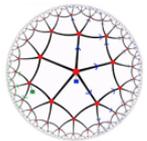


第33回南部コロキウム 2022年5月12日@大阪大学

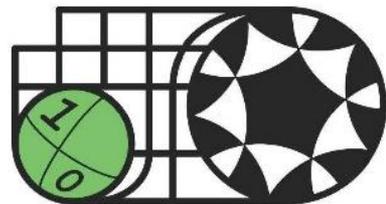
量子情報から創発する理論物理学

高柳 匡

京都大学基礎物理学研究所



It from Qubit
Simons Collaboration



Grant-in-Aid for Transformative Research Areas A
Extreme Universe



Center for Gravitational Physics and
Quantum Information
Yukawa Institute for Theoretical Physics, Kyoto University



YITP
YUKAWA INSTITUTE FOR
THEORETICAL PHYSICS

① はじめに

「ホログラフィー原理」は理論物理学の顕微鏡？

顕微鏡は自然科学の研究で非常に基礎的で重要な実験装置

物性物理
生物・化学



光学顕微鏡
電子顕微鏡
など



電子・スピン・
結晶構造・細胞

高エネルギー物理



加速器



素粒子・原子核

量子重力理論
(超弦理論)



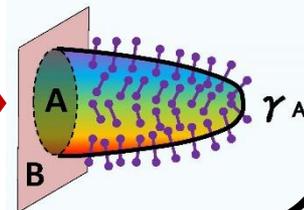
ホログラフィー原理
(ゲージ重力対応)



量子ビット
量子エンタングルメント
～時空のミクロな幾何構造

思考実験

ホログラフィー原理は
ブラックホールのような
重力理論の時空を拡大する。



関連する物理学の発展

力学 18世紀

電磁気学 19世紀

一般相対論 1915年

量子力学 1925年

情報科学

場の量子論

量子統計力学

ゲージ重力対応
1997年

ホログラフィック・
エンタングルメント
2006年

テンソルネット
ワーク
2005年

量子情報

エンタングルメント

量子計算機
Google
2019年

量子重力理論
重力のミクロな理論

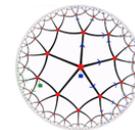
量子物質
のダイナミクス

John A. Wheeler, 1990 (ブラックホールの命名者)

“**It from bit** symbolizes the idea that every item of the physical world has at bottom ? a very deep bottom, in most instances ? an immaterial source and explanation; that which we call reality arises in the last analysis from the posing of yes-or-no questions and the registering of equipment-evoked responses; in short, that **all things physical are information-theoretic in origin and that this is a participatory universe.**”

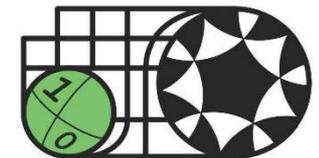


サイモンズ共同研究「**It from Qubit**: Simons Collaboration on Quantum Fields, Gravity and Information」
(Stanford Univ., …Kyoto U., 2015年-2022年)



It from Qubit
Simons Collaboration

“日本版”：2021年9月発足(2021-2025年度)
科研費 学術変革領域研究A「極限宇宙」



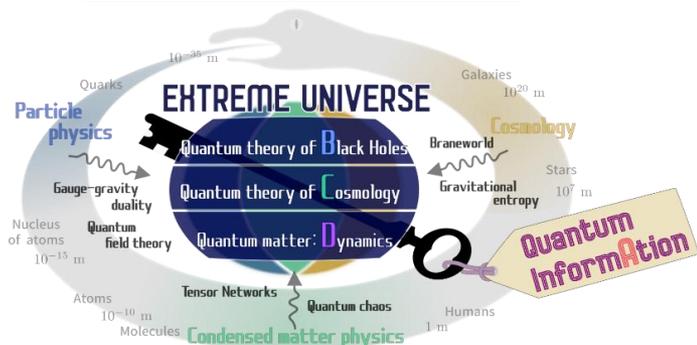
Grant-in-Aid for Transformative Research Areas A
Extreme Universe

学術変革領域研究A「極限宇宙(Extreme Universe)」の紹介



<https://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~extremeuniverse/>

当領域のコンセプト



対象のスケールは大きく異なるが、量子情報の視点に立つと全て量子ビットの集合体として物理法則が統一的理解できる！



第一回領域会議 2022年3月



第一回領域スクール 2022年3月

月例領域コロキウム(第6回5月23日)

Extreme Universe
The 6th COLLOQUIUM
May 23rd (Mon.) ONLINE
TALK 16:00 - 17:00 (JST)
May 23rd (Mon.) 17:30 am - 18:30 am (JST)
May 23rd (Mon.) 20:30 am - 22:00 am (JST)
ONLINE COFFEE TIME
17:00 - 18:00 (JST)
Registration required (click HERE)
Speaker
Prof. Keiji Saito
Keio University
Title
Information dynamics in the long-range interacting systems
Abstract
"Long-range interacting systems" are ubiquitous in nature. The examples include gravitational potential, Lennard-Jones potential, and magnetic dipole potential, to name only a few. Recent experiments even can tune the potential form in an artificial setup with trapped ions, Rydberg atoms, and trapped ion systems. In this talk, we intend to observe quantum dynamics of the long-range interacting systems and even has the potential to study the fundamentals of the black hole. Of interest is the information propagation, which may occur via scrambling. Motivated by the background, we develop several dynamical aspects of information dynamics. After talking about our findings on several generic aspects of information propagation (i.e., the criterion on the Lieb-Robinson velocity), I focus on a recent study on measurement-induced chaos transition in long-range interacting systems.
① Hosted by the Laboratory for Innovative Research Areas A
② Research Areas A
③ Research Areas A
④ Research Areas A
⑤ Research Areas A
⑥ Research Areas A
⑦ Research Areas A
⑧ Research Areas A
⑨ Research Areas A
⑩ Research Areas A
⑪ Research Areas A
⑫ Research Areas A
⑬ Research Areas A
⑭ Research Areas A
⑮ Research Areas A
⑯ Research Areas A
⑰ Research Areas A
⑱ Research Areas A
⑲ Research Areas A
⑳ Research Areas A
㉑ Research Areas A
㉒ Research Areas A
㉓ Research Areas A
㉔ Research Areas A
㉕ Research Areas A
㉖ Research Areas A
㉗ Research Areas A
㉘ Research Areas A
㉙ Research Areas A
㉚ Research Areas A
㉛ Research Areas A
㉜ Research Areas A
㉝ Research Areas A
㉞ Research Areas A
㉟ Research Areas A
㊱ Research Areas A
㊲ Research Areas A
㊳ Research Areas A
㊴ Research Areas A
㊵ Research Areas A
㊶ Research Areas A
㊷ Research Areas A
㊸ Research Areas A
㊹ Research Areas A
㊺ Research Areas A
㊻ Research Areas A
㊼ Research Areas A
㊽ Research Areas A
㊾ Research Areas A
㊿ Research Areas A
MEIX-Grant-in-Aid for Transformative Research Areas A
The National Science Foundation Grant-in-Aid for Scientific Research on Quantum Information

Date:
May 23th, 16:00-17:00

Speaker:
Prof. Keiji Saito(Keio U.)

