

New non-topological solitons: Q-tubes, Q-rings and Q-crusts

坂井伸之（山形大地域教育文化），石原秀樹，中尾憲一（大阪市大理）

概要

グローバル $U(1)$ 対称性を含むスカラー場モデルでは、Q ボールと呼ばれる球状のソリトン解が存在することが知られているが、我々は同じモデルで別の形状の非位相的ソリトン解が存在するかどうかを調べた。その結果、スカラー場の自由度に依存して、チューブ状・リング状・球殻状の新しい平衡解が存在することがわかった。これらのソリトン解は、Q ボールと同様に超対称性理論において自然に現れるので、その観測的痕跡が検出されれば、超対称性理論そのに基づくダークマターに関する新しい情報が得られるだろう。

1 Introduction

1976 年に Friedberg 等は、 $U(1)$ 複素スカラー場と実スカラー場の結合系において、非位相的ソリトン解を最初に発見した [1]。それらは位相的欠陥と異なり、 $U(1)$ 対称性に付随する連続的保存量（チャージ）によって安定化され、ゲージ場がなくてもエネルギー密度が局所化される。1985 年に Coleman は、同様のソリトン解が $U(1)$ と等価な $SO(2)$ スカラー場のみのモデルでも存在することを示し、Q ボールと呼んだ [2]。

Q ボールが注目を集めるようになったのは、超対称性理論において自然に現れることを Kusenko が指摘してからである [3]。具体的には、「インフレーション後に Q ボールが現れ、その一部が崩壊してバリオンとなり、残りがダークマターになる」という Affleck-Dine 機構 [4] によって、バリオン数とダークマターの起源、更にはバリオンとダークマターが同程度存在することが説明される [5, 6]。また、超対称性理論で生成される Q ボールは、バリオンを吸収してバリオン数を減らす性質があるため、例えば中性子星を崩壊・爆発させる可能性がある [7]。このような現象論的な動機から、Q ボールの安定性は精力的に研究されるようになった [8]。

超対称性理論で現れる Q ボールの観測的検証に向けた研究も行われており [9]、これまでの磁気モノポールや宇宙線重粒子探査の実験データから、質量やフラックスに対する制限が得られている [10]。現在、Super-Kamiokande II [11] と SLIM Experiment [12] において、それぞれ中性 Q ボールと荷電 Q ボールの直接探査が進行している。更に、Q ボールの形成過程において放出される重力波の振幅が評価され、次世代の重力波検出器で検出されることが期待されている [13]。

このように、超対称性理論で現れる Q ボールに対する関心はますます高まっている。しかし、位相的欠陥には場の自由度によって様々なタイプが存在することに対し、Q ボール解の発見から 35 年間、非位相的ソリトンにはその他のタイプが見つかっていない。本稿では、「他の形状の非位相的ソリトン解は存在するか？」という基本的問題に取り組む。Q ボールが現れるモデルにおいて新しいソリトン解が存在すれば、その観測的痕跡から超対

称性理論とダークマターの解明に大きく寄与することが期待される。そこで、グローバル U(1) 対称性を含むスカラー場モデルを再解析する。

なお、本稿は最近発表した我々の論文 [14] に基づいている。

2 New nontopological solitons

(0) Q-balls

まず、Q ボール解の概略を説明する。次の作用で記述される SO(2) スカラー場 $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ を考える。

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \cdot \partial_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad \phi \equiv \sqrt{\sum_{a=1}^2 \phi_a \phi_a} \quad (1)$$

このモデルでは、SO(2) 対称性に付随する保存量（ネーターチャージ）が存在する。

$$Q \equiv \int d^3x \left(\phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} - \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right) \quad (2)$$

球対称性と一様な位相回転 $\phi = \phi(r)(\cos \omega t, \sin \omega t)$, を仮定すると、次のスカラー場の方程式が得られる。

$$\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} + \omega^2 \phi = \frac{dV}{d\phi} \quad (3)$$

