シュレーディンガー場における３体相互作用

山形大学 理工学研究科 塚田晃子

1　はじめに

粒子間に働く力に対して一般的な解説書などでは仮想粒子のキャッチボールを用いた説明がよくある。そこではエネルギーと時間の不確定性関係 $\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar$ を用いた説明 [1] が行われている。これは、時間 Δt の間だけエネルギー保存則をエネルギー ΔE だけ破って粒子交換が起こるというものである。たとえば質量 m の仮想粒子ならば最低でも $\Delta E \sim mc^2$ であり、光速でとんだとしても粒子が到達できる距離は $l \sim c \cdot \Delta t \sim \dfrac{\hbar}{mc}$ でコンプトン波長程度となる。これが力の到達距離である、という説明である。

このような説明では、斥力は直感的に理解できるが引力が生じる説明に関してはわかりにくい。仮想粒子のキャッチボールによる引力の説明に関して様々なものがある [2], [3]。たとえば負質量の仮想粒子の交換によるキャッチボールを用いて引力を説明している人もいる。負質量なら運動量 $\boldsymbol{p}$ と速度 $\boldsymbol{v}$ が逆方向になるので引力が生じるというものである。このような仮想粒子によるキャッチボールの説明は場の量子論にもとづいて正当化できるのであろうか。

そこで、本研究では正質量しか現れない非相対論的な場の量子論に基づいて粒子間に働く力を調べ直してみた。相互作用としては湯川型の３体相互作用を考え、核子に相当する粒子と中間子に相当する粒子を、すべてシュレーディンガー方程式に従う場として調べてみた。

2　湯川型３体相互作用

次のラグランジアンで記述される系を考える：

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{2} \psi_i^\dagger \left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2M_i}\nabla^2 \right) \psi_i + \phi^\dagger \left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m}\nabla^2 \right) \phi + \sum_{i=1}^{2} \psi_i^\dagger \psi_i \left(g_i^* \phi + g_i \phi^\dagger \right).$$

ここで、ψ_i は質量 M_i の “核子”、ϕ は質量 m の “中間子”、g_i は結合定数である $(i = 1, 2)$。中間子 ϕ に対するプロパゲーターは

$$\langle 0|\mathrm{T}\phi(\boldsymbol{x}, t)\phi^\dagger(\boldsymbol{0}, 0)|0\rangle = i\int \frac{dE}{2\pi}\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-iEt}}{E - \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + i\epsilon} \qquad (= 0 \quad \text{if} \quad t < 0)$$

となる。これは時間順行を保証する。自由場に対しては、ψ_i の平面波展開は

$$\psi_i(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\boldsymbol{p}} b_i(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-iEt} \quad (i = 1, 2)$$

と表され、消滅演算子だけとなる (V は全空間の体積)。逆に $\psi_i^\dagger$ は生成演算子のみで表される。ϕ, $\phi^\dagger$ についても同様である。

2.1 時間を含まない摂動論

この系に対して時間を含まない摂動論でポテンシャルを求めてみよう。相互作用によるエネルギー変化 ΔE をポテンシャルと考える。$M_1,\ M_2 \gg m$ とし、ψ_1, ψ_2 は空間内の点 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ に静止しているとする。したがって核子密度は、$\psi_i^\dagger(\boldsymbol{x},t)\psi_i(\boldsymbol{x},t) = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i)$ と表される [4]。これより相互作用ハミルトニアンは

$$H_I = -g_1\phi^\dagger(\boldsymbol{x}_1,t) - g_1^*\phi(\boldsymbol{x}_1,t) - g_2\phi^\dagger(\boldsymbol{x}_2,t) - g_2^*\phi(\boldsymbol{x}_2,t)$$

となる。この相互作用による核子間のエネルギー変化 ΔE は摂動の 2 次から現れ、

$$\Delta E = \sum_{\boldsymbol{p}} \frac{\langle 0|H_I|\boldsymbol{p}\rangle\langle \boldsymbol{p}|H_I|0\rangle}{0-E_{\boldsymbol{p}}}.$$

ここで、$|0\rangle$ は ϕ の真空、$|\boldsymbol{p}\rangle$ は ϕ が 1 粒子の中間状態である。また $E_{\boldsymbol{p}} = \dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2m}$ である。上の H_I を使うと、

$$\begin{aligned}\Delta E &= \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} \frac{g_1g_2^* + g_1^*g_2}{-\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}} \\ &= -\frac{2m(g_1g_2^* + g_1^*g_2)}{4\pi r}\end{aligned}$$

と求まる。（ただし、self energy の項は排除した。）こうしてクーロン型のポテンシャルが得られた。特に、$g_1 = g_2$ であれば引力が、$g_1 = -g_2$ であれば斥力が生じる。