Title:
Information dynamics in the long-range interacting systems

当領域の公開イベントにご興味がある方は、以下のサイトでExU Online Event MLに登録ください:

https://docs.google.com/forms/d/1gApd5ioPZlklqygK1et77dyqm5hWytzJsSyBHnDCWA/viewform?ts=614330ea&edit_requested=true#responses

「極限宇宙」の研究の広がり

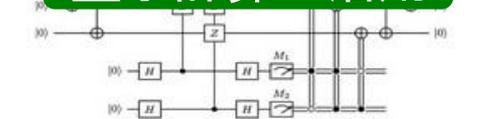
どちらも量子スピ系

量子情報

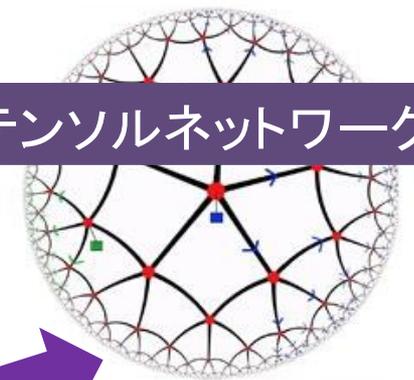
物性物理

超弦理論・場の量子論

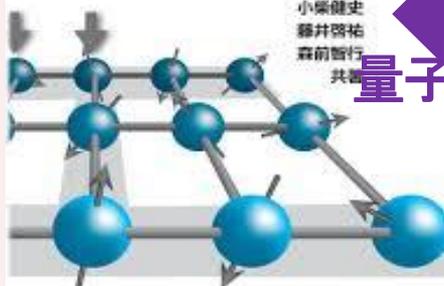
量子計算の活用



テンソルネットワーク



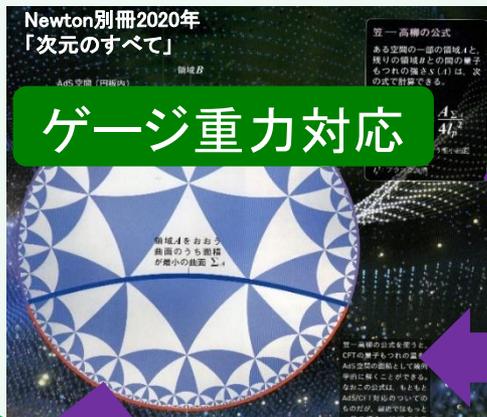
量子エンタングルメント



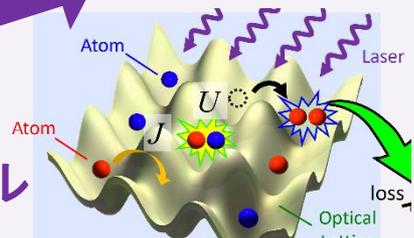
量子計算

時空創発

ゲージ重力対応



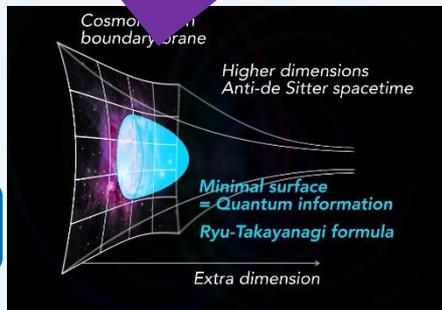
物性モデル



冷却原子実験

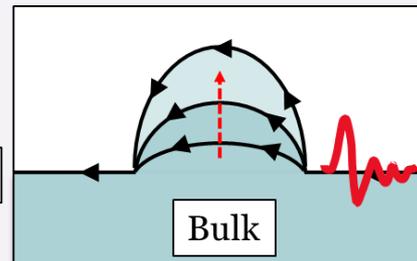
同じ理論体系

宇宙論・相対論



物性モデル

Edge



量子ホール実験

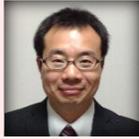
ブレインワールド宇宙論

ブラックホール
エネルギー条件

大阪大のメンバー

[理学部物理素粒子論]

飯塚則裕さん



ブラックホール量子論

西岡辰磨さん



場の量子論と量子情報

[量子情報・量子生命
研究センター(QIQB)]

上田宏さん



テンソルネットワーク
と量子計算

学術変革領域A「極限宇宙」
領域メンバー配置図
(●は研究代表者)

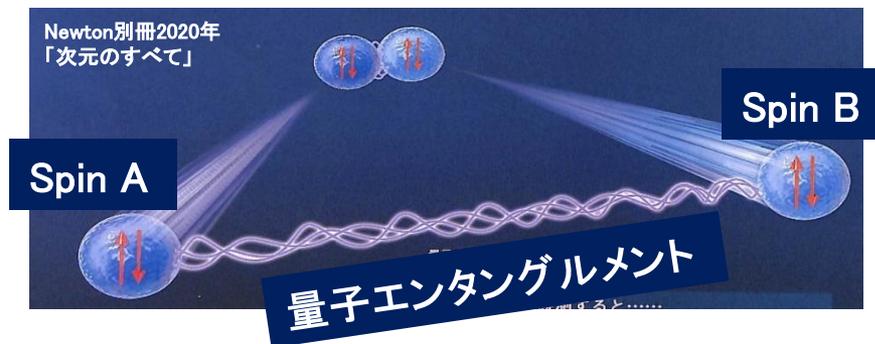


Contents

- ① はじめに
- ② 量子エンタングルメント
- ③ ブラックホールとエントロピー
- ④ ホログラフィー原理とゲージ重力対応
- ⑤ ホログラフィック・エンタングルメント・エントロピー
- ⑥ ブラックホールの情報問題への応用
- ⑦ 量子情報から創発する宇宙
- ⑧ おわりに

② 量子エンタングルメント

量子エンタングルメント→二体間の量子相関



純粋状態 $|\Psi\rangle$ がエンタングルしている $\Leftrightarrow |\Psi\rangle_{AB} \neq |\Psi_1\rangle_A \otimes |\Psi_2\rangle_B$

直積に書けない

エンタングルメント
の最小単位



ベル状態 $|\Psi_{Bell}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B \right]$

系全体は明確に決まった状態だが、
部分に限定すると状態は曖昧！

エンタングルメント・エントロピー (EE)

エンタングルメントの度合 = ベル対の数 $\doteq EE$

まず量子系を部分系 A と B に分割する: $H_{tot} = H_A \otimes H_B$.

