャルを変えることができる。また、レーザー光による定在波を導入することで人工的な結晶格子を導入できる。その他、原子の内部自由度の存在によって様々なトポロジカルな性質を持つ励起状態を作ることができる。こうした特長から現在も活発な研究が展開されている。ただし、他の物性系と比較して測定手段が限られることがひとつの難点である。

3 ブラックホールと Hawking 輻射

次にブラックホールと Hawking 輻射について簡単に述べる。重力が他の力と著しく異なる点は、等価原理によって重力の影響を一般座標変換に押し込めてしまえる点である。このため、重力の効果は時空の性質に置き換えられ、重力場は次の Einstein 方程式によって記述される:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}.$$

¹ $\mu = \varepsilon$ となるのは熱力学極限の場合で、 N を有限にした場合には $\varepsilon - \mu = O(1/N)$ である。

² ^4He の超流動転移を Bose-Einstein 凝縮と関連づけることもできるが、この場合には液体の凝縮である。気体で起きることが実験的に検証されたということに意義がある。

ここで $R_{\mu\nu}$ は Ricci テンソル、 $g_{\mu\nu}$ は時空の計量、 R はスカラー曲率であり左辺は時空の幾何学的性質を記述している。右辺の G は重力定数、 $T_{\mu\nu}$ は物質のエネルギー運動量テンソルである。Einstein 方程式の球対称な解として Schwarzschild 解が知られている。Schwarzschild 時空での計量は次式で与えられる：

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

ここで r_g はホライズン半径であり、 $r_g = 2GM/c^2$ である。太陽については $r_g = 3$ km、地球については $r_g = 1$ cm、人では r_g は原子の大きさよりもむしろ Planck 長さに近い。 $v = -c\sqrt{r_g/r}$ として自由落下する観測者の時間 \tilde{t} を

$$cd\tilde{t} = cdt - \frac{v/c}{1 - v^2/c^2} dr$$

で導入すると、計量は次のように書き換えられる：

$$ds^2 = c^2 d\tilde{t}^2 - (dr - v d\tilde{t})^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (2)$$

流体と直接対応する計量がこの計量であることを後の節で示す。

光が進む経路は $ds = 0$ を解くことで得られ、

$$ct = \pm \left(r + r_g \ln \left| \frac{r}{r_g} - 1 \right| \right)$$

である。対数関数の部分の存在によって Schwarzschild 時空での平面波の伝播は通常と著しく異なってくる。計量 $g_{\mu\nu}$ の元での場の方程式は

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} \right) = 0 \quad (3)$$

で与えられる。ここで $g = \det(g_{\mu\nu})$ である。この方程式を極座標系で解くと、外向き球面波と内向き球面波の解が得られる。(以下では s 波の場合のみを考える。) どちらの解も無限遠で Minkowskii 空間での平面波に漸近する。平面波が無限遠からブラックホールへ向けて進行し、ホライズン近傍を通過して無限遠に伝播していく場合を考える。ホライズン近傍での内向き球面波と外向き球面波の接続条件から、位相のずれが

$$\delta = 2r_g + 2r_g \log \frac{r_{\min}}{r_g}$$

で与えられることがわかる。ここで r_{\min} は波がホライズンに最も近づいたときのブラックホールの中心からの距離である。散乱波を平面波に分解すると、この位相のずれの存在により温度 $k_B T_H = c^3 \hbar / (8\pi GM)$ の Planck 分布に従うことがわかる。ブラックホールを散乱体とみなすと、平面波を Planck 分布の波に変換する役割をもつ。外からの平面波を仮定しなくても、ホライズン近傍で粒子・反粒子対生成が起きていて粒子が無限遠方に飛んでいく外向き球面波の波動関数と重なりを持てば、ブラックホールから輻射が出ることになる。

4 Bose-Einstein 凝縮系とブラックホールの対応関係

次に Bose-Einstein 凝縮系とブラックホールとの対応関係を示す。ボソン系の Bose-Einstein 凝縮は Gross-Pitaevskii 方程式によって記述される。凝縮体の流れの場が凝縮体における音速を超える領域が存在すれば、ブラックホールに対応する状況が実現される。凝縮体の流れの場が曲がった時空の計量と対応することを以下に示す。曲がった時空における量子場に対応するのは、凝縮体におけるゆらぎである。凝縮体におけるゆらぎは、Bogoliubov-de Gennes 方程式によって記述される。以下、Bose-Einstein 凝縮系の基本的定式化を述べた後、位相の自由度を用いた定式化を用いて曲がった時空での場の理論との対応関係を示す。

4.1 Bose-Einstein 凝縮系の定式化

冷却原子系としてボソンの系を考える。実験的には ^{87}Rb などが用いられる。2 節で述べたように、調和振動子ポテンシャル中のボソンの問題を考えることになる。Bose-Einstein 凝縮は、系の粒子数を N で表すと $N_0 = O(N)$ 個の粒子が最低エネルギー状態を占める状態である。このような状態を $|\Phi\rangle$ で表し、最低エネルギーの生成・消滅演算子を a_0 および a_0^\dagger で表すと

$$\begin{aligned} a_0 |\Phi\rangle &= \sqrt{N_0} |\Phi\rangle, \\ a_0^\dagger |\Phi\rangle &= \sqrt{N_0 + 1} |\Phi\rangle. \end{aligned}$$

である。 $N_0 = O(N)$ であるから、 $\sqrt{N_0 + 1} \simeq \sqrt{N_0}$ である。したがって最低エネルギー状態については、熱力学極限で生成・消滅演算子を区別する必要がない。言葉を換えて言えば、Bose 凝縮している場合は古典的な場として記述され、量子力学の経路積分による定式化での鞍点解で与えられる。そこでコヒーレント表示の実時間形式の経路積分 [8] を用いる。ボソン場を $\phi = \phi(\mathbf{r}, t)$ と表すと作用積分は次式で与えられる：

$$S = \int dt \int d^3\mathbf{r} \left[i\hbar \bar{\phi} \partial_t \phi - \bar{\phi} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{1}{2} m \omega_{ho}^2 r^2 \right) \phi - \frac{1}{2} U \bar{\phi} \phi \phi \right]$$

U は s 波の相互作用の強さを表す。この作用積分の変分から、鞍点で $\phi = \Phi$ として次の Gross-Pitaevskii 方程式が得られる：

$$i\hbar \partial_t \Phi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{1}{2} m \omega_{ho}^2 r^2 \right) \Phi + U \Phi^* \Phi \Phi. \quad (4)$$

この方程式を解くことで、凝縮体を記述する波動関数が得られる。

ブラックホールとの対応をみるためには、以下に示すように超音速の流れを伴う凝縮体を考える必要がある。しかし、その考察を行う前に基底状態を見ておこう。基底状態の波動関数は、最速急降下法などを用いて数値的に Gross-Pitaevskii 方程式を解くことで得られる [9]。長さスケールとして $l = \sqrt{\hbar / (m \omega_{ho})}$ 、無次元の相互作用定数として $u = NU / (\hbar \omega_{ho} l^3)$ を導入する。なお、実際の実験では l は $O(\mu\text{m})$ でありエネルギーの単位となるトラップポテンシャルの強さは $\hbar \omega_{ho} = O(n\text{K})$ である。 $u = 5$ と $u = 500$ の場合の結果を図 1 に示す。相互作用を無視した場合には 3 次元調和振動子の問題になるので波動関数は厳密に得られる。また、運動エネルギーを無視した場合にも方程式は厳密に解ける。これらの波動関数も比較のために示してある。

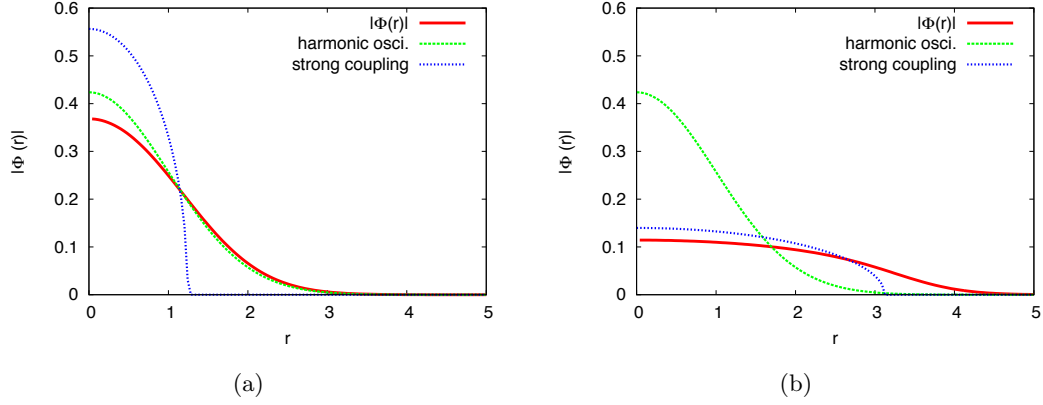


図 1: 凝縮体の波動関数。(a) $u = 5$ の場合と (b) $u = 500$ の場合を示す。

次にゆらぎを記述する。 φ を凝縮体を記述する Φ からのゆらぎとする。 φ の運動方程式は

$$i\hbar\partial_t\varphi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2r^2 + 2U\Phi^*\Phi \right)\varphi + U\Phi^2\varphi^\dagger. \quad (5)$$

Φ は古典的な場であったが、 φ は場の演算子で $[\varphi(\mathbf{r}, t), \varphi^\dagger(\mathbf{r}', t)] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ である。式 (5) において次の Bogoliubov 変換変換を行うと、励起状態の基準モードを求めることができる：

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} \left[A_{\alpha}(\mathbf{r}, t) b_{\alpha} + B_{\alpha}^*(\mathbf{r}, t) b_{\alpha}^{\dagger} \right] \quad (6)$$

係数 $A_{\alpha}(\mathbf{r}, t)$ および $B_{\alpha}(\mathbf{r}, t)$ が満たす方程式は

$$i\hbar\partial_t \begin{pmatrix} A_{\alpha}(\mathbf{r}, t) \\ B_{\alpha}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & U\Phi^2 \\ -U\Phi^{*2} & -K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{\alpha}(\mathbf{r}, t) \\ B_{\alpha}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

ここで

$$K = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2r^2 + 2U\Phi^*\Phi$$

である。この方程式を Bogoliubov-de Gennes 方程式とよぶ。式 (7) の右辺の行列を対角化すれば、基準モードが求まると早合点しそうだがそうではない。式 (7) は $A_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, t)$, $B_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = -\Phi^*(\mathbf{r}, t)$ を解に持つことが Gross-Pitaevskii 方程式を用いると示せる。 φ がゆらぎを記述する場であるためには、このモードがエネルギーゼロのモードに対応する必要がある。エネルギーゼロのモードに対応するエネルギー E_0 を用いると

$$i\hbar\partial_t \begin{pmatrix} A_{\alpha}(\mathbf{r}, t) \\ B_{\alpha}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K - E_0 & U\Phi^2 \\ -U\Phi^{*2} & -K - E_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{\alpha}(\mathbf{r}, t) \\ B_{\alpha}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}$$

となる。この式の右辺に現れる行列を対角化して得られるモードがゆらぎのモードである。

さて、Gross-Pitaevskii 方程式で記述される Φ が時空の計量に対応し、ゆらぎを記述する場がその時空での量子場に対応することを次に示す。 Φ を振幅と位相の自由度を用いて

$$\Phi = \rho_0^{1/2} \exp(i\theta_0)$$

と書く。Gross-Pitaevskii 方程式 (4) に代入すると振幅と位相についての運動方程式が得られる。波長が $1/\sqrt{u\ell|\Phi|^2}$ よりも短い短波長のゆらぎを無視すると

$$\partial_t \theta_0 \simeq -\frac{1}{2} (\nabla \theta_0)^2 - \frac{1}{2} r^2 - g\rho_0$$

$$\partial_t \rho_0 + \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \theta_0) = 0$$

さらに位相のゆらぎ θ と振幅のゆらぎを導入して振幅のゆらぎを消去すると次の方程式が得られる。

$$(\partial_t + \nabla \cdot \mathbf{v}_0) (\partial_t + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \theta \simeq \nabla \cdot (c_s^2 \nabla \theta)$$

ここで $\mathbf{v}_0 = \nabla \theta_0$ は凝縮体の流速であり $c_s = \sqrt{U\Phi^*\Phi/m}$ は密度揺らぎの伝播速度、すなわち音速である。この方程式は次式で定義される $g_{\mu\nu}$ を用いて式 (3) の形に書き換えることができる：

$$g_{\mu\nu} = c_s \begin{pmatrix} c_s^2 - v_0^2 & v_0^x & v_0^y & v_0^z \\ v_0^x & -1 & 0 & 0 \\ v_0^y & 0 & -1 & 0 \\ v_0^z & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{\mu\nu}$$

こうして曲がった時空の場の方程式と対応させることができた。特に計量は極座標表示では 2) に対応している。凝縮体の流速 v_0 が音速 c_s を超える領域が存在すればブラックホールが存在する状況に対応する。

この節の締め括りとして θ の表式と交換関係を示す。位相ゆらぎについて線形の範囲では、

$$\theta = \frac{1}{2i\rho_0} (\Phi_0^* \varphi - \Phi_0 \varphi^\dagger)$$

および

$$\rho = \Phi_0^* \varphi + \Phi_0 \varphi^\dagger$$

であることがわかる。Bogoliubov 変換で導入した生成・消滅演算子 $b_\alpha, b_\alpha^\dagger$ を用いて

$$\theta = \sum_\alpha (f_\alpha b_\alpha + f_\alpha^* b_\alpha^\dagger)$$

$$\rho = \sum_\alpha (g_\alpha b_\alpha + g_\alpha^* b_\alpha^\dagger)$$

と書くと、密度ゆらぎと位相ゆらぎがカノニカル共役であることから

$$(f_\alpha, f_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$$

であることが示せる。ここで

$$(p, q) = \frac{4\pi i}{u} \int_0^\infty dr r^2 [p^*(r) (\partial_t + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla) q(r) - [(\partial_t + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla) p^*(r)] q(r)]$$

である。この式で定義される内積は、曲がった時空での Klein-Gordon 場に対する内積に対応する [10]。

5 Bose-Einstein 凝縮系における Hawking 輻射

前節で示した Bose-Einstein 凝縮系と曲がった時空の場の理論との対応から Bose-Einstein 凝縮系における Hawking 輻射を検証するためにはまず $v_0 > c_s$ の流れを作り出す必要がある。このような超音速の流れを生む機構として Laval 管 [11] やトラップポテンシャルをリング状にする提案 [12] などがある。ここでは、おそらく最も簡単なトラップポテンシャルの強さを変化させる方法 [13] で解析を行う。(相互作用ポテンシャルを Feshbach 共鳴を用いて変えることでも同様の結果が得られる [14].)

$u = 500$ として Gross-Pitaevskii 方程式を解き、基底状態を求める。この状態を初期状態として、トラップポテンシャルを $\omega_{ho} \rightarrow \omega_{ho}/2$ と変化させて時間発展を追う。図 2(a) は、 $t = 0.4$ での c_s および v_0 である。(以降、時間の単位は ω_{ho}^{-1} とする。) $r > r_h (r_h \simeq 3.67)$ で $v_0 > c_s$ となっていることがわかる。 $r > r_h$ がホライズンの”内側”で、 $r < r_h$ がホライズンの”外側”である。

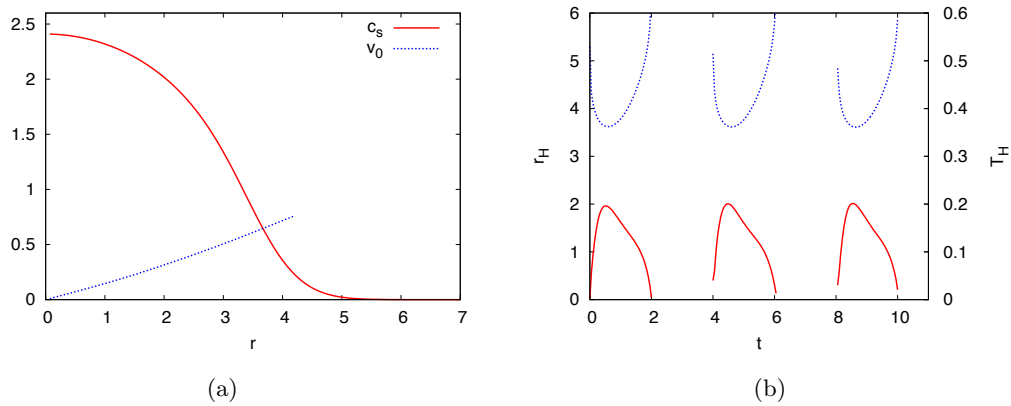


図 2: (a) $t = 0.4$ における c_s および v_0 の座標依存性。(b) ホライズン位置 r_H (点線) と $k_B T_H = \frac{\hbar}{2\pi} \partial_r (v - c)|_{r=r_H}$ から計算した Hawking 温度 (実線)。

ホライズン半径の時間発展を図 2(b) に示す。凝縮体の運動が周期的であるため、ホライズンの振る舞いも周期的である。また、ブラックホールに対応する運動は凝縮体が外向きに運動している場合である。そのため内向きに運動している場合にはホライズンは存在しない。backreaction の効果を取り入れると周期的でなくなると予想されるが backreaction の効果は無視できるほど小さい。図??には WKB 近似によって得られる Hawking 温度の近似式による評価も一緒に示してある。単位は $\hbar\omega_{ho}$ であるから $O(nK)$ の Hawking 温度が期待できる。

Hawking 輻射を検証するためには、励起状態の波動関数の時間発展も追う必要がある。Gross-Pitaevskii 方程式による凝縮体の波動関数の時間発展と共に Bogoliubov-de Gennes 方程式によって励起状態の波動関数の時間発展を数値的に計算する。時刻 t での時空は $\Phi(\mathbf{r}, t)$ から計算される。この時空での励起スペクトルは、 $\Phi(\mathbf{r}, t)$ を元に計算できる。こうして得られる励起スペクトルの波動関数と Φ と共に時間発展してきた励起状態の波動関数を用いて粒子生成スペクトルが

$$B_{\beta\alpha}^* = \left(f_{\beta}^{(2)*}, f_{\alpha}^{(1)} \right)$$

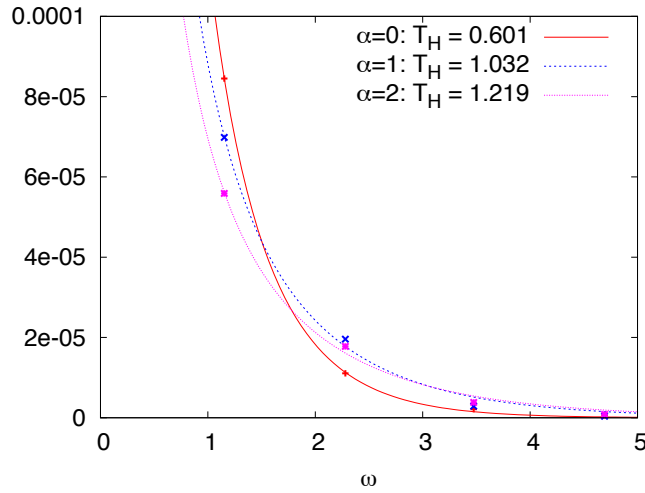


図 3: $t = 1.44$ で計算した粒子生成スペクトルと Planck 分布によるフィッティング。

から求められる。 $t = 1.44$ で得られた粒子生成スペクトルが図 3 である。Planck 分布でフィッティングした結果も一緒に示してある。図から、Planck 分布に従う粒子生成スペクトルが得られていることがわかる。フィッティングから得られた Hawking 温度は、近似的に計算した温度と比較すると数倍高い。この不一致は、トラップポテンシャルのために粒子分布が非一様になっているためと考えられる。また、ポテンシャルが調和振動子型ポテンシャルのためスペクトルは離散的である。