これは、ポテンシャル $V_\omega = V - \omega^2 \phi^2/2$ を持つ静的な 1 成分スカラー場の方程式と等価である。

条件 $\min(V_\omega) < V_\omega(0)$, $dV_\omega/d\phi(0) > 0$ が満たされる時、境界条件

$$\frac{d\phi}{dr}(r=0) = 0, \quad \phi(r \rightarrow \infty) = 0 \quad (4)$$

を持つ平衡解 $\phi(r)$ が存在し、それが Q ボールである。 $V(0) = 0$ とおくと、その条件は次の形に表される。

$$\min \left(\frac{2V}{\phi^2} \right) < \omega^2 < m^2 \equiv \frac{d^2 V}{d\phi^2}(0) \quad (5)$$

r を「時間」、スカラー場の振幅 $\phi(r)$ を「質点の位置」と見ると、図 1(a) のように Q ボール解をニュートン力学の言葉で理解することができる。式 (3) は、ポテンシャル $-V_\omega(\phi)$ による保存力と「時間」依存する摩擦力 $-(2/r)d\phi/dr$ を受ける質点の 1 次元運動を記述する。「初期位置」 $\phi(0)$ を適切に選ぶと、質点はポテンシャルの坂を下って上り、無限時間かけて原点に近づく解になる。

後で具体的な解を数値的に示す際には、次の単純なモデルを用いる。

$$V = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \mu \phi^3 + \lambda \phi^4, \quad \text{with } m^2, \mu, \lambda > 0 \quad (6)$$

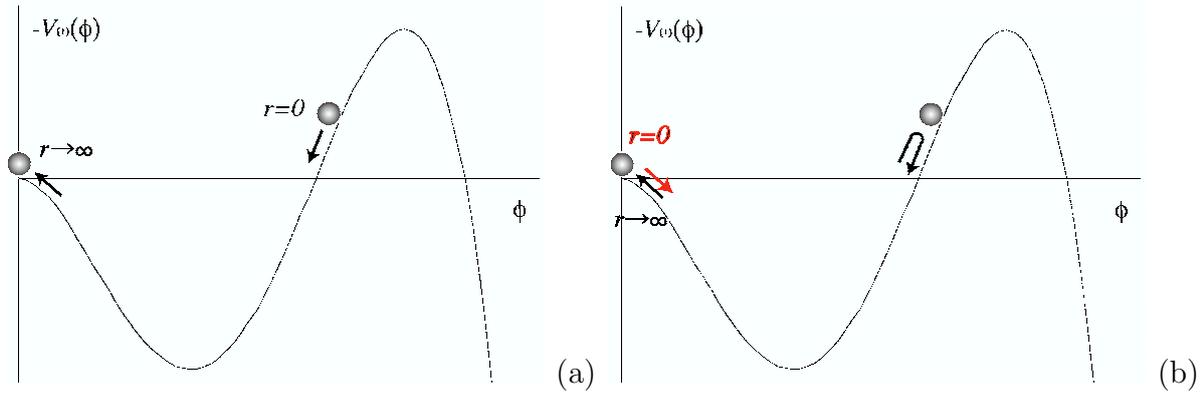


図 1: ニュートン力学における質点の運動との類推によるソリトン解の解釈。(a) は Q ボール解、(b) は新しい解。

変数とパラメーターを、

$$\tilde{r} \equiv \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} r, \quad \tilde{\phi} \equiv \frac{\lambda}{\mu} \phi, \quad \tilde{m} \equiv \frac{\sqrt{\lambda}}{\mu} m, \quad \tilde{\omega} \equiv \frac{\sqrt{\lambda}}{\mu} \omega. \quad (7)$$

と無次元化すると、解の存在条件 (5) は次のようになる。

$$0 < \epsilon^2 < \frac{1}{2}, \quad \epsilon^2 \equiv \tilde{m}^2 - \tilde{\omega}^2. \quad (8)$$

