

ゲージ・重力対応とその応用

基本的考え方を中心に

京都大学大学院理学研究科
中村 真



2010, Dec. 6改訂

Plan to talk

- Part 1 : AdS/CFT対応の基本思想
(AdS/CFT対応は難しくない。)
- Part 2: AdS/CFTのテクニック
(でも、真面目に計算しようとするといろいろある。)
- Part 3: 有限温度の導入
- Part 4: フレーバーの導入、酒井・杉本モデル
- Part 5: 非平衡物理学への応用

Part 1: AdS/CFT対応の基本思想

AdS/CFT対応は非常に**自然なconjecture**である。

AdS/CFT対応

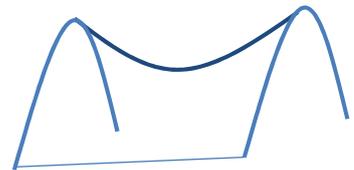
AdSとは？

AdS: **Anti de Sitter**時空

- 曲率が負で一定の時空間の一つ
- この時空には「境界」がある。



de Sitter時空 (曲率が正で一定)

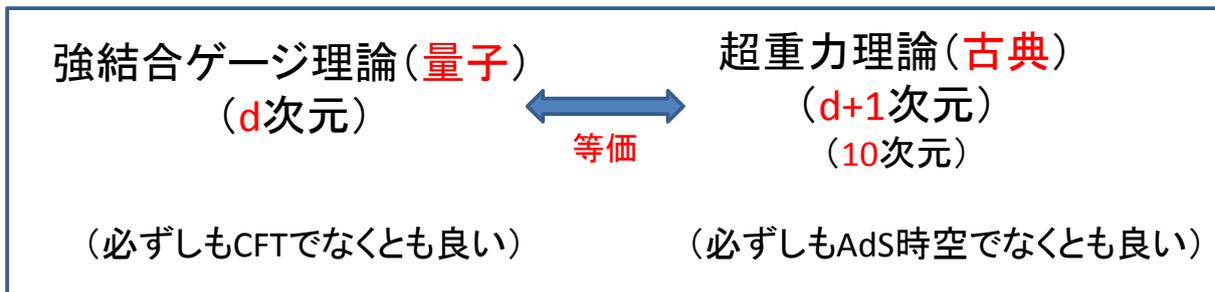


CFTとは？

CFT: **Conformal Field Theory** (共形場理論)
スケール変換のもとで不変な理論 ($\beta=0$)

AdS/CFT対応 [1]

異なる二つの理論が**等価**であるという主張(予想)



典型的な例



こちらの理論の**複雑な計算**が

こちらの理論の**簡単な計算**で
出来てしまう。

AdS/CFT対応に関する迷信(その1)

~~CFTに対してしか用いることができない?~~

重力側はAdSである必要は**ない**し、場の理論側はCFTである必要も**ない**。
「AdS/CFT」の名前は提案当初の**歴史的経緯**による。

- AdS/CFT対応
- ゲージ・重力対応
- ゲージ・string対応
- Holography
- Maldacena conjecture
-

など、様々な名前と呼ばれる。

一般相対性理論

Einsteinは重力理論を時空の幾何学の言葉で構成した。

「エネルギー・運動量は時空を变形する」

重力による引力=時空が曲がったことによる影響



Einstein-Hilbert action:

曲率:~ 計量の2階微分で構成される。

$$S = \frac{c^3}{16\pi G_N} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + S_{\text{star}}$$

宇宙項

Einstein's equation:

計量: 時空上の単位長さを決める。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu}^{(\text{star})}$$

Energy-momentum tensorはgravitonに対するsourceとなる。

Picture: <http://www.faculty.iu-bremen.de/course/fall02/c210101/students/BlackHoles/>

曲率

日常生活で見る曲面:



Flat space

http://japan.busytrade.com/trade_leads_3397.shtml



Positively curved space

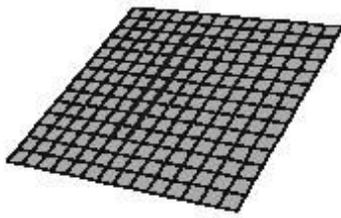
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Soccer_ball.svg



Negatively curved space

http://blog.goo.ne.jp/slide_271828/e/14733125aa2f72f08fc75c3fbf2c4b19

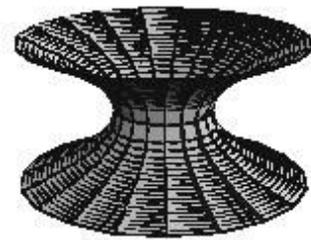
負の曲率とは？



Zero curvature (flat)



Positive curvature



Negative curvature

平行線を考えると：



平行線間の距離が発散する点は特別な点。
(この場所を「境界」と呼ぶことにする。)

Picture: <http://www.faculty.iu-bremen.de/course/fall02/c210101/students/BlackHoles/>

AdSとは？

AdS: Anti de Sitter spacetime

スカラー曲率が負で一定な時空の一つ。(AdS以外にもある。)

- AdS時空にはtime-like boundaryがある。 $ds^2 = \frac{-dt^2 + dx^2 + dz^2}{z^2}$
(boundary上に時間軸を導入可能。)

boundary: $z=0$

AdS時空内から発せられた光は有限の時間
(affine parameter)でboundaryに到達する。

- ということは、AdS時空内の物理を決めるには

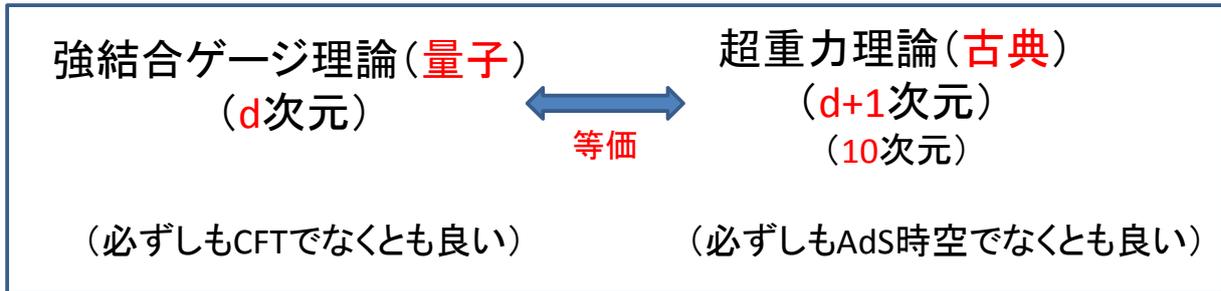
運動方程式 の他に 境界条件 が必要。
初期条件

部分積分する際の境界項が無視できない。

AdS時空の境界条件と時空内部の物理は密接に関係している。

AdS/CFT対応 [1]

異なる二つの理論が**等価**であるという主張(予想)



典型的な例

4d $N=4$ $SU(N_c)$ 超対称Yang-Mills 理論
@ large- N , large 't Hooft coupling



10d type IIB supergravity
on $AdS_5 \times S^5$

こちらの理論の**複雑な計算**が

こちらの理論の**簡単な計算**で
出来てしまう。

AdS/CFT対応の考え方

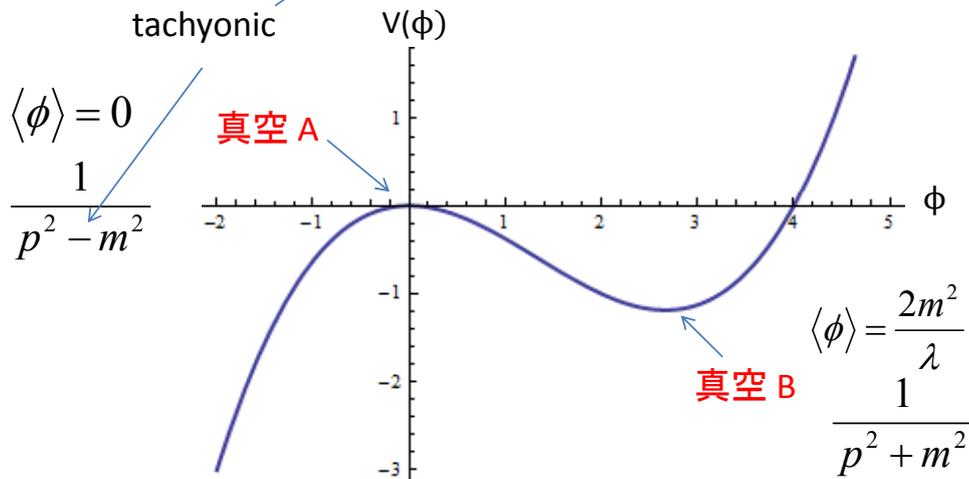
同じ物理量を、異なる真空上で展開した摂動論で記述すると、**計算結果は同じ**でも、**計算過程が全く異なるもの**となる。

摂動論を展開する**真空をうまく選ぶ**ことで、複雑な計算が簡単になる場合がある。

まず、場の理論において、そのような例を見てみたい。

例： ϕ^3 -理論 (Euclidean)[2]

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{3!} \phi^3$$



Aまわりの摂動論しか知らない者がBまわりの物理を議論したいとする。どうしたら良いか？

Aの視点では、Bにおいて場が期待値を持っている。

$$\langle \phi \rangle = \frac{2m^2}{\lambda} \leftarrow \text{non-perturbative}$$

これをどのようにしたら計算できるか？



$$L \rightarrow L - J\phi$$

$$\langle \phi \rangle = \left. \frac{\delta S[J]}{\delta J} \right|_{J=0}$$

sourceを導入。
(一点関数、tadpole)

$$\langle \phi \rangle = \begin{array}{c} | \\ \times \\ J \end{array} + \begin{array}{c} | \\ -\lambda \\ \times \quad \times \\ J \quad J \end{array} + \dots \stackrel{\text{def}}{=} \begin{array}{c} | \\ \bullet \\ W \end{array}$$

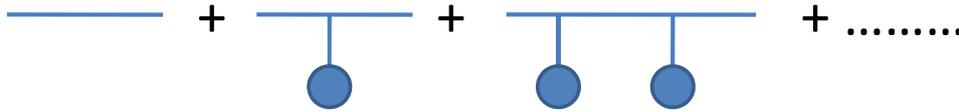
Consistency condition
(Schwinger-Dyson eq.)

$$\begin{array}{c} | \\ \bullet \end{array} = \begin{array}{c} | \\ \times \end{array} + \begin{array}{c} | \\ \bullet \quad \bullet \end{array}$$

$$-\frac{1}{m^2} w = -\frac{1}{m^2} (-\lambda) \frac{1}{2!} \left(-\frac{1}{m^2}\right)^2 w^2$$

$$w^2 = -\frac{2m^4}{\lambda} w, \quad \langle \phi \rangle = -\frac{1}{m^2} w = \frac{2m^2}{\lambda}$$

Bまわりでのpropagater (2点関数)



$$\frac{1}{p^2 - m^2} + \frac{1}{p^2 - m^2} \left[(-\lambda) \left(\frac{2m^2}{\lambda} \right) \frac{1}{p^2 - m^2} \right] + \frac{1}{p^2 - m^2} \left[(-\lambda) \left(\frac{2m^2}{\lambda} \right) \frac{1}{p^2 - m^2} \right]^2 + \dots$$

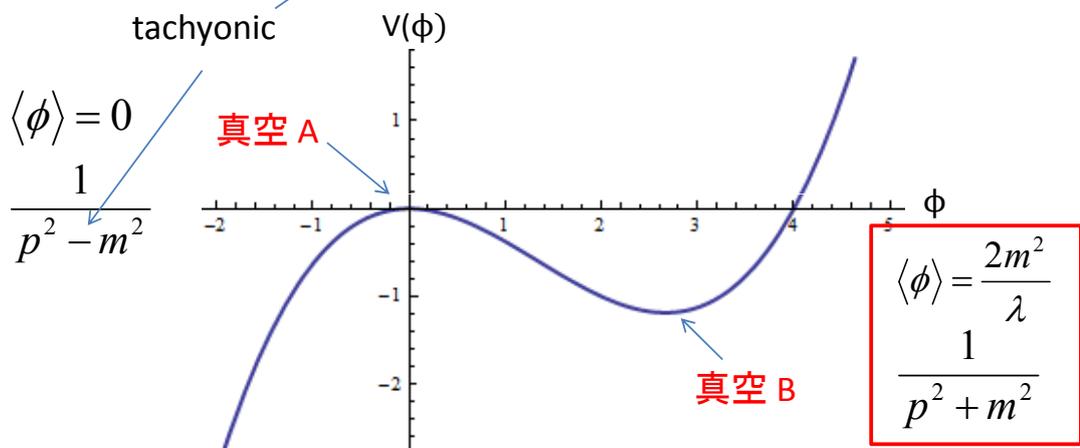
$$= \frac{1}{p^2 - m^2} \left(\frac{1}{1 - (-\lambda) \left(\frac{2m^2}{\lambda} \right) \frac{1}{p^2 - m^2}} \right) = \frac{1}{p^2 + m^2}$$

← Bにおけるpropagater

Aまわりの摂動論の**無限個**のdiagramの和が
Bまわりでは**たった1個**のdiagramで計算される。

例： ϕ^3 -理論 (Euclidean)[2]

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{3!} \phi^3$$



Aまわりの摂動論を用いて、無限個のダイヤグラムの足し合わせ(複雑な計算)をすることで、**Bまわりの物理**(真空Bを知っていれば**一発**で計算可)を再現した。