簡単な例: スピン鎖



A の縮約密度行列 ρ_A (B にアクセスできない観測者)

を $\rho_A = \text{Tr}_B [|\Psi_{tot}\rangle \langle \Psi_{tot}|]$ と導入することで、

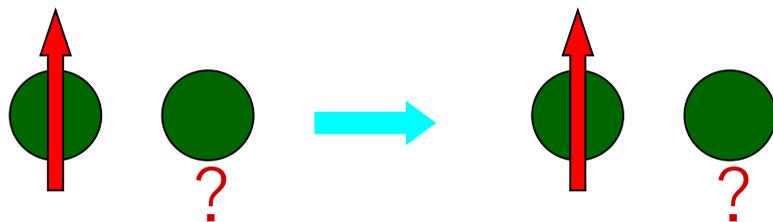
エンタングルメント・エントロピー $S(\rho_A)$ が定義される:

$$S(\rho_A) = -\text{Tr}[\rho_A \log \rho_A] \approx \text{A B 間のベル対の数}$$

簡単な例：2量子ビット(=2つスピンがある系)

$$(i) |\Psi\rangle = \frac{1}{2} \left[|\uparrow\rangle_A + |\downarrow\rangle_A \right] \otimes \left[|\uparrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_B \right]$$

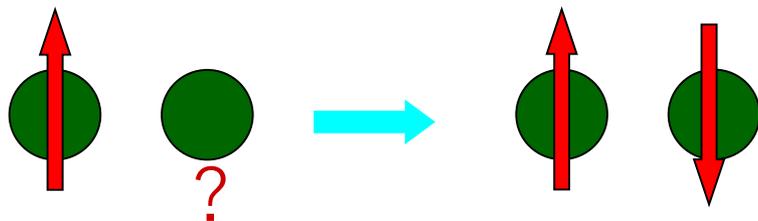
$$\Rightarrow \rho_A = \text{Tr}_B [|\Psi\rangle\langle\Psi|] = \frac{1}{2} \left[|\uparrow\rangle_A + |\downarrow\rangle_A \right] \cdot \left[\langle\uparrow|_A + \langle\downarrow|_A \right] \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$S_A = 0$
エンタングルメント無し

$$(ii) |\Psi\rangle = \left[|\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B \right] / \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \rho_A = \text{Tr}_B [|\Psi\rangle\langle\Psi|] = \frac{1}{2} \left[|\uparrow\rangle_A \langle\uparrow|_A + |\downarrow\rangle_A \langle\downarrow|_A \right] \approx \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$



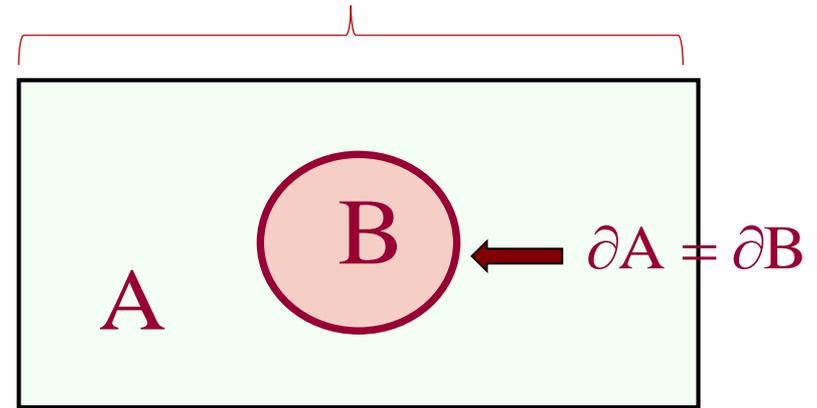
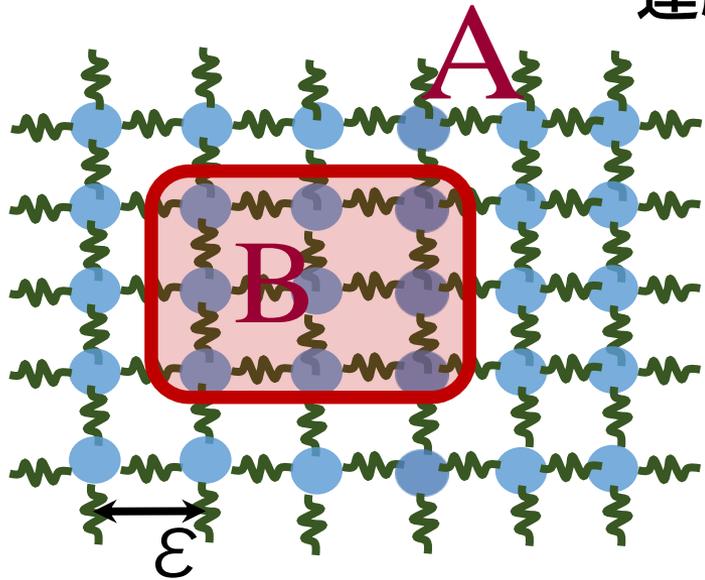
$S_A = \log 2$
最大エンタングル状態

量子多体系(場の量子論)のエンタングルメント・エントロピー

EEは、以下のように幾何学的に定義される。

連続極限 $\varepsilon \rightarrow 0$

N : time slice



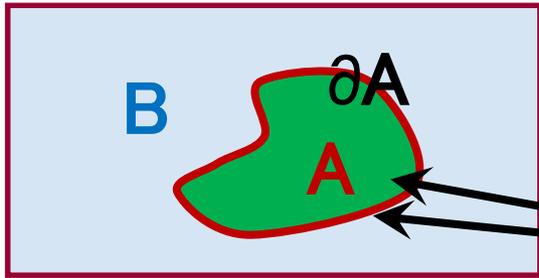
$$H_{tot} = H_A \otimes H_B .$$

量子多体系

場の量子論 (QFT)