(1) Q-tubes

再び SO(2) スカラー場モデルを再び考える。今度は次のストリング的な配位を仮定する。

$$\phi = \phi(R)(\cos(n\varphi + \omega t), \sin(n\varphi + \omega t)) \quad (9)$$

ここで n は負でない整数、 (R, φ, z) は円柱座標である。このとき、場の方程式は次のようになる。

$$\frac{d^2\phi}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\phi}{dR} - \frac{n^2\phi}{R^2} + \omega^2\phi = \frac{dV}{d\phi}. \quad (10)$$

$n = 0$ のとき、場の方程式は数係数を除いて (3) と一致する。従って、Q ボールと同じような、ただし円柱対称の平衡解 $\phi(R)$ が存在する。一方 $n \geq 1$ のとき、 $\phi(0) \neq 0$ を満たす正則解は存在しない。しかし、異なる境界条件

$$\phi(R=0) = \phi(R \rightarrow \infty) = 0, \quad (11)$$

を採用すると、新しいタイプの正則解が存在する。補助変数 ψ を $\phi(R) = R^n \psi(R)$ で定義すると、式 (10) は

$$\frac{d^2\psi}{dR^2} + \frac{2n+1}{R} \frac{d\psi}{dR} + \omega^2\psi = R^{-n} \frac{dV}{d\phi} \Big|_{\phi=R^n\psi} \quad (12)$$

となる。ここで $\psi(0)$ を適切に選ぶと、正則な解 $\psi(R)$ が存在し、 $R = 0$ の近傍では偶数べきのみを持つマクローリン展開で表される。元の変数 $\phi(R)$ の言葉で言えば、 n 階微分

係数 $\phi^{(n)}(0) = \psi(0)$ がシューティング法で決定される量であり、低次の微分係数は $R = 0$ でゼロになる。数値解の例を図 2(a) に示す。

$n \geq 1$ の新しい解については、図 1(b) のように、ニュートン力学における質点の運動との類推で理解することができる。式 (10) は、ポテンシャル $-V_\omega(\phi)$ による保存力と、摩擦力 $-(1/R)d\phi/dR$ と斥力 $n^2\phi^2/R^2$ という 2 つの非保存力を受ける、質点の 1 次元運動を記述する。 $n = 1$ のとき、「初速度」 $d\phi/dR(0)$ を適切に選ぶと、質点はポテンシャルの坂を下って上り、ある位置 $\phi = \phi_{\max}$ で折り返し、無限時間かけて原点に近づくような解になる。 $n \geq 2$ のときは、「初速度」 $d\phi/dR(0)$ はゼロになるが、その代わりに、 n 階微分係数 $\phi^{(n)}(0)$ が質点を $\phi = 0$ で穏やかに押し出す働きをする。従って、適切に $\phi^{(n)}(0)$ を選ぶことによって、質点は $n = 1$ の場合と同じような経路の運動をする。この議論は、新しいソリトン解の存在条件が、Q ボールの存在条件 (5) または (8) と同一であることを意味する。なお、 $n = 1$ の解と同じ振る舞いのソリトン解は、Q チャージを持たない SO(3) スカラー場において Kim 達が発見している [15]。