さて、こうして得られた粒子生成スペクトルが意味することは何であろうか。ここで示した定式化と計算では backreaction が入っていない。したがって、粒子生成が起きてブラックホールの質量が減るということにはなっていない。しかし、粒子生成がどこで起きるかということは quantum depletion を考察することでわかる。Gross-Pitaevskii 方程式で得られる凝縮体の波動関数は、粒子が全て Bose-Einstein 凝縮した状況に対応する。しかし、相互作用効果によって粒子全てが凝縮することはない。この凝縮していない粒子は quantum depletion, $\sum_{\alpha} B_{\alpha}^*(\mathbf{r}, t) B_{\alpha}(\mathbf{r}, t)$ を計算することで評価できる。初期状態を用いて quantum depletion を計算すると、中心付近にピークを持つ。(図 4(a)) しかし時間発展をみていくと図 4(b) に示したように、ホライズン近傍で quantum depletion が成長していく振る舞いがみられる。これはホライズン近傍で粒子生成が起きていることを示唆する。凝縮体では、位相差が生じると Josephson 流が流れて系のコヒーレンスが保たれる。しかし、超音速の領域が生じると、凝縮体と超音速領域にある粒子との間で位相のコヒーレンスが保てなくなる。こうして超音速領域にある粒子が凝縮体から disentangle するため凝縮成分から非凝縮成分への粒子の移行が起きる。

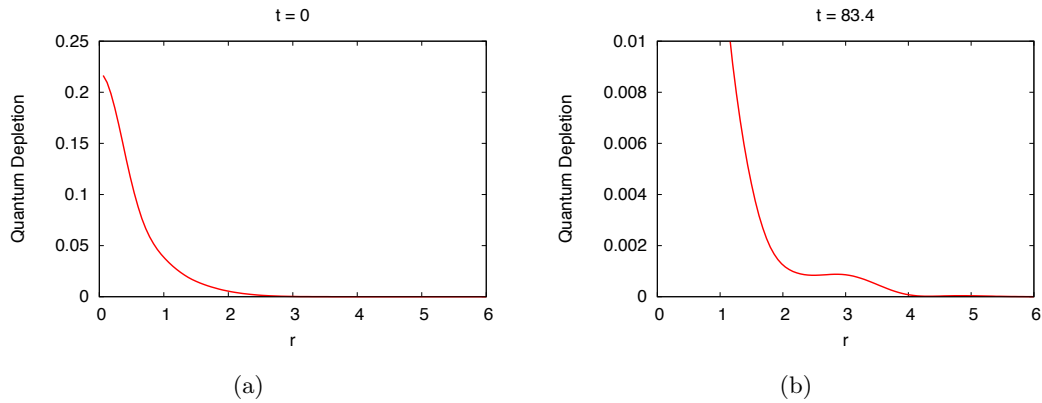


図 4: Quantum depletion の空間依存性。(a) $t = 0$ と (b) $t = 83.4$ の場合を示す。

6 まとめ

以上の結果をまとめると、定式化における対応、粒子生成スペクトルが Planck 分布に従うこと、およびホライズン近傍での粒子生成の兆候によって冷却原子系の Bose-Einstein 凝縮体で Hawking 輻射に対応する現象が数値的にシミュレーションできることが示せた。ホライズン近傍の粒子生成の様子については更なる検討が必要だが、Hawking 輻射の物理を検討する上で冷却原子系は有用な系である。Hawking 温度は $O(nK)$ であり、現在実現されている温度より一桁程度低い温度である。近い将来、到達可能になる温度と期待される。実験的に生成粒子を直接観測することは、冷却原子系でも困難であろう。しかし quantum depletion を観測することで粒子生成の証拠を見つけることは十分可能であると考えられる。

発展的課題としてフェルミオン系や回転している系などが考えられる。また、内部自由度を持つ原子を用いることで多彩な現象が期待される。

謝辞

東京大学大学院総合文化研究科の小林未知数氏には、数値計算に関する有益なコメントを頂きました。ここに感謝いたします。

参考文献

- [1] J. D. Bekenstein: Phys. Rev. D **7** (1973) 2333.
- [2] S. Hawking: Nature **248** (1974) 30.
- [3] S. W. Hawking: Commun. Math. Phys. **43** (1975) 199.
- [4] W. G. Unruh: Phys. Rev. Lett. **46** (1981) 1351.

- [5] 坂上雅昭、大橋憲: 物性研究 **76** (2001) 328.
- [6] M. Novello, M. Visser, and G. Volovik: Artificial black holes (World Scientific, Singapore, 2002).
- [7] C. Pethick and H. Smith: Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases (Cambridge University Press, Cambridge, 2001).
- [8] J. W. Negele and H. Orland, Quantum Many-Particle Systems (Westview Press, Boulder, 1998).
- [9] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari: Rev. Mod. Phys. **71** (1999) 463.
- [10] N. Birrell and P.C.W. Davies, Quantum Fields in Curved Space (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).
- [11] M. Sakagami and A. Ohashi: Prog. Theor. Phys. **107** (2002) 1267.
- [12] L. J. Garay, J. R. Anglin, J. I. Cirac, and P. Zoller: Phys. Rev. Lett. **85** (2000) 4643.
- [13] Y. Kurita, M. Kobayashi, T. Morinari, M. Tsubota, and H. Ishihara: Phys. Rev. A **79** (2009) 043616.
- [14] Y. Kurita and T. Morinari: Phys. Rev. A **76** (2007) 053603.

励起子絶縁体の負性微分抵抗と AdS/CFT 対応¹

京都大学大学院理学研究科 中村 真

E-mail: nakamura@ruby.scphys.kyoto-u.ac.jp

Introduction

モット絶縁体や荷電秩序絶縁体などの強相関電子系の絶縁体では、その非線形電気伝導現象として負性微分抵抗が広く一般的に見られる。通常、物質にかける電場が大きくなれば流れる電流は増大する。電流をコントロールする立場では、流す電流を増やせば物質中の電場が増大する。しかしこの一見当たり前と思われる性質は、非線形領域では必ずしも成立しない。例えば、電場を大きくしたのに電流が減少してしまう、あるいは電流を増したのに物質中の電場が下がってしまう、という通常と逆の振る舞いが見られる場合がある。負性微分抵抗（あるいは同じことだが負性微分伝導度）とは、このような特異な電気伝導現象を指す。負性微分抵抗の有名な例としては、エサキダイオードのそれがある。エサキダイオードの場合、この現象はPN接合間の電位差を変化させることでP側とN側のバンドの相対的重なりが変化し、電場をかけるとともにバンドの重なりが減少する領域においてトンネル電流が減ることにより理解される。しかし冒頭で述べた強相関絶縁体は接合で作られたデバイスではなく、単一な物質であり、その負性微分抵抗の発生メカニズムは現時点で完全には明らかになっていない。

強相関絶縁体の負性微分抵抗を理論的に再現・計算するには、一般に次の3つの困難を克服する必要がある。

1. 非線形：負性微分抵抗は非線形電気伝導現象であり、線形応答理論や久保公式などを越えた解析が必要となる。
2. 非平衡：電流の流れる系には散逸（例えば熱やエントロピーの生成）が伴う。つまりゼロでない抵抗を持ち、かつ電流の流れる系は、非平衡系である。定常電流の流れる系は、電流による熱生成と外部環境（熱浴）への熱流出が釣り合っているため時間変化はしないが、非平衡系であることには変わらない。この場合、系は非平衡定常系である。
3. 非摂動：ここでは絶縁体・金属転移を扱うが、これは場の理論の視点では真空（基底状態）の転移であり非摂動現象である。また真空中のグラフェンのように有効相互作用が $O(1)$ を超える場合は、転移の有無を問わず非摂動的解析が必要となる。

つまり、「非線形、非平衡、非摂動」を扱う解析手法が必要となる。ここで述べた困難は、負性微分抵抗の有無にかかわらず非線形電気伝導度の計算に一般的につきまとう困難であるが、当然、負性微分抵抗の再現を目的とする場合では避けて通ることはできない。

AdS/CFT 対応の応用

実は興味深いことに、超弦理論から提案された AdS/CFT 対応を用いると、このような3つの困難を克服して非線形電気伝導度の計算が可能となる場合がある。ここでは AdS/CFT 対応のこのような性質を利用し、「強相関する電荷の系」の負性微分抵抗を、ある特別な場合に理論的に再現することに成功した。^[1]

AdS/CFT 対応は、一般に強結合ゲージ理論と高次元重力理論の間の対応であるから、この対応を利用するためには強結合ゲージ理論²における電荷の輸送現象を考える必要がある。そこで、こ

¹ここで用いた AdS/CFT 対応による計算の詳細は、とても紙数制限の範囲で説明できるものではありません。従って、詳細に興味のある方は直接ご説明する機会を設けさせていただきますので、遠慮なくご連絡ください。

²ゲージ群は $SU(N_c)$ とする。

ここでは物性系の電子・正孔をクォークと反クォークに置き換え、電磁気の意味の電荷をクォーク電荷 ($U(1)_B$ 電荷) で置き換えて考えることにする。 $U(1)_B$ 対称性は大域的対称性であるから、これに対応するゲージ場は存在しない。そこで、ここでは非力学的な外場として「 $U(1)_B$ 電場」を導入することでクォーク、反クォークを互いに逆向きに引きずる外力を理論的に用意する。クォークや反クォークはグルーオンと強く相互作用しており、直観的には、グルーオンの多体系とクォークの間の「摩擦」が電気伝導度を決めることになる。強相関電子系での負性微分抵抗が一般的な現象であるならば、このような理論的セットアップの元でも負性微分抵抗が再現されるのではないか？ 後述するように、実際この予想は正しい。

AdS/CFT 対応を用いたここでの計算は、上記3種の困難を克服しているばかりか、次のような特徴も備えている。

- 強相関電子系の負性微分抵抗に関しては、負性微分抵抗メカニズムに関する現象論的モデルを用いて考察するのが一般的であった。しかし、ここでの計算は負性微分抵抗に関するいかなる現象論的モデルも用いずに微視的理論に基づいて計算を行った例となっている。
- 物性理論では熱浴と電荷の相互作用をどのように取り込むかが問題となるが、ここではグルーオンの集合がクォークに対する熱浴の役割を果たしており、熱浴との相互作用が巧妙に取り入れられている。これは、large- N_c 極限をとることでクォークの自由度 (N_c に比例) に比べてグルーオンの自由度 ($N_c^2 - 1$ に比例) を無限に大きくとることが出来るため、グルーオン系が、近似的に温度一定の熱浴の役割を果たすことが可能となるのである。そしてグルーオンとクォークの相互作用は微視的ゲージ理論で規定されており、この意味で熱浴と荷電粒子の間の相互作用が理論的に取り入れられている。
- 量子効果も $1/N_c$ 展開の sub-leading まで取り入れられている。つまりグルーオン部分は planar ダイアグラムの範囲で、クォーク部分は 1-loop の範囲まで loop ダイアグラムの効果が取り入れられている。(プローブ近似を用いている。)

具体的理論

ここでは、具体的には「3+1次元強結合 large- N_c $SU(N_c)$ $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論に $\mathcal{N} = 2$ ハイパー多重項を加えた理論」を扱った。この理論は以下の特徴を持つ。

1. この理論は AdS/CFT 対応を用いてクォーク電荷の非線形伝導度が計算可能な、最も単純な理論の一つである。
2. この理論は随伴表現の場 (グルーオンとその superpartner) と基本表現・反基本表現の場 (クォーク・反クォークとそれらの superpartner) の自由度を持つ。
3. 有限温度においては、理論がもともと持っていた超対称性は破れている。
4. この理論のグルーオン部分は非ゼロの温度において非閉じ込め相にある。ここで「非閉じ込め」とはエントロピー密度が large- N_c の leading で N_c^2 に比例し、カラーの自由度が「見える」という意味である。
5. この理論は共形場理論であり、そのため質量無限大のクォーク・反クォーク間のポテンシャルは、温度ゼロでは厳密にクーロン型となる。(有限温度、有限クォーク質量では補正が入る。)
6. (current クォーク質量の程度に比べて) 温度の低い相では、クォーク・反クォークの結合状態が基本自由度となる。これらはクォーク電荷の意味で中性なため、系は絶縁体として振

る舞う。なお、グルーオン部分が非閉じ込めにもかかわらずクォーク・反クォークの結合状態が存在するという意味において、この相は QCD の sQGP 相に類似している。

7. 高温相では上記の結合状態が不安定となりクォークと反クォークが束縛から解放されるため、電荷の移動が可能な伝導体となる。
8. 絶縁相においても、一定以上の外部電場を加えると絶縁破壊（結合状態の解離）が生じ、電流が流れるようになる。

ここでは外部電場による絶縁破壊後の非線形電気伝導度を AdS/CFT の技術で計算した。

AdS/CFT 対応を用いると、グルーオン系は 5次元 AdS-Schwarzschild ブラックホール時空上の超重力理論として、クォーク系はその時空上の D7-brane の物理として表現される。この D7-brane 上の $U(1)$ 電磁場が、クォーク電荷 ($U(1)_B$ 電荷) に対する外部電場と、それに共役なクォーク電流の情報を担う。電場と電流の関係、つまり電気伝導度は、この D7-brane 上の $U(1)$ 電磁場の振る舞いで決定されるが、それは電磁場の運動方程式と、D7-brane の on-shell 作用が複素数とならない条件、から決定される。結果として、この系は（あるパラメータ領域内で）負性微分抵抗を持つことが示された。このような方法で非線形電気伝導度の表式を求めると、二種類の寄与が存在することがわかる。そのうちの一方は、1) 全体として中性であっても流れることが可能な電流の寄与であって、2) current クォーク質量を無限大にすると消失する。このことから、この寄与は外部電場によるクォーク・反クォークの対生成に起因する電流を表わすものと考えられる。なぜならば、対生成では正負電荷が同数生成されるため、系は全体として電気的中性を保ち、さらにクォーク質量が無限大では対生成が生じないためである。負性微分抵抗の実現には、この寄与が必要であることが数式の上で示される。結論として、外部電場によるクォーク・反クォークの対生成が、この系の負性微分抵抗の実現に決定的に重要であることが示された。

考察

ここで考えたクォークと反クォークを電子と正孔に例えると、両者の結合状態は励起子（電子・正孔の結合状態）に対応し、この系は励起子絶縁体に類似する。電荷間の相互作用が、ほぼクーロン型であることも、現実の電子・正孔間の電磁相互作用と類似する。励起子絶縁体の非線形電気伝導に関する研究は実験的にも理論的にもこれからであると言える。例えば励起子絶縁体に関する議論は理論的には 1960 年代よりなされていたが、実験的に励起子絶縁体の「候補」が発見されはじめたのは 1990 年代に入ってからである。ここでの結果は励起子絶縁体においても絶縁破壊後に負性微分抵抗が見られる可能性を示唆する。特に、Dirac fermion が存在するグラフェンも励起子絶縁体となる可能性が議論されており、グラフェンでの有効微細構造定数は真空中では 1 を超えることから、強結合近似による AdS/CFT の手法が意味を持つてくると考えられる。このように本研究はクォーク・グルーオン系の非線形電荷輸送の意味のみならず、グラフェンなどの物性系の非線形電気伝導に関する定性的な示唆を与えるのではないかと期待している。

参考文献

- [1] S. Nakamura, “Negative Differential Resistivity from Holography,” arXiv:1006.4105 [hep-th]. 他の関連論文もここで引用されているものを参照されたい。
- [2] グラフェンの物理およびそのクォーク系との類似は、本研究会の荒木康史氏の講演、および次の原著論文が参考になると思います: Y. Araki and T. Hatsuda, “Chiral Gap and Collective Excitations in Monolayer Graphene from Strong Coupling Expansion of Lattice Gauge Theory,” Phys. Rev. B82 (2010) 121403(R), arXiv:1003.1769 [cond-mat.str-el].

Randall-Sundrum 時空における有限温度でのゲージ・Higgs 統合

幡中 久樹 (大阪府立大)

概要

余剰次元を用いてゲージ階層性問題を解決するシナリオである電弱ゲージ・Higgs 統合模型の有限温度の効果、とくに余剰次元を持つ時空が Randall-Sundrum 時空である場合について調べる。まず、Randall-Sundrum 時空上での細谷機構によるゲージ対称性の破れと回復について有限温度での補正を計算して調べる。また、これを Randall-Sundrum 時空上での電弱ゲージ・Higgs 統合模型に適用し、臨界温度とポテンシャル障壁の高さなどについて報告する (preliminary)。

背景と動機 余剰次元の形状が、一点可縮ではないループ C を許す場合、このループに沿った Wilson ループ積分 $W = \mathcal{P} \exp(i g \oint_C A_y dy)$, (\mathcal{P} は path-ordered を表す) の真空期待値はゲージ変換で排除 (gauge-away) できずに物理的自由度となる¹。特に、非可換ゲージ理論の場合には Wilson ループの真空期待値がゲージ群の生成子のいくつかと可換でなくなり、ゲージ対称性の破れが起こりうる。これは細谷機構と呼ばれる [1]。このようなメカニズムの重要な応用のひとつとして、いわゆる電弱ゲージ・Higgs 統合 (electroweak gauge-Higgs unification) シナリオ [2, 3] があげられる。このシナリオでは、電弱ゲージ対称性は細谷機構によって破れる。さらに Higgs の質量およびポテンシャルの有限性は模型のもつ高次元ゲージ対称性によって保証されて、Higgs 質量に関する微調整の問題 (所謂ゲージ階層性問題) が解決することになる。

有限温度の場の理論で細谷機構を考えると、ゲージ対称性の破れ/回復の相転移は多くの場合 1 次相転移であることが指摘されている [4, 5, 6]。このことは、電弱バリオジェネシス (electroweak baryogenesis) を電弱ゲージ・Higgs 模型で考える上で重要である。というのも電弱バリオジェネシスが現在のバリオン数を説明するほどに有効なメカニズムとして機能するには電弱対称性の有限温度でが十分強い 1 次相転移をすることが必要だからである。そのため、電弱ゲージ・Higgs 模型として現実的な候補である、Randall-Sundrum (RS) 時空上のゲージ・Higgs 模型 ([7] など) の有限温度での解析が重要となる。

計算 温度 T で余剰次元を持つ場の理論の 1 ループ有効ポテンシャルは (実スカラー場 1 つ分の自由度につき) 以下のように表される。

$$V(\alpha, \theta, T) = \frac{(-1)^{2\eta}}{2} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_k \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln [(2\pi T(n+\eta))^2 + p^2 + M_k(\alpha, \theta)^2]. \quad (1)$$

ここで $\eta = 0$ ($\frac{1}{2}$) がボゾン (フェルミオン) ループに対して割り当てられる。 n に関する和は松原形式に基づく (虚) 時間方向のモード和である。 M_k は Kaluza-Klein (KK) 質量であり、 α, θ は Randall-Sundrum 時空でのゲージ・Higgs 模型におけるバルク質量パラメータと Wilson ライン位相である。一般の質量スペクトラム M_k についての足し上げをするには、松原モードの部分だけに Poisson 和公式を適用して得られる式

$$V_{\text{eff}} = V_{\text{eff}}(\alpha, \theta, T=0) - \frac{(-1)^{2\eta} T^4}{2\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_k \frac{(-1)^{2m\eta}}{m^4} B_2(m|M_k(\alpha, \theta)|/T), \quad (2)$$

を用いる。第 1 項 $V(\alpha, \theta, T=0)$ はゼロ温度での有効ポテンシャルであり、すでに計算されている [8, 9, 10]。第二項は有限温度による効果を表す。KK 質量は、RS 時空の場合、 $M_k(\alpha, \theta)$ は Wilson ライン位相等を

¹これは、 C を貫く架空の磁束による Aharonov-Bohm 位相と解釈することもできる。

含むある関数の1次の零点 $f(M_k, \alpha, \theta) = 0$ の形で表せる [7, 8]。関数 $B_d(x) \equiv x^d K_d(x)$ ($K_d(x)$ は第2種の修正ベッセル関数) は x が増加するにつれて急速に0に収束する関数である。よって M_k の小さい値のものについて足せば数値的には十分な精度で有限温度での補正の近似計算が可能である。