エンタングルメント・エントロピーの面積則

時刻一定面



量子系全体のヒルベルト空間が

$$H_{tot} = H_A \otimes H_B \text{ と分割される。}$$

強くエンタングルしている

面積則

[Bombelli-Koul-Lee-Sorkin 1986, Srednicki 1993]

(d+1)次元の場の量子論の基底状態におけるエンタングルメント・エントロピーは領域Aの境界 ∂A の面積に比例して発散する:

$$S(\rho_A) \sim \frac{\text{Area}(\partial A)}{\varepsilon^{d-1}} + (\text{より低次の発散項}).$$

ここで ε は離散化した際の格子間隔(紫外カットオフ)。

エンタングルメント・エントロピーは物理の多方面で活躍！

[1] 物性物理・統計物理

エンタングルメント・エントロピー (EE)

エンタングルメント・スペクトラム (ES)

→ 量子的秩序変数

(与えられた量子状態を数値計算で求めるコスト)

→ 非平衡過程のダイナミクスを捉えるエントロピー

(通常の熱化過程: EEが時間発展で線形に増加)

→ 数値実験の「観測量」の役割

(central chargeやトポロジカル相の決定など)

→ 量子多体系の効率的な解析法

(Tensor Networkによる変分法など)

物性実験によるEEの測定

Example 1: Ultracold bosonic atoms in optical lattices

Published: 02 December 2015

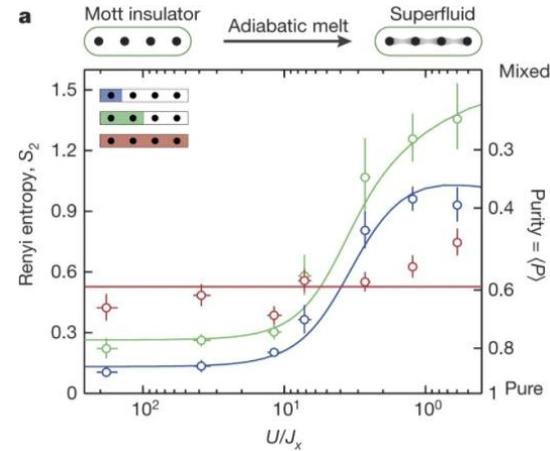
Measuring entanglement entropy in a quantum many-body system

Rajibul Islam, Ruichao Ma, Philipp M. Preiss, M. Eric Tai, Alexander Lukin, Matthew Rispoli & Markus Greiner

Greiner

Nature 528, 77–83 (2015) | Cite this article

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} a_i^\dagger a_j + \frac{U}{2} \sum_i n_i (n_i - 1) \quad (4)$$



Example 2: Trapped-ion quantum simulator

Science

Current Issue First release papers Archive About

REPORT

f t in

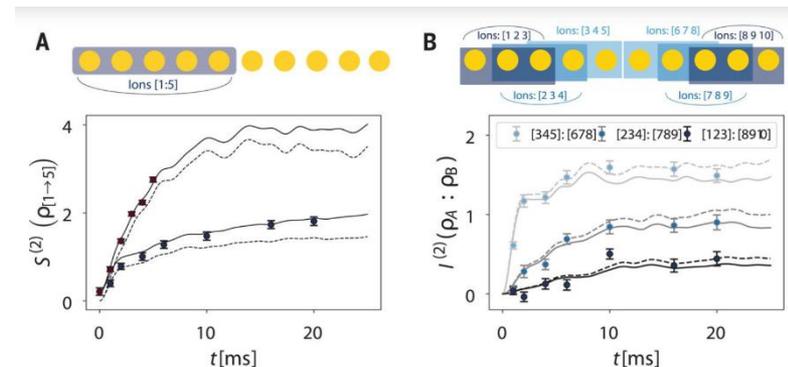
Probing Rényi entanglement entropy via randomized measurements

TIFF BRYDGES, ANDREAS ELBEN, PETAR JURCEVIC, BENOÎT VERMERSCH, CHRISTINE MAIER, BEN P. LANYON, PETER ZOLLER, RAINER BLATT

AND CHRISTIAN F. ROOS | Authors Info & Affiliations

SCIENCE • 19 Apr 2019 • Vol 364, Issue 6437 • pp. 260-263 • DOI: 10.1126/science.aau4963

$$H_{XY} = \hbar \sum_{i < j} J_{ij} (\sigma_i^+ \sigma_j^- + \sigma_i^- \sigma_j^+) + \hbar B \sum_j \sigma_j^z$$



[2] 場の量子論 (QFTs)

エンタングルメント・エントロピー (EE)

→ 場の量子論の普遍的な自由度

例1: 強劣加法性 (SSA) からの C 定理や F 定理の証明。

例2: 「局所的場の量子論 ≈ 面積則」 → 幾何学的視点

[3] 超弦理論 (String Theory) ・ 量子重力 (Quantum Gravity)

◦ 重力理論の特徴: ブラックホールの存在 → BH エントロピー

◦ ホログラフィー原理 (AdS/CFT 対応 ・ ゲージ重力対応)

→ ホログラフィック・エンタングルメント・エントロピー

「場の量子論のエンタングルメント = 重力理論時空の幾何」

◦ ブラックホールの情報問題 → アイランド公式

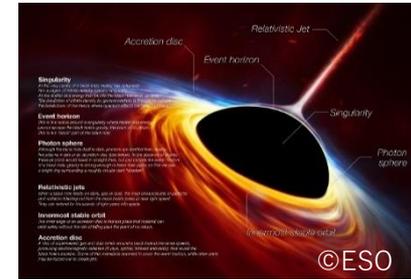
一般化

一般化

③ ブラックホールとエントロピー

ブラックホール時空

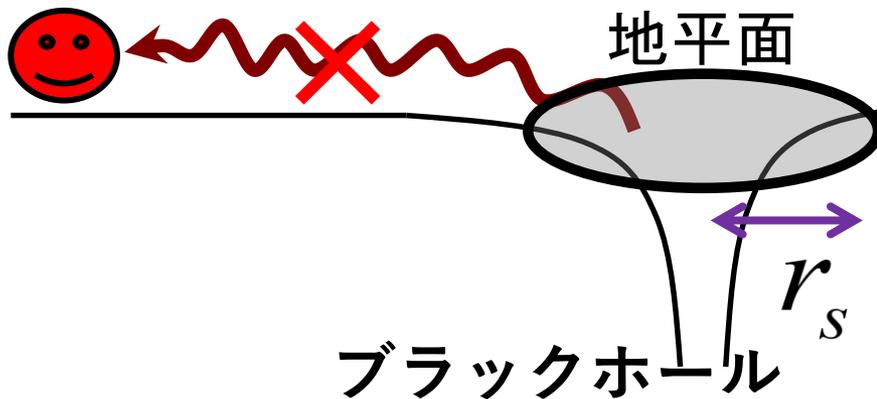
半径が小さく、非常に重い天体。強い重力で引き付けるため、光ですら内部から出てくることができない。⇒ブラックな天体