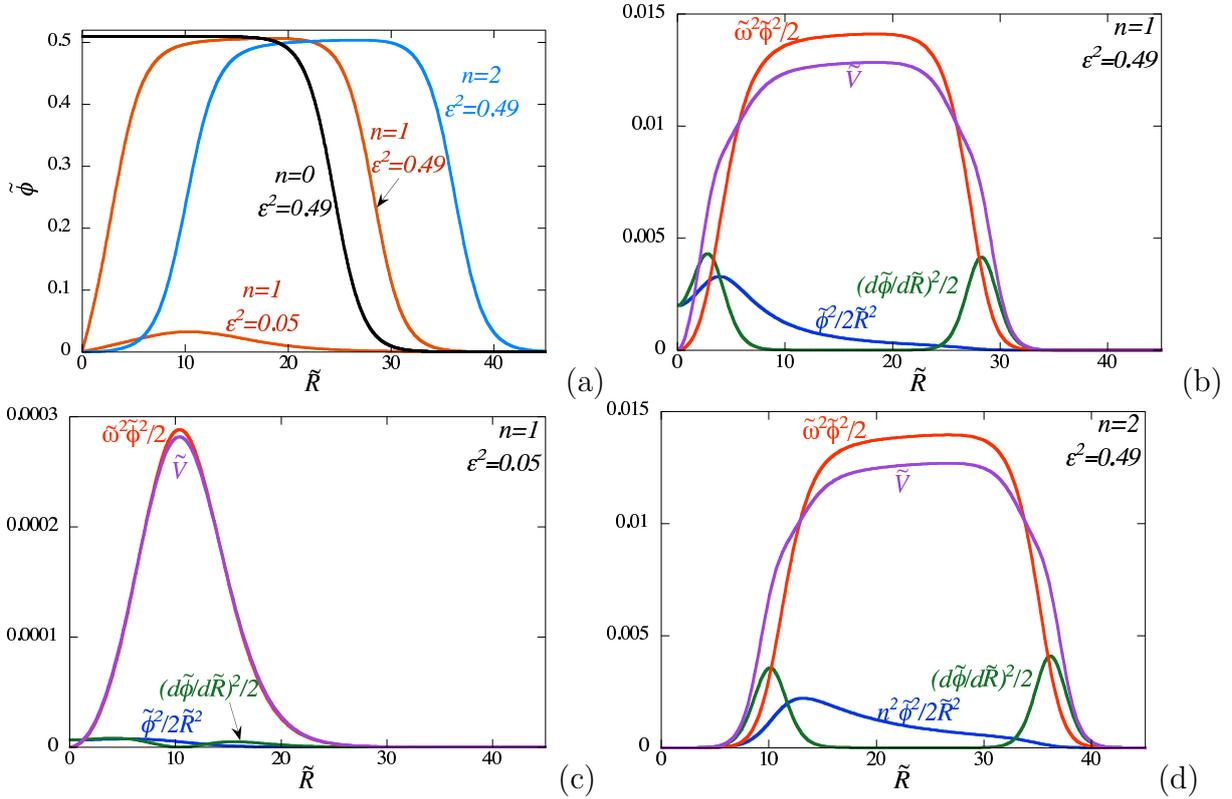


図 2: Q チューブの数値解の例。(a) は $\phi(R)$ の 4 例。(b)-(d) はそのうち 3 つの場合のエネルギー運動量テンソルの各項で、 $\tilde{m}^2 = 0.6$ とおいている。

エネルギー運動量テンソルは次式で与えられる。

$$-T_t^t = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dR} \right)^2 + \frac{n^2\phi^2}{2R^2} + \frac{\omega^2}{2}\phi^2 + V$$

$$\begin{aligned}
T_R^R &= \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dR} \right)^2 - \frac{n^2 \phi^2}{2R^2} + \frac{\omega^2}{2} \phi^2 - V \\
T_\varphi^\varphi &= -\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dR} \right)^2 + \frac{n^2 \phi^2}{2R^2} + \frac{\omega^2}{2} \phi^2 - V \\
T_z^z &= -\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dR} \right)^2 - \frac{n^2 \phi^2}{2R^2} + \frac{\omega^2}{2} \phi^2 - V, \\
-T_t^t + T_i^i &= 2\omega^2 \phi^2 - 2V
\end{aligned} \tag{13}$$

エネルギー運動量テンソルの各項の分布を、図 2(b)(c) に示した。Q チャージを形成する運動項 $\omega^2 \phi^2 / 2$ が優勢で局在していることが特徴である。 $n = 0$ の場合を除き、中心のエネルギー運動量が凹んでいる。従って、我々はこれらの新しい解をまとめて「Q チューブ」と呼ぶ。