数値計算の結果 (preliminary) と展望 まずこれを SU(2) ゲージ対称性を持つ模型に適用する。本稿では Randall-Sundrum 時空の係数 $\kappa R = 12.0$ とおいた (κ は AdS 曲率、 R はブレーン間の距離)。ゲージ場のほかに、SU(2) 基本表現または随伴表現のフェルミオンを導入する。結果として、ゲージ場の対称性はフェルミオンの表現やバルク質量によって変化し基本表現ではバルク質量と温度のすべてのパラメータ領域で対称性が $U(1)_3$ からさらに壊れることはなく、随伴表現の場合バルク質量が大きくなるとフェルミオンの寄与は小さくなり対称性は回復して $U(1)_3$ になる。ここで $U(1)_3$ は Randall-Sundrum 時空の二つの固定点 (Planck ブレーンと TeV ブレーン) における境界条件で残る対称性である。これらの結果はそれまでの平坦な余剰次元による細谷機構の有限温度での知られた結果と定性的には同じである。

以上の手法を RS 時空上の電弱ゲージ・Higgs 統合模型に適用する。例として、 $SO(5) \times U(1)$ 電弱統一群を持つ模型 [11] を考える。この模型では、Higgs の1ループ有効ポテンシャルで Wilson ライン位相に依存する部分はおもにウイークボゾン W^\pm, Z とトップクォークのループからなり、

$$V_{\text{eff}} = V_W + V_Z + V_{\text{top}}, \quad V_{\text{top}} = -4V(0.937, 2\theta, T), \quad (3)$$

と書ける。ここでトップクォーク以外のクォーク・レプトンからの寄与は小さいために無視した。さらにゲージボゾンからの寄与を以下のように近似する。

$$V_W + V_Z \simeq 3 \cdot 3V(1.0, 2\theta, T), \quad (4)$$

以上で与えられたポテンシャルを数値的に調べ、臨界温度 T_c とポテンシャル障壁の高さ V_{wall} について

$$T_c \simeq 200[\text{GeV}], \quad (5)$$

$$V_{\text{wall}} \simeq (50[\text{GeV}])^4, \quad (6)$$

を得た。また、相転移温度での真空期待値の値はゼロ温度の値とほとんど変わらず、これを標準模型の値 $\varphi_c \simeq 250[\text{GeV}]$ にとることより、これは電弱バリオジェネシスを起こすに十分な一次相転移である条件 [12]: $\varphi_c/T_c \geq 1$ を満たすことがわかった。

より現実的な電弱バリオジェネシスを議論するためには、GHU 模型について (i) スファレロン遷移確率 (ii) CP 位相を含む現実的なクォーク質量構造などの更なる理解が望まれる。

参考文献

- [1] Y. Hosotani, Phys. Lett. B **126**, 309 (1983).
- [2] N. S. Manton, Nucl. Phys. B **158**, 141 (1979).
- [3] H. Hatanaka, T. Inami and C. S. Lim, Mod. Phys. Lett. A **13**, 2601 (1998) [arXiv:hep-th/9805067].
- [4] K. Shiraishi, Z. Phys. C **35**, 37 (1987).
- [5] C. L. Ho and Y. Hosotani, Nucl. Phys. B **345**, 445 (1990).
- [6] N. Maru and K. Takenaga, Phys. Rev. D **74**, 015017 (2006) [arXiv:hep-ph/0606139].
- [7] Y. Hosotani, S. Noda, Y. Sakamura and S. Shimasaki, Phys. Rev. D **73**, 096006 (2006) [arXiv:hep-ph/0601241].
- [8] A. Falkowski, Phys. Rev. D **75**, 025017 (2007) [arXiv:hep-ph/0610336].
- [9] H. Hatanaka, arXiv:0712.1334 [hep-th].
- [10] N. Haba, S. Matsumoto, N. Okada and T. Yamashita, Prog. Theor. Phys. **120**, 77 (2008) [arXiv:0802.3431 [hep-ph]].
- [11] Y. Hosotani, K. Oda, T. Ohnuma and Y. Sakamura, Phys. Rev. D **78**, 096002 (2008) [Erratum-ibid. D **79**, 079902 (2009)] [arXiv:0806.0480 [hep-ph]].
- [12] M. E. Shaposhnikov, Nucl. Phys. B **287**, 757 (1987); Nucl. Phys. B **299**, 797 (1988).

インフレーションがもたらす小さな宇宙項の力学モデル

岩崎 愛一

二松学舎大学

2010年11月30日

現在宇宙は加速膨張をしている。10年ほど前にそのことが超新星の観測から明らかになった。また、背景輻射等の他の様々な観測もそのことを示している。それまでの減速膨張して宇宙像が一変したのである。この加速膨張宇宙は、アインシュタインの有名な宇宙項で自然に説明されるゆえ、その存在があらためて注目されるようになった。その結果、なぜ宇宙項は宇宙にある自然なスケール（プランクスケール）に比べ極端に小さいのか、という昔からの謎が浮上したのである。宇宙項は、真空のエネルギー密度であり、現在、その値は $\sim (10^{-3}eV)^4$ と見積もられてる。いわゆるダークエネルギーである。その宇宙項が、もう1つのダークな世界にあるダークマターがもたらす減速効果を打ち消し、宇宙を加速膨張させる。その小さな値が意味することは、その加速膨張がつい最近（宇宙の時間スケールで）起き始めたことである。赤方偏移 $Z = 1$ あたりで減速膨張が加速膨張に変化した。

そこで昔から問題であった「なぜ宇宙項は、プランクスケール、あるいは電弱理論と QCD の統一スケールに比べ極端に小さいのか？」を答えなくてはならない。もともと小さい物理定数であるという考えもあるが、それではなぜ、他に比べ小さな定数が存在するのかが、問題になる。真空のエネルギーは様々な場の寄与があり、その寄与を足し合わせると偶然小さな定数になったと考えるのには無理があろう。それゆえ時間的に変化する宇宙項という考えがもっともらしくなる。特に、インフレーションを通して真空のエネルギーが小さくなると考えるたくなる。

単純な試みとして昔から、実スカラー場を用意して、そのポテンシャルが宇宙項であるというものがある。場の値の変化に伴いそのポテンシャルの値も変化するというものである。その場合、ポテンシャルの形に場の発展は依存するので、それを選ぶ指針がほしい。指針の1つは、現在の宇宙項の値に合わせるようにポテンシャルを選ぶという指針である。さらに、その場が影響を及ぼすのはごく最近で、元素合成や、その後の揺らぎの増大による銀河形成には影響がないようにしないとイケない。これらの条件を満たす様々なポテンシャルが提案された。しかし、どのポテンシャルも現在の小さな宇宙項を説明するために「ファインチューニング」が必要になる。あたりまえであるが、真空のエネルギーには様々な場の寄与があり、それらの場とは独立なスカラー場のポテンシャルの最小値をその寄与は、上げ下げする。それゆえその寄与を考慮してポテンシャルの最小値を決めることは、スカラー場のポテンシャルの「ファインチューニング」である。もし、真空のエネルギーがゼロとなる超対称性があれば、現在の小さな宇宙項は自然に説明しうる。しかし、超対称性は1 TeV 以上のエネルギースケールで破れているので、それが予想する真空のエネルギースケールは、1 TeV 以上である。以上の理由で、長い間宇宙項問題の解は見いだせないでいた。

もし、超対称性のように真空のエネルギーがゼロであることを要求する理論があれば、それは現在の小さな宇宙項を説明できるであろう。そこで以下のような条件を満たす理論を考える。ただし、その条件は如何なる

対称性、あるいは理論的枠組みから導かれるかは、分からない。ここでは頭から満たしなさいと要求するのである。すると、その条件を満たすスカラー場の理論では、真空エネルギーへの他の場の寄与の如何に関わらず、真空のエネルギーはゼロとなる。

その条件とは、系の時空として Friedmann Universe 時空の metric ($ds^2 = dt^2 - a(t)^2 d\vec{x}^2$) を仮定して、以下のようになる。

$$\partial_t \phi(t) = M \times H = M \frac{\dot{a}}{a} \quad \text{with} \quad \dot{a}(t) \equiv \partial_t a(t). \quad (1)$$

ここで M は、スカラー場を特徴づける質量パラメーターである。現在の宇宙加速膨張の観測から決まるものである。プランク定数より少しだけ小さいと思われる。また、 H は Hubble パラメーターである。この条件と場の運動方程式、 $\ddot{\phi} + 3\dot{\phi}H + \partial_\phi V(\phi) = 0$ 及び、Freedman 方程式 $H^2 = \frac{8\pi G(\rho_m + \rho_\phi)}{3}$ (G は重力定数。 ρ_m と ρ_ϕ は、場のエネルギー密度 $\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)$ と物質 (輻射、バリオン、ダーク物質) のエネルギー密度 ρ_m である。) から、場のポテンシャル V を決める方程式、

$$2a \frac{d}{da} V + 6\lambda(V + \rho_m) = -\lambda a \frac{d}{da} \rho_m, \quad (2)$$

が得られ、それを解いて、ポテンシャルが次のように決まる。

$$V = \frac{\lambda \rho_m}{2(1-\lambda)} + V_0 a^{-3\lambda} \quad \text{for matter dominated period} \quad (3)$$

ここで、 V_0 は任意定数、 $\lambda \equiv 8\pi G M^2/3$ 、また ρ_m として物質優勢期におけるエネルギー密度 ($\rho_m = \rho_0 a^{-3}$) を例として取り上げた。第1項は、物質のエネルギー密度に依存する項で、第2項はスカラー場に固有なものである。 λ は一般に1より十分小さい。

ここでポテンシャル V がスケールファクターの関数として決まったが、場の関数としてどのようになるのかは、条件式 (1) を解いて、 $\phi = M \log(a/a_0)$ 、あるいは $a = a_0 \exp(\phi/M)$ 、が得られ、これを V に代入することで、 V が場の関数として求められる。

$$V(\phi) = \frac{\lambda \rho_0 a_0^{-3} \exp(-\frac{3\phi}{M})}{2(1-\lambda)} + V_0 a_0^{-3\lambda} \exp(-\lambda \frac{3\phi}{M}), \quad (4)$$

このようにして、条件 (1) を課すことで、スカラー場のポテンシャルが、その他の粒子エネルギー密度の関数として決まる。つまり、スカラー場のポテンシャルは独立に決められるのではなく、条件 (1) から自動的に決まってしまう。明らかに、全エネルギー $\rho_m + \rho_\phi$ の最小値はゼロである。仮に ρ_m に定数を加えても (真空のエネルギーを加える)、式 (2) から明らかに、その加えた分が V から引かれるので、 $(V-c) + (\rho_m+c) = V + \rho_m$ に変化はない。つまり、全エネルギー密度の最小値はゼロのままである。このようにして、様々な場の真空エネルギーを考慮しても最後はこのスカラー場のポテンシャルが、それらをキャンセルして真空のエネルギーをゼロにしてしまう。条件 (1) はそれほど強い要請である。この要請がどこから来るのか、如何にラグランジアン形式で定式化するのか、これからの課題である。

また、注目すべきは、ポテンシャル V のスケールファクター a 依存性である。式 (3) から明らかなように、それはスケールファクターの増大と共に小さくなる。インフレーション時には、物質 (輻射) のエネルギー密度はその膨張から極めて小さくなる。もちろん、その後の再加熱で再び大きな値を取り戻す。しかし、スカラー場固有のエネルギー密度 (式 (3) の第2項) は、再加熱で再度大きな値には戻らない。という理由は、そ

のスカラ場は、他の粒子と重力を通してあるいは、条件式 (1) でのみ相互作用するだけだからである。そのため、その固有のエネルギー密度はインフレーション以前は大きな値を持ちうるが、インフレーションで十分小さな値になってしまう。そのことが、現在の宇宙項が、インフレーションで小さな値になってしまう自然な理由である。

紙面制限のため詳細は論文を参照してもらい、ここではダークエネルギーモデルとしてこの場の理論が、現象と無矛盾であることを指摘しておきたい。このモデルの任意定数は λ 、1つだけである。その値を十分小さく取ると、現在知られているいくつかの宇宙論的パラメーターの制限は全て満たす。たとえば、このスカラ場が元素合成に影響がないこと、現在の宇宙膨張は、ほぼ定数としての宇宙項で説明しうること等々である。実際、 λ が 0.1 より小さいことを要求することで、上記の制限は満足する。

A. Iwazaki, hep-ph/1006.4890.

ダークエネルギーの解説として、

A. Silvestri and M. Trodden, Rept.Prog.Phys.**72**, 096901,(2009).

S. Tsujikawa, astro-ph/10041493.

超統計について

阿部純義

三重大学理工学科

概要

複雑系の非平衡定常状態を記述するために提出された超統計 (superstatistics) の考え方について概説する。

1 はじめに

非平衡定常状態にある複雑系の中には、異なる複数の時間スケールでのそれぞれに異なるダイナミクスが重層的に作用し合いつつ階層構造を発現するものがある。その背後には、要素間の強い相関が原因としてあると考えられるが、大規模数値シミュレーションなどの話は別として、そのような相関をもたらす微視的ダイナミクスに対して正面から取り組むのは、一般にはあまり有効ではないであろう。通常の単純系においてさえも、力学と統計法則の相互関係が依然として理解出来ていないことを考慮すれば、このことは容易に納得されると思われる。

このような事情から、複雑系の非平衡定常状態の記述のために、伝統的な統計力学的アプローチの拡張という議論が現れてくるのは自然であり、実際、過去 20 年にわたりそのようなアイデアが研究されてきた。そのような潮流のなかで主要な役割を果たしてきたもののひとつが q -statistics (非加法的統計力学、nonextensive statistical mechanics) [1,2] である。多くの複雑系の非平衡定常状態が示す非 Gauss 的な統計性 (より具体的には漸近的ベキ則性) を記述できることから、この理論は数多くの機会に議論されてきた。しかしながら、 q -statistics は Boltzmann-Gibbs エントロピーの非対数的な拡張に基づくため、熱力学との整合性に困難をもつ。更に、 q -statistics のように、一般化されたエントロピーを用いた最大エントロピー法では、「一度」の変分計算で分布関数を得るため、系が異なる時間スケールをもつことを表現するのは難しい。

超統計 (superstatistics) [3-5] という概念は、はじめは q -statistics の議論との関連において導入されたもので、 q -statistics に特徴的な漸近的ベキ則分布を導くもうひとつの方法として考えられた [6,7] (実際には類似の研究の起源は遙か昔に遡るが、ここでは触れないことにする)。しかしながら、その概念を「大きく異

なる複数の時間スケールの存在」に基礎を置き、明確に定式化したのは、文献[3]が最初であろう。

本稿では超統計について簡単に解説する。この分野は結構注目されており、2003年に出版された文献[3]の引用件数は既に200を超えている。従って、現状を網羅的に紹介することは不可能なので、ここでは基本的なアイデアの紹介にとどめることにする。

2 超統計

直観的な説明として、Brown運動を考える。通常、背景の流体は巨視的には固定された性質をもつものとされる。しかし、ここでは流体が例えば乱流的であるとしてみる。この場合、流体の温度は一般に時空的に揺らぐことになるであろう。この揺らぎは、水分子のBrown粒子への衝突の時間スケールに較べて遥かにゆっくりしたものと考えられる。すなわち、大きな時間スケールの隔たりが実現されている。粒子の速度 v は、Langevin 方程式

$$\dot{v} = -\gamma v + \sigma \eta \quad (1)$$

に従うとする。ここで、 η は (Gauss 型白色) ノイズ、 σ はその強さ、 γ は抵抗係数である。系を小細胞に分割し、各細胞中では

$$\beta = \gamma / \sigma^2 \quad (2)$$

という関係式が成り立っていると仮定する。ただし、 β は逆温度である。重要なのは、 β も γ も一定ではなく、長時間スケールで揺らぐことである。 β の値のばらつきを示す分布関数を $f(\beta)$ とする。ある細胞中での逆温度 β がほぼ一定であるとして得られる Brown 粒子の局所的な速度分布は、方程式(1)に対応する Fokker-Planck 方程式の定常解として与えられるであろう。その分布 (実は Gauss 分布) を $p(v|\beta)$ と書くことにすると、長時間での観測結果から得られる速度分布は

$$P(v) = \int d\beta f(\beta) p(v|\beta) \quad (3)$$

で与えられることになる。この分布には、Brown 粒子が種々の細胞を渡り歩き、いろいろな β の値を経験したということが反映されている。式(3)は、超統計の理論の典型的な例である。 $p(v|\beta)dv$ を、 β の値が与えられたときに、速度を区間 $v \sim v+dv$ 中に見いだす条件付き確率と見なすと、 $f(\beta)p(v|\beta)$ は同時確率分布 $p(v,\beta)$ であり、従って、 $P(v)$ はその周辺分布 $\int d\beta p(v,\beta)$ に他ならない。すなわち、超統計は数学的には「条件付き確率分布の重ね合わせ」である。それは、考えている系においてゆっくり揺らぐ変数に注目し、その変動の確率分布を何らかの方法で求めることによって決定される。

このように、超統計の理論的出発点は十分単純である。そのため、直ちに多くの応用を見い出した。それらは例えば、乱流中の追跡粒子[8]、乱流の速度差分布[9]、複雑ネットワーク[10]、水環境の影響下での生態系[11]、癌の進行[12]、細胞中のウイルスの不均一異常拡散[13]などの多様なトピックスを含む。

上述の Brown 粒子の例を参考にして、非平衡統計力学について考えてみる。系が観測の時間スケールで定常状態にあるように見えるとする。系を小細胞に分割する。各細胞は、局所平衡状態が実現されていると見なせるほど小さいが、それでもまだ十分多くの要素を含んでいるとする。局所平衡とは言うものの、隣り合う細胞間にはわずかに温度勾配があるわけで、それにより熱の交換などが常に生じている。このことは、相関が強い複雑系では特に重要な効果をもたらすと考えられる。結果として、局所（逆）温度 β の値は揺らぐことになる。この揺らぎの時間スケールが、局所平衡状態への緩和の時間スケールよりもずっと大きいとするのが、超統計における本質的な前提である。局所平衡状態が、正準分布

$$p(\varepsilon_i|\beta) = \frac{1}{Z(\beta)} \exp(-\beta\varepsilon_i) \quad (4)$$

で記述されると仮定するのは自然であろう。ただし、 ε_i は小細胞中に含まれるエネルギーの i 番目の値であり、 $Z(\beta)$ は局所的分配関数である。式(3)と類似の処方により、観測によって得られるエネルギー分布は

$$P(\varepsilon_i) = \int d\beta f(\beta) p(\varepsilon_i|\beta)$$

$$= \int d\beta f(\beta) \frac{1}{Z(\beta)} \exp(-\beta \varepsilon_i) \quad (5)$$

で与えられることになる。ただし、逆温度の分布について、式(3)と同じ記号を用いた。 β の揺らぎがない場合は、 $f(\beta) = \delta(\beta - \beta_0)$ であり、式(5)は逆温度 β_0 の通常の正準分布に戻る。また、 $f(\beta)$ が $\beta = \beta_0$ 付近で有限の幅をもって局在化している場合には、正準分布に対する補正を系統的に決定することが出来る。

式(5)は局所的な分布であるが、特別な場合として、 $f(\beta)$ が系全体に渡って空間的に一様で時間的にしか揺らがないときには、 ε_i を系全体のエネルギーと見なすことが出来る。

上述の事柄を、アンサンブルの立場から見てみよう。各細胞をひとつの系と見なせば、全系はそのレプリカの集合ということになる。ただし、各レプリカはそれぞれの温度の値で規定されている。レプリカの温度がいろいろな値をもつように、それらの更なるレプリカ、つまりレプリカのレプリカを作る。それら全体の集合を超集団 (superensemble) と呼ぶことにしよう。すなわち、超集団は「アンサンブルのアンサンブル」なのである。超統計は、非平衡系を表現する超集団に関する統計力学的な試みなのである。