➡ 一般相対論に特有の現象！

アインシュタイン方程式

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi G_N T_{ab}$$



一般相対論に従い
時空が曲がる！

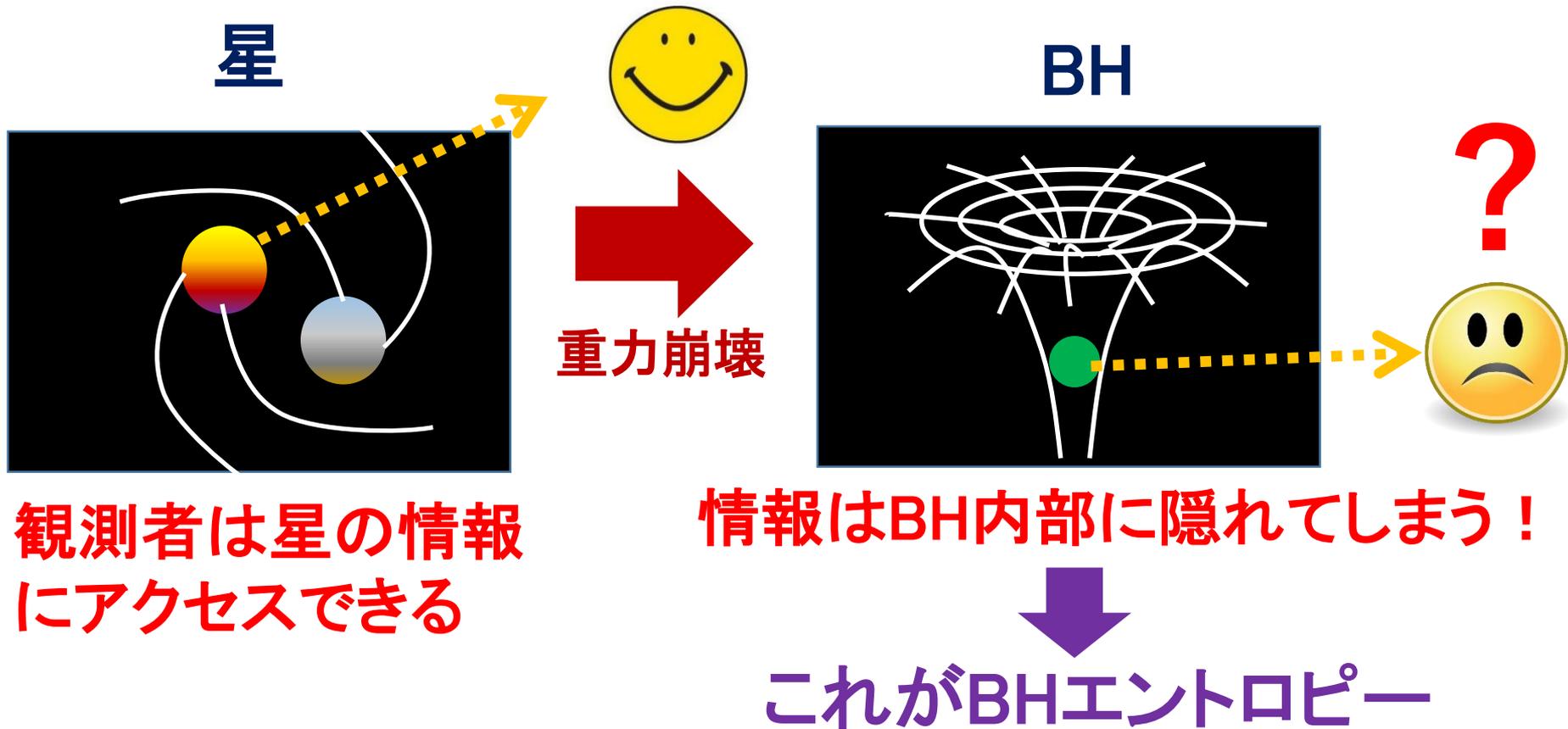
$$r_s = 2G_N M$$

G_N : 重力定数 (ニュートン定数)

M : ブラックホールの質量

ブラックホールはエントロピーを持つ

ブラックホールが星などの重力崩壊で形成されると、外部の観測者は、ブラックホール内部の情報にアクセスできなくなる。



ブラックホール・エントロピー公式 [Bekenstein-Hawking]

[1972-1976]

$$S_{BH} = \frac{k_B \cdot c^3}{4G_N \cdot \hbar} \cdot A_{BH}$$

⇒ ブラックホールの熱力学
(温度も持つ)

A_{BH} =ブラックホールの面積 ⇒ 幾何学

G_N =重力定数 ⇒ 重力

\hbar =プランク定数 ⇒ 量子力学

k_B =ボルツマン定数 ⇒ 統計物理・量子情報

理解するには
量子重力理論
が必要！

ブラックホールのエントロピー公式の驚き

(1) エントロピーが体積ではなく、面積に比例！

⇒重力理論の自由度は面積に比例する！

⇒ホログラフィー原理の動機(後述)

(2) 古典重力理論 (一般相対性理論)

なのに、エントロピーを持っている！

スカラー場やフェルミオン場の古典論を考えても
エントロピーはゼロ。

統計物理ではエントロピーは量子化して初めて現れる！

⇒ 重力理論(Einstein-Hilbert 作用)のトポロジカルな寄与

“エッジモード”

cf. 量子ホール効果

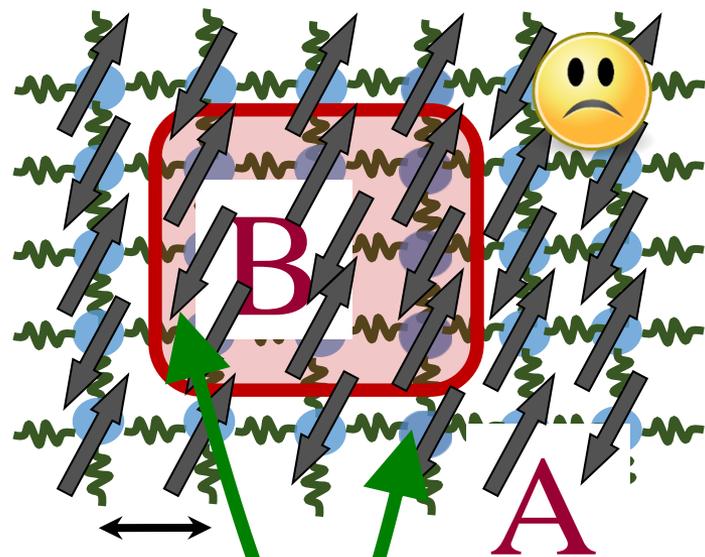
量子多体系エンタングルメントとブラックホールの類似性

ブラックホール時空



エンタングルしている!