この例で学んだこと

同じ物理量の計算でも、摂動論が立脚する真空を異なるものを選べば、計算**手法**が大幅に異なってくる。

真空Bまわりの物理を記述する二つの方法

	真空Aの視点	真空Bの視点
Bにおける場の期待値	$2m^2/\lambda$	0
Source	あり (weight: $-2m^4/\lambda$)	なし
2点関数(古典)	Sourceを挿入した 無限個のdiagramの和	一本のdiagram

「複雑な計算」=「単純な計算」

同じことを**重力場**でやると

真空Bまわりの物理を記述する二つの方法

	真空Aの視点	真空Bの視点
Bにおける場の期待値	$2m^2/\lambda$	0
Source	あり (weight: $-2m^4/\lambda$)	なし
2点関数(古典)	Sourceを挿入した 無限個のdiagramの和	一本のdiagram
	「複雑な計算」	「単純な計算」

真空B(重力場が期待値を持つ)の物理を記述する二つの方法

	真空A(平坦な時空)の視点	真空B(曲がった時空)の視点
Bにおける重力場の期待値	値を持つ	0
Source	あり	なし
2点関数(古典)	Sourceを挿入した 無限個のdiagramの和	一本のdiagram
	「複雑な計算」	「単純な計算」

同じことを重力場でやると

時空内のある場所で重力場 ($g_{\mu\nu}$) が期待値を持った状態
まわりでの摂動を考えることにする。

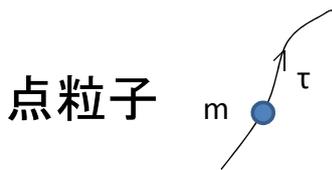
平坦な時空上の摂動論

敢えて平坦な時空上の摂動論を用いて記述すると、 $g_{\mu\nu}$ に対する
一点関数を「ダイアグラムの一つ」として用意する必要がある。

$g_{\mu\nu}$ の一点関数 (source) $\equiv T_{\mu\nu}$ (energy-momentum tensor)

記述Aの方針では、平坦な時空上に何かenergy-momentumを
持ったものを手で挿入したFeynman diagramを考えることになる。

「Energy-momentumを持ったもの」? の例

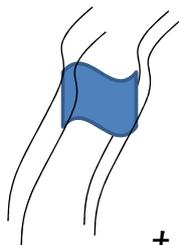


$$S = -m \int d\tau = -m \int \sqrt{1 - v^2} dt = -m \int \sqrt{-\frac{\partial x^\mu}{\partial t} \frac{\partial x^\nu}{\partial t} g_{\mu\nu}} dt$$

質量 \sim graviton との結合

広がりを持った物体

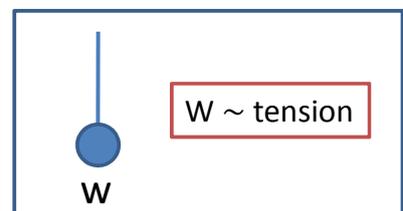
2次元面状の物体の場合の例:



$$S = -T \int \sqrt{-\det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^b} g_{\mu\nu}\right)} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$$

tension \sim graviton との結合

もし「広がりを持った物体」が
我々が探しているsourceなのであれば



ただし、これらが本当に導入すべき sourceなのか？

一般相対性理論的には、energy-momentumを担うものとして様々なものを思い浮かべることが可能:

膜？、星？、ソリトン？.....

純粹に「曲がった時空」を忠実に表現する一点関数として、どのようなものが適切なのだろうか？

不定性無く、かつ無矛盾に重力理論を定式化していく指針があると良い。量子化まで含めて重力理論を無矛盾に定式化する枠組み:

超弦理論

弦理論への一般化

- 弦理論の構成要素は点粒子ではなく弦。
- 平坦な時空上の摂動論は知られている。
- 超弦理論は10次元で定式化されている。



closed string

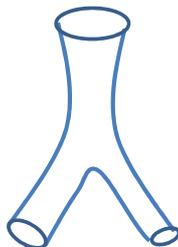


open string

重力場など

ゲージ場など

Diagramは2次元面となる



string長さが無視できる極限では、このような点粒子と同定される。

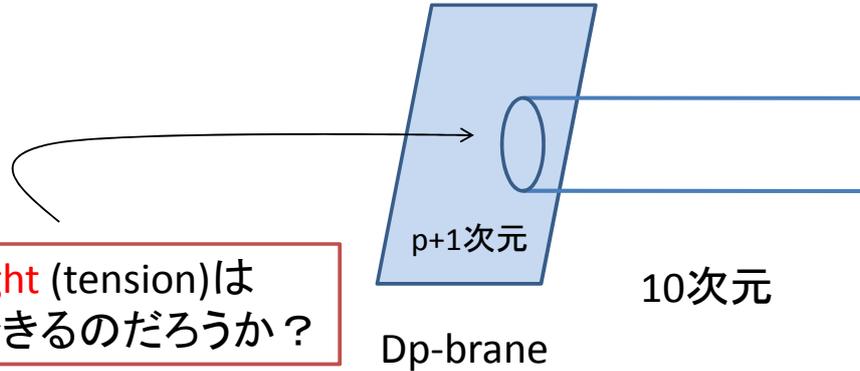
source、一点関数は？



D-brane

Dp-brane[3]

- closed stringの**一点関数**
- closed stringのdiagramが**終端**することのできるp+1次元の超平面(部分空間)

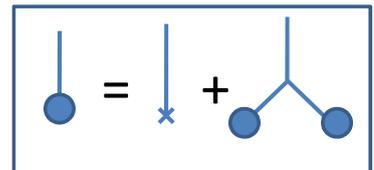
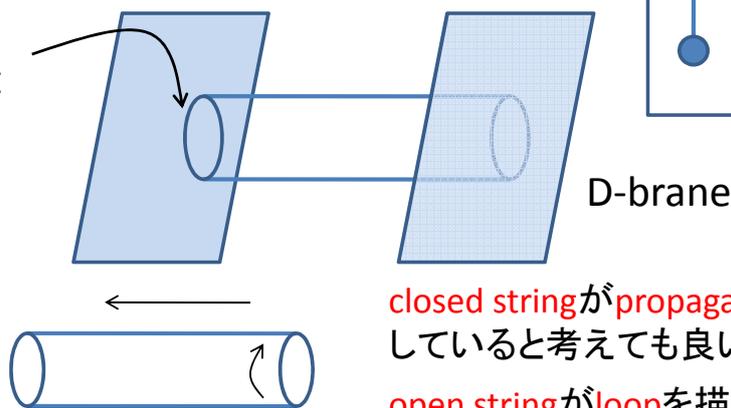


このweight (tension)は
どう計算できるのだろうか？

Consistency condition[3]

(Modular invariance)

tension
=weight



closed stringがpropagate
していると考えても良いし
open stringがloopを描いて
いると考えても良い。

二つの考え方に基づく計算が一致する条件からtensionを計算できる。

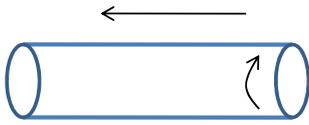
[5]
$$\text{tension} = \frac{1}{(2\pi)^p g_s l_s^{p+1}}$$

 l_s : string length

string coupling g_s の逆数に比例: 非摂動的

$$w = -\frac{2m^4}{\lambda}, \quad \langle \phi \rangle = -\frac{1}{m^2} w = \frac{2m^2}{\lambda}$$

さらに

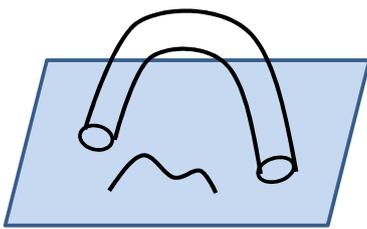


closed stringがpropagate
していると考えても良いし
open stringがloopを描いて
いると考えても良い。



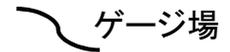
closed stringのtreeはopen stringのloopに対応する！

D-brane[3]



これをopen stringのloop
diagramだと見ると.....

このopen stringの端点は
D-braneに終端している。



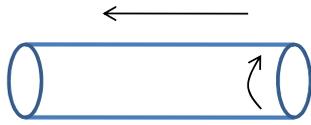
D-brane上にはopen stringが存在する。



D-brane上にはゲージ理論が存在している。

ゲージ理論のcoupling g_{YM} を
D3-braneのtensionから読み取ると $g_{\text{YM}}^2 = 2\pi g_s$

ということ



closed stringがpropagate
していると考えても良いし

open stringがloopを描いて
いると考えても良い。



closed stringのtreeはopen stringのloopに対応する！

D-braneの存在する弦理論に埋め込むことの出来る理論に対しては

ゲージ理論の1-loopは重力理論のtree

であると言える。

Analogy

	真空Aの視点	真空Bの視点
場の期待値	$2m^2/\lambda$	0
Source	あり (weight: $-4m^4/\lambda$)	なし
2点関数 (古典)	Sourceを挿入した 無限個のdiagramの和	一本のdiagram
	「複雑な計算」	「単純な計算」



	平坦な時空の視点	曲がった時空の視点
Gravitonの期待値	あり	0
D-brane	あり (tension: g_s^{-1} に比例)	なし
2点関数 (古典)	D-braneを挿入した 無限個のdiagramの和	一本の(曲がった時 空上の)diagram
	「複雑な計算」	「単純な計算」

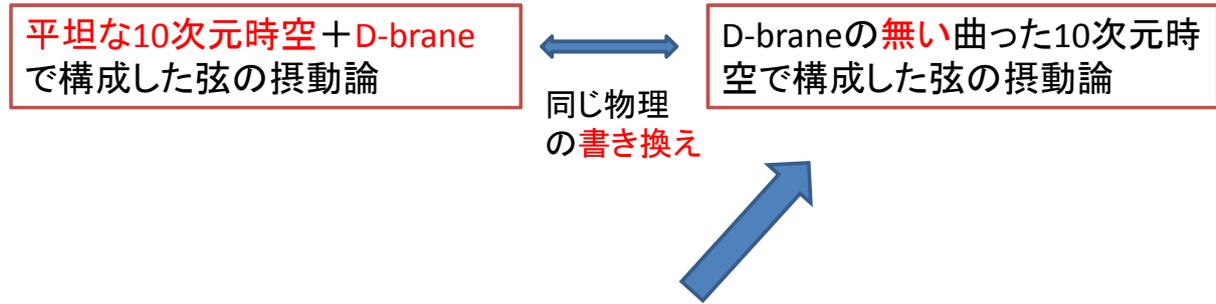
平坦な10次元時空 + D-brane
で構成した弦の摂動論



D-braneの無い曲った10次元時
空で構成した弦の摂動論

同じ物理
の書き換え

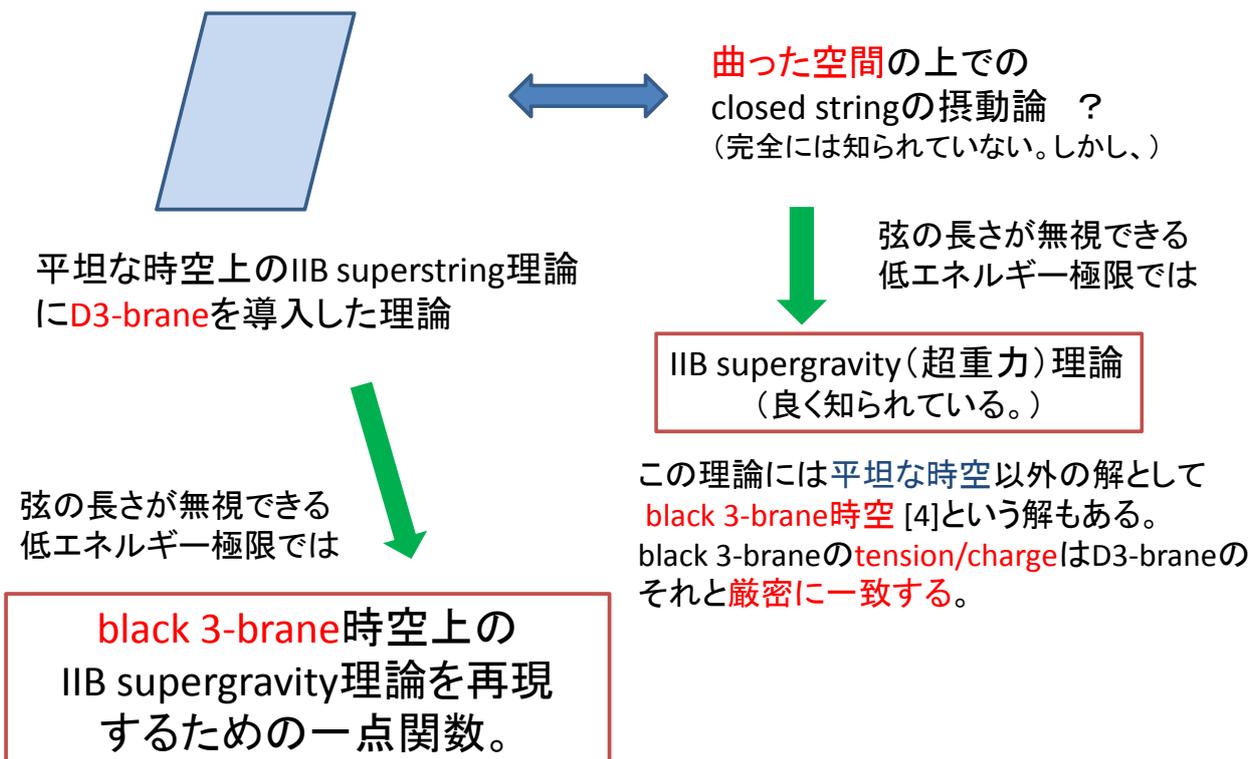
Brane worldとの違い



こちらの曲がった時空のpictureでは、
ブレーンは存在していない。

つまり、本当に重力(closed string)しかない。

D-brane vs. curved space



Black 3-brane解

([4]や[3]の文献参照。)