解析を簡単化するために、式(5)に対して以下の書き換えを行う。平均値の定理を適用すれば、

$$P(\varepsilon_i) = \frac{1}{Z(\beta^*)} \int d\beta f(\beta) \exp(-\beta \varepsilon_i) \quad (6)$$

となるような β^* が存在する。規格化条件を用いれば分かるように、 β^* は

$$Z(\beta^*) = \int d\beta f(\beta) Z(\beta) \quad (7)$$

を満たすように決められる。

式(6)中の因子を、一般化された Boltzmann 因子と呼び

$$B(\varepsilon_i) = \int d\beta f(\beta) \exp(-\beta \varepsilon_i) \quad (8)$$

と書くことにする。超統計はこの因子によって特徴づけられる。式(8)は $f(\beta)$ の Laplace 変換である。

3 熱力学的形式

統計力学は微視的な観点から巨視的な系の性質を説明しなければならないので、平衡とは限らないが少なくとも定常状態における熱力学との整合性は保証されなければならないであろう。この節では、超統計の熱力学的構造について考察することにする。

エネルギーと逆温度が共に確率変数であることを念頭において、同時確率分布 $\rho(\epsilon_i, \beta) = p(\epsilon_i | \beta) f(\beta)$ のエントロピー

$$S[E, B] = -k_B \int d\beta \sum_i \rho(\epsilon_i, \beta) \ln \rho(\epsilon_i, \beta) \quad (9)$$

を考える。ただし、 k_B は Boltzmann 定数である。この量は、恒等式

$$S[E, B] = S[E|B] + S[B] \quad (10)$$

を満たす。ここで、右辺の第一項は条件付きエントロピー

$$S[E|B] = \int d\beta f(\beta) S[E|\beta] \quad (11)$$

$$S[E|\beta] = -k_B \sum_i p(\epsilon_i | \beta) \ln p(\epsilon_i | \beta) \quad (12)$$

であり、また第二項は $f(\beta)$ のエントロピー

$$S[B] = -k_B \int d\beta f(\beta) \ln f(\beta) \quad (13)$$

である。ただし、 $f(\beta)$ は β^{-1} の次元をもつので、式(14)にはそれに関する付

加定数の任意性があるが、このことは以下の議論にはまったく影響しない。局所平衡状態の正準分布(4)を式(12)に代入することにより、

$$S[E, B] = \overline{\beta[U(\beta) - F(\beta)]} + S[B] \quad (14)$$

を得る。ここで、

$$U(\beta) = \sum_i \varepsilon_i p(\varepsilon_i | \beta) \quad (15)$$

$$F(\beta) = -\beta^{-1} \ln Z(\beta) \quad (16)$$

は、それぞれ局所的な内部エネルギーと自由エネルギーである。また、オーバーバーは、 $\overline{Q} = \int d\beta f(\beta) Q(\beta)$ で定義される。

上述の構造から明らかなように、速い確率変数 E (その取り得る値は ε_i) についての和は常に初めに取られ、遅い確率変数 B (その取り得る値が β) についての平均はその後に取られなければならない。言い換えれば、 E の取り扱いに際し、 B はクエンチされたランダム性なのである。

このように、超統計の熱力学は、条件付き局所量とその平均化によって構築される[14,15]。

4 いくつかのクラス

複雑系においてしばしば観測される物理量の確率分布は、実はそれほど多様ではない。超統計に関連して、応用上よく議論されるクラスは三つある。この節では、それらについて簡単に触れることにする。

(i) χ^2 superstatistics

これは、 $f(\beta)$ が χ^2 -分布

$$f(\beta) = \frac{1}{b\Gamma(c)} \left(\frac{\beta}{b}\right)^{c-1} \exp(-\beta/b) \quad (17)$$

で与えられる場合である。ここで、 b と c は正の定数、 $\Gamma(s)$ はガンマ関数で

ある。 β の期待値と分散は、それぞれ

$$\beta_0 \equiv \overline{\beta} = bc, \quad \sigma^2 \equiv \overline{\beta^2} - \overline{\beta}^2 = b^2 c \quad (18)$$

である。一般化された Boltzmann 因子(8)は

$$B(\varepsilon_i) = (1 + b\varepsilon_i)^{-c} \quad (19)$$

となる。ここで、 $c = 1/(q-1)$ 、 $bc = \beta_0$ とおけば、式(19)は

$$B(\varepsilon_i) = [1 + (q-1)\beta_0 \varepsilon_i]^{1/(q-1)} \quad (20)$$

と変形される。これは、 q -statistics[1,2]における Zipf-Mandelbrot-Tsallis 型のべき則的因子と形式的に同じ形をしている。指数 q が

$$q = \overline{\beta^2} / \overline{\beta}^2 = 1 + (\sigma / \beta_0)^2 \quad (21)$$

で与えられることに注意する。

χ^2 -分布は、 $\beta (> 0)$ が独立に正規分布に従う $n (= 2c)$ 個の確率変数

$\{X_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ の自乗和

$$\beta = \sum_{k=1}^n X_k^2 \quad (22)$$

で表されるときに、それが従う分布であるという事実によって、中心極限定理の観点から自然なように見えるかもしれない。ただし、 $q = 1 + 2/n$ なので、 $n = 20$ 程度でも、Boltzmann 因子 ($q \rightarrow 1$ の極限) からのずれは 10%に過ぎない。

(ii) inverse χ^2 superstatistics

これは、 $f(\beta)$ が逆 χ^2 -分布

$$f(\beta) = \frac{1}{\Gamma(a-1)} (\lambda a)^{a-1} \beta^{-a} \exp(-\lambda a / \beta) \quad (23)$$

の場合である。ただし、 $a > 1$ かつ $\lambda > 0$ である。これは、逆温度 β というよりも、むしろ温度 $T [= 1/(k_b \beta)]$ 自身の揺らぎに着目した場合の(i)に対応していると思わせるかもしれない。分布(23)は $\beta = \lambda$ にピークをもつので、その値における Boltzmann 因子に対する系統的補正は直ちに評価される。

式(23)の $f(\beta)$ は、局所 Maxwell 分布に関連して、式(13)の $S[B]$ に基づく“制限された”最大エントロピー法から導くことが出来る[14-17]。

(iii) log-normal superstatistics

$f(\beta)$ が対数正規分布

$$f(\beta) = \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} \frac{1}{\beta} \exp\left[-\frac{\kappa}{2} (\ln \beta - \ln \beta^*)^2\right] \quad (24)$$

の場合に対応する。ここで、 κ と β^* は正の定数である。これは、 β が正の確率変数の幾何平均に関する中心極限定理の立場から解釈される。すなわち、乗法的ランダム性を考えていることになる。

乱流における速度差分布についての1962年のKolmogorov[18]とOboukhov[19]の理論では、式(3)の中にある条件付き確率が速度差の Gauss 分布であり、また式(24)中の β は渦のカスケード過程に付随するエネルギー散逸率である。乱流に対するこのような古典理論が不完全であることは以前から知られているが[20]、実験的観点からすれば依然としてよい記述を与える[9,21]。

χ^2 superstatistics と log-normal superstatistics は、互いに大変よく似ている。現実のデータ解析に適用する場合、それらに差が現れるのは分布の「尻尾のずつと先の方」においてであって、区別するのは難しい。

5 おわりに

以上、超統計について概観した。明らかな問題は、「 $f(\beta)$ はどのような物理的原理から決まるのか」という点である。4節では、 $f(\beta)$ の具体的な形を三つほどあげたが、それらの理解は全く不十分である。系が与えられたならば、 $f(\beta)$ は一意的に明確化されるべきである。そうでない限り、式(8)から明らかなよう

に、 $f(\beta)$ は単にデータから得られた分布の逆 Laplace 変換に過ぎず、あまり物理的知見は得られそうにない。4 節の例(i)と(iii)では、 $f(\beta)$ の形を決めるに際し、中心極限定理などの、いわば「付加的な」統計法則を援用しているので、不満足である。また、(ii)は最大エントロピー原理との関連があるが、この方法では「拘束条件として何を課すか」という点に大きな任意性があるので、やはり不満足である。log-normal superstatistics については、最近揺らぎ定理に基づいて構成する試みが行われたが[22]、満足すべき理解からはほど遠いというのが現状であろう。もしかすると結局この問題も「力学から統計が理解できていない」という事実に着着されてしまう可能性もある。

本研究会の主題である高エネルギー物理のための熱場の理論の発展にとって、超統計は多少興味ある概念であろう。ある種の系を流体力学的に取り扱う場合には、どうしても熱力学的な量も考えることになる。超統計は、運動学的なアプローチとは異なる視点を提供する。一般に、運動学よりも、示強変数の局所的揺らぎを考える方が簡単なように思われる。ただし再度強調したいのは、超統計ではあくまで時間スケールの大きな分離が大前提であるということである。

著者は、日本学術振興会の科学研究費補助金の援助を受けました。

参考文献

- [1] S. Abe and Y. Okamoto (eds.), *Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications* (Springer-Verlag, Heidelberg, 2001).
- [2] C. Tsallis, *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World* (Springer Science+Business Media, New York, 2009).
- [3] C. Beck and E. G. D. Cohen, *Physica A* **322**, 267 (2003).
- [4] E. G. D. Cohen, *Physica D* **193**, 35 (2004).
- [5] C. Beck, in *Anomalous Transport: Foundations and Applications*, edited by R. Klages, G. Radons, and I. M. Sokolov (Wiley-VCH, Weinheim, 2008).
- [6] G. Wilk and Z. Wlodarczyk, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2770 (2000).

- [7] A. G. Bashkirov and A. D. Sukhanov, *J. Exp. Theor. Phys.* **95**, 440 (2002).
- [8] A. M. Reynolds, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 084503 (2003).
- [9] S. Jung and H. L. Swinney, *Phys. Rev. E* **72**, 026304 (2005).
- [10] S. Abe and S. Thurner, *Phys. Rev. E* **72**, 036102 (2005).
- [11] A. Porporato, G. Vico, and P. A. Fay, *Geophys. Res. Lett.* **33**, L15402 (2006).
- [12] L. L. Chen and C. Beck, *Physica A* **387**, 3162 (2008).
- [13] Y. Itto, e-print 1003.0750.
- [14] S. Abe, C. Beck, and E. G. D. Cohen, *Phys. Rev. E* **76**, 031102 (2007).
- [15] S. Abe, *Cent. Eur. J. Phys.* **7**, 401 (2009).
- [16] G. E. Crooks, *Phys. Rev. E* **75**, 041119 (2007).
- [17] J. Naudts, in *Complexity, Metastability and Nonextensivity*, edited by S. Abe, H. Hermann, P. Quarati, A. Rapisarda, and C. Tsallis, *AIP Conference Proceedings* Vol. 965 (American Institute of Physics, New York, 2007).
- [18] A. N. Kolmogorov, *J. Fluid Mech.* **13**, 82 (1962).
- [19] A. M. Oboukhov, *J. Fluid Mech.* **13**, 77 (1962).
- [20] U. Frisch, *Turbulence* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [21] B. Castaing, Y. Gagne, and E. J. Hopfinger, *Physica D* **46**, 177 (1990).
- [22] S. Abe, *Phys. Rev. E* **82**, 011131 (2010).

冷却原子と相関計測

電気通信大学レーザー新世代研究センター

森永 実

2 粒子の強度相関の最初の実験は Hanbury Brown と Twiss によって光子を用いて行われた¹。その後光子以外の様々な系でも実験が試みられているが本稿ではレーザー冷却された原子系を用いて行われた実験を概観する。

1 はじめに：2 光子相関の実験

Hanbury Brown と Twiss(以下 HBT) によって行われた 2 光子相関の実験 [1] について復習しておく。最も単純化された実験系は光源とそこから来る光子を受ける検出器から成る (図 1a)。光は弱く検出器は高感度かつ高速応答とすると検出される信号は図 1b のように光子一つ一つに対応するパルス列となる。こうして得られたパルスの時系列からパルスを 2 つ取り出すすべての組み合わせについてそのパルスの時間間隔 τ を測りヒストグラム $G^{(2)}(\tau)$ を作る。 $G^{(2)}(\tau)$ は $\tau = 0$ の近傍を除き平坦だが、熱的光源の場合 $\tau = 0$ の周りで $G^{(2)}(\tau)$ は盛り上がりその幅は典型的には光のスペクトル幅の逆数程度である (図 2 参照)。微小な τ に対して $G^{(2)}(\tau)$ が相対的に大きな値を持つということは光子が検出された直後は再び光子が検出される確率が高いということを意味する。系の光子数が確定している状態では 1 つ目の光子が検出されると光子数は 1 減るので検出確率が上がるというのは奇妙に感じられるかも知れないが、光子数が統計的または量子論的に適当に定まっていない状態では起こり得ることである。

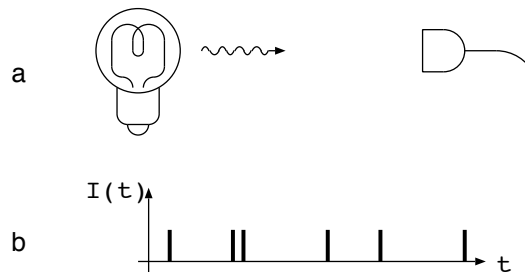


図 1: a. 光源で発生した光子は検出器で検出される。b. 検出器に光子が入射する毎にパルスが発生する。

¹電波天文学の分野では電気信号の強度相関計測はそれより以前から行われていた

光子が検出されない時間が続くと光子数が多い可能性が排除されていく一方、光子が検出されると一転「案外光は強いのかも」となるわけだ²。

1.1 カオスの光

ランプや恒星が出している熱的光のモデルとして次のようなものを考える：光電場は光源を構成する原子それぞれからの寄与の和 $E(t) = \sum_i E_i(t)$ で書け、すべての原子は等価で異なる原子による電場 $E_i(t)$ 、 $E_j(t)$ ($i \neq j$) の間に位相相関はないとする。また同一原子による電場も時間差がある値 τ_c より大きければ位相相関はないと仮定する (τ_c は原子間の平均衝突時間や励起状態の自然寿命等で決まる)。

ここでいくつかの記号の定義をしておく：

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1)$$

$E(t)$ は実関数なので $\tilde{E}^*(\omega) = \tilde{E}(-\omega)$ 。

$$\begin{cases} E^{(+)}(t) \equiv \int_0^{\infty} \tilde{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ E^{(-)}(t) \equiv \int_{-\infty}^0 \tilde{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{cases} \quad (2)$$

$E^{(+)}(t)$: 正の周波数成分

$E^{(-)}(t)$: 負の周波数成分

$$E^{(+)}(t)^* = E^{(-)}(t),$$

$$E(t) = E^{(+)}(t) + E^{(-)}(t)$$

検出器の応答速度は光の振動サイクルよりはずっと遅いので検出量は振動サイクルで平均化された強度 $I(t) = E^{(-)}(t)E^{(+)}(t)$ であり、

$$\begin{aligned} G^{(2)}(\tau) &= \langle I(t)I(t+\tau) \rangle_t \\ &= \langle |E^{(+)}(t+\tau)E^{(+)}(t)|^2 \rangle_t \\ &= \sum_i \langle |E_i^{(+)}(t+\tau)E_i^{(+)}(t)|^2 \rangle_t \\ &\quad + \sum_{i>j} \langle |E_i^{(+)}(t+\tau)E_j^{(+)}(t) + E_j^{(+)}(t+\tau)E_i^{(+)}(t)|^2 \rangle_t \\ &= N g^{(2)}(\tau) + N(N-1) \{ I_0^2 + |g^{(1)}(\tau)|^2 \} \\ &\approx N^2 \{ I_0^2 + |g^{(1)}(\tau)|^2 \} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで $\langle A(t) \rangle_t$ は t に依存する量 $A(t)$ の t による平均、 $g^{(2)}(\tau) \equiv \langle I_i(t)I_i(t+\tau) \rangle_t$ 、 $I_0 \equiv \langle I_i(t) \rangle_t$ 、 $g^{(1)}(\tau) \equiv \langle E_i^{(-)}(t)E_i^{(+)}(t+\tau) \rangle_t$ 、また N は全原子数で $N \gg 1$ を仮定した。 $g^{(1)}(0) = I_0$ であり一方 $\tau > \tau_c$ なら $g^{(1)}(\tau) = 0$ なので $G^{(2)}(0) = 2G^{(2)}(\tau)$ ($\tau > \tau_c$) がわかる (図2)。

²量子的な例としては、状態 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |N\rangle)$ ($N \neq 0$) の光子数の期待値は $\frac{N}{2}$ だが1つ光子が検出されると状態は $|N-1\rangle$ に移り期待値は $N-1$ に ($N > 2$ ならば) 増える。

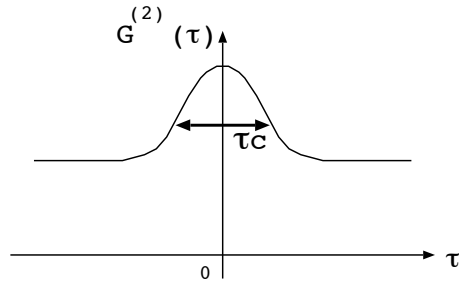


図 2: カオスの光では $G^{(2)}(\tau)$ は $\tau = 0$ で裾野での値の 2 倍の値を取り、またその膨らみの幅は τ_c 程度である。

1.2 $G^{(2)}(\tau)$ の性質 (古典論)

$G^{(2)}(\tau)$ は光強度 $I(t)$ を使って $G^{(2)}(\tau) = \langle I(t)I(t+\tau) \rangle_t$ と書け 2 次の相関関数と呼ばれる。さらに $I : t \mapsto I(t)$ 、 $I_\tau : t \mapsto I(t+\tau)$ として $G^{(2)}(\tau) = \langle I, I_\tau \rangle$ のように内積で書けば不等式 $G^{(2)}(0) \geq G^{(2)}(\tau)$ が成り立つのは明らかである。ただし $\tau = 0$ のときの $G^{(2)}(\tau)$ の値については少し注意が必要である。 τ が有限の場合は $G^{(2)}(\tau)$ に寄与する事象はある時刻 t_1 に 1 つの光子が検出され時刻 $t_2 = t_1 + \tau$ にもう 1 つの光子がされるという事例で、この場合 t_1 と t_2 で検出された光子は同一では有り得ない。しかし $G^{(2)}(\tau) = \langle I(t)I(t+\tau) \rangle_t = \langle I, I_\tau \rangle$ と書いた場合の $G^{(2)}(0)$ には 1 つ目の光子と 2 つ目の光子として 1 つの検出事象を 2 重にカウントしているものも含まれており、これが上記の不等式が常に成立する所以でもある。この 2 重カウントは物理的には次節のように検出器を 2 つ用意し相互相関を取ることによって、また数式上では後述するように光電場の量子化を行ない $I(t)I(t+\tau)$ を正規順序積 $: I(t)I(t+\tau) :$ に置き換えることによって回避できる。

1.3 実際的な実験系

実際の光検出器は光子を検出したあと次の検出まで不感時間 (最近の APD で 35ns 程度) があるため短い相関時間領域が測定できない。そこで検出器を 2 つ用意しそれらの信号の相互相関 $\langle I_1(t)I_2(t+\tau) \rangle_t$ を取るのが一般的である (図 3a)。ただしこの場合図 3b のように原子 i, j から出た光子がどのように検出器 1, 2 に入るかによって光路長差 Δl (この配置では $\Delta l \approx \frac{dD}{L}$) が生じるため (3) は

$$G^{(2)}(\tau) = N g^{(2)}(\tau) + N(N-1) \{ I_0^2 + |g^{(1)}(\tau)|^2 \langle \cos \frac{2\pi\Delta l}{\lambda} \rangle \} \quad (4)$$

と書き直される (λ は光の波長)。このため $\Delta l \gtrsim \lambda$ だと $\langle \cos \frac{2\pi\Delta l}{\lambda} \rangle \approx 0$ となり強度干渉 ($G^{(2)}(\tau)$ の原点付近の膨らみ) が現れない。なおこの性質を利用して、検出器の間隔 d を変えながら恒星からの光を受けることにより恒星の視直径 ($\frac{D}{L}$) を決定することが HBT の実験のそもそもの目的であった [2]。光学の実験では光をビームスプリッター (BS) で 2 本に分け鏡像の位置に