量子スピンス系



エンタングルしている!

BHエントロピー SBH

時空

面積則

エンタングルメント・エントロピー SA

物質

面積則

④ ホログラフィー原理とゲージ重力対応

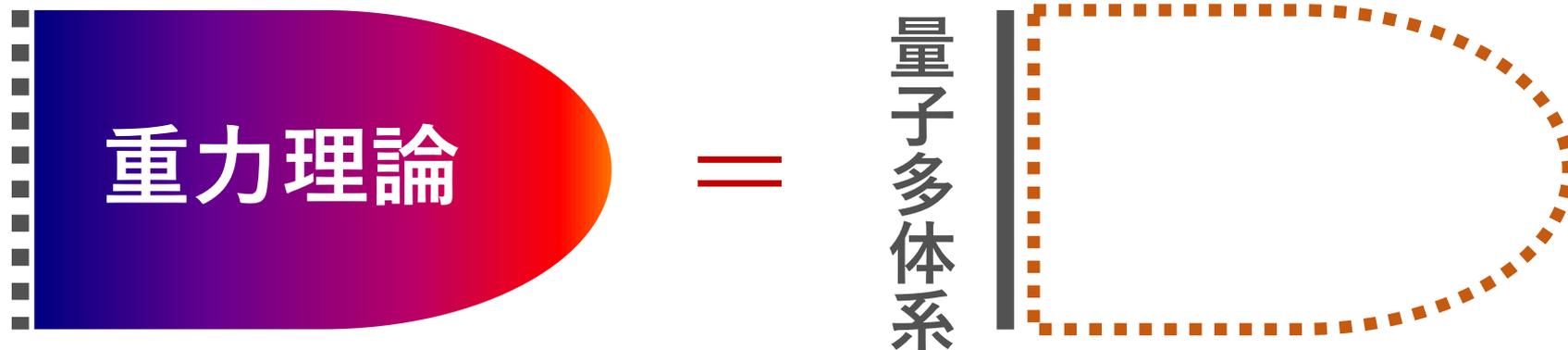
(4-1) ブラックホールからホログラフィー原理へ

ブラックホールのエントロピーは体積ではなく、面積に比例している!

このように重力理論を通常の物質に例えると自由度が1次元低く見える。これを**ホログラフィー原理**と呼ぶ。

ホログラフィー原理 ['t Hooft 93, Susskind 95]

重力理論 = 境界上の量子多体系



本当であれば、難しい量子重力の問題を、量子多体系の問題に帰着できる!

(4-2) ゲージ重力対応(AdS/CFT対応)

ホログラフィー原理で最もよく知られた例：

ゲージ重力対応 (AdS/CFT対応)

[Maldacena 1997]

AdS/CFT

D+1次元反ドジッター時空
(AdS空間)における
重力理論 (超弦理論)

一般相対論
(古典重力)の極限

負の宇宙項を持つ
一般相対論

=

D次元空間における
ゲージ理論 (CFT)

CFT=共形場理論
(量子臨界点の理論)

強結合極限

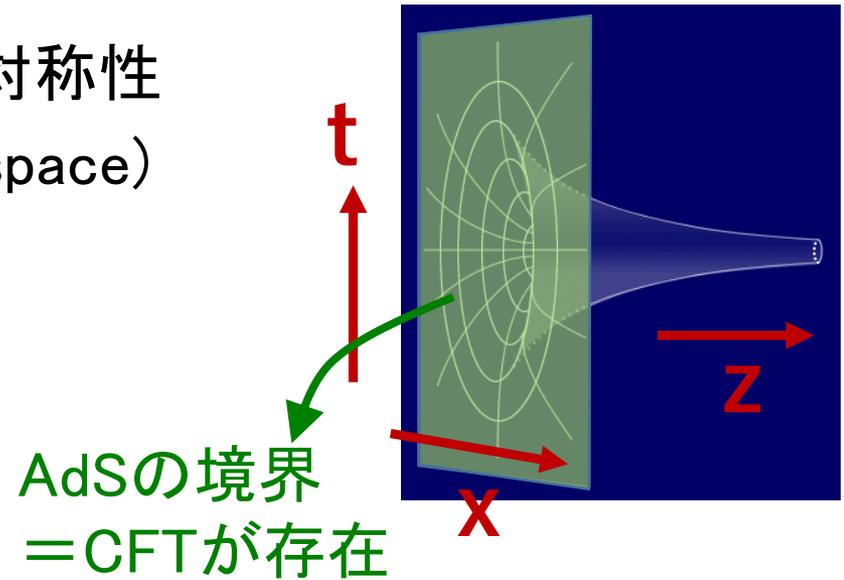
=

強結合多自由度 (ラーゼンN)
のゲージ理論

AdS空間 (反ドジッター空間、Anti de Sitter Space)

負の宇宙定数(曲率)を持ち最大対称性を持つ空間=双曲面(Hyperbolic space)

$$ds^2 = R^2 \left(\frac{dz^2 - dt^2 + d\vec{x}^2}{z^2} \right)$$



CFT(共形場理論)