2.2 時間を含む摂動論

粒子交換のイメージを明確にするため、時間を含む摂動論でポテンシャルを求めてみよう。始状態 $|i\rangle = b_1^\dagger(\boldsymbol{p}_1)b_2^\dagger(\boldsymbol{p}_2)|0\rangle$、終状態 $|f\rangle = b_1^\dagger(\boldsymbol{p}_1')b_2^\dagger(\boldsymbol{p}_2')|0\rangle$ の散乱を考える。散乱振幅 (Fig 1) は

$$\mathcal{T}_{f\leftarrow i} = -i\frac{(2\pi)^4}{V^2}\delta^3(\boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i)\delta(E_f - E_i)\mathcal{M}.$$

ただし

$$\mathcal{M} = \frac{g_1g_2^*}{(E_1 - E_1') - \frac{\boldsymbol{q}^2}{2m}} + \frac{g_1^*g_2}{(E_1' - E_1) - \frac{\boldsymbol{q}^2}{2m}} \quad (\boldsymbol{q} \equiv \boldsymbol{p}_1' - \boldsymbol{p}_1)$$

で与えられる。ここで $\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_f$ はそれぞれ始状態、終状態の全運動量であり、E_i, E_f は始状態、終状態の全エネルギーである。

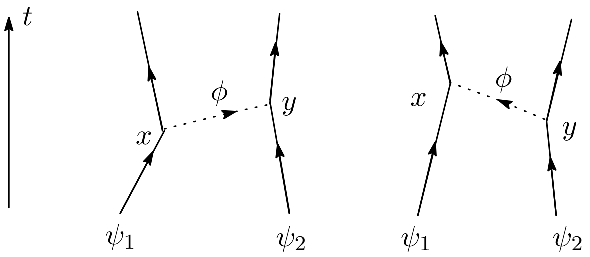

Fig 1: 散乱振幅のダイアグラム

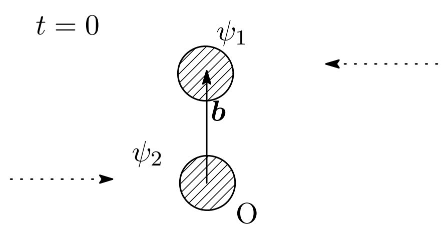

Fig 2: 時刻 $t=0$ の入射波束

量子力学におけるボルン近似では、散乱振幅と運動量表示のポテンシャル $\tilde{V}(\boldsymbol{q})$ の関係式が与えられる [5]。これを用いることで重心系の散乱振幅 $\mathcal{M}_{\rm CM}$ が $\tilde{V}(\boldsymbol{q})$ に相当すると考えられる。重心系では $E_1 = E_1'$ であるので、

$$\mathcal{M}_{\rm CM} = \frac{g_1 g_2^* + g_1^* g_2}{-\frac{\boldsymbol{q}^2}{2m}} \cong \tilde{V}(\boldsymbol{q})$$

となる。これより

$$\begin{aligned} V(r) &= \int \frac{d^3\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3} e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} \tilde{V}(\boldsymbol{q}) \\ &= -\frac{2m(g_1 g_2^* + g_1^* g_2)}{4\pi r} \end{aligned}$$

と求まり、時間を含まない摂動論の結果と一致する。

3 コメント

質量を持つ仮想粒子に関わらずクーロン型ポテンシャルが出た。静止エネルギーを入れて $E_{\boldsymbol{p}} = \dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + mc^2$ とすれば、

$$V(r) = -2m(g_1 g_2^* + g_1^* g_2) \frac{e^{-\sqrt{2}mcr}}{4\pi r}$$

となり、湯川ポテンシャルを出すこともできる。（ただしこの理論では質量項に対する loop 補正が無いことがわかるので、この質量は質量補正から出てきたわけではない。）

正質量のみの非相対論的場の量子論でも引力が現れた。（摂動の 2 次から出たので当然ともいえる。）しかしここまでの議論では仮想粒子のキャッチボールの描像に関しては何も言えていない。この描像がどこまでもっともらしいかを見るため、波束で考える必要があるだろう。そこで現在は、衝突パラメーター $\boldsymbol{b}$ を持つ入射波束で議論を進めている (Fig 2)。

参考文献

[1] R. C. Harney, Am. J. Phys., **41**, (1973), 67.

[2] G. T. Jones, Phys. Educ., **37**, (2002), 223.

[3] J. Allday, Phys. Educ., **32**, (1997), 327.

[4] G. Wentzel, *Quantum Theory of Fields*, Interscience, New York, (1949).

[5] F. Gross, *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*, Wiley, New York, (1993).