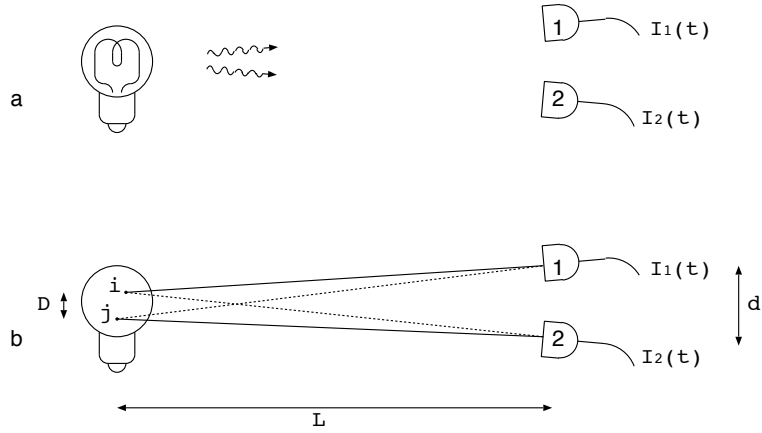


図 3: a. 光源で発生した光子を 2 つの検出器で受ける。b. 2 つの光子が 2 つの検出器で一つずつ検出される 2 つの組み合わせ (実線と点線) で光路長差が生じる。

置かれた 2 つの検出器に導くことにより検出器間の距離 d を実効的に 0 にすることが一般に行われる (図 4a)。ただしこの場合も受光面の大きさが光路長差をつくる要因となる。

1.4 2 光子計測の量子論

既に述べたように強度相関を表わす量 $I(t)I(t+\tau)$ には古典論では $\tau=0$ のとき 2 光子の検出による寄与と 1 光子検出を 2 重にカウントしていることによる寄与が混ざっている。量子論においては正規順序積 $I(t)I(t+\tau)$ が 2 光子相関を表わす量として用いられる。何故か。まず変形

$$\langle : I(t)I(t+\tau) : \rangle = \langle E^{(-)}(t)E^{(-)}(t+\tau)E^{(+)}(t+\tau)E^{(+)}(t) \rangle = |E^{(+)}(t+\tau)E^{(+)}(t)|^2$$

から明らかなようにこれは 2 光子が吸収されたことに対応する量である。もう少し詳しく見るために $\tau=0$ でも 2 光子が関与していることが明白な検出器が 2 つある場合を考える (図 4)。この場合 $I_1(t)$ と $I_2(t)$ は交換するので積の順序の問題も生じない。電場が BS によって受けるユニタリー変換は

$$\begin{cases} U_{BS}^\dagger E_1 U_{BS} = \sqrt{T}E + \sqrt{R}E' \\ U_{BS}^\dagger E_2 U_{BS} = -\sqrt{R}E + \sqrt{T}E' \end{cases}$$

である (T, R は BS の強度透過率と強度反射率)。BS の左から入る信号光を $|\phi\rangle$ (上からは”真空” $|0\rangle$ が入る) とすると検出器に入る光の状態は $U_{BS}|\phi\rangle|0\rangle$ であり強度相関信号は

$$\begin{aligned} G^{(2)}(\tau) &= \langle \phi | \langle 0 | U_{BS}^\dagger I_1(t) I_2(t+\tau) U_{BS} | \phi \rangle | 0 \rangle \\ &= \langle \phi | \langle 0 | U_{BS}^\dagger : I_1(t) I_2(t+\tau) : U_{BS} | \phi \rangle | 0 \rangle \\ &= RT \langle \phi | E^{(-)}(t) E^{(-)}(t+\tau) E^{(+)}(t+\tau) E^{(+)}(t) | \phi \rangle \\ &= RT \langle \phi | : I(t) I(t+\tau) : | \phi \rangle \end{aligned}$$

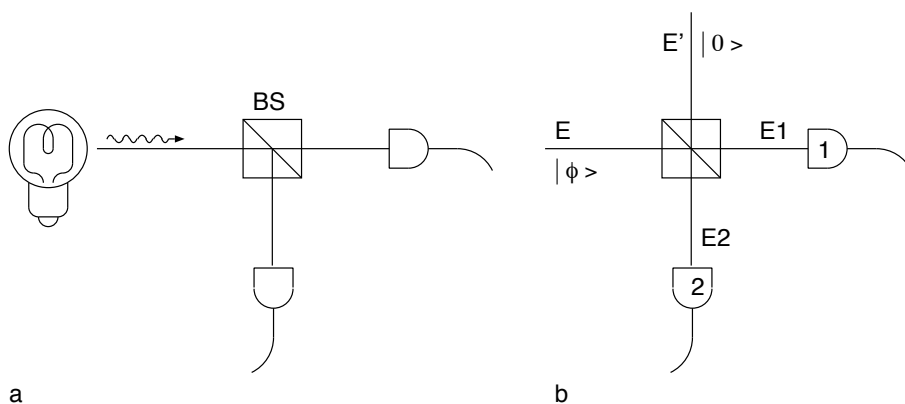


図 4: a. 光を BS で 2 つに分ける。b. BS の左から信号光が、上からは”真空”が入ってくる。

となって正規順序を取った積が対応していることがわかる。なおこの計算から光路での光子の損失や検出器の量子効率が $G^{(2)}(\tau)$ の形に影響を与えないことも見て取れるだろう。

1.5 光子や原子の状態の例

ここでは既出のカオスの光以外の状態の例をいくつか挙げる。

1.5.1 コヒーレント状態

レーザーに対応するとされるコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ では $G^{(2)}(\tau)$ は定数である： $G^{(2)}(\tau) = \langle \alpha | : I(t)I(t+\tau) : | \alpha \rangle = |\alpha|^4$ 。これは状態が時間並進に対して不変であるという性質からくるのではなく、コヒーレント状態が消滅演算子の固有状態であり光子検出事象が光子状態を変えないため 2 つの光子検出過程が互いに影響を及ぼさないことによるものである。

なお原子においても熱的原子線と「原子レーザー」での強度相関の比較実験が行われており前者では $\tau = 0$ 近傍で正の相関が見られるのに対し後者ではどの時間領域でも相関が見られない [3]。

1.5.2 単一原子、単一量子ドットが放出する光

単一エミッタが発する光を相関計測すると $G^{(2)}(0)$ がほぼ 0 まで落ち込む。これは単一エミッタにおいては光子が放出された直後には系は基底状態にあり次の光子を放出するには再び励起状態になる必要があるため一定の時間がかかることによる。この性質を利用して $G^{(2)}(0)$ の値から光があたっている原子・量子ドットの個数を見積もったり $G^{(2)}(\tau)$ のくぼみの幅から励起速度を求めることができる。

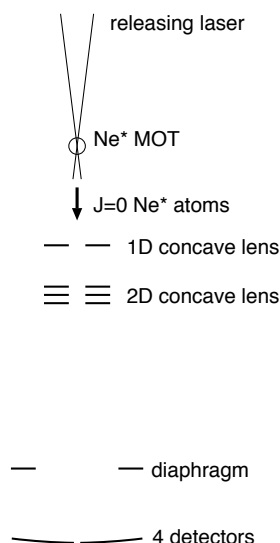


図 5: MOT に捉えられた Ne^* 原子は解放光により別の準安定状態に遷移し冷却サイクルから外れ自由落下を始める。MOT の下方には球面状の検出面を持つ検出器が 4 つ置かれておりそれぞれでの検出事象間の相互相関が評価される。

1.5.3 熱的原子線

量子縮退状態にない熱的原子線ではボゾンの場合はカオスの光の場合と同じく $G^{(2)}(0) = 2G^{(2)}(\tau)$ ($\tau > \tau_c$) のバンチングが見られる一方統計性の違いからフェルミオンの場合は $G^{(2)}(0) = 0$ となると考えられる。

2 中性原子における相関計測実験

一般に原子線の流束は光と比べ何桁も小さく測定可能な相関時間の実質的下限は μs のオーダーである。これはまた単一原子を検出できる検出器の応答時間ともおおよそ一致する。一方粒子線の相関時間 τ_c とエネルギー幅 ΔE と温度 T との関係は $\Delta E \sim \frac{\hbar}{\tau_c}$ 、 $\Delta E \sim \frac{1}{2}k_B T$ であり、これから $\tau_c = 1\mu\text{s}$ には温度 $T = 15\mu\text{K}$ が対応していることがわかる。このように相関計測実験を室温原子を用いて行なうことは困難でレーザー冷却された原子源が不可欠である [4]。

2.1 冷却ネオン原子による 2 原子相関実験 [5]

原子で行われた最初の HBT タイプの実験である。実験の概略を図 5 に示す。レーザー冷却され磁気光学トラップ (MOT) に捉えられた準安定状態ネオン原子 ($1s_5$ $J = 2$) は波長 598nm の「解放光」にあたるともう 1 つの準安定状態 $1s_3$ ($J = 0$) にポンピングされ冷却サイクルから外れるので自由落下を始める。MOT の 82cm 下方には 4 つの領域に分割された金蒸着凹面

鏡が置かれておりこれに準安定状態ネオン原子があたると電子がはじき出されそれが分割に対応する4つのマイクロチャンネルプレート(MCP)で検出される。全体としてこれは凹面鏡を検出面とする4つの原子検出器として働く。4つの検出器の異なる組み合わせ(6通り)すべてについて検出イベントの相互相関が取られ積算される。

凹面鏡の曲率は波面(等位相面)に合わせてある(理由は後述)。HBTタイプの実験においては検出面を波長精度で波面に合わせる必要はなく要求されるのは1つの検出器の検出面内での検出時刻のずれが観測したい相関現象の時間幅より十分小さいことである。光の場合相関幅を1nsとしても検出面の波面から30cmのズレが許容される。一方この実験における原子の検出面到達時の速度は約4m/sであり $0.5\mu\text{s}$ 程度の幅の相関現象を見たいとすると $2\mu\text{m}$ のズレしか許されない(しかしド・ブroy波長5nmよりはずっと大きい)。このため検出面(凹面鏡)の角度調整はシビアである。

光の場合は光速が一定のため検出時刻の差は光子が放出された時刻の差と考えることができた。しかし原子のように質量を持つ粒子の場合は速度分散があるため一般にはこのような読み替えをすることはできない。ただしこの実験のように定常な原子線では伝搬中も原子線のエネルギー幅は保存されるので相関計測で測定される時間コヒーレンス(エネルギー幅の逆数)は原子源でのそれと同じと考えて差し支えない。

有限質量の粒子では位相速度と群速度が異なることも一般には実験系の設計を複雑にする。しかしこれを逆に利用することも可能である。例えば微小な原子源から原子をパルス状に出し t 秒後前後に L だけ離れた位置で観測を行えば検出される原子の速度は(自由空間では)ほぼ $v = \frac{L}{t}$ に決まっており元々の速度幅よりずっと良好な単色性が実効的に得られる。

再度 $G^{(2)}(\tau)$ の表式を振り返ってみる。

$$\begin{aligned}
 G^{(2)}(\tau) &= \int \int \int |\psi(x_1, t)\psi(x_2, t + \tau)|^2 dx_1 dx_2 dt \\
 &= \int \int \int \{ \sum_i |\psi_i(x_1, t)\psi_i(x_2, t + \tau)|^2 \\
 &\quad + \sum_{i>j} |\psi_i(x_1, t)\psi_j(x_2, t + \tau) + \psi_j(x_1, t)\psi_i(x_2, t + \tau)|^2 \} dx_1 dx_2 dt \\
 &\approx \int \{ \int \sum_i |\psi_i(x_1, t)|^2 dx_1 \int \sum_j |\psi_j(x_2, t + \tau)|^2 dx_2 \\
 &\quad + \int \int [\sum_i \psi_i^*(x_1, t)\psi_i(x_2, t + \tau)] [\sum_j \psi_j^*(x_1, t)\psi_j(x_2, t + \tau)]^* dx_1 dx_2 \} dt
 \end{aligned} \tag{5}$$

ψ_i は i 番目の原子の波動関数で $\psi = \sum_i \psi_i$ である。最右辺の第2項が強度干渉項であるが i 番目と j 番目の原子の波数の差を Δk 、検出位置 x_1 と x_2 の波数方向の距離を Δx とすると $\psi_i^*(x_1, t)\psi_i(x_2, t + \tau)$ と $\psi_j^*(x_1, t)\psi_j(x_2, t + \tau)$ の位相差は $\Delta k \Delta x$ でありこれが π のオーダーになると強度干渉が失われる。これが検出面を波面と一致させることのものである(そうすると $\Delta x = 0$ なので)。ただし一般には異なる原子(状態)の波動関数は波数だけでなく波面も同一ではない[6]。

解放光はMOTの中心に集光されているので解放光のビームウエストのサイズが原子源の大きさをおおよそ決めており鉛直方向(縦方向)に長い。そのままではコヒーレント領域が検出器全体をカバーしないために静電場による2次元凹レンズ³を用いて原子源を見かけ上縮小

³中性原子に対しては1次元・2次元の静電レンズは必ず凹レンズになる[7]

している(ビームを発散させることによりコヒーレンスの悪いビーム周辺部の原子を検出器の上に置かれた絞りの開口の外に押し出しているとも解釈できる)。縮小(横)倍率を M とすると縦倍率は M^2 なので縦方向にはより縮小され好都合である。

実験結果であるが、2次元凹レンズを働かせ波面を検出面と一致させた場合は $\tau = 0$ 近傍では中心で裾野の 2.0 ± 0.3 倍程度の相関事象数が観測されたが(半値全幅約 $0.24\mu\text{s}$)、2次元凹レンズの代わりに1次元凹レンズを使い同じ程度の検出頻度を保ちながらも波面が検出面と合っていない場合、及び検出面を意図的に傾けた場合は $\tau = 0$ 近傍の相関の増加はいずれもわずかなものにとどまった。

2.2 ボゾン vs フェルミオン [8]

ヘリウム4とヘリウム3での統計性の違いからくる2原子相関の振舞いの差を対比した実験である。実験配置はネオン(図5)のものと似ているが、原子源として磁気トラップを使って蒸発冷却により量子縮退に近い $0.5\mu\text{K}$ とネオンの実験の2桁程低い温度まで冷却していること、原子はパルス的に放出されること、原子の検出にMCPを直接使っていること(MCPの表面が検出面・MCPは検出面内で位置分解検出が可能)等の違いがある。検出面が平面であり波面と一致していないことから相関は検出面内の個々の点で独立に計算される。すなわち検出面は分解能に等しい大きさ $500\mu\text{m}$ のセルに分割されていて1つ1つのセルが独立な検出器でありそれぞれのセルで1検出器のHBT実験が行なわれ、それが最後に合算されると考えてよい。実験結果であるがボゾンのヘリウム4では $\tau = 0$ 近傍で3%程の $G^{(2)}(\tau)$ の膨らみが観測され、一方フェルミオンのヘリウム3では6%程度のへこみが見られ、それらの半値半幅はいずれも約 0.2ms であった。膨らみやへこみの度合いが1に比べてずっと小さいのは横方向のコヒーレンス長がMCPの位置分解能より1桁以上小さいため、としている。実際、コヒーレンスを向上させるために縮小光学系(凹レンズ・ここでは共鳴に対して正に離調したレーザー光を用いている)を用いた場合はヘリウム3でのへこみは9%に向上した。

2.3 光格子から解放された原子の強度相関 [10]

1.3節で見たように光源の有限な大きさは相関を減少させるものであった。しかし光源が規則的に並んでいる場合は必ずしもそうではない。例えば図3bにおいて光源となる原子は i と j というインデックスを持つ2つだけとしその位置は固定されているとする。すると(4)を $\tau = 0$ で評価すると $(g^{(2)}(0) = 0, g^{(1)}(0) = I_0^2)$ なので

$$G^{(2)}(0) = 2I_0^2 \left(1 + \cos \frac{2\pi\Delta l}{\lambda}\right) \quad (6)$$

となり、 $\Delta l = \frac{dD}{L}$ に対して正弦的に変化する。つまり検出器の間隔 D を変えていったとき周期的に同時刻相関が大きいところと0となるところが交互に現れる。このような効果を使って原子の隠れた秩序を探る方法は文献[9]で提案された。この節で紹介する実験はそれを実践したもので同時刻相関から原子源における原子の配列構造を明らかにしている。

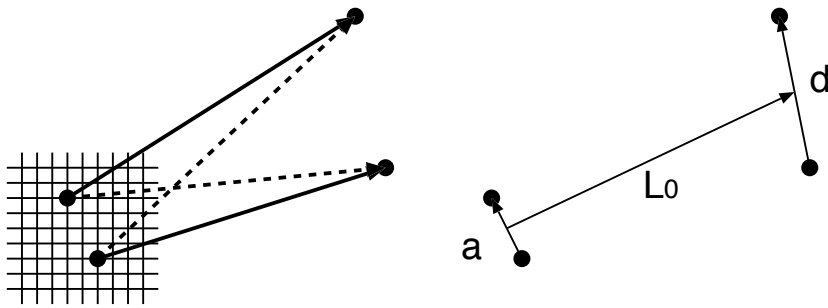


図 6: 光格子中に \vec{a} だけ離れて捉えられていた 2 つの原子は自由飛行の後 \vec{d} 離れて検出される。

原子集団は最初よく冷えた状態で 3 次元光格子に捕捉されており、その後 光格子ポテンシャルを切ってから時間 t の自由飛行の後 共鳴光をあて吸収像として検出される (飛行時間法・TOF)。光格子とは複数本の非共鳴レーザー光の干渉によってできた定在波により作り出される原子に対する 3 次元構造の周期ポテンシャルで、そこに捉えられた原子の波動関数はポテンシャルが浅い場合はトンネリングにより複数の格子点にまたがり一定の位相関係を持つので TOF では光格子の構造を反映した干渉像が観測される。しかしポテンシャルを深くしていくとトンネリングは実質的に禁止され原子の波動関数はそれぞれの格子点に局在化し (Mott 絶縁体状態)、TOF 像⁴は中心が濃く周辺に行くに従って薄くなっていくという以上の構造を持たないものになる。しかし実は TOF 像の揺らぎの中に原子の配列情報が隠されているのである。

原子が時間 t の自由飛行の間に距離 L だけ移動したとして、その間に受ける位相変化は $\phi = \frac{mc^2}{\hbar} \tau$ である。ここで τ は t に対応する固有時間で $\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t = \sqrt{1 - \frac{L^2}{c^2 t^2}} t \approx t - \frac{L^2}{2c^2 t}$ なので非相対論的領域で $\phi = \frac{mc^2}{\hbar} t - \frac{m}{2\hbar t} L^2$ である。

最初光格子中に \vec{a} だけ離れて捉えられていた 2 つの原子が時間 t の自由飛行の後 \vec{d} 離れて検出されたとしよう (図 6)。すると図で実線と点線で示された経路の位相差は (2 つの原子の初期位置の midpoint と検出位置の midpoint とを結ぶベクトルを \vec{L}_0 として)

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \frac{m}{2\hbar t} \left\{ \left(\vec{L}_0 + \frac{\vec{a}}{2} - \frac{\vec{d}}{2} \right)^2 + \left(\vec{L}_0 - \frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{d}}{2} \right)^2 - \left(\vec{L}_0 + \frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{d}}{2} \right)^2 - \left(\vec{L}_0 - \frac{\vec{a}}{2} - \frac{\vec{d}}{2} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{m}{\hbar t} \vec{a} \cdot \vec{d} \end{aligned}$$

となる。従って原子が格子点に捉えられているとすると \vec{d} が逆格子ベクトル (の $\frac{\hbar t}{m}$ 倍) に等しい位置間隔での TOF 像の揺らぎの相関が大きくなっているはずである。果たして TOF 像上で \vec{d} 離れた位置の吸収強度の揺らぎの相関を積算した 2 次元マップを作ったところ逆格子構造が見事に現れたのであった。

なお文献 [11] は同様の実験を光格子ではなく分子に対して行なった実験として紹介されることが多いが、用いられた 2 原子分子を構成する原子は異なる種類のものであるので HBT 的效果を見たものではない。

⁴正確には TOF 像の期待値。

3 おわりに

以上冷却中性原子を用いて行われた HBT タイプの 2 原子相関の実験の主なものを紹介したが、振り返ってみると初期の実験が「量子が示す奇妙な振る舞い」を見るためのものだったのに対し近年になると計測法として実践的なものに発展してきているのが見て取れるだろう。

参考文献

- [1] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss, *Nature* **177**, 27 (1956).
- [2] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss, *Nature* **178**, 1046 (1956).
- [3] A. Öttl, S. Ritter, and M. Köhl and T. Esslinger, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 090404 (2005),
A. G. Manning, S. S. Hodgman, R. G. Dall, M. T. Johnsson, and A. G. Truscott, *Optics Express* **18**, 18712 (2010).
- [4] レーザー冷却については P. メスター (盛永篤郎、本多和仁訳) 「原子光学」シュプリンガーフェアラーク東京 (2003)、久我隆弘 「レーザー冷却とボーズ凝縮」岩波講座 物理の世界さまざまな物質系 〈5〉岩波書店 (2002) 等の教科書がある。
- [5] M. Yasuda and F. Shimizu, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3090 (1996)
- [6] 重心が原点にあるガウス型波束 $\phi(r) = \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{r^2}{a}\right)$ ($\vec{r} = (x, y, z)$) を $t = 0$ に解放・自由落下させると (重力方向 $-z$ 、重力加速度 g) 時刻 t には重心は $\vec{r} = (0, 0, -\frac{1}{2}gt^2)$ にあるが、等位相面は同心円でその中心は $\vec{r} = (0, 0, +\frac{1}{2}g(t^2 + 2\beta^2))$ である。ここで $\beta = \frac{ma}{\hbar}$ で通常は t に比べて無視できる大きさである。 <http://m.ils.uec.ac.jp/memo/qp/wavepacket/>参照。
- [7] W. Ketterle and D.E. Pritchard, *Appl. Phys. B* **54**, 403 (1992), M. Morinaga, *Appl. Phys. B* **79**, 679 (2004).
- [8] T. Jelte, J. M. McNamara, W. Hogervorst, W. Vassen, V. Krachmalnicoff, M. Schellekens, A. Perrin, H. Chang, D. Boiron, A. Aspect, and C. I. Westbrook, *Nature* **445**, 402 (2007).
- [9] E. Altman, E. Demler, and M. D. Lukin, *Phys. Rev. A* **70**, 013603 (2004).
- [10] S. Fölling, F. Gerbier, A. Widera, O. Mandel, T. Gericke, and I. Bloch, *Nature* **434**, 481 (2005).
- [11] M. Greiner, C. A. Regal, J. T. Stewart, and D. S. Jin, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 110401 (2005).