$SO(2)$ は $SO(N \geq 3)$ や $SU(N \geq 2)$ の部分群なので、Q ボールと同様に Q チューブはどの $SO(N)$ モデルや $SU(N)$ モデルでも現れる。一方、 $n \geq 1$ の Q チューブは、 $SO(N \geq 3)$ モデルや $SU(N \geq 2)$ モデルでは位相的に不安定なので、 $U(1)$ モデルにおいてのみ現れると考えられる。

(2) Q-rings

次に、 $SO(3)$ スカラー場モデルを考える。今度はモノポールの解の存在が予想されるので、次の場の配位を仮定する。

$$\phi = \phi(r)(\cos(\varphi + \omega t) \sin \theta, \sin(\varphi + \omega t) \sin \theta, \cos \theta), \tag{14}$$

すると、場の方程式は次のようになる。

$$\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} - \frac{2\phi}{r^2} + \omega^2 \phi = \frac{dV}{d\phi}. \tag{15}$$

境界条件として

$$\phi(r=0) = \phi(r \rightarrow \infty) = 0, \tag{16}$$

を採用すると、 $n = 1$ の Q チューブのような正則な解 $\phi(r)$ が存在する。図 3(a) に数値解の例を示した。

エネルギー運動量テンソルは次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
-T_t^t &= \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + \frac{\phi^2}{r^2} + \frac{\omega^2}{2} \phi^2 \sin^2 \theta + V \\
T_r^r &= \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 - \frac{\phi^2}{r^2} + \frac{\omega^2}{2} \phi^2 \sin^2 \theta - V \\
T_\theta^\theta = T_\varphi^\varphi &= -\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + \frac{\omega^2}{2} \phi^2 \sin^2 \theta - V \\
-T_t^t + T_i^i &= 2\omega^2 \phi^2 \sin^2 \theta - 2V
\end{aligned} \tag{17}$$

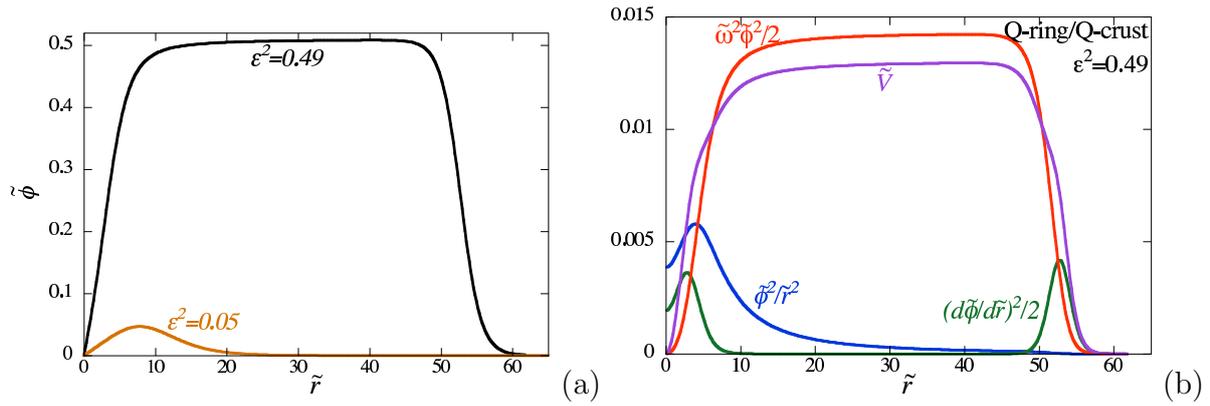


図 3: Q リング・Q クラストの数値解の例。(a) は $\phi(r)$ の 2 例。(b) は $\epsilon^2 = 0.49$ の場合のエネルギー運動量テンソルの各項で、 $\tilde{m}^2 = 0.6$ とおいている。Q リングについては赤道面 ($\theta = \pi/2$) の場合。