N枚の重なったD3-braneに対応する supergravityの解

Black 3-brane解

3+1次元方向のPoincare不変性

$$ds^2 = H^{-1/2}(-dt^2 + d\vec{x}^2) + H^{1/2}(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2)$$

$$H = 1 + \frac{r_0^4}{r^4}$$

$$r_0 = (4\pi g_s N_c)^{1/4} l_s$$

string length

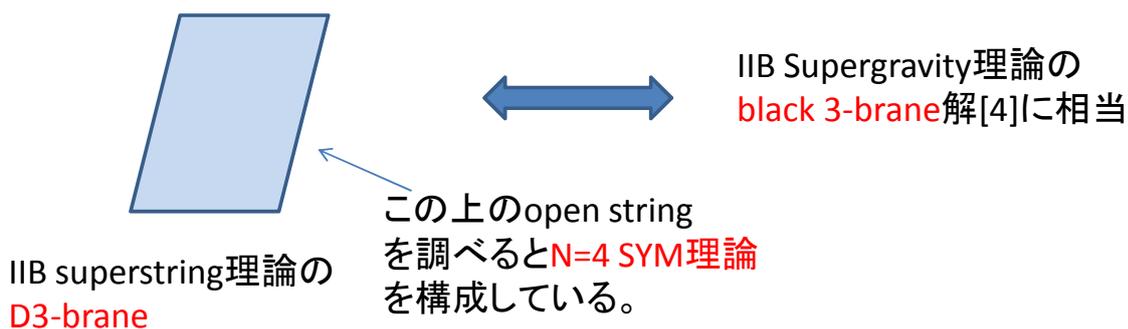
string coupling

- $r=0$ にhorizonがある。(一種のブラックホール)
- ADM質量は r_0^4 に比例する。すなわちNに比例する。

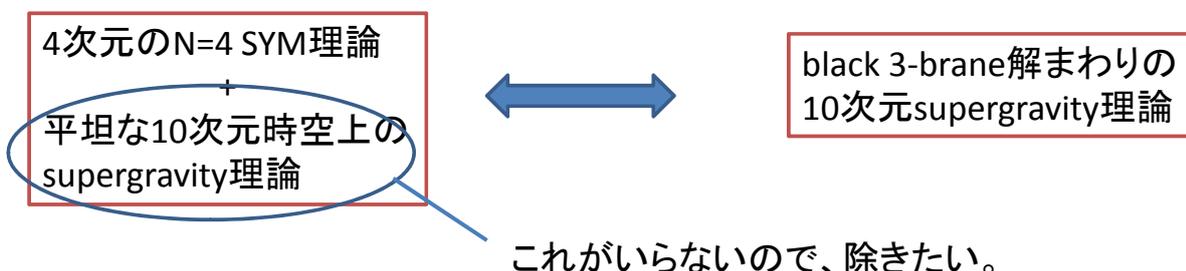
この他に、4階反対称テンソル場(Ramond-Ramond field)のfluxが存在し、この「ブラックホール」はD3-braneと同じRR chargeを持つ。

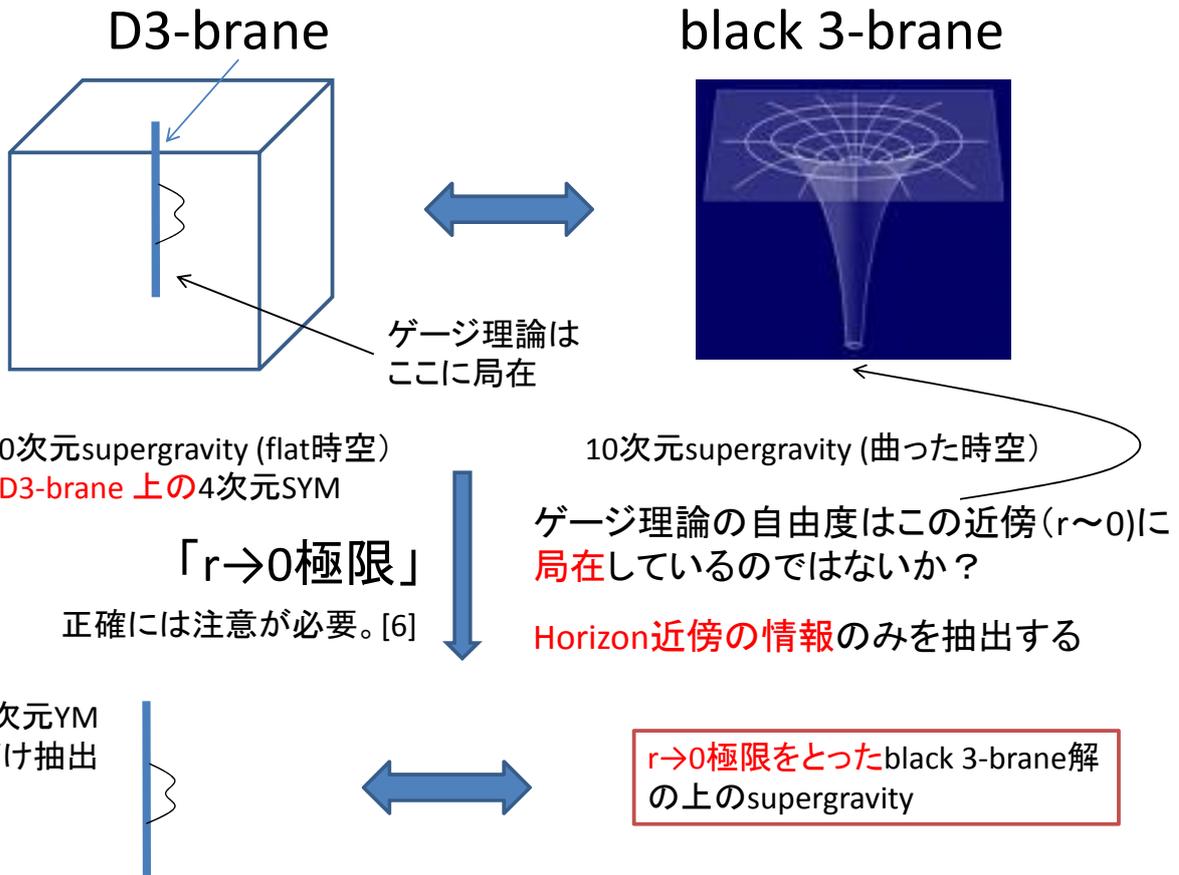
この他にscalar場(dilaton場)も存在する。

D-brane vs. curved space



弦の長さが無視できる低エネルギー極限では





Black 3-brane

$$ds^2 = H^{-1/2}(-dt^2 + d\vec{x}^2) + H^{1/2}(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2)$$

$$H = 1 + \frac{r_0^4}{r^4} \quad r_0 = (4\pi g_s N_c)^{1/4} l_s$$

[6] $r \rightarrow 0$ 極限 (near-horizon limit)
(正確には、 r/l_s^2 を固定しながら)

$$ds^2 = \underbrace{\frac{r^2}{r_0^2}(-dt^2 + d\vec{x}^2)}_{\text{AdS}_5} + \frac{r_0^2}{r^2} dr^2 + r_0^2 d\Omega_5^2$$

S^5

3+1次元N=4 SYM理論



AdS₅ × S⁵ 上のsupergravity

等価?

等価というからには理論の持つ対称性くらいは一致していないと困る。本当に一致しているか？

N=4 SYM理論の対称性

N=4 SYM理論の場

$$A_\mu$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$$

$$\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 \varphi_5 \varphi_6$$

4種類の超対称変換を組み換える
自由度: R-symmetry

6個のscalar場を組み換える自由度
に対応

SO(6)

N=4 SYM理論はCFTであることが
知られている。(β=0)

3+1次元のconformal groupは
SO(2,4)

重力側の対称性

$$ds^2 = \frac{r^2}{r_0^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{r_0^2}{r^2} dr^2 + r_0^2 d\Omega_5^2$$

AdS₅

S⁵

AdS₅時空は時間が2つあるような
4+2次元Minkowski空間内の偽球面
として構成できるので、対称性は
SO(2,4)

この回転対称性が
SO(6)

SO(2,4) × SO(6)

たしかに一致している！

Super-conformal 対称性まで含めて考えても、一致していることが確認できる。

注意事項(1)

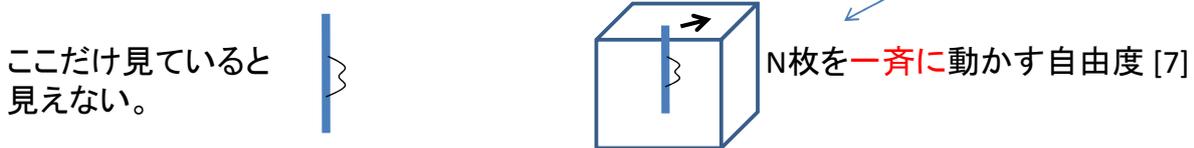
事実の確認

N枚のD-braneが重なった状況

open string (ゲージ粒子) の端点がどのD-braneに終端するかという自由度がある。この自由度の対称性は $U(N_c)$

➡ N枚のD-brane 上の理論は $U(N_c)$ SYM理論

しかし、 $U(N_c) = SU(N_c) \times U(1)$ の **U(1)部分** は、near-horizon 極限をとった後では **decouple** している。

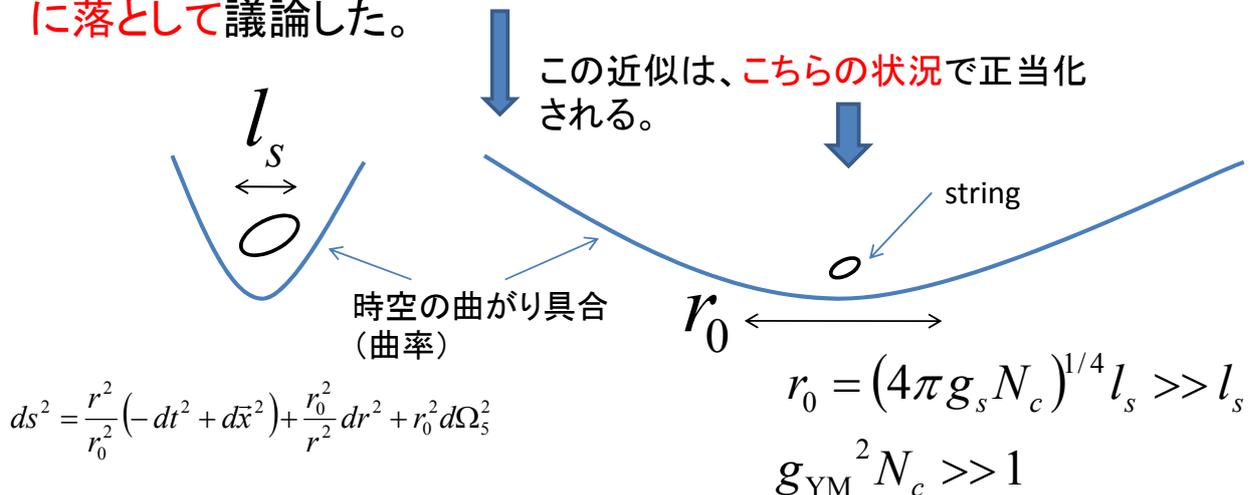


対応するゲージ理論は **$SU(N_c)$ SYM** [7]

注意事項(2)

強結合：
AdS/CFT成立には必要でない
が、計算遂行に有用な近似

もともとは**弦理論**の摂動論を異なる真空(異なる時空)で構成して、同じ物理の計算を比較するのがideaであった。
しかし、曲った時空での弦理論は定式化が容易でないため、**弦の長さが無視できる**として**点粒子の理論 = 超重力理論**に落として議論した。



't Hooft coupling $\gg 1$ (強結合) で、弦の補正を無視することが正当化される。

注意事項(3)

Large- N_c :
AdS/CFT成立には必要でない
が、計算遂行に有用な近似

弦理論から重力理論に落として考えたとしても、もし量子重力を扱わねばならないのであれば解析が非常に困難になる。重力理論が古典的になるためには10次元重力のNewton constant $\rightarrow 0$ の極限をとるべき。

$$2\kappa^2 \equiv 16\pi G_{10} = (2\pi)^7 g_s^2 l_s^8$$

κ で展開したleadingのみ残したい。

κ は(長さ)⁴の次元を持っている。しかし展開係数は無次元でなくてはならないので、AdS時空側の長さスケール r_0 と組み合わせて無次元化したものが真の展開係数。

$$\frac{\kappa}{r_0^4} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} (2\pi)^{7/2} g_s l_s^4}{4\pi g_s N_c l_s^4} \propto \frac{1}{N_c}$$

これが、重力側の量子補正をカウントする際の展開係数。

注意事項(3)