Phase Structure and Low-energy Excitations in Spinor BECs

Shun Uchino¹, Michikazu Kobayashi², Muneto Nitta³, Masahito Ueda¹

1) Department of Physics, The University of Tokyo, 7-3-1 Hongo, Tokyo 113-0033, Japan

2) Department of Basic Science, The University of Tokyo, 3-8-1 Komaba, Tokyo 153-8902, Japan

3) Department of Physics, and Research and Education Center for Natural Sciences, Keio University, 4-1-1 Hiyoshi, Kanagawa 223-8521, Japan

1. Introduction

Physics of ultracold atomic gases has matured into a highly active and versatile field of research since the experimental realization of Bose-Einstein condensates (BECs) in 1995. Compared to the other fields of physics, this system has several merits to study: reliability of the microscopic Hamiltonian and flexibility of experiments. BECs with spin degrees of freedom also known as spinor BECs, are results of these strengths, and become one of the hottest branches coupled with the fact that the theoretical studies go hand in hand with the experimental studies [1].

In this research, we delineate the phase structure and low-energy excitations in spin-1 and spin-2 BECs, both of which were already realized in experiments. We also sketch out our new result in a spin-2 nematic condensate [2].

2. Ground-state phases in spinor BECs

We consider a system of N spin- f identical bosons with mass M that undergo an s -wave scattering subject to periodic boundary conditions. Let $\psi_m(x)$ ($m = -f, -f+1, \dots, f$) be the field of a boson at position x with magnetic quantum number m . Then, the low-energy effective Hamiltonian of a spin- f BEC is given by

$$\mathcal{H} = \mathcal{T} + \mathcal{V}, \quad (1)$$

where $\mathcal{T} = \sum_m \psi_m^\dagger(x) \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M} \right) \psi_m(x)$ and

$$\mathcal{V} = \sum_{F:\text{even}} \frac{g_F}{2} \sum_{M=-F}^F \langle fmf m' | FM \rangle \langle FM | f\mu f\mu' \rangle \psi_m^\dagger(x) \psi_{m'}^\dagger(x) \psi_{\mu'}(x) \psi_\mu(x). \quad (2)$$

Here, g_F is coupling constant in the total spin F channel, $\langle fmf m' | FM \rangle$ is the Clebsch-Gordan coefficient, and Bose symmetry requires that the total spin F in the s -wave channel is even.

Let us first discuss a spin-1 BEC, where there are two independent coupling constants. By assuming that the interatomic interaction is weak—the condition well satisfied in current experiments, the ground-state phases in BECs can be determined by Gross-Pitaevskii

(GP) approximation. While if $g_0 > g_2$, the realized BEC has ferromagnetic nature because there is a finite magnetization, if $g_0 < g_2$, there is no magnetization in the ground state, which is called a polar or anti-ferromagnetic phase. Namely, a similarity with the Heisenberg model is expected.

Let us next discuss a spin-2 BEC, where there are three independent coupling constants. Reflecting an additional coupling constant g_4 , the phase structure in a spin-2 BEC is more complicated, and there are two physical quantities to specify the ground states, which are magnetization and spin-singlet pair amplitude. By using these quantities, we can show that three independent phases, that is, ferromagnetic, cyclic, and nematic phases, are realized as functions of the coupling constants. Even though the ferromagnetic phase in a spin-2 BEC shares the same properties with the spin-1 ferromagnetic phase in many points, there are no counterparts for the nematic and cyclic phases. Therefore, it is expected that a spin-2 BEC involves more nontrivial properties than a spin-2 BEC.

3. Massless modes in spinor BECs

We next examine the low-energy excitations in spinor BECs, which can be obtained by the Bogoliubov theory when the interatomic interaction is weak. The Bogoliubov theory takes into account the effect of quantum fluctuations from the GP approximation up to the second order in the Hamiltonian level. By diagonalizing the approximate Hamiltonian, we obtain so-called Bogoliubov modes.

Among others, massless modes play prominent roles in determining low-energy behaviors of systems. Therefore, we focus on the massless modes from the point of view of the Nambu-Goldstone (NG) modes. At the same time, since the system has no Lorentz invariance, the number of NG modes is not always equal to the number of broken generators and sometimes less than the number of broken generators [3]. Keeping in mind this point, we relate some of the Bogoliubov modes to the NG modes in spin-1 and spin-2 BECs.

For example, while in the spin-1 and spin-2 ferromagnetic phases, the number of the NG modes is less than that of the broken generators, in the other phases in spin-1 and spin-2 BECs, the number of the NG modes is equal to that of the broken generators. The former and latter cases are the same situations as the Heisenberg ferromagnet and anti-ferromagnet, respectively.

However, the spin-2 nematic phase is special since not all of the massless Bogoliubov modes are interpreted as the NG modes. In the nematic phase, where three different phases – uniaxial nematic, dihedral-2, and biaxial nematic phases – are degenerate at the GP level, we obtain 5 massless modes by using the Bogoliubov theory, while the broken generators are 3 and 4 for the uniaxial nematic, and the dihedral-2 and biaxial nematic phases, respectively.

The reason of the emergence of the residual massless modes is that there is hidden symmetry in the ground state at the GP level. Considering this symmetry, it is shown that the order parameter manifold in the nematic phase is enlarged to

$$\tilde{M} \cong [\text{U}(1) \times \text{S}^4]/\mathbb{Z}_2, \quad (3)$$

Table 1: Order parameter manifold M and the enlarged order parameter manifold \tilde{M} of the uniaxial nematic, dihedral-2, and biaxial nematic phases.

Phase	$M \cong G/H$	\tilde{M}
uniaxial nematic	$U(1) \times S^2/\mathbb{Z}_2$	$[U(1) \times S^4]/\mathbb{Z}_2$
biaxial nematic	$[U(1) \times SO(3)]/D_4$	
dihedral-2	$U(1) \times SO(3)/D_2$	

and each order parameter manifold of the NG modes G/H is a submanifold of \tilde{M} as shown in Table 1. Because of $\dim(\tilde{M}) = 5$, the corresponding number of massless modes is expected, which is consistent with the result of the Bogoliubov theory. The soft modes originating from such a hidden symmetry are called quasi-NG modes [4], and the above result shows that the physics of the quasi-NG modes can be verified with the spin-2 nematic BEC. Several phenomena to which the quasi-NG modes lead were recently analyzed in Ref. [2].

4. Summary

We have discussed the phase structure and low-energy excitations in spinor BECs, which involve the nontrivial properties compared to a condensate without spin degrees of freedom. Since a spinor BEC is an ideal system to study condensates with internal degrees of freedom, it is expected that it sheds light on physics of superfluid ^3He , high- T_c superconductor, and color superconductor in dense quantum chromodynamics.

References

- [1] See, e.g., M. Ueda and Y. Kawaguchi, arXiv:1001.2072.
- [2] S. Uchino, M. Kobayashi, M. Nitta, and M. Ueda, arXiv:1010.2864, to be published in Phys. Rev. Lett.
- [3] H. B. Nielsen and S. Chadha, Nucl. Phys. **B105**, 445 (1976).
- [4] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **29**, 1698 (1972).

多成分中性原子ボース凝縮系におけるゼロモードを含めた解析について

早大本庄学院^A, 早大理工学研究所^B, 早大先進理工物理^C, 早大基幹理工電子光システム^D
峰真如^{A,B}, 竹井郁夫^C, 小林恵太^B, 山中由也^D

1 はじめに

中性原子気体の Bose–Einstein 凝縮 (BEC) は集団励起運動の実験などに代表されるようにマクロなスケールで量子論的現象が観測できるだけでなく, 相互作用が弱く制御可能性にも優れているため理論と実験の詳細な比較ができるという点で魅力的な研究対象となっている. この点に注目し, 我々は特に場の量子論の立場からこの現象を扱う.

場の量子論では, BEC などの量子論的相転移は対称性の自発的破れであるとみなすことができる. Goldstone の定理によればこのような系にはエネルギーに跳びのないモード (南部–Goldstone モード) が存在する. このモードは赤外発散などの事情により扱いが困難であるため, 一様系で励起エネルギースペクトルが連続的であるような通常扱われる系で一般には考慮されていない. 一方で原子を閉じ込めるポテンシャルの存在のためにこの系のスペクトルは離散的であるため, この南部–Goldstone モードの明白な取り扱いが必要になる. このモードを取り入れなければ, 場の量子論に本質的な正準交換関係が破れてしまう.

また近年, 多成分 BEC 系の実現が報告された [1]. これにより相分離現象や, スピン自由度をもった BEC などの研究も活発に行われるようになった.

多成分 BEC に関する理論的研究でゼロモードにも言及したものに [2] がある. しかし, この方法では, 場の期待値としての秩序変数の概念を犠牲にしている. そこで, 我々は場の量子論に忠実な定式化を行うことを目的とした.

第 2 節ではこの系に対して我々がとったアプローチを述べる. そしてゼロモード空間の完備化と直交化について第 3 節で述べる. 第 4 節ではまとめを行う.

2 方法

本稿では 2 成分 BEC 系に関する解析について述べる. その際, 1 成分 BEC に関して, ゼロモードも含めた Bogoloubov–de Gennes の方法 [3] があるので, その拡張を試みる.

次の成分間の遷移のない (それぞれ独立な位相対称性がある) 2 成分中性原子系に対するモデル Hamiltonian を考えよう.

$$\hat{H} = \int d^3\mathbf{x} \left[\hat{\psi}_1^\dagger (K_1 + V_1 - \mu_1) \hat{\psi}_1 + \frac{g_1}{2} \hat{\psi}_1^\dagger \hat{\psi}_1^\dagger \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_1 + \hat{\psi}_2^\dagger (K_2 + V_2 - \mu_2) \hat{\psi}_2 + \frac{g_2}{2} \hat{\psi}_2^\dagger \hat{\psi}_2^\dagger \hat{\psi}_2 \hat{\psi}_2 + g_{12} \hat{\psi}_1^\dagger \hat{\psi}_2^\dagger \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_2 \right]. \quad (1)$$

ここで, $K_i = -\frac{\hbar^2}{2m_i}$ は第 i 成分に対する運動エネルギーで, m_i は第 i 成分の原子の質量である. 同種原子のときには当然 m_i は i によらなくなる. また, V_i と μ_i , そして g_i はそれぞれ第 i 成分に対する閉じ込めポテンシャル, 化学ポテンシャル, 結合定数である. また g_{12} は異種成分間の結合定数である.

凝縮相の出現に伴い, 場の演算子は,

$$\hat{\psi}_1(x) = v_1(\mathbf{x}) + \hat{\varphi}_1(x), \quad \hat{\psi}_2(x) = v_2(\mathbf{x}) + \hat{\varphi}_2(x), \quad (2)$$

のように分割される. ここで $x = (\mathbf{x}, t)$ であり, 凝縮体波動関数 $v_1(\mathbf{x})$, $v_2(\mathbf{x})$ は以下の Gross–Pitaevskii (GP) 方程式を満たしているとする:

$$\left(K_1 + V_1 - \mu_1 + g_1 |v_1|^2 + g_{12} |v_2|^2 \right) v_1(\mathbf{x}) = 0, \quad \left(K_2 + V_2 - \mu_2 + g_2 |v_2|^2 + g_{12} |v_1|^2 \right) v_2(\mathbf{x}) = 0. \quad (3)$$

このとき Hamiltonian は以下のようになる:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}} + \text{Const.}, \quad (4)$$

ただし,

$$\begin{aligned}\hat{H}_0 &= \int d^3\mathbf{x}[\hat{\phi}_1^\dagger(K_1 + V_1 - \mu_1)\hat{\phi}_1 + \frac{g_1}{2}(4|v_1|^2\hat{\phi}_1^\dagger\hat{\phi}_1 + v_1^{*2}\hat{\phi}_1^2 + v_1^2\hat{\phi}_1^{\dagger 2}) \\ &\quad + \hat{\phi}_2^\dagger(K_2 + V_2 - \mu_2)\hat{\phi}_2 + \frac{g_2}{2}(4|v_2|^2\hat{\phi}_2^\dagger\hat{\phi}_2 + v_2^{*2}\hat{\phi}_2^2 + v_2^2\hat{\phi}_2^{\dagger 2}) \\ &\quad + g_{12}(\hat{\phi}_1^\dagger\hat{\phi}_2^\dagger v_1 v_2 + \hat{\phi}_1^\dagger\hat{\phi}_1 |v_2|^2 + \hat{\phi}_1^\dagger\hat{\phi}_2 v_1 v_2^* + \hat{\phi}_2^\dagger\hat{\phi}_1 v_2 v_1^* + \hat{\phi}_2^\dagger\hat{\phi}_2 |v_1|^2 + \hat{\phi}_1\hat{\phi}_2 v_1^* v_2^*), \\ \hat{H}_{\text{int}} &= (\hat{\phi}, \hat{\phi}^\dagger \text{ に関する 3 次以上の項})\end{aligned}\quad (5)$$

である. 非摂動部 \hat{H}_0 に着目すると, 場の演算子に対する Heisenberg 方程式は,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Phi} = \tilde{T} \hat{\Phi}, \quad (6)$$

と書ける. ただし, $\hat{\Phi} = {}^t (\hat{\phi}_1 \quad \hat{\phi}_1^\dagger \quad \hat{\phi}_2 \quad \hat{\phi}_2^\dagger)$ であり, 演算子行列 \tilde{T} は,

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 & \mathcal{M}_1 & \mathcal{X}_{1\bar{2}} & \mathcal{X}_{12} \\ -\mathcal{M}_1^* & -\mathcal{L}_1 & -\mathcal{X}_{\bar{1}2} & -\mathcal{X}_{\bar{1}2} \\ \mathcal{X}_{\bar{1}2} & \mathcal{X}_{12} & \mathcal{L}_2 & \mathcal{M}_2 \\ -\mathcal{X}_{\bar{1}2} & -\mathcal{X}_{\bar{1}2} & -\mathcal{M}_2^* & -\mathcal{L}_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

となる. それぞれの行列成分は, $\mathcal{L}_1 = K_1 + V_1 - \mu_1 + 2g_1|v_1|^2 + g_{12}|v_2|^2$, $\mathcal{L}_2 = K_2 + V_2 - \mu_2 + 2g_2|v_2|^2 + g_{12}|v_1|^2$, $\mathcal{M}_i = g_i v_i^2$, $\mathcal{X}_{ij} = g_{12} v_i v_j$, $\mathcal{X}_{i\bar{j}} = g_{12} v_i v_j^*$, $\mathcal{X}_{\bar{i}j} = g_{12} v_i^* v_j$, $\mathcal{X}_{\bar{i}\bar{j}} = g_{12} v_i^* v_j^*$ ($i, j = 1, 2$) である. \hat{H}_0 は

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2} (\hat{\Phi}, \tilde{T} \hat{\Phi}), \quad (8)$$

と書ける. ただし, 4成分関数 r と s に対する“内積”を,

$$(r, s) \equiv \int r^\dagger(\mathbf{x}) u_3 s(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}. \quad (9)$$

のように定義した. ここで,

$$u_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

である.

場の演算子を展開するため, 次の演算子 \tilde{T} に対する固有値関数, すなわち 2成分 Bogoliubov-de Gennes 方程式を考えよう.

$$\tilde{T} x_n(\mathbf{x}) = E_n x_n(\mathbf{x}) \quad (11)$$

ここで $x_n(\mathbf{x})$ 4成分の固有関数で, E_n は対応する固有値である. 演算子 \tilde{T} がエルミートでないので, 固有値は必ずしも実数とは限らない.

3 ゼロモード空間の完備化と直交化

Bogoliubov-de Gennes 方程式のゼロモード固有関数は, 式 (3) の解 v_1, v_2 を規格化した $f_1 = v_1/\sqrt{N_1}$, $f_2 = v_2/\sqrt{N_2}$ を用いて,

$$x_0^{(1)} = {}^t (f_1 \quad -f_1^* \quad 0 \quad 0), \quad x_0^{(2)} = {}^t (0 \quad 0 \quad f_2 \quad -f_2^*) \quad (12)$$

となる. ただし, $N_i = \int |v_i|^2 d^3 \mathbf{x}$ ($i = 1, 2$) は第 i 成分の凝縮粒子数である. さて, $x_0^{(1)}, x_0^{(2)}$ だけではゼロモード空間は完備でなく, それぞれ 1 個の独立な関数を必要とする [3]. 本研究で,

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{K_1} t \left(\frac{\partial v_1}{\partial N_1} \quad \frac{\partial v_1^*}{\partial N_1} \quad \frac{\partial v_2}{\partial N_1} \quad \frac{\partial v_2^*}{\partial N_1} \right), & K_1 &= \int \left(\frac{\partial v_1^*}{\partial N_1} f_1 + \frac{\partial v_1}{\partial N_1} f_1^* \right) d^3 \mathbf{x}, \\ x_1^{(2)} &= \frac{1}{K_2} t \left(\frac{\partial v_1}{\partial N_2} \quad \frac{\partial v_1^*}{\partial N_2} \quad \frac{\partial v_2}{\partial N_2} \quad \frac{\partial v_2^*}{\partial N_2} \right), & K_2 &= \int \left(\frac{\partial v_2^*}{\partial N_2} f_2 + \frac{\partial v_2}{\partial N_2} f_2^* \right) d^3 \mathbf{x} \end{aligned} \quad (13)$$

とすればよいことがわかった.