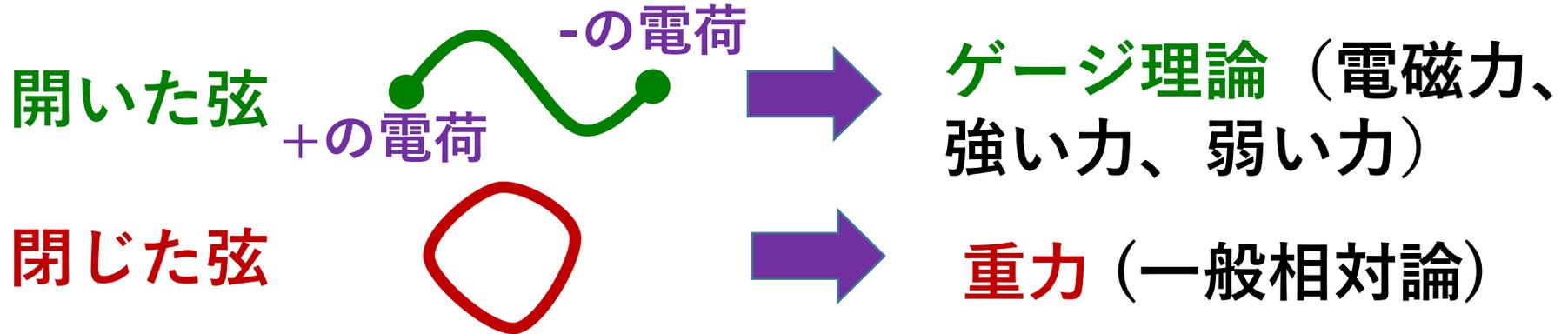
長さのスケールに依存しない理論。質量がゼロの粒子の量子論。簡単な例を挙げると、4次元の電磁気場(マックスウェル理論)。より一般に、量子色力学(QCD)のようなゲージ理論となる。

AdS/CFTの基本的関係式:
分配関数の一致

$$Z_{AdS \text{ 重力}} = Z_{CFT}$$

超弦理論の視点 物質の最小構成要素は弦である

[南部 後藤 1970, ... 米谷 Scherk-Schwarz 1974, ...]

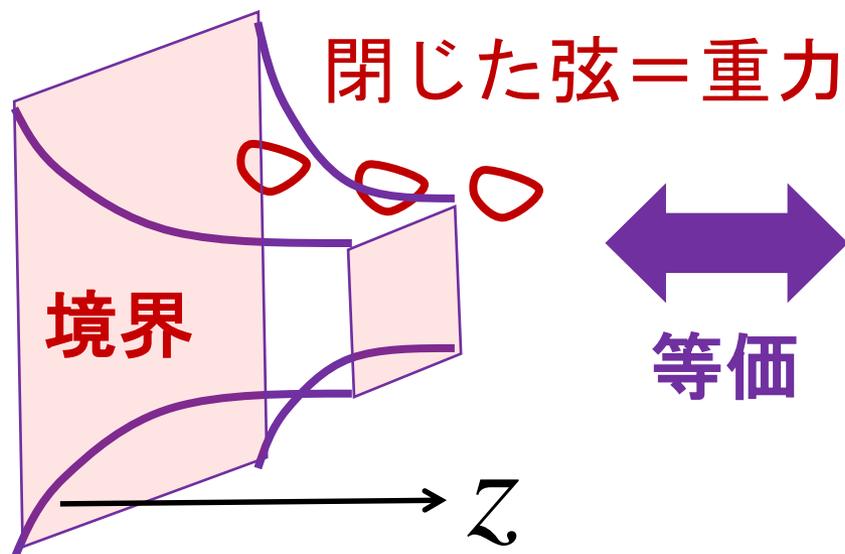


ひもの双対性 「閉じた弦＝開いた弦」

「ゲージ理論」と「重力理論」
は実は同じものを別の
見方で見ただけ！

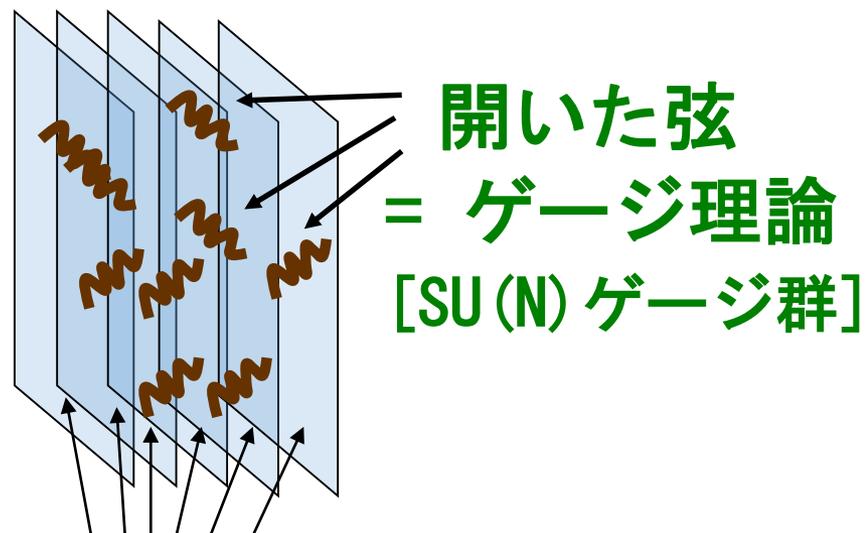


反ドジッター (AdS) 時空 の重力理論



$$ds^2 = R^2 \cdot \frac{dz^2 - dt^2 + \sum_{i=1}^d dx_i^2}{z^2}$$

ゲージ理論 (CFT)



N枚のDブレーン
(弦の凝縮したもの)

ブラックブレーンの熱力学

ゲージ理論の熱力学

等価

他の時空のホログラフィーは？

[1] 平坦な時空 (ホログラフィーがなくても超弦理論を直接解析可)

R^{D+1} 上の重力理論 \rightarrow D次元非局所的場の理論と双対? [李-高柳 2010]

$R^{1,D}$ 上の重力理論 \rightarrow D-1次元球面上のユークリッドCFTと双対?

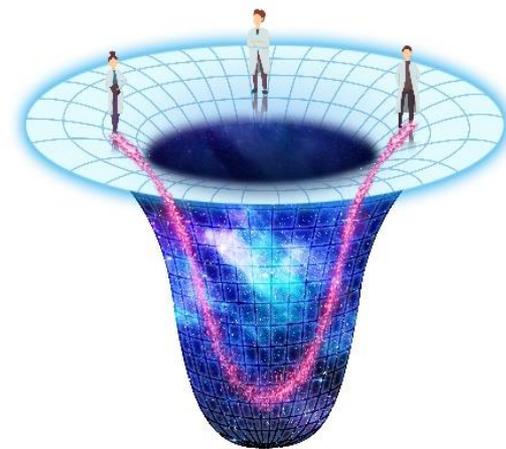
[Celestial holography: Pasterski-Shao-Strominger 2017]

[2] ドジッター時空 (宇宙創成の解明に必要)

D+1次元ドジッター時空の重力理論

\rightarrow D次元球面上のユークリッドCFTと双対?