Large- N_c :
AdS/CFT成立には必要でない
が、計算遂行に有用な近似

つまり、

$$\text{重力理論のloop展開} = \text{1}/N_c \text{展開}$$

$N_c \rightarrow \infty$ において、重力側の量子補正は考慮しなくて良くなる(古典重力となる。)

't Hooft のlarge- N_c 極限をとれば、ゲージ理論側にはplanar diagramの範囲で量子効果が入っているが、重力側は古典重力にできる！

注意事項(4)

事実の確認

重力理論は古典的であるが、対応するゲージ理論側は量子論。

large- N_c をとっているので planar diagram しか含まないが、planar な loop diagram は全て含めて計算している。

D-brane (tadpole) がからむ全ての可能な diagram の和



曲った時空上での単純計算

という当初の idea と

closed string の tree = open string の loop

を思い出せば、少なくともそう期待できる。(実際そうになっている。)

例えば、ゲージ理論側の anomaly が重力側の古典的計算で再現される。

結論

$N=4$ $SU(N_c)$ large- N_c SYM 理論の $\lambda \gg 1$ 極限の量子論



等価

曲率 $\ll 1$ の $AdS_5 \times S^5$ 上の IIB 超重力理論の古典論

であると予想するに足る十分な理由が超弦理論にはある。

Plan to talk

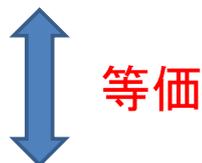
- Part 1 : AdS/CFT対応の基本思想
(自然な考察で「等価性」にたどりつくこと)
- Part 2: AdS/CFTのテクニック
(具体的な対応辞書)
- Part 3: 有限温度の導入
- Part 4: フレーバーの導入、酒井・杉本モデル
- Part 5: 非平衡物理学への応用
(私の最近の仕事)

Part2: AdS/CFTのテクニック

AdS/CFTを用いてゲージ理論側の
計算を行うにはどうしたら良いのか。

ここまでの結論

$N=4$ $SU(N_c)$ large- N_c SYM理論の $\lambda \gg 1$ 極限の量子論



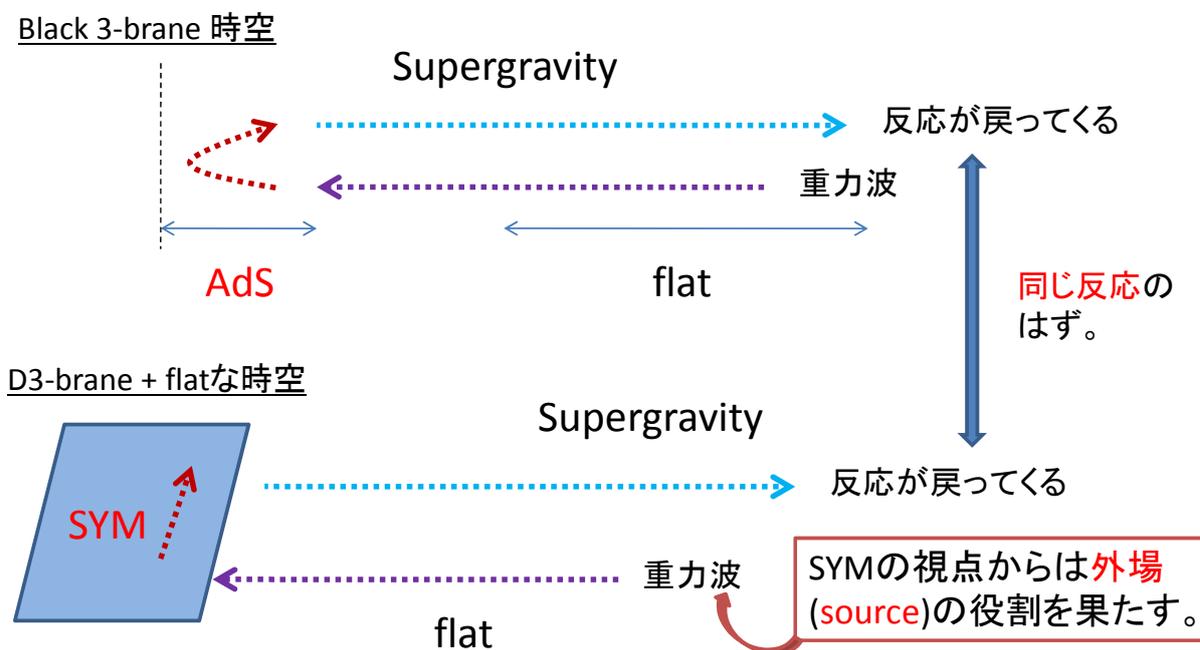
曲率 $\ll 1$ の $AdS_5 \times S^5$ 上の IIB 超重力理論の古典論

であると予想するに足る十分な理由が超弦理論にはある。

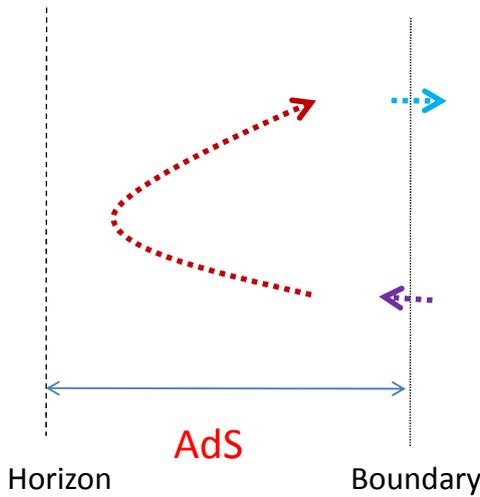
どう等価なのか？ [8]

重力側とゲージ理論側の対応関係の辞書をどのように作ったら良いか？

D-braneのpictureに立ち返ることが重要。



Near-horizon limit 後では

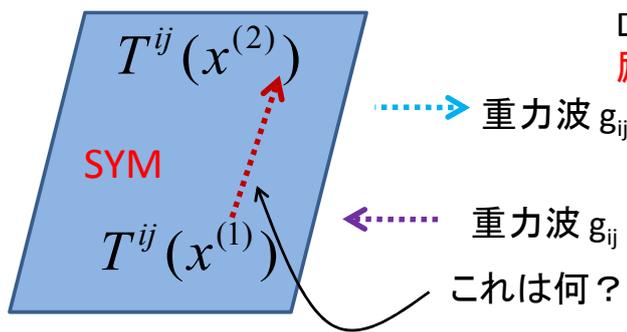


AdS時空に境界があった。

境界上のモード
(つまり境界条件)が
外場、sourceに対応する。

何に対するsource？

D-brane pictureでは



入射した重力理論のモードが
D-brane上のYMの、どのモードを
励起するか調べれば良い。

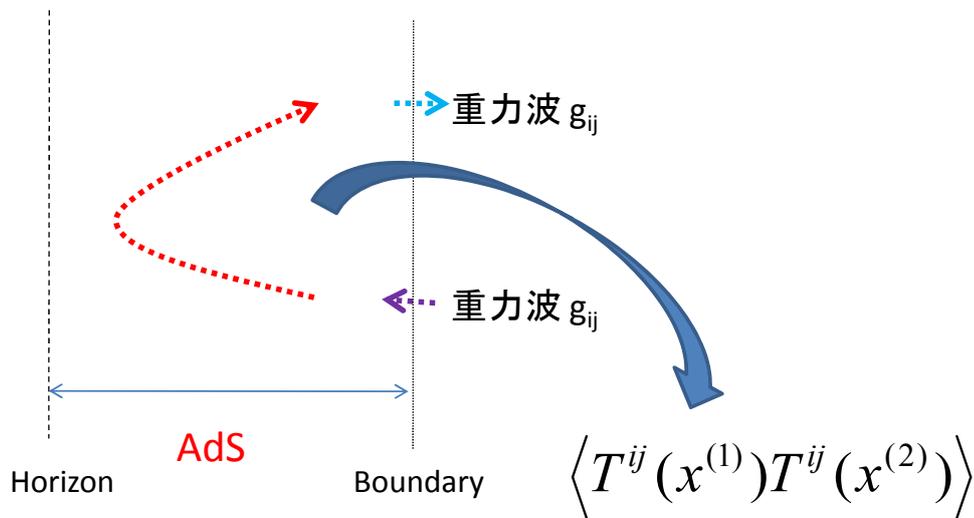
D-braneの有効作用の構造:

$$S = -\frac{1}{4g_{YM}^2} \text{Tr} \int d^4x \sqrt{-\det g_{kl}} F_{ij} F^{ij} + \dots$$

$$\delta S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\det \bar{g}_{kl}} T^{ij} \delta g_{ij}$$

例えば、重力(3+1次元成分metric g_{ij})は
D-brane上のYM理論のenergy-momentum
tensorと線形に結合する。

ということは



曲った時空中の重力の古典的Green関数が

平らな時空中のYM理論のstress tensorのあらゆるplanar diagramを取り入れた2点関数を与える。

まとめると: GKP-Witten処方[8]

重力時空(AdS)のboundary上の g_{ij} の値



対応するゲージ理論(N=4 SYM)のstress tensorに対するsource (つまりSYM理論が定義されている3+1次元時空のmetricそのもの)

重力理論のon-shell作用
境界条件の関数

$$S(g_{ij} |_{\text{boundary}}) \longleftrightarrow$$

= SYM理論の「有効作用」
(sourceの関数としての)

SYM理論の(経路積分後の)
(connected correlation func.の)
生成汎関数

これをboundary metricでn回変分すれば、stress tensorのn点関数の期待値が(重力側の古典的計算から)求められる。

AdSとは?

AdS: Anti de Sitter spacetime

スカラー曲率が負で一定な時空の一つ。(AdS以外にもある。)

- AdS時空にはtime-like boundaryがある。
(boundary上に時間軸を導入可能。)

AdS時空内から発せられた光は有限の時間
(affine parameter)でboundaryに到達する。

- ということは、AdS時空内の物理を決めるには

運動方程式
初期条件 の他に 境界条件 が必要。

部分積分する際の境界項が無視できない。

AdS時空の境界条件と時空内部の物理は密接に関係している。

重力側には他の場もいる

「重力理論」は正確にはtype IIB supergravityであった。

この理論には、graviton、スカラー場(dilaton)、
テンソル場(Ramond-Ramond、Neveu-Schwarz)などが存在。

例えばD3-braneの有効作用でdilaton依存性を復活させると

$$S = -\frac{1}{4g_{YM}^2} \text{Tr} \int d^4x e^{-\phi} \sqrt{-\det g_{kl}} F_{ij} F^{ij} + \dots$$

Dilatonはgluon condensate $\text{Tr} F^2$ (をN=4 SYMに一般化したもの)
に対するsourceとなる。

どう変分するのか？

数学的構造を見るために **scalar場(dilaton)の例** で考える

5次元のscalar場の作用
(S⁵部分はreductionして
残りの5次元を考えている。)

係数は省略

$$S \equiv \int d^4x dz \sqrt{-g} [g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi]$$

$$= -\int d^4x dz \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) \phi + \int d^4x \sqrt{-g} g^{zz} \phi \partial_z \phi \Big|_{z=0}^{z=\infty}$$

運動方程式によりゼロ

境界項のみにできる。
(ある意味4次元に帰着)

$$ds^2 = \frac{-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2}{z^2}$$

というmetricを採用したとする (z=0がboundary)

場が z 座標のみに依存する
場合、運動方程式は

$$\partial_z (z^{-3} \partial_z \phi(z)) = 0$$

運動方程式の解は

$$\phi(z) = C_1 + C_2 z^4 \text{ という形。}(C_1, C_2 \text{ は積分定数。})$$

Non-normalizable mode

Normalizable mode

$$\phi(z) = C_1 + C_2 z^4$$

これがboundary(z=0)
での値: source

これが対応するoperatorの
期待値(に比例)

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} g^{zz} \phi \partial_z \phi$$

$$S(C_1) = \int d^4x z^{-5} z^2 (C_1 + C_2 z^4) \partial_z (C_1 + C_2 z^4) \Big|_{z=0}^{z=\infty}$$

$$= \int d^4x [4C_1 C_2 + C_2 z^4] \Big|_{z=0}^{z=\infty}$$

$$= \int d^4x [4C_1 C_2 + C_2 z^4] \Big|_{z=\infty} - 4 \int d^4x C_1 C_2 \Big|_{z=0}$$

conjugateな形

これをC₁で変分するとC₂(× factor)が落ちてくる。

On-shell 作用の正則性(@z=∞)を要請すると「C₂=0」と答えが定まる。

ゲージ理論(N=4 SYM)での言葉では

この理論の **gluon condensate** の期待値は **ゼロ**。

$$\text{Tr} \langle F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \dots \rangle = 0$$

↑
super

量子論的期待値が得られると言ったが

- 「くりこみ」はどうしているのか？
- 紫外発散は？

(古典)重力理論側にもAdS/CFTの文脈では
「くりこみ」の対応物がある。

YM理論側の**紫外発散**



重力理論側の**赤外発散**

重力理論の**境界項**に、この発散をcancelする
ような「**counter term**」を加えて繰り込む。

応用として

Holographic繰り込み群

Massiveなscalar場でやると

$$0 = \partial_z \left(z^{-3} \partial_z \phi \right) - z^{-5} m^2 \phi$$

解は

$$\phi(z) = C_1 z^{2-\sqrt{4+m^2}} + C_2 z^{2+\sqrt{4+m^2}}$$

境界項は

$$\begin{aligned} -z^{-3} \phi \partial_z \phi &= \left(C_1 z^{2-\sqrt{4+m^2}} + C_2 z^{2+\sqrt{4+m^2}} \right) \\ &\quad \times \left(\left(2 - \sqrt{4+m^2} \right) C_1 z^{1-\sqrt{4+m^2}} + \left(2 + \sqrt{4+m^2} \right) C_2 z^{1+\sqrt{4+m^2}} \right) \\ &= C_1 \left(-4C_2 - 2 \left(2 - \sqrt{4+m^2} \right) C_1 z^{-2\sqrt{4+m^2}} \right) + \dots \end{aligned}$$