さらに, $(x_{-1}^{(1)}, x_{-1}^{(2)}) = A$ とすると, 一般に $A \neq 0$ であるが, このままでは数学的扱いが困難である. そこで,

$$x_{-1}^{(2)} \rightarrow x_{-1}^{(2)} - Ax_0^{(1)} \quad (14)$$

と取り直せば, 定義方程式も他の関数の直交性も影響を受けずに $(x_{-1}^{(1)}, x_{-1}^{(2)}) = 0$ と取れることがわかった.

$x_{-1}^{(1)}, x_{-1}^{(2)}$ は位相ゆらぎに対応する自由度に対応した関数であり, 上記の操作はその自由度の中から 1 つの関数形を固定したことに相当する.

このことにより, ゼロモードも含めた関数の完全性条件は,

$$\begin{aligned} \sum_n \left[x_n(\mathbf{x}) x_n^\dagger(\mathbf{x}') - y_n(\mathbf{x}) y_n^\dagger(\mathbf{x}') \right] + x_0^{(1)}(\mathbf{x}) x_{-1}^{(1)\dagger}(\mathbf{x}') + x_{-1}^{(1)}(\mathbf{x}) x_0^{(1)\dagger}(\mathbf{x}') \\ + x_0^{(2)}(\mathbf{x}) x_{-1}^{(2)\dagger}(\mathbf{x}') + x_{-1}^{(2)}(\mathbf{x}) x_0^{(2)\dagger}(\mathbf{x}') = u_3 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (15)$$

となる. 簡単のため, 複素固有モードは含めなかった. この完全系による場の展開は,

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(\mathbf{x}) &= \sum_n \left[\hat{c}_n x_n(\mathbf{x}) - \hat{c}_n^\dagger y_n(\mathbf{x}) \right] \\ &+ \hat{\mathcal{P}}_1 x_{-1}^{(1)}(\mathbf{x}) + i \hat{\mathcal{Q}}_1 x_0^{(1)}(\mathbf{x}) + \hat{\mathcal{P}}_2 x_{-1}^{(2)}(\mathbf{x}) + i \hat{\mathcal{Q}}_2 x_0^{(2)}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (16)$$

ただし, 交換関係は $[\hat{\mathcal{Q}}_1, \hat{\mathcal{P}}_1] = i$, $[\hat{\mathcal{Q}}_2, \hat{\mathcal{P}}_2] = i$, 他はゼロとなる. この展開は, 場の演算子の正準交換関係を保っており, Hamiltonian は次のように与えられる:

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\hat{\mathcal{P}}_1^2}{I_{11}} + \frac{\hat{\mathcal{P}}_2^2}{I_{22}} + \left(\frac{1}{I_{12}} + \frac{1}{I_{21}} \right) \hat{\mathcal{P}}_1 \hat{\mathcal{P}}_2 \right\} + \sum_n E_n \hat{c}_n^\dagger \hat{c}_n + \text{Const.} \quad (17)$$

ただし, $I_{ij} = \frac{K_i}{\sqrt{N_j} \frac{\partial \mu_j}{\partial N_i}}$ ($i = 1, 2$) である. ゼロモードの部分は, さらに対角化できることに注意する.

4 まとめと今後の課題

本稿では, 2 成分 BEC におけるゼロモードも含めた解析を行った. 全てのモードを含んだ関数で場の演算子を展開し, 場の正準交換関係を保ったまま Hamiltonian を対角化した. なお, この方法の 3 成分以上の系への拡張も容易である. 今後の課題としては, 対称性の異なる多成分 BEC 系 (Spinor BEC など) についての解析を行いたい.

参考文献

- [1] C. J. Myatt, E. A. Burt, R. W. Ghrist, E. A. Cornell, and C. E. Wieman, Phys. Rev. Lett. **78**, 586 (1997).
- [2] B. Oleś and K. Sacha, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 145005 (2008).
- [3] M. Lewenstein and L. You, Phys. Rev. Lett. **77**, 3489 (1996), H. Matsumoto and S. Sakamoto, Prog. Theor. Phys. **107**, 679 (2002), M. Mine, M. Okumura, T. Sunaga, and Y. Yamanaka, Ann. Phys. **322**, 2327 (2007).

原子核における α 粒子のボーズ・アインシュタイン凝縮

大久保 茂男 県立高知女子大学 環境理学科*

原子核において軽い核から重い核の典型核において α 粒子モデルが成立することは広く知られている。 α 粒子の閾値エネルギーあたりでは核力の飽和性により α 粒子構造がとりわけ現れやすい。非常に重い原子核では Q 値が正, すなわち閾値エネルギーが負の原子核が珍しくなく, ^{212}Po のように基底状態であっても α 粒子を放出して崩壊する放射性核も多い。原子核が α 粒子からできているという α 粒子モデルは殻モデルよりもはるかに古い。

原子核内にボーズ粒子である α 粒子が存在すれば, α 粒子がボーズ・アインシュタイン凝縮している状態が存在する可能性がある。重い核では α 粒子が凝縮しているかもしれないとの考えは非常に早い段階から出されていたが, 実験的には確認されていない。ところが 1995 年冷却希薄原子系においてボーズ凝縮状態が実現され, 有限系の原子核においても α 粒子のボーズ凝縮の可能性が注目されるようになった。

軽い原子核 ^{12}C の励起エネルギー 7.65 MeV に存在するホイル状態 0^+ は 3α 粒子構造をもつ。 α 粒子密度が非常に小さく, 冷却原子系に対応してボーズ粒子凝縮している可能性が注目されてきた [1]。40 年近く前に, 日本の上柿英二氏ら [2] および上村正康氏ら [3] による ^{12}C の α 粒子構造およびホイル状態を非常によく記述する波動関数を吟味すると 3 個の α 粒子は希薄ガス状で高い確率で最低エネルギー状態 0_s に縮退していることが判明した。

われわれはかつて α 粒子や ^3He 粒子のホイル状態からの虹散乱の実験データを分析し, 虹角やエアリー極小角が非ボーズ凝縮の ^{12}C の基底状態と比べ著しく後方角にシフトすることを示した [4, 5]。励起状態の半径そのものを直接測定することは困難であるが, ホイル状態は非常に大きい平均 2 乗半径をもち希薄ガス状態にあることが実験的にも判明した。そのほかの理論的研究もホイル状態が希薄 3α のガス状態にありボーズ凝縮状態にあることを示唆しているが, 実験的には決定的な証拠, すなわち, 超流動性は確認されていない。9.63 MeV にある 3^- 状態も 3 個の α 粒子が角運動量 $L=1$ の状態に縮退した量子渦状態にあるとは考えにくい。実際, この状態は 3α 粒子的成分が多いものの典型的な α 粒子状態ではない。いままでのところ 3α 系については α 粒子がボーズ・アインシュタイン凝縮状態にあるという決定的・明白な実験的証拠はない。

一般的に超流動はメゾスコピック系やバルク系で見られ, 原子核のような少数個の α 粒子系では超流動はおこらないと考えられがちだが, そうとも限らない。実際, 冷却原子系では 10 数個のパラ水素で超流動が実験的に観測されている。経路積分モンテカルロ計算では

* 2011 年度より高知県立大学(University of Kochi)に名称変更。

数個のpara水素系でも超流動がみられる。3 α 系では残念ながら超流動性が見られなかったが、4 α 系の ^{16}O 原子核を検討してみることは十分価値がある。この際、核構造理解の視点からは、4 α 系の最低エネルギー状態 0^+ 状態のみに注目するのではなく、他のスピン状態をふくむ励起状態もあわせて理解することが重要であろう。

^{16}O の4 α 粒子構造にはついては古くから優れた研究がある。フランス・ストラスブールのシェバリエのグループ[6]は4 α のコインシデンス測定を行い、4個の α 粒子が団子のように直線状に並んだ慣性能率の非常に大きいバンド状態(4 α 鎖状状態)、 2^+ , 4^+ , 6^+ を発見した。残念ながら 0^+ 状態はその後の実験をもふくめて直線バンド上には見つかっていない。

われわれはこれらの4 α 構造を、ホイール状態などの ^{12}C の内部励起を含む $\alpha+^{12}\text{C}$ モデルのチャンネル結合散乱方程式をとき、実験データを注意深く分析することにより検討した[7]。 ^{12}C の内部励起状態として 2^+ (4.44 MeV), 3^- (9.65 MeV), 0_2^+ (7.65 MeV), 2_2^+ (10.3 MeV)状態を取

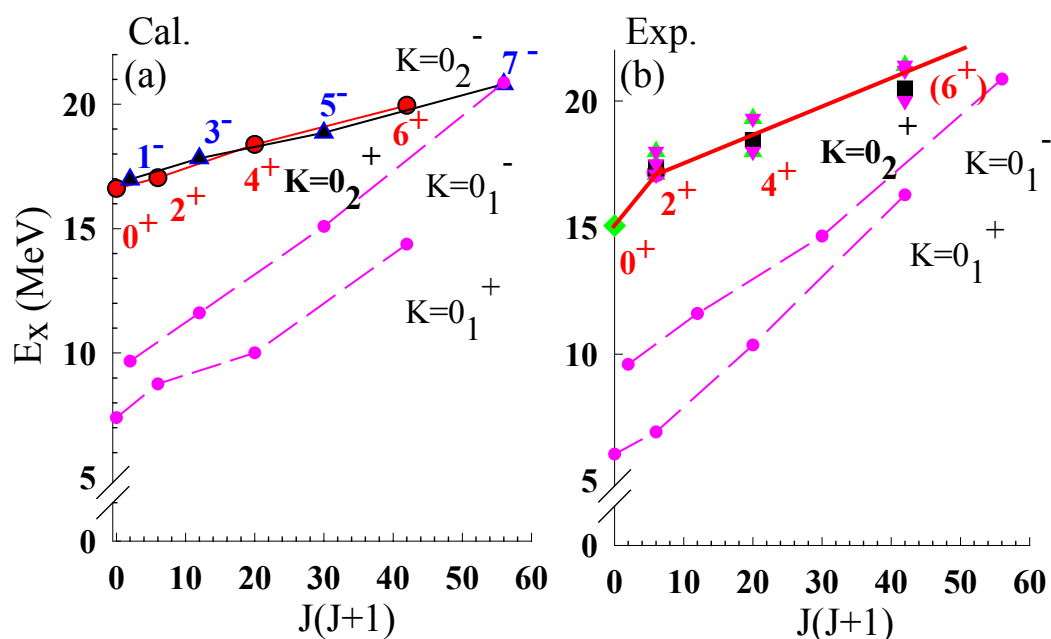


図1. (a)計算された $\alpha + ^{12}\text{C}(\text{g.s.})$ 構造および $\alpha + ^{12}\text{C}(0_2^+)$ 構造をもつ ^{16}O における α 粒子状態が(b)実験値と比較して載せられている。

り入れた。2体有効相互作用として密度依存性をもつDDM3Yをとり、畳み込み模型で $\alpha-^{12}\text{C}$ 間相互作用を構成した。この相互作用ポテンシャルは $\alpha+^{12}\text{C}$ 散乱の角分布の実験データを α 粒子の入射エネルギー172 MeVから18 MeVの広い範囲において現象論的吸収ポテンシャルを導入することでよく再現する。入射エネルギー18.5 MeVにおいてはホイール状態からの非弾性散乱角分布が測定されており、これもよく再現する。この18.5 MeVの入射エネルギーは ^{16}O の励起エネルギーに直すと、4 α 閾値の少し上である。このことはこの相互作用ポテンシ

ルが 4α 閾値付近の $\alpha + {}^{12}\text{C}$ 系の構造計算にも十分有効であることを示唆する。散乱方程式を解き共鳴状態がもとめられ、それらが図 1 に示されている。

図 1(a)に見られるように、 ${}^{16}\text{O}$ のよく知られた $\alpha + {}^{12}\text{C}$ (g. s.) 構造をもつパリティ 2 重項の $K=0_1^+$ バンドと $K=0_1^-$ バンドが出現し、図 1 (b) の実験とよく対応する。さらに、計算では 4α 閾値近くに $\alpha + {}^{12}\text{C}$ (ホイル状態) 構造をもつ $K=0_2^+$ バンドと $K=0_2^-$ バンドが現れ、 $K=0_2^+$ バンドは実験で見つかっている分散した 4α 鎖状状態の重心 (■) とよく対応する。従来 4α 鎖状状態と解釈されてきた状態は、われわれの理論計算では $\alpha + {}^{12}\text{C}$ (ホイル状態) 構造をもつ状態であると理解される。われわれの計算では $K=0_2^+$ バンドヘッドの 0^+ は 16.6 MeV 付近に非常に幅の広い状態であるが、現在までのところ観測されていない。

4α 閾値付近に実験で見つかっている α 幅が大きい 0^+ 状態は 15.1 MeV のみである。このエネルギー付近において α 粒子状態が 2^+ , 4^+ , 6^+ と同様分散するとすれば、15.1 MeV 0^+ 状態が対応する 4α 粒子構造をもつ状態であると期待される。 $K=0_2^+$ バンドの 2^+ , 4^+ , 6^+ はそれぞれ 1 個の α 粒子が角運動量 2, 4, 6 で励起した 4α 粒子状態であると理解される。 0^+ 状態は $\alpha + {}^{12}\text{C}$ (ホイル状態) 構造をとっているので、すべての α 粒子が最低エネルギー状態 $0s$ にある確率が非常に高い。図 1 (b) で 4α 状態が直線(実線)で結んで示されている。15.1 MeV 0^+ はエネルギーがかなり下がり、慣性能率も非常に小さく(約 4 分の 1) になっているのがみられる。4 個の α 粒子がボーズ凝縮し超流動状態にあるとすれば、このような慣性能率の急激な減少は自然に理解される。 α 粒子の凝縮は共鳴エネルギー状態にあるので、超流動は一般的に期待できないとの考えも出されている[8]が、寿命が十分に長ければ共鳴状態だからといって超流動が起こらないとはいえないであろう。ホイル状態の幅は 8.5 eV であり 15.1 MeV 0^+ 状態も 166 keV で、原子核の MeV の世界では十分クーロン障壁で束縛されているとみられる。より重い原子核においても α 粒子のボーズ凝縮と超流動がおこっているか、系統的に理論研究することはたいへん興味がある。

本研究は平林義治氏との共同研究に基づいている。

- [1] A. Tohsaki, H. Horiuchi, P. Schuck, G. Roepke, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 192501.
- [2] E. Uegaki, et al., Prog. Theor. Phys. **57** (1977) 1262; E. Uegaki, et al., **59** (1978) 1031; E. Uegaki, et al., **62** (1979) 1621.
- [3] M. Kamimura, Nucl. Phys. **A351** (1981) 456; Y. Fukushima, M. Kamimura, in T. Marumori (Ed.): Proc. Int. Conf. on Nuclear Structure, Tokyo, 1977, p.225.
- [4] S. Ohkubo, Y. Hirabayashi, Phys. Rev. **C 70** (2004) 041602(R).
- [5] S. Ohkubo, Y. Hirabayashi, Phys. Rev. **C 75** (2007) 044609.

- [6] P. Chevallier, et al., Phys. Rev. **160** (1967) 827.
- [7] S. Ohkubo, Y. Hirabayashi, Phys. Lett. **C 684** (2010) 127.
- [8] Y. Funaki et al., Phys. Rev. **C 80** (2009) 064326; Y. Funaki et al., Phys. Rev. Lett. **101** (2008) 082502.

等核フェッシュバッハ分子による多成分ボーズ凝縮体の相分離

首都大理工¹, お茶大アカプロ²
柴藤亮介¹, 西村拓史², 鈴木徹¹

1 導入

1995年に原子気体のボーズ・アインシュタイン凝縮体(BECs)が初めて実験的に観測された[1]。これはアインシュタインが「引力なしの凝縮」と呼んだように、相互作用の助けを借りることなく起こる純粋に量子統計力学的な相転移で、系の相互作用の強さや次元などのパラメータを精密に制御できる特徴を持つ。1997年には⁸⁷Rb原子の異なるスピン状態[2, 3]を、その翌年には²³Na原子の全てのスピン自由度を同時にボーズ凝縮させることに成功した[4]。このような多成分BECsでは、異種原子間相互作用により多彩な相構造[5, 6, 7]が実現されており、理想的な量子多体系の研究対象として盛んに研究が行われている。

1998年には冷却原子系における²³Na原子のフェッシュバッハ共鳴が観測された[10]。これは原子同士が散乱する際に、共鳴束縛状態の分子(=フェッシュバッハ分子)を介して有効的に原子間相互作用を変化させる技術である。この技術を利用することで、超新星爆発と対応させた⁸⁵Rbの原子BECsのボーズ・ノヴァが観測された[11]。この実験はフェッシュバッハ分子の自由度を相互作用定数に繰り込んだ1チャンネル模型で理論的に解析されており[12, 13]、分子数の少ない領域において実験と良い一致を示している。しかしながら、冷却原子系におけるフェッシュバッハ分子形成が実験[14, 15]と理論[16, 17]共に発展したため、近年ではフェッシュバッハ分子の自由度を取り入れた2チャンネル模型が利用されている。

2 研究目的

本研究では、多成分ボーズ凝縮体の相構造、特に相分離現象に着目した。相分離は異なる種類の原子間斥力が引き起こす現象で、この強さは原子固有の持つS波散乱長で決定される。1997年にJILAで行われた実験では、異なるスピン状態を持つ⁸⁷Rb原子が相分離する様子が観測された[3]。近年ではフェッシュバッハ共鳴を利用して相分離を制御する実験も行われている[18, 19]。我々は、2成分ボーズ系に同種原子から形成された等核分子の自由度含めた模型を利用して、有限系におけるフェッシュバッハ分子を含んだ相分離機構を理論的に解析した。また1チャンネル模型での有効相互作用は真空中での二体散乱から導かれたものであり、背景にある原子・分子との相互作用を取りこんでいない。そこで本研究では、従来の模型にフェッシュバッハ分子の自由度とそれに付随する原子・分子間相互作用を取り入れて、両者の違いを調べた。

3 定式化

この節では、分子自由度を取り込んだ2チャンネル模型のハミルトニアンから系の基底状態を記述する非線形波動方程式を導出する。また、背景にある分子との相互作用を取りこんだ1チャンネル模型を構築する。

3.1 2チャンネル模型

2成分ボーズ原子 (a, b) と等核フェッシュバッハ分子 (m) からなる系のハミルトニアンは、

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{H}_s + \hat{H}_{int} + \hat{H}_{HFM}, \\ &= \sum_{i=a,b,m} \int d\mathbf{r} \Psi_i^\dagger(\mathbf{r}) h_i(\mathbf{r}) \Psi_i(\mathbf{r}) \\ &+ \sum_{i=a,b,m} \frac{g_{ii}}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \Psi_i^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_i^\dagger(\mathbf{r}') \Psi_i(\mathbf{r}') \Psi_i(\mathbf{r}) + \sum_{i,j=a,b,m} \frac{g_{ij}}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \Psi_i^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_j^\dagger(\mathbf{r}') \Psi_j(\mathbf{r}') \Psi_i(\mathbf{r}), \\ &+ \lambda \int d\mathbf{r} (\Psi_m^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_a(\mathbf{r}) \Psi_a(\mathbf{r}) + \Psi_a^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_a^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_m(\mathbf{r})),\end{aligned}\quad (1)$$