赤道面 ($\theta = \pi/2$) における各項の分布を、図 3(b) に示した。Q チャージを形成する運動項 $\omega^2 \phi^2 \sin^2 \theta / 2$ は優勢でリング状に分布するのに対し、他の項は球対称に分布する。我々はこれらの新しい解を「Q リング」と呼ぶ。

(3) Q-crusts

最後に、次の作用で記述される、 $SO(3) \times U(1)$ スカラー場 $\phi = e^{ix}(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ を考える。

$$\mathcal{S} = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \left(\sum_{a=1}^3 \partial_\mu \phi_a \partial_\nu \phi_a + \phi^2 \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi \right) - V(\phi) \right] \quad (18)$$

ここで、 $\phi \equiv \sqrt{\sum_{a=1}^3 \phi_a \phi_a}$ である。場の配位について、

$$\phi = e^{i\omega t} \phi(r) (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta) \quad (19)$$

と仮定すると、(15) と同じ場の方程式が得られる。従って、 $\phi(r)$ については Q リングの場合と同じ解になる。

しかし、エネルギー運動量テンソルは Q リングの場合と異なり、(17) 式において $\sin \theta$ を 1 に置き換えた形になる。従って、全ての項が球対称になり、優勢となる運動項は球殻状に分布する。我々はこれらの解を「Q クラスト」と呼ぶ。図 3 は、Q リングと同時に Q クラストの数値解も表している。

3 Summary and Discussions

グローバル $U(1)$ 対称性を含むスカラー場モデル群を再解析し、新しいタイプの非位相的ソリトン解を 3 種類発見した。それは、 $U(1)$ モデルではチューブ状、 $SO(3)$ モデルではリング状、 $SO(3) \times U(1)$ モデルでは球殻状の解である。そのうち、 $n = 0$ の Q チューブだけは Q ボールと同様に一様な位相であるため、 $U(1)$ 対称性を含むどのモデルでも現れ

る。一方、 $n = 0$ の Q チューブ以外の解には、中心付近で場のエネルギーが凹んでいるという特徴と、位相的欠陥とは対照的にゲージ場なしでもエネルギーが局在するという特徴がある。これら新しい解全ては、存在条件が Q ボールと同じため、超対称性理論において自然に現れると考えられる。更に、新しい解は場の自由度に依存した形状を持つため、その観測的痕跡が検出されれば、超対称性理論やそれに基づくダークマターに関する新しい情報が得られる。

Q リングや Q クラストとは違って、我々が得た Q チューブ解は無限に長く、それ自身は現実的ではない。にも関わらず、Q チューブが最も興味を抱かせる解である。その理由は、最も単純な $U(1)$ モデルで現れること、そして $U(1)$ モデルでは既に幾つかのグループで数値シミュレーションが実行されていることである [16]。それらのシミュレーションでは、Q ボールが形成される直前にフィラメント構造が現れ、ある時間その形が保たれていることが示されている。我々は、このフィラメント構造が Q チューブのネットワークではないかと推測する。更に、最近の Tsumagari による Q ボール同士の衝突のシミュレーションでは、2 つのリングが形成されている [17]。我々は、これがループ状の Q チューブではないかと推測する。今後、Q チューブほか新しい解の性質を詳しく調べることで、より精密な Q ボール形成のシミュレーションを実行することで、上記の仮説が検証されると共に、超対称性理論における Q ボール形成のダイナミクスと観測的帰結が明らかになるだろう。また、物性分野では、非相対論的原子のボーズ=アインシュタイン凝縮現象において、Q ボール的なソリトン解が存在することが議論されているが、そのような系で類似の新しい解を調べることも面白いだろう [18]。