境界項として、あらかじめ

$z \rightarrow 0$ で発散！

$$\int d^4x \sqrt{\gamma} \left(2 - \sqrt{4+m^2} \right) \phi^2 \Big|_{z=\varepsilon}$$

を手でいれておけば、発散が除去される。(カウンターターム) (例えば[10-2] 参照)

Holographicな繰り込み[9]

一般的には重力側で物理量の期待値を計算すると表面項を境界に持っていく($z \rightarrow 0$)手続きの際に発散が生じる。

これは、時空の範囲を境界まで伸ばす(時空の体積を増やす)操作における発散なので、重力側の視点では赤外発散。

そこで、

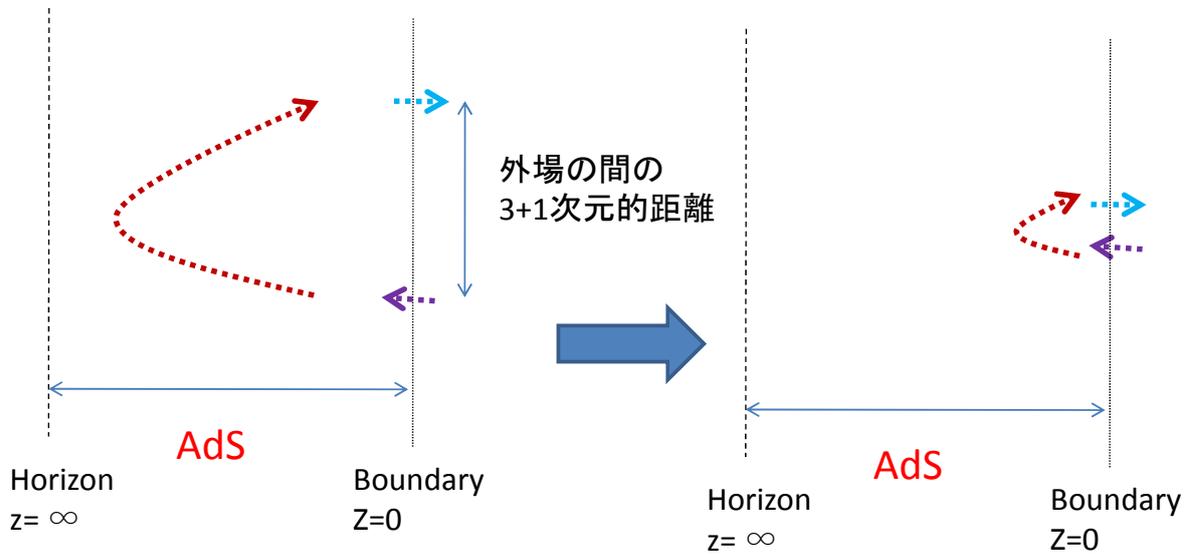
1. $z=\varepsilon$ というregulator (cut-off)を導入する。
2. ちょうど発散を打ち消すような境界項 S_{cut} を、あらかじめ重力作用に入れておく。(対称性を保ち、発散を過不足無く消すもの)
3. 最後に $\varepsilon \rightarrow 0$ をとる。

Holographicな繰り込み

counter term

紫外 vs. 赤外[9]

なぜ、 $z \rightarrow 0$ (境界に近づく極限) がYM側の紫外極限に対応するのか？

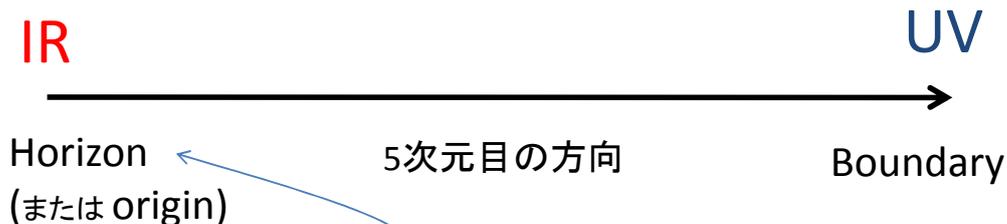


YM側でshort distanceを考えると、重力側ではboundary近傍を考えることに対応する。

5番目の座標の意味[9]

そもそも「AdS₅と4次元SYMが対応する」と言った時に5番目の方向の意味を問うのは自然な質問であった。

厳密な正確性を無視して言えば、5番目の座標はYM理論の言葉ではエネルギースケール⁵の方向であり、非常に大雑把には、異なるエネルギースケールの物理が5番目方向の異なる場所に住み分けしている、というイメージを持つこともできる。



実際、巨視的物理に関連した物理量 (エントロピーなど) はhorizonで与えられる。

Stress tensorの計算[10]

境界のある5次元重力の正しい作用

境界上のextrinsic curvature

$$S = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^4x dz \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + \frac{1}{8\pi G_N} \int d^4x \sqrt{-\gamma} K$$

境界上のmetric
Gibbons-Hawking term

これをmetricの自由度について部分積分をして境界項のみの作用に書き換えると

$$S = \frac{1}{8\pi G_N} \int d^4x [K^{\mu\nu} - K\gamma^{\mu\nu}] \gamma_{\mu\nu}$$

しかし、このまま計算してみると紫外発散が出るためcounter termが必要。

$$S_{\text{count}} = -\frac{1}{8\pi G_N} \int d^4x \sqrt{-\gamma} \left[6 + \frac{1}{2} R^{(4)} \right]$$

繰り込まれた stress tensorは

$\Lambda = -6$ の convention で $N_c^2 / (4\pi^2)$

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi G_N} \left[K^{\mu\nu} - K\gamma^{\mu\nu} - 3\gamma^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (R^{(4)\mu\nu} - \frac{1}{2} \gamma^{\mu\nu} R^{(4)}) \right]$$

しかし結局、[11]

$$ds^2 = \frac{\tilde{g}_{ij}(x, z) dx^i dx^j + dz^2}{z^2}$$

という座標系 (Fefferman-Graham座標) を採用した場合は話が単純になり、結局

$$\tilde{g}_{ij}(x, z) = \gamma_{ij} + z^4 (4\pi G_N) T_{ij} + \dots$$

↑ source (boundary metric)
 ↑ <operator> (stress tensor)

$$4\pi G_N = \frac{2\pi^2}{N_c^2}$$

(参考: 先ほど scalar 場で考察した時の形)

$$\phi(z) = C_1 + C_2 z^4$$

source

operatorの期待値
(に比例)

注意事項

$$S_{\text{count}} = -\frac{1}{8\pi G} \int d^4x \sqrt{-\gamma} \left[6 + \frac{1}{2} R^{(4)} \right]$$

Counter termは発散が除去されるように入れるだけでなく、その項が理論の対称性 (boundary上の一般座標変換に対するcovarianceなど) を保つような形でなくてはならない。

このため、発散を過不足なく取り除くようにcounter termの係数を調整すると、counter termの発散部分以外の部分から有限の寄与が生じる場合がある。

これは、量子効果であって、anomalyの計算などに重要な寄与をする。一般に、単に発散部分を手で捨て去るだけでは、この有限の量子効果を見逃す危険性がある。

注意事項その2

$$ds^2 = \frac{\tilde{g}_{ij}(x, z) dx^i dx^j + dz^2}{z^2} \quad \tilde{g}_{ij}(x, z) = \underbrace{\gamma_{ij}}_{\text{source (boundary metric)}} + z^4 \left(\frac{2\pi^2}{N_c^2} \right) \underbrace{T_{ij}}_{\text{<operator> (stress tensor)}} + \dots$$

sourceは手で指定して、operatorの期待値は結果として得られるはず。



一方で重力側の方程式は2階の微分方程式なので、解を決定するためには境界条件2つ必要なのでは？ (つまり右辺2項目も与えるべき境界条件)

実は、重力側の時空がregular (naked singularityがない) ということのを要請すると、この条件により 右辺2項目=operatorの期待値 が決まる。



宇宙検閲仮説

[12]

Operatorの期待値を 決定するために用いる条件

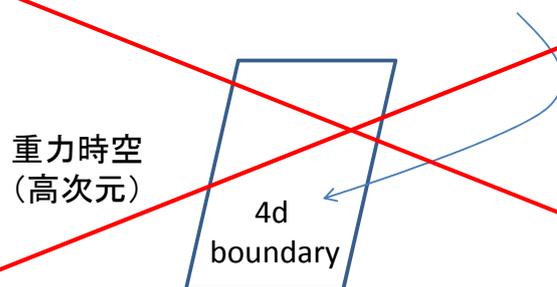
Case by caseであって、この条件を統一的に与える処方は今のところ知られていない。しかし**経験上必ず何らかの物理的に自然な条件がある。**

例

- On-shell作用のIR正則性 (gluon condensateの計算など)
- 時空に裸の特異点が存在しない (stress tensorの計算など)
- Black hole horizonでのingoing wave boundary condition
- On-shell作用が実数であること
-

AdS/CFTの迷信(その2)

~~「ゲージ理論(CFTなど)は重力時空のboundaryに住んでいる」~~



ゲージ理論は、あくまで「重力理論」という言葉に置き換わって高次元時空全体に「住んで」いる。

ゲージ理論の視点ではあくまでnon-dynamical

ただし、operatorの**source (外場)**はboundaryに住んでいると思っても構わない。

まとめ

- AdS/CFT対応の基本的アイディアは、既に場の理論の基本的な考え方の中に既に内在していた。
- いくつかの自然なジャンプを経ることでAdS/CFTに到達する。
 - 弦の場の理論は完全には完成していない。しかし、場の理論での基本的な考え方を、弦理論で用いて構わないと考えている。
 - Near-horizon極限で、注目したいD-brane上の物理(ゲージ理論)とその周囲の自由度(重力)が分離され、ゲージ理論に対応する自由度のみがきれいに残るものと仮定している。
- ゲージ理論と重力理論の対応辞書を構成するには、もとのD-braneのpictureに戻ることが重要。逆にD-brane pictureがあれば、両者の関係を自然に推測することが出来る。

Part 3

有限温度の導入 (特にブラックホールの導入)

ここまでの説明

N=4 SU(N) large-Nc SYM理論の $\lambda \gg 1$ 極限の量子論



等価

曲率 $\ll 1$ の $\text{AdS}_5 \times S^5$ 上の IIB 超重力理論の古典論

ただし、基本的に温度 $T=0$ の話であった。

有限温度を導入するには[15]

Imaginary-time formalism

- 時間方向を wick rotate し、虚時間を導入
- 虚時間方向の周期を $\beta=1/T$ にとる。
- boson については周期境界条件、
fermion については反周期境界条件を課す。

例えば AdS_5 時空において、同様のプロセスを踏むことができる。

 **Thermal AdS:** Euclidean AdS_5 で「虚時間」周期 β

Thermal AdS

AdS (real time) $ds^2 = \frac{-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2}{z^2}$

Thermal AdS $ds^2 = \frac{d\tau^2 + d\vec{x}^2 + dz^2}{z^2}$ $\tau \sim \tau + \beta$

この計量は β と無関係

On-shell作用の中で温度方向の S^1 は直積として入っている。

On-shell作用 = Free energy $\times \beta$

ここが β と無関係

entropy = 0

解釈: large-Nc の leading が消えている \rightarrow entropy は $O(1)$

Color の自由度は見えない: 閉じ込め相

AdS-Black hole

(AdS-Schwarzschild)

Euclidean 5次元重力 (宇宙項負) の解は thermal AdS のみではない。

➡ AdS-BH も解。
Euclidean ではやはり虚時間方向は周期的になっている。

参考: 通常の Einstein 理論でも Minkowski 時空と black hole 時空の 2種類 の解が存在した。

Black hole: horizon が存在する。

Event horizon:

horizon 内側の情報は無限遠に到達しない。

Apparent horizon:

horizon 内側で発せられた光は horizon 外部に逃げ出せない。

静的な解では両者は一致。

A metric of Euclidean AdS-BH

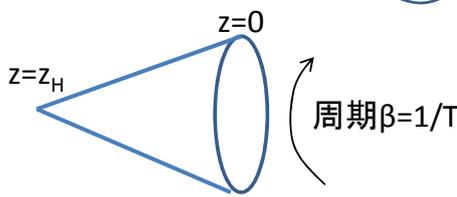
$$ds^2_{\text{AdS-BH}} = \frac{1}{z^2} \frac{\left(1 - \frac{z^4}{z_H^4}\right)^2}{1 + \frac{z^4}{z_H^4}} d\tau^2 + \frac{1 + \frac{z^4}{z_H^4}}{z^2} d\vec{x}^2 + \frac{dz^2}{z^2}$$

- horizonの位置: $z=z_H$.
- boundaryの位置: $z=0$.