と書ける。 $\Psi_i^\dagger(\Psi_i)$ は場の生成 (消滅) 演算子、 λ はフェッシュバッハ分子の結合定数、 $g_{ii}(g_{ij})$ は同種 (異種) 原子間相互作用である。この模型では2つの原子 a から等核フェッシュバッハ分子 m が形成されている。一粒子ハミルトニアン h_i は、 $h_i = -\hbar^2 \nabla^2 / 2m_i + V_i(\mathbf{r}) + m_i$ ($i = a, b, M$) と表される。 m_i は原子の質量、 $V_i(\mathbf{r})$ は捕獲ポテンシャルである。本研究では相分離が引き起こされる状況の定性的な理解を行うため、球対称トラップを仮定している。場の演算子を秩序変数で置き換えて変分法を利用すると、系の基底状態の振る舞いを記述する非線形波動方程式が導かれる。

$$(h_a + g_{aa}\phi_a^2 + g_{ab}\phi_b^2 + g_{ma}\phi_m^2 + 2\lambda\phi_m)\phi_a = \mu_a\phi_a, \quad (2)$$

$$(h_b + g_{bb}\phi_b^2 + g_{ab}\phi_a^2 + g_{bm}\phi_m^2)\phi_b = \mu_b\phi_b, \quad (3)$$

$$(h_m + g_{mm}\phi_m^2 + g_{am}\phi_a^2 + g_{bm}\phi_b^2)\phi_m + \lambda\phi_a^2 = \mu_m\phi_m, \quad (4)$$

μ_i は各粒子 i ($i = a, b, m$) の化学ポテンシャル、 ϕ_i は秩序変数である。化学ポテンシャルは粒子数条件

$$N_i = \int d\mathbf{r} |\phi_i|^2 \quad (i = a, b, m) \quad (5)$$

から決定される。また全粒子数は $N_{at} = N_a + 2N_m$ と表され、等核フェッシュバッハ分子数は磁場で m_m を変化させることにより制御することができる。

3.2 1チャンネル模型の有効相互作用

1チャンネル模型では、系の基底状態を表す非線形方程式は

$$(h_a(\vec{r}) + \gamma\phi_a^2(\vec{r}) + g_{ab}\phi_b^2(\vec{r}))\phi_a(\vec{r}) = \tilde{\mu}_a\phi_a(\vec{r}), \quad (6)$$

$$(h_b(\vec{r}) + g_{bb}\phi_b^2(\vec{r}) + g_{ab}\phi_a^2(\vec{r}))\phi_b(\vec{r}) = \tilde{\mu}_b\phi_b(\vec{r}), \quad (7)$$

と書ける。 $\tilde{\mu}_a, \tilde{\mu}_b$ はフェッシュバッハ分子の効果を取りこんだ化学ポテンシャル、 γ は原子 a の間の有効相互作用である。真空中の2体散乱から得られた有効相互作用は、

$$\gamma \equiv g_v = g_{aa} - \frac{2\lambda^2}{2\mu_m - \mu_a}. \quad (8)$$

と表される [20]。背景にある分子を取りこんだ有効相互作用は、式 (2) と式 (4) から解析的な計算により導出される。図 1 より、有効相互作用は位置依存性を持ち、分子数を増やしていくほど分子形成されるトラップ中心部での値が小さくなるのがわかる。しかしながら、相分離機構は原点

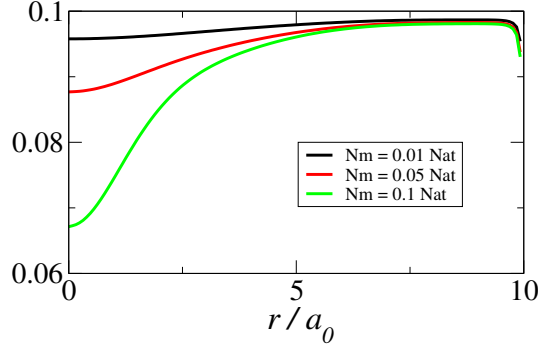


図 1: 背景分子を取りこんだ有効相互作用の位置依存性。黒線、赤線、緑線はそれぞれ $N_m = 0.01N_{at}$, $N_m = 0.05N_{at}$, $N_m = 0.1N_{at}$ の場合を表している。

部分での有効相互作用に大きく依存しているため、本研究では有効相互作用の位置依存性を $r = 0$ に固定して議論を進めていく。これまでの 1 チャンネル模型との比較を行うため、これらの有効相互作用を相分離機構に適応させ、近似の妥当性を検証する。簡単な計算により、

$$\gamma \equiv g_m(0) = g_{aa} + \frac{2\lambda\sqrt{N_m}\phi_m(0)}{N_a\phi_a^2(0)}. \quad (9)$$

と導出することができる。

4 結果

4.1 新しい相構造

前節で導出した 2 チャンネル模型の非線形波動方程式を解くことで、密度分布の等核フェッシュバッハ分子数依存性を調べる。まずは粒子数が対象 $N_a = N_b$ な場合、続いて粒子数が非対称な場合 $N_a \neq N_b$ を考える。

4.1.1 粒子数対称の場合

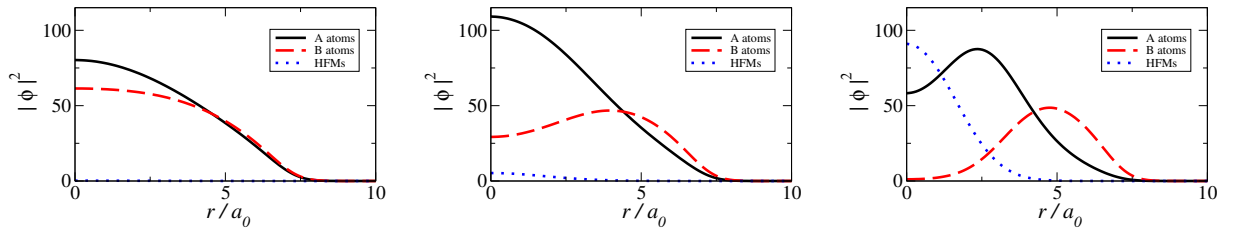


図 2: 2 チャンネル模型で得られた密度分布。各粒子密度 $|\phi_i|^2$ ($i = a, b, m$) を動径方向 r/a_0 でプロットした。分子数は $N_m = 5.0 \times 10^1$ (左), 5.0×10^2 (中央), 5.0×10^3 (右) であり、黒線 (実線)、赤線 (破線)、青線 (点線) はそれぞれ原子 a , 原子 b , 等核フェッシュバッハ分子 m を表わす。

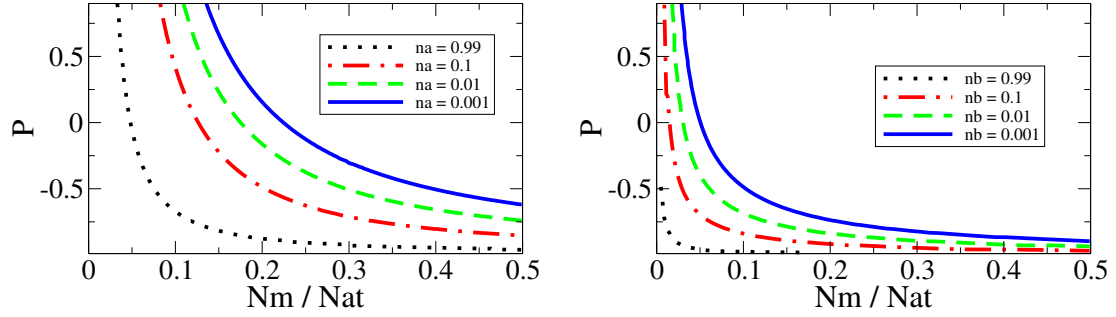


図 3: 縦軸を粒子数比、横軸を等核フェッシュバツハ分子数として相分離の度合いを等高線で表した。黒線(点線)、赤線(点破線)、緑線(破線)、青線(実線)はそれぞれ $n_i (i = a, b) = 1.0 \times 10^0, 1.0 \times 10^1, 1.0 \times 10^2, 1.0 \times 10^3$ である。左図(右図)が原子 $b(a)$ の等高線を表している。

簡単のため、 $2m_a = 2m_b = m_m$, $\omega_a = \omega_b = \omega_m$, $2V_a = 2V_b = V_m$ とする。等核フェッシュバツハ分子の質量 m_m を制御する代わりに分子数 N_m をパラメータとして、 $g_{aa} = g_{bb} = g_{ab} = \lambda = 0.1$ と固定した場合の密度分布を図 2 に示す。粒子数は $N_{at} = N_b = 5.0 \times 10^4$, 分子数は $N_m = 5.0 \times 10^1, 5.0 \times 10^2, 5.0 \times 10^3$ の各々についての計算を行った。また、2つの原子と分子を半径 R_a, R_m 、質量 m_a, m_m を持つ剛体球と仮定して、原子・分子間、分子・分子間相互作用定数を

$$g_{am} = \frac{1 + \gamma_m}{2\gamma_m} \frac{1 + \gamma_R}{2} g_{aa}, \quad g_{mm} = \frac{\gamma_R}{\gamma_m} g_{aa} \quad (10)$$

とした。本研究では $\gamma_m \equiv m_m/m_a = 2$, $\gamma_R \equiv R_m/R_a = 2$ を利用している。

図 2 より、分子が少ない領域では原子 a , 原子 b ともにトラップ中心に存在している。しかしながら、分子形成により原子 b がトラップ中心から押し出されていき、 $N_m = 5.0 \times 10^2$ では原子 a と原子 b が相分離した状態となる。JILA グループによる実験 [18] でも観測されたように、等核フェッシュバツハ分子形成により二相構造が出現することが理論的に確認された。この二相分離は、フェッシュバツハ共鳴させることで原子 a の間の相互作用が引力的になり、相対的に原子 a と原子 b の間の斥力相互作用が大きくなるために引き起こされたと考えられる。

さらに分子数を $N_m = 5.0 \times 10^3$ まで増やしていくと、原子 b だけではなく原子 a もトラップ中心から押し出されていき、三相構造が出現する。これは分子の自由度を取り入れた 2 チャネルモデルを利用することで、明確に現れてきた相構造である。この三相構造は分子数がある程度大きい領域で実現されるが、現在ではボーズ系特有の三体衝突が実現を妨げており、今後の実験の発展が期待される。

4.1.2 粒子数非対称の場合

より一般的な状況に適用させるため、粒子数比 $P \equiv (N_a - N_b)/N_{at}$ を変えた場合に実現され得る相構造を調べていく。ここで相分離の度合いを表わす量

$$n_i = \frac{|\phi_i(0)|^2}{|\phi_i(r_{max})|^2} \quad (i = a, b) \quad (11)$$

を導入する。これは各原子の中心部分 $r = 0$ と最大部分 $r = r_{max}$ の密度比として定義されているため、フェッシュバツハ分子が形成されていない状況では $n_a = n_b = 1$ となり、トラップ中心に全

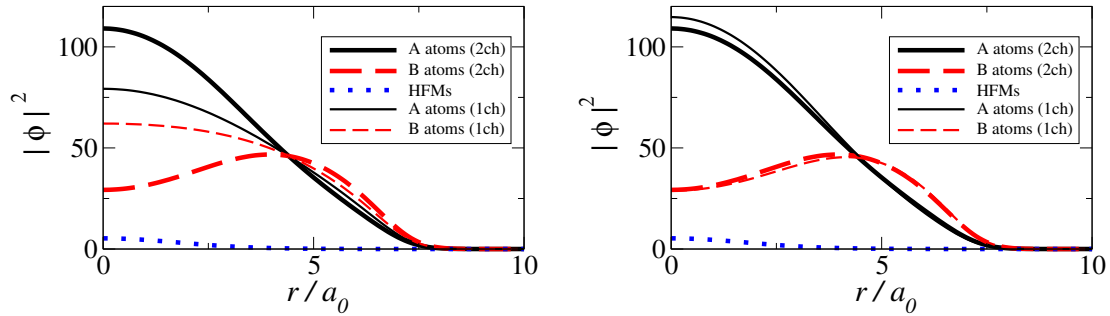


図 4: 2チャンネル模型と1チャンネル模型の密度分布。(左図)1チャンネル模型の有効相互作用は(式8)を利用して、(右図)1チャンネル模型の有効相互作用は(式9)を利用して。共に黒線(実線)がa原子、赤線(破線)がb原子、青線(点線)がフェッシュバッハ分子である。また、太線(細線)が2(1)チャンネル模型の密度分布である。粒子数(分子数)は 5.0×10^4 (5.0×10^2)とした。

く原子が存在しない状況では0となる。このパラメータを利用して、粒子数比と分子数を変えた場合の相分離の度合いを図3に示す。

図3から解る一般的な傾向として、分子数を増やしていくと初めに原子bがトラップ中心から外側へ、さらに増やしていくと原子aも外側へ押し出されていくことがわかる。図2の密度分布はこの図では $P=0$ と対応しており、先の定性的な理解と一致する。粒子数比を変えても同様の傾向が見られるが、原子aと原子bが多くなる(少なくなる)につれて相分離しやすく(しにくく)なる結果が得られた。これは、トラップ中心に存在する原子aが多くなるにつれて相対的に原子間斥力が大きくなるため、少ない分子数でも原子bを容易に外側へ押し出せると考えることができる。最後に、ここで示した等高線はあくまでも相分離の目安を与えるもので、全ての粒子数比で三相構造が現れるのではないことを注意しておく。具体的な相構造を知るには各々の状態の密度分布を計算する必要がある。

4.2 1チャンネル模型との比較

この節では、定式化で導入した2つの有効相互作用(8)式、(9)式と2チャンネル模型との比較を行い、1チャンネル模型の近似の精度を調べる。分子数が $N_m > 0.1 \times N_{at}$ の領域では三相構造が現れるため、 $r=0$ 部分の有効相互作用を利用した1チャンネル模型と2チャンネル模型から得られた密度分布が一致することはない。以下では、分子数が $N_m < 0.1 \times N_{at}$ の領域に限定した議論を行う。図4に、2チャンネル模型から得られる密度分布と、前節で導入した2つの1チャンネル模型から得られる密度分布を重ねて表示した。真空中の2体散乱から得られる有効相互作用は、ボーズ・ノヴァのような定性的な物理現象とは良い一致を示す一方で、本研究のような定量的な取り扱いとは必ずしも合致していないことがわかる。我々が導入した有効相互作用では、両模型がよく一致している様子が見られ、ボーズ凝縮体の分布を扱う際には有効である可能性が高い。

この結果を2つの異なる側面から解析する。まず、フェッシュバッハ分子による相分離機構を考えるため、相分離に直接影響を与える有効相互作用の分子数依存性を考える。図5(左)から解るように、真空中の2体散乱から導出された有効相互作用の値は分子数を増やしても大きな変化はなく、その結果として、図4(左)のような密度分布の違いが生じたと考えられる。背景分子の効果を含めることで原子a間の有効相互作用が小さくなり図4(右)、相対的に原子ab間の斥力が大きくなることで相分離が引き起こされたと考えられる。

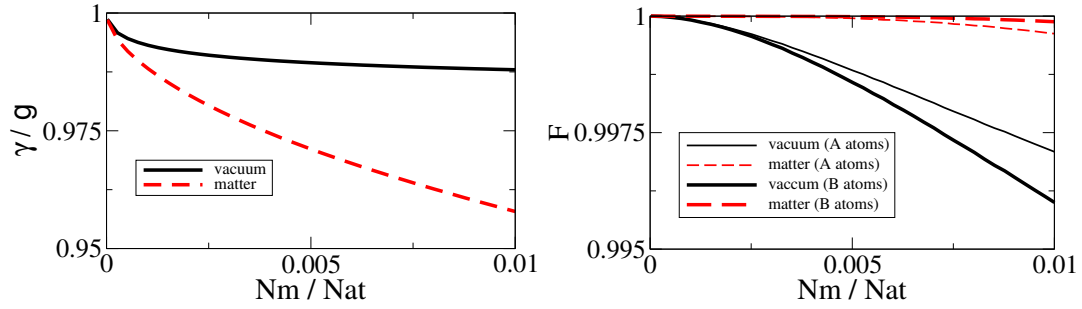


図 5: (左) 有効相互作用のフェッシュバッハ分子数依存性。(右) Fidelity(忠実度)のフェッシュバッハ分子数依存性。共に黒線(実線)は真空中の2体散乱から導出されたもの(8)式で、赤線(破線)は背景分子の効果を含めた有効相互作用(9)式である。

次に、2チャンネル模型で得られた密度分布との重なり度合いを評価するため、忠実度(Fidelity)

$$F_{ij} = \frac{\langle \phi_{1ij} | \phi_2 \rangle}{\langle \phi_{1ij} | \phi_{1ij} \rangle} \quad (i = a, b \quad j = v, m), \quad (12)$$

を導入する。これは1チャンネル模型と2チャンネル模型の密度分布が完全に重なっている場合には $F = 1$ となり、全く重なっていないような場合には $F = 0$ となる量である。図5(右)に各原子の忠実度を表した。黒線(実線)は、真空中の有効相互作用から導出した密度分布と2チャンネル模型との重なり具合を示している。図から解るように、分子数が増えていくにつれて忠実度の値が小さくなるのがわかる。つまり、この場合の1チャンネル模型の密度分布は2チャンネル模型と一致する領域が少ないと言える。逆に、背景分子の効果を含めた有効相互作用の場合だと、忠実度の値はほとんど変化することない。図4(右)の密度分布がほとんど重なり合っていることを裏付ける結果である。

5 まとめ

2成分ボーズ系に同種原子から形成された等核分子の自由度含めた模型を利用して、有限系におけるフェッシュバッハ分子を含んだ相分離機構を理論的に解析した。2成分の原子数比によらず分子数を増やしていくことで相分離が引き起こされた。特に $N_m \sim 0.1N_{at}$ の領域では、従来の二相構造だけではなく三相構造の実現可能性が示唆できた。この新しい相は1チャンネル模型では現れることはなく分子自由度を取り入れることで始めて得られる結果である。

また、従来の1チャンネル模型における有効相互作用は真空中での二体散乱から導かれたものであり、背景分子との相互作用を取り込んでいなかった。そこで従来の1チャンネル模型をより厳密なものへと拡張して、両者の違いを密度分布、有効相互作用、忠実度という立場から調べた。その結果、本研究で導入した有効相互作用を利用することで、三相構造が現れ始める領域 $N_m \sim 0.1 < N_{at}$ においては2チャンネル模型と非常に良い一致を示した。

参考文献

- [1] M.H. Anderson et al., Science **269**, 198 (1995)

- [2] C.J. Myatt et al, Phys. Rev. Lett **78**, 586 (1997)
- [3] D.S. Hall et al, Phys. Rev. Lett **81**, 1539 (1998)
- [4] J. Stenger et al, Nature **396** 345 (1998)
- [5] T.Sogo, T. Suzuki, and H. Yabu, Phys. Rev. A **68** 063607 (2003)
- [6] Kazuniri Suzuki et al., Phys. Rev. A **77** 043629 (2008)
- [7] Yuki Kawaguchi et al., Phys. Rev. Lett **97** 130404 (2006)
- [8] Y. Yamanaka, M. Okumura and M. Mine, J. Phys. Soc. Jpn. **72** (2003)
- [9] K. Maeda and G. Baym, and T. Hatsuda, Phys. Rev. Lett **103** 085301 (2009)
- [10] S. Inouye et al., Nature, **392**, 151 (1998)
- [11] Elizabeth A. Donley et al., Nature **412** 295 (2001)
- [12] Yu. Kagan, A. E. Muryshev, and G. V. Shlyapnikov, Phys. Rev. Lett **81** 933 (1998)
- [13] Hiroki Saito and Masahito Ueda, Phys. Rev. A **65** 033624-1 (2002)
- [14] Elizabeth A. Donley et al., Nature **417** 529 (2002)
- [15] Stephan Durr et al., Phys. Rev. Lett **92** 020406 (2004)
- [16] Leo Radzihovsky et al., Phys. Rev. Lett **92** 160402 (2004)
- [17] M. W. J. Romans et al., Phys. Rev. Lett **93** 020405 (2004)
- [18] S.B.Papps et al., Phys. Rev. Lett **101** 040402 (2008)
- [19] Satoshi Tojo et al, Phys. Rev. A **82**, 033609 (2010)
- [20] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002)
- [21] Lu Zhou et al, Phys. Rev. A **78**, 053612 (2008)