謝辞

平松尚志氏と玉置孝至氏には、有益なコメントを頂いたことに感謝します。本研究は主に、坂井が大阪市立大に滞在している間に行われましたが、その間宇宙物理・重力研究室の皆さんには大変お世話になりました。本研究は、科学研究費 (Nos. 22111502, 19540305, 21540276) の補助を受けて実施されました。

参考文献

- [1] R. Friedberg, T.D. Lee and A. Sirlin, Phys. Rev. D **13**, 2739 (1976).
- [2] S. Coleman, Nucl. Phys. **B262**, 263 (1985).
- [3] A. Kusenko, Phys.Lett. B 405, 108 (1997) 108; Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 62A-C, 248 (1998).
- [4] I. Affleck and M. Dine, Nucle. Phys. B **249** 361 (1985).
- [5] K. Enqvist and J. McDonald, Phys. Lett. B **425**, 309 (1998); Nucl. Phys. B **538**, 321 (1999); S. Kasuya and M. Kawasaki, Phys. Rev. D **62**, 023512 (2000).

- [6] A. Kusenko and M. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **418**, 46 (1998); I. M. Shoemaker and A. Kusenko, Phys. Rev. D **80**, 075021 (2009).
- [7] A. Kusenko *et al.*, Phys. Lett. B **423**, 104 (1998).
- [8] A. Kusenko, Phys. Lett. B **404**, 285 (1997); **406**, 26 (1997); T. Multamaki and I. Vilja, Nucl. Phys. B **574**, 130 (2000); M. Axenides, S. Komineas, L. Perivolaropoulos and M. Floratos, Phys. Rev. D **61**, 085006 (2000); F. Paccetti Correia and M. G. Schmidt, Eur. Phys. J. **C21**, 181 (2001); N. Sakai and M. Sasaki, Prog. of Theor. Phys., **119**, 929 (2008); M. I. Tsumagari, E. J. Copeland, and P. M. Saffin, Phys. Rev. D **78**, 065021 (2008); T. Tamaki and N. Sakai, *ibid.* **81**, 124041 (2010).
- [9] A. Kusenko, V. Kuzmin, M. Shaposhnikov, and P.G. Tinyakov, Phys. Rev. Lett. **80**, 3185 (1998); G. Dvali, A. Kusenko, and M. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **417**, 99 (1998); M. Ouchrif, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **85**, 231 (2000).
- [10] J. Arafune, T. Yoshida, S. Nakamura, and K. Ogure, Phys. Rev. D **62**, 105013 (2000).
- [11] Y. Takeyanagi *et al.* (Super-Kamiokande Collaboration), Phys. Lett. B **647**, 18 (2007).
- [12] S. Cecchini *et al.*, Eur. Phys. J. C **57**, 525 (2008).
- [13] A. Kusenko, and A. Mazumdar, Phys. Rev. Lett. **101**, 211301 (2008); A. Kusenko, A. Mazumdar, and T. Multamaki, Phys. Rev. D **79**, 124034 (2009); T. Chiba, K. Kamada, and M. Yamaguchi, *ibid.* **81**, 083503 (2010).
- [14] N. Sakai, H. Ishihara and K. Nakao, arXiv:1011.4828.
- [15] Y. Kim, K. Maeda, and N. Sakai, Nucl. Phys. **B481** 453, (1996); Y. Kim, S. J. Lee, K. Maeda, and N. Sakai, Phys. Lett. B **452**, 214 (1999).
- [16] K. Enqvist and A. Jokinen, T. Multamaki, and I. Vilja, Phys. Rev. D, **63**, 083501 (2001); E.J. Copeland and M.I. Tsumagari, *ibid.* **80**, 025016 (2009); T. Hiramastu, M. Kawasaki, and F. Takahashi, JCAP **06**, 008 (2010).
- [17] M.I. Tsumagari, <http://www.nottingham.ac.uk/~ppzphy7/webpages/people/Mitsuo/welcome.html>
- [18] K. Enqvist and M. Laine, JCAP **0308**, 003 (2003).