Horizon近傍の構造

$$ds^2 \approx \frac{1}{z_H^2} \left(dz^2 + \frac{8}{z_H^2} (z_H - z)^2 d\tau^2 + \dots \right)$$

$dr^2 + r^2 d\theta^2$
 $d\theta^2$ と思った時に
 周期が 2π でなく
 てはならない。

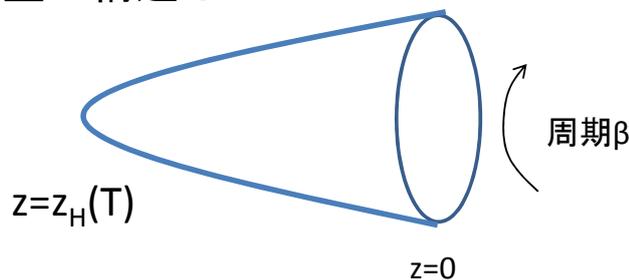


$$T = \frac{\sqrt{2}}{\pi z_H}$$

$z=z_H$ でsingularとならない条件から β と z_H の関係が決まる。

AdS-BHのentropy

この場合、時空の構造は



計量が温度 T によっており、on-shell作用は T に依存する。

$$\text{On-shell作用} = \text{Free energy} \times \beta$$

$$\text{entropy} \sim O(N_c^2) > 0$$

ここが β に依存する。

Colorの自由度が見えている: 非閉じ込め相

まとめると

重力側の解として同じ虚時間周期 $\beta=1/T$ を持つものは

- Thermal AdS: entropy $\sim O(N_c^0)$, 閉じ込め
- AdS-BH: entropy $\sim O(N_c^2)$, 非閉じ込め

両者間の相転移はFree energy=on-shell作用/ β の大小で決まり、典型的には一次相転移である。

(重力理論ではHawking-Page transitionとして知られていた。)

Minkowski上のN=4 SYMではscaleが入ってこないため、 $T_c=0$ 。
(基本的に非閉じ込め相)

非閉じ込め相でstress tensorを読み取ってみる。

$$ds^2 = \frac{\tilde{g}_{ij}(x, z) dx^i dx^j + dz^2}{z^2} \quad \tilde{g}_{ij}(x, z) = \underbrace{\gamma_{ij}}_{\text{source (boundary metric)}} + z^4 \left(\frac{2\pi^2}{N_c^2} \right) \underbrace{T_{ij}}_{\text{<operator> (stress tensor)}} + \dots$$

$$ds^2_{\text{AdS-BH}} = \frac{1}{z^2} \frac{\left(1 - \frac{z^4}{z_H^4}\right)^2}{1 + \frac{z^4}{z_H^4}} d\tau^2 + \frac{1 + \frac{z^4}{z_H^4}}{z^2} d\vec{x}^2 + \frac{dz^2}{z^2}$$

ここを $z=0$ (boundary) まわりで展開すれば良い。

$$ds^2_{\text{AdS-BH}} = \frac{1}{z^2} \left[\underbrace{(d\tau^2 + d\vec{x}^2)}_{\text{ゲージ理論側の計量}} + z^4 \underbrace{\left(\frac{3}{z_H^4} d\tau^2 + \frac{1}{z_H^4} d\vec{x}^2 \right)}_{\text{ゲージ理論側の}} + \dots \right] + \frac{dz^2}{z^2}$$

$$T = \frac{\sqrt{2}}{\pi z_H} \left(\frac{2\pi^2}{N_c^2} \right) T_{ij}$$

$$T_{00} = \frac{3}{8} N_c^2 \pi T^4, \quad T_{xx} = \frac{1}{8} N_c^2 \pi T^4$$

エネルギー密度 ϵ

圧力 P

$$T_{00} = \frac{3}{8} N_c^2 \pi T^4, \quad T_{xx} = \frac{1}{8} N_c^2 \pi T^4$$

エネルギー密度 ϵ

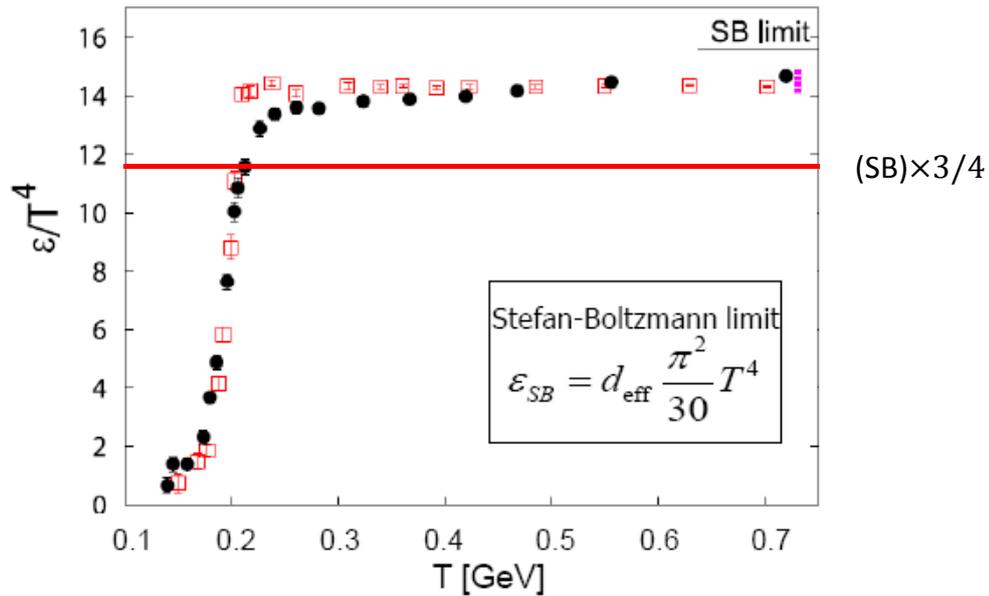
圧力 P

$\epsilon=3P$: stress tensorは **traceless** (スケール不変性)

N=4 SYMの弱結合極限で計算すると $T_{00} = \frac{1}{2} N_c^2 \pi T^4$

強結合極限での値は弱結合極限での値の **3/4倍** となっている。

エネルギー密度 (QCDの場合)



Lattice QCD (Cheng et al., PRD77(2008))の結果

Black holeと熱力学

もともと、AdS/CFT対応が言われる以前より、**Black holeの物理学と熱力学の類似性**が HawkingやBekensteinにより指摘されていた。

ブラックホール熱力学の法則

	熱力学	ブラックホール
第0法則	熱平衡では 温度 が一定。	定常解では 表面重力 κ (T に対応)が一定
第1法則	$dE=T dS+\mu dN$	$dM=[\kappa/(8\pi G_N)]dA+\mu dN$ (第2項は各運動量や電荷に対応する項。)
第2法則	エントロピー は減少しない。	ホライズンの面積 は減少しない。
第3法則	物理過程で 温度 をゼロにできない。(Nernst)	物理過程で 表面重力 をゼロにできない。

各法則について対応が成立している。

$$\rightarrow \boxed{T = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad S = \frac{A}{4G_N}} \quad 4\pi G_N = \frac{2\pi^2}{N_c^2}$$

$$\boxed{T = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad S = \frac{A}{4G_N}}$$

BHと熱力学との類似性については、

- BH時空の次元によらず
- BH時空が漸近的に平坦でも(AdS-BHでなくとも)

成立している。

しかし、

entropyは示量性: 系の「**体積**」に比例するべき。

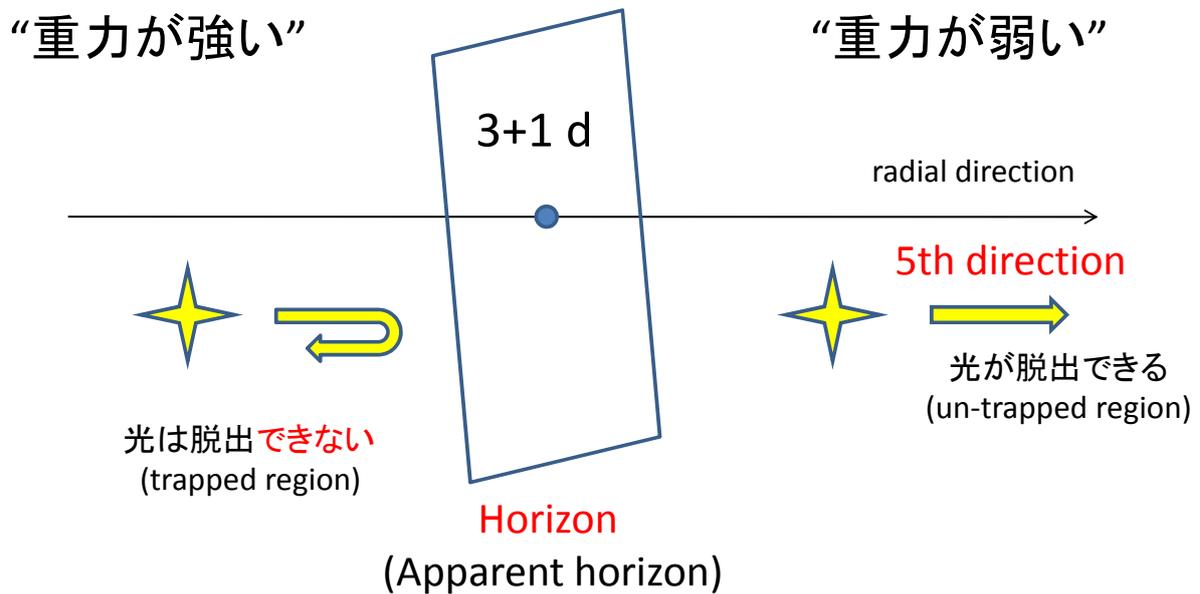
空間3次元の熱力学に対応させたいければ
Aはhorizonの「面積」というよりも「**体積**」。

BHの定義のためにhorizonに**垂直方向が必要**。

Extraな空間方向が、重力理論側には必要。

Black hole

Einstein方程式の解の一つ



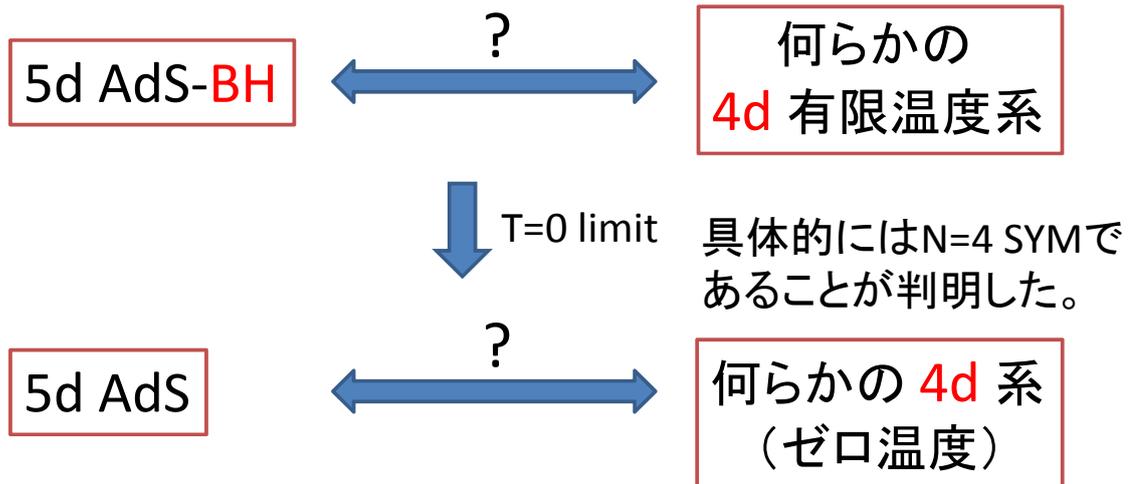
さらに、平坦な時空に埋め込まれたBH
(通常のSchwarzschild BH)の比熱を
計算すると、**負**になる。

熱力学的にill-defined

しかし、例えばAdS時空にBHを埋め込むと
比熱を**正**にできる。

この意味でも、**5d AdS-BH**が有限温度系のholographic dual
として登場したのは自然であり、ある意味必然であった
のかも知れない。

もしBHから考察を出発すると

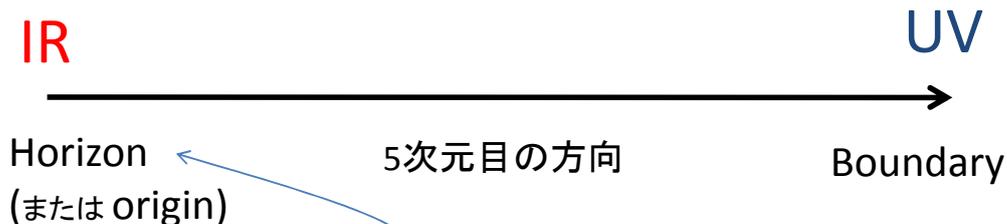


\longleftrightarrow ? \longleftrightarrow 超弦理論により、この矢印が厳密化されたのがAdS/CFT対応であると言える。

5番目の座標の意味[9]

そもそも「AdS₅と4次元SYMが対応する」と言った時に
5番目の方向の意味を問うのは自然な質問であった。

厳密な正確性を無視して言えば、5番目の座標はYM理論の言葉ではエネルギースケール
の方向であり、非常に大雑把には、異なるエネルギースケールの物理が5番目方向の異なる場所に
住み分けしている、というイメージを持つこともできる。



実際、巨視的物理に関連した物理量
(エントロピー、温度など)はhorizonで与えられる。

“Real-time formalism”

もともとBlack hole解は、**実時間の重力理論**の解であった。そして、そのblack holeの物理に温度やエントロピーの概念があった。

実時間でAdS-BHを扱うことにより、**温度と時間**、双方の概念が入った物理を扱うことができる。

例えば

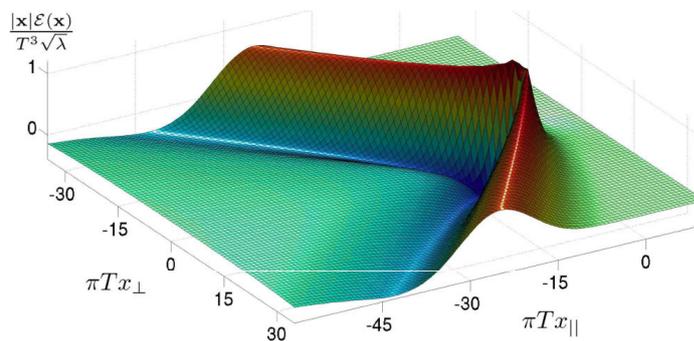
「ゆっくり」変動する動的BHの物理



「ゆっくり」変動するゲージ理論のstress tensorの振る舞い

ゲージ理論プラズマの**流体力学**

流体力学の計算例



N=4 SYMのgluon plasma媒質中を音速より早く移動する（無限に思い）quarkが作る衝撃波

非平衡状態も記述可能？

- もともとAdS/CFT対応は、**微視的理論**のoperatorの期待値を計算可能な枠組みであった。
- 時間依存性も議論可能

非平衡状態にあるゲージ理論の物理を扱うこともできるのではないか。

 Part 5

むしろ、BHにより温度の概念(平衡の概念)が導入されることの方が驚き？(BHという**一個の物体**で多体系を表現できる)

演算子の期待値以外の 物理量の計算

Glueballのspectrum

GKP-Witten処方:

ゲージ理論の演算子のn点関数を計算する処方

$$\phi(z) = C_1 + C_2 z^4$$

これがboundary($z=0$)
での値: **source**

これが対応するoperatorの期待値(に比例):
gluon condensate $\langle \text{Tr } F^2 \rangle$ の期待値

Non-normalizable mode

Normalizable mode

2階の微分方程式の独立な2つの解に相当。
($\phi = \text{const.}$ と $\phi = (\text{const.}) \times z^4$)

Dilatonの**normalizable mode**の揺らぎ
 $\sim \langle \text{Tr } F^2 \rangle$ の揺らぎ \sim **glueball** (スカラーのもの)

Normalizable modeの揺らぎの**固有振動数(波数)**から
glueballの分散関係 \sim **質量**がわかる。

エネルギースケールの導入

離散的スペクトラムを得るためには、mass gapを与える
エネルギースケール Λ_{QCD} が必要。

($N=4$ SYMは**CFTなのでダメ**。)

Wittenの方法 [17]

- まず、D3-braneではなく**D4-brane**から始める。
- D4-braneの**余分な一方向を丸める**(コンパクト化)
 - このコンパクト化半径が**スケールを与える**。
 - そのスケールよりも長距離スケールでは、残りの(延びている)**3+1次元上の場の理論として見える**。
- さらに都合の良いことに、このコンパクト化により
(fermionについては反周期境界条件を課すことで)
超対称性も破れる。

低エネルギーで**3+1次元 pure Yang-Mills**を実現。

重力dualは？

「D4-braneをコンパクト化したもの」に対応する
超重重力理論の解を見つければ良い。

そして、その**near-horizon limit**をとれば良い。

(ここではその時空をWitten時空と呼ぶことにする。[17])

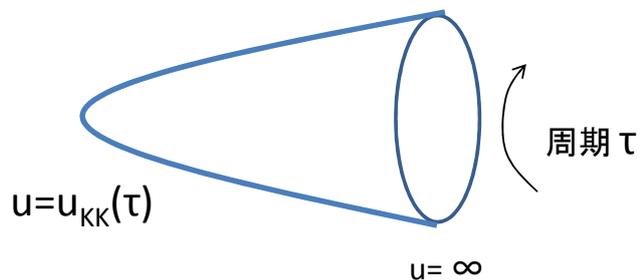
$$ds^2 = \left(\frac{u}{R}\right)^{3/2} \left(-dt^2 + d\vec{x}^2 + f(u)d\tau^2\right) + \left(\frac{R}{u}\right)^{3/2} \left(\frac{du^2}{f(u)} + u^2 d\Omega_4^2\right)$$

$$f(u) = 1 - \frac{u_{\text{KK}}^3}{u^3}, \quad R = \pi g_s N_c l_s^3$$

“コンパクト化でスケールを導入したことにより、時空が「**フタ**」をされた。”



時空内のモードが**離散的**になる
(spectrumに**gap**が生じる)



具体的には

例えばdilatonについて

$$\phi(t, x, u) = \varphi(u)e^{ikx}$$

の形を指定し、運動方程式に代入すると、様々な解が得られるが、、、

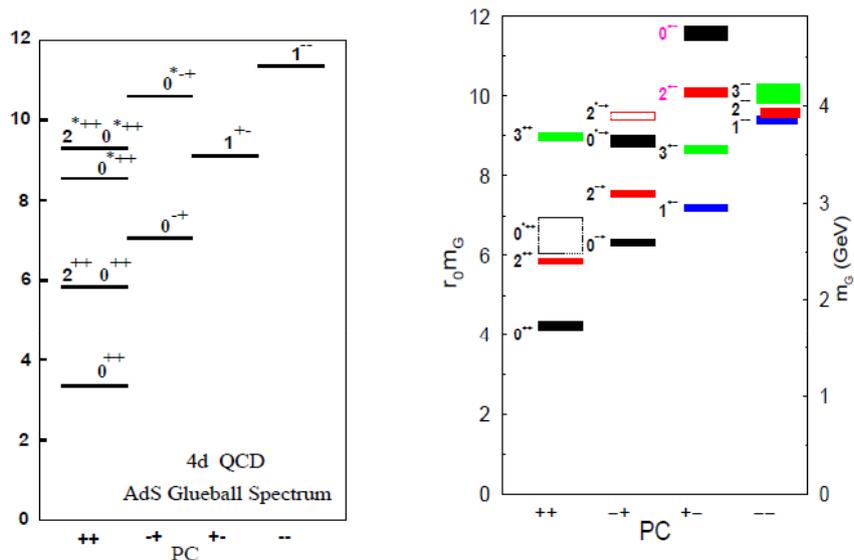
$u = u_{\text{KK}}$ において、dilatonの作用が**regular**であることを**要請**すると、**勝手な k の値**がとれなくなる。

分散関係: (敢えて $\omega=0$ としているので)

$$-k^2 = m^2$$

より、**質量spectrum**を読み取ることができる。

Glueball spectrum



AdS/CFT対応による4d large- N_c YMのglueball spectrum (左) と、そのSU(3) QCDでの格子シミュレーション結果(右)との比較 (Brower et. al., NPB587(2000)249)

Flavorの導入

AdS/CFT対応の一般化

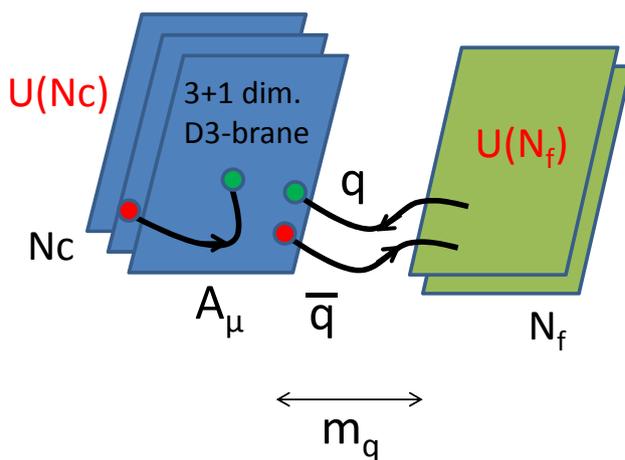
最も標準的なAdS/CFT対応に現れるN=4 SYM
には基本表現のクォークが存在しない。
(グルーオンとそのsuper-partnerのみの理論)

N=4 SYM理論の場合

$$\begin{array}{c} A_\mu \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \leftarrow \text{これらのfermionもadjoint表現} \\ \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 \varphi_5 \varphi_6 \end{array}$$

クォークを導入するにはどうしたら良いか？

クォークを導入するには



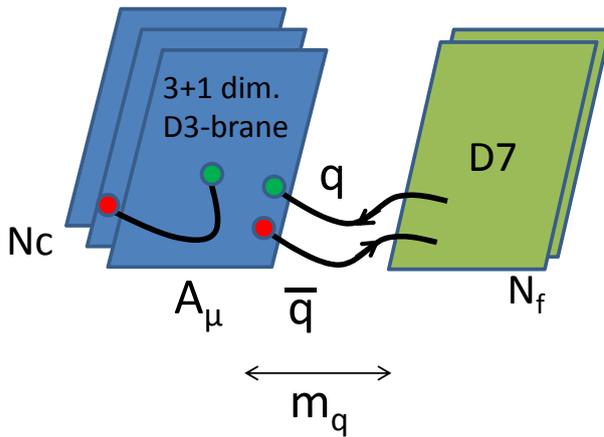
“Flavor D-brane”

別のD-braneを挿入すると、もともとのD3-brane上の視点からは、quarkとanti-quarksが導入されたように見える。

このD-braneを N_f 枚導入すれば N_f 種類のフレーバーを導入したことになる。対称性は $U(N_f)$ 。

D3とflavor braneの距離
= current quark massに対応

D3-D7 system



Flavor braneはどのようなものでも良い訳ではない。例えば組み合わせによってはopen stringのモードに不安定性(tachyon)が生じる場合もある。

系が安定な場合の例として flavor braneがD7-braneの場合が挙げられる。Flavor群: $U(N_f)$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nc D3	○	○	○	○						
Nf D7	○	○	○	○	○	○	○	○		

ここを用いてD3、D7を引き離すことができる。

Chiral対称性の破れを記述するゲージ・重力対応: 酒井・杉本モデル

基本

WittenのD4-braneをコンパクト化したモデル

3+1次元pure Yang-Mills理論

これにmassless quarkを加えたもの

= 酒井・杉本モデル

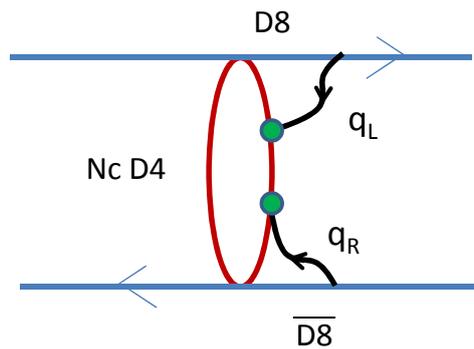
クォークの自由度を導入するには、新たにD8-branefを加える。

D4-D8-D8 system (酒井・杉本モデル[16])

基本

WittenのD4-braneをコンパクト化したモデル
3+1次元pure Yang-Mills理論

これにmassless quarkを加えたもの
= 酒井・杉本モデル



- chiral fermionが存在し
- D8とD8-barで独立に対称性
が存在： $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$

まとめ

(詳しく触れることの出来なかった内容も含む)

AdS/CFTで計算可能なもの

We can introduce **finite temperatures**. [15]

We can introduce **finite densities of global charges**. [19]

- We can compute the **free energy**.
- We can draw the **phase diagram**.
We can study **phase transitions**.

AdS/CFTで計算可能なもの

- **Expectation values** of operators in gauge theories.
- **Correlation functions** of operators in gauge theories.

For example, the **retarded Green function** of stress-energy tensor has been computed, and the **shear viscosity** of the gauge-theory plasma has been obtained.

$$\eta = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \text{Im} \left[i \int d^4x e^{-ikx} \theta(t) \langle [T_{xy}(t, \vec{x}), T_{xy}(0, 0)] \rangle \right]$$

$$\frac{\eta}{s} = \frac{\hbar}{4\pi k_B}$$

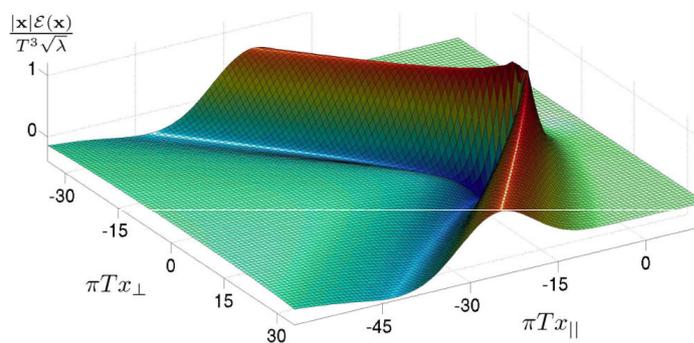
Review:
Natsuume, hep-ph/0701201
Son, Starinets, arXiv:0704.9240

AdS/CFTで計算可能なもの

- We can compute the expectation value of “macroscopic” operators like **Wilson loops**. [13]
- We can compute the effects of non-dynamical **external objects** (like external quarks) on the gauge theory systems. [21]

AdS/CFTで計算可能なもの

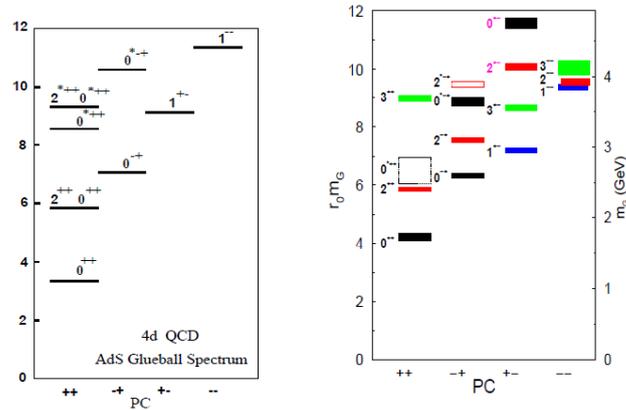
流体力学 [18]



N=4 SYMのgluon plasma媒質中を音速より早く移動する
(無限に思い) quarkが作る衝撃波

guleball spectrum

- **Mass spectrums** of glueballs and mesons. ([14,16]など)
- **Mass spectrum** of baryons.[22]



An example of glueball spectrum in 4d large- N_c YM (left) and its comparison with lattice result on SU(3) QCD.

(Brower et. al., NPB587(2000)249)

Part 5

非平衡物理学への応用の試み
(別のスライド)

参考文献・コメント

まず全般にわたっての日本語で書かれた良いreviewとしては

[0-1] 今村洋介、「AdS₅/CFT₄ correspondence」、素粒子論研究98(6) pp.209-242 (1999)

また、AdS/CFTが提案されて比較的初期に書かれた大部なreviewに

[0-2] O. Aharony, S.S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri, Y. Oz,
“Large N Field Theories, String Theory and Gravity,” Phys.Rept.323:183-386,2000 ,
arXiv:hep-th/9905111

があります。他の日本語reviewとしては

[0-3]今村洋介,「AdS/CFT: その基本的アイデアとその応用」, 原子核研究52-1,
pp.52-67 (2007).

[0-4]夏梅 誠,「線形応答理論からみたAdS/CFT双対性」, 原子核研究54-3,
pp.110-142 (2010).

[0-5]中村 真、夏梅 誠,「超弦理論がつなぐブラックホールと流体力学」,
物性研究94-3 (2010-6), pp.350-372, (2010);
(同一原稿の転載版としては、素粒子論研究118-2, (2010).)

[0-6]杉本茂樹,「超弦理論によるQCDの解析」, 原子核研究52-1, pp.68-78 (2007).

[1] J. Maldacena, “The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity,” Adv.Theor.Math.Phys.2:231-252,1998, arXiv:hep-th/9711200.

しかし、以下の論文では既にAdS/CFTの基本概念が見え隠れしています。
基本思想を読み取る上で重要です。

I. R. Klebanov, “World Volume Approach to Absorption by Non-dilatonic Branes,”
Nucl.Phys. B496 (1997) 231-242, arXiv:hep-th/9702076

[2]

ここで用いた ϕ^3 理論のアナロジーでAdS/CFTの説明を行うアイディアは筆者の**独自の**試みであり、他の文献には、AdS/CFTを説明する目的では恐らく見当たらないのではないかと思います。

しかしD-braneをclosed stringのtadpoleとみなしてre-summationする考え方や、ここで行った計算については、tachyon condensationの研究の過程で川合光氏より手ほどきを受けました。また計算の細部の理解については韓国APCTPの松尾善典氏、竹内紳悟氏との議論が役に立ちました。この場を借りてお礼申し上げます。

[3] D-braneの考え方、tensionの求め方などは例えば

[3-1] J. Polchinski, "String Theory," vol. 2, Cambridge University Press

[3-2] 太田信義、「超弦理論・ブレイン・M理論」、シュプリンガー・フェアラーク東京

に詳しく載っています。また「素粒子論研究」のReview記事のうち

[3-3] 橋本 幸士、「D-brane、特にそのEffective ActionとDuality」、
素粒子論研究 94(5) pp.75-116 (1997)

[3-4] 今村洋介、「String, M and Matrix Theories」、
素粒子論研究 96(5) pp.187-270 (1998)

なども参考になります。

[4] G. Horowitz and A. Strominger, "Black Strings and p-branes,"

Nucl. Phys. B360 (1991)197. 歴史的にはD-braneよりも先に知られていました。

[5] ここではstring tensionとD1-braneのtensionの比が g_s となるような conventionを採用しています。例えば[3-1]の4.5章の最後などを参照。

[6]

実は、ここでのnear-horizon limitの説明は、少し不十分な点があります。つまり、単純に「 $r \rightarrow 0$ 」の極限をとるのではなく、この極限を取る際に「ゲージ理論側の物理量を一定に保ったまま」極限をとる必要があります。

(例えば、有限温度を導入した場合は、極限をとったあとも有限の温度が得られるようにスケールさせる必要があります。)

この例では、 $r \times (\text{string tension})$ がゲージ理論のエネルギースケールなので、これを一定に保ったまま「 $r \rightarrow 0$ 」の極限をとる、と言うのがより正確です。ここで $\text{string tension} = (2\pi l_s)^{-2}$ です。こう思うと、「 $l_s \rightarrow 0$ 」、 $r \sim l_s^2$ のようにスケールさせていることになります。 $r_0 \sim l_s$ であることを考え合わせると、この「 $l_s \rightarrow 0$ 」極限で、metricのHの中の「1」が無視できることになります。

しかし、このように詳細を説明すると複雑になるため、講演では直観を重視して単に「 $r \rightarrow 0$ 」の極限をとるとしました。直観を重視する場合は、まず「 $r \rightarrow 0$ 」の極限をとる」とした上で、この極限操作においてゲージ理論の物理量がちゃんと一定に保たれている(極限後も有限に保たれている)ことを確認する必要があります。

[7]

ここでdecoupleしているU(1)のモードはsingletonと呼ばれるモードです。より正確な考察は[0-2]の(3.6)と(3.7)式の間(で引用されているRefs.)を参照されたい。(また[0-1]にも説明があります。)

[8]

ここで説明されている operatorと重力側の場の対応 についての対応処方
はGKP-Witten処方と呼ばれています。

[8-1] S.S. Gubser, I.R. Klebanov, A.M. Polyakov ,
``Gauge Theory Correlators from Non-Critical String Theory ,''
Phys.Lett.B428:105-114,1998 , arXiv:hep-th/9802109

[8-2] E. Witten,
``Anti De Sitter Space And Holography ,''
Adv.Theor.Math.Phys.2:253-291,1998 , arXiv:hep-th/9802150

[9]

Holographicな繰り込み(群)や、UV/IR対応に関しては非常に多くの文献が
あります。Lecture Noteとしては

[9-1] K. Skenderis, ``Lecture Notes on Holographic Renormalization,``
arXiv:hep-th/0209067.

また、より「繰り込み群」に主眼を置いた初期の論文として

[9-2] J. de Boer, E. Verlinde, H. Verlinde, ``On the Holographic
Renormalization Group ,'' JHEP 0008 (2000) 003 ,
arXiv:hep-th/9912012

があります。

[10]

Stress tensorの正確な計算については上記[9-1]の他

[10-1] V. Balasubramanian and P. Kraus,
"A Stress Tensor for Anti-de Sitter Gravity,"
Commun.Math.Phys. 208 (1999) 413-428, arXiv:hep-th/9902121

[10-2] S. de Haro, K. Skenderis, S. N. Solodukhin,
"Holographic Reconstruction of Spacetime and Renormalization
in the AdS/CFT Correspondence,"
Commun.Math.Phys. 217 (2001) 595-622, arXiv:hep-th/0002230

[11]

ここで伝えたかったメッセージは次のようなものです。

bulkの場を座標 z で展開していった時の z のべきと、operatorのscaling dimensionの間にはある関係が存在します。重力側の場がゲージ理論のどのoperatorに対応するのか同定する際に、このoperatorのscaling次元と、重力側の場の z 展開のべきの関係から対応を同定しようとする論理がたまに見受けられます。しかし、もともと、scaling dimensionと z のべきの関係は「結論」であって、それが指導原理ではないと私は考えています。

あくまで、重力側の場とゲージ理論側のoperatorの対応関係はD-braneのpictureから「導出される」ものです。

そうしないと、理論を一般化、複雑化したときに重力側とゲージ理論側をどう対応付けて良いのかが全くわからなくなってしまいます。

重力側の計量が複雑になれば、一般に「 z のべき」と「scaling」の関係は変化し得ますし、また仮にゲージ理論のoperatorのscalingが z のべきから同定されたとしても、同じscalingを持つoperatorがいくつもある場合はどれを選んで良いのかがわかりません。

[12]

この問題については

S. Kinoshita, S. Mukohyama, S. Nakamura, and K-y. Oda
``A Holographic Dual of Bjorken Flow,``
Prog.Theor.Phys.121:121-164,2009 , arXiv:0807.3797

および、そこで引用した文献において、深く考察されています。

[13] Wilson loopの計算とあわせ、以下の文献がoriginalな仕事です。

[13-1] J. Maldacena, ``Wilson loops in large N field theories,``
Phys. Rev. Lett. 80 (1998)4859, arXiv:hep-th/9803002

[13-2] S-J. Rey and Jungtae Yee,
``Macroscopic strings as heavy quarks: Large-N gauge theory and
anti-de Sitter supergravity,``
Eur.Phys.J. C22 (2001) 379-394, arXiv:hep-th/9803001

[14] 例えば

[14-1] C. Csaki, H. Ooguri, Y. Oz and J. Terning,
``Glueball Mass Spectrum From Supergravity,`` JHEP 9901 (1999) 017,
arXiv:hep-th/9806021

[14-2] R.de Mello Koch, A. Jevicki, M. Mihailescu and J. P. Nunes,
``Evaluation Of Glueball Masses From Supergravity,``
Phys.Rev.D58:105009,1998 , arXiv:hep-th/9806125.

[14-3] R. C. Brower, S. D. Mathur and C-I. Tan,
``Discrete Spectrum of the Graviton in the AdS⁵ Black Hole Background ,``
Nucl.Phys.B574:219-244,2000, arXiv:hep-th/9908196

[14-4] R. C. Brower, S. D. Mathur and C-I. Tan,
``Glueball spectrum for QCD from AdS supergravity duality,``
Nucl.Phys.B587:249-276,2000, arXiv:hep-th/0003115

など、非常に多くの文献があります。

[15] E. Witten, "Anti-de Sitter Space, Thermal Phase Transition, And Confinement In Gauge Theories," Adv.Theor.Math.Phys.2:505-532,1998 arXiv:hep-th/9803131.

[16] Holographic QCDの代表的なものとして酒井・杉本モデル

[16-1] T. Sakai and S. Sugimoto,
"Low energy hadron physics in holographic QCD,"
Prog.Theor.Phys. 113 (2005) 843-882, arXiv:hep-th/0412141

[16-2] T. Sakai and S. Sugimoto,
"More on a holographic dual of QCD,"
Prog.Theor.Phys.114:1083-1118,2005. arXiv:hep-th/0507073

があります。日本語reviewとしては[0-6]。

[17]

E. Wittenの[15]を参照。なお、[16-1,2]でも[15]の方法に基づき超対称性を破っている。

[18]

ゲージ理論流体の流体力学的物理量の導出等に関するreviewとしては、例えば

[18-1] M. Natsuume, "String theory and quark-gluon plasma,"
arXiv:hep-ph/0701201

[18-2] D. T. Son, A. O. Starinets, "Viscosity, Black Holes, and Quantum Field Theory," Ann.Rev.Nucl.Part.Sci.57:95-118,2007,
arXiv:0704.0240

などがあります。

また、流体力学と重力dualの対応に主眼を置いたreviewとしては

[18-3] M. Rangamani, "Gravity & Hydrodynamics: Lectures on the fluid-gravity correspondence," arXiv:0905.4352

があります。

さらに、「(流体の)時間依存性」に主眼をおいた仕事については[12]およびそこで引用している文献を参照。

[19]

私の認識では、有限バリオン密度を本当に満足いく形で導入するには、いろいろと解決すべき問題が残っていますが、参考になる文献としては例えば、

[19-1] O. Bergman, G. Lifschytz and M. Lippert ,
`Holographic Nuclear Physics,' JHEP0711:056,2007
arXiv:0708.0326

などがあります。(他にも実に多くの文献があります。)

[20]

2+1次元のCFTとの対応を考えることにより、物性系へAdS/CFTを応用する試みが近年なされています。一つのreviewとしては

[20-1] S. A. Hartnoll, C. P. Herzog, G. T. Horowitz
`Holographic Superconductors,'
JHEP0812:015,2008, arXiv:0810.1563

がありますが、ここで網羅されていない仕事も多数あります。

[21]

例えば

C. P. Herzog, A. Karch, P. Kovtun, C. Kozcaz and L. G. Yaffe,
`Energy loss of a heavy quark moving through $N = 4$ supersymmetric Yang-Mills plasma,'
JHEP 0607 (2006) 013 [arXiv:hep-th/0605158];

S. S. Gubser, `Drag force in AdS/CFT,'
Phys. Rev. D 74, 126005 (2006) [arXiv:hep-th/0605182].

[22]

H. Hata, T. Sakai, S. Sugimoto, and S. Yamato,
`Baryons from instantons in holographic QCD,'
Prog.Theor.Phys.117:1157,2007, hep-th/0701280.

K. Nawa, H. Suganuma, and T. Kojo,
`Baryons in holographic QCD,' Phys.Rev.D75:086003,2007, hep-th/0612187.

ここで全く触れることの出来なかった テーマ

- Spin Chain関連の仕事
- Alday-Maldacenaのgluon散乱の仕事

など、多数あります。