[dS/CFT: Strominger 2001, ...Maldacena 2002,.....]



dS/CFTの具体例 [瀧-西岡-疋田-高柳 2022, PRL Editor' Suggestion]

2次元CFT: SU(2)WZW模型の $k=-2$ 極限

$$c = \frac{3k}{k+2} \approx i \frac{3L_{ds}}{2G_N}$$

= 3次元ドジッター時空の重力理論

$$Z[S^3, R_j] \approx e^{\frac{\pi L_{ds}}{2G_N} \sqrt{1-8G_N E_j}}$$

dSエントロピー

⑤ ホログラフィック・エンタングルメント・エントロピー(HEE)

講演者と笠との共同研究で、CFTのEEがAdS/CFT対応を用いると極小曲面(Minimal surface) Γ_A の面積で表されることが示された:

HEE公式 (RT/HRT公式) [笠-高柳 2006]

$$S_A = \min_{\Gamma_A} \left[\frac{\text{Area}(\Gamma_A)}{4G_N} \right]$$

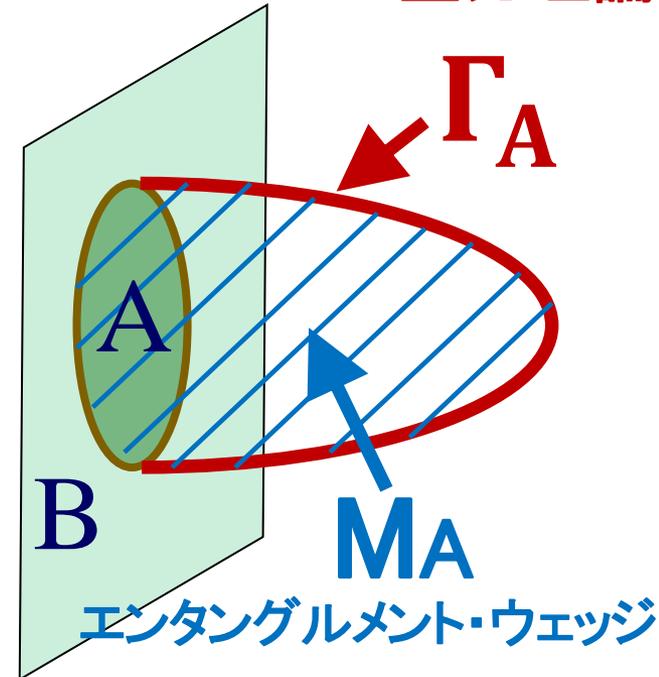
重力理論の量子補正を加味

[Faulkner-Lewkowycz-Maldacena 2013]

$$S_A = \min_{\Gamma_A} \left[\frac{\text{Area}(\Gamma_A)}{4G_N} + S_{bulk}(M_A) \right]$$

バルクのEE

AdS/CFT対応
境界のCFT = バルク(AdS)の重力理論

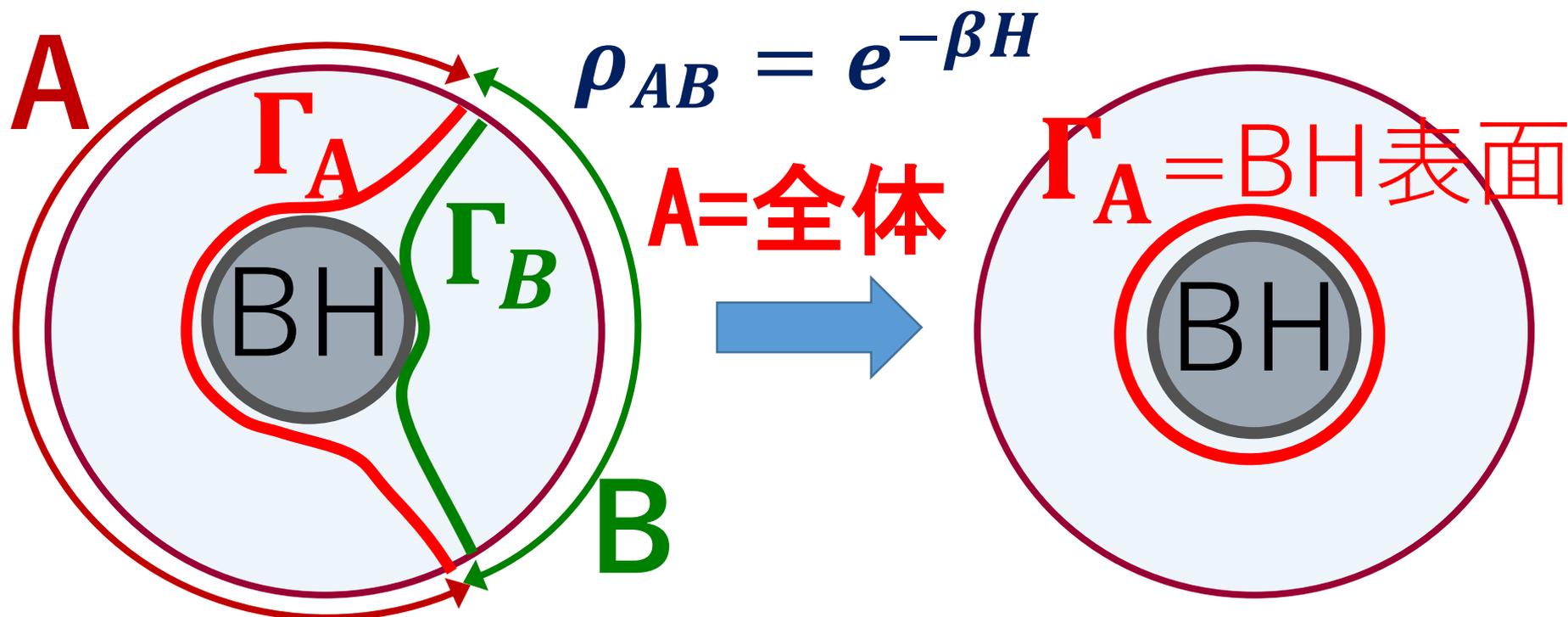


※時間に依存する背景では、極小曲面の代わりに極値曲面(Extreme surface)を使う。

[Hubeny-Rangamani-高柳 2007,...Engelhardt-Wall 2014,...]

BHのエントロピーとの関係

この公式はブラックホールのエントロピーの一般化と思える。(A=系全体でBHエントロピーと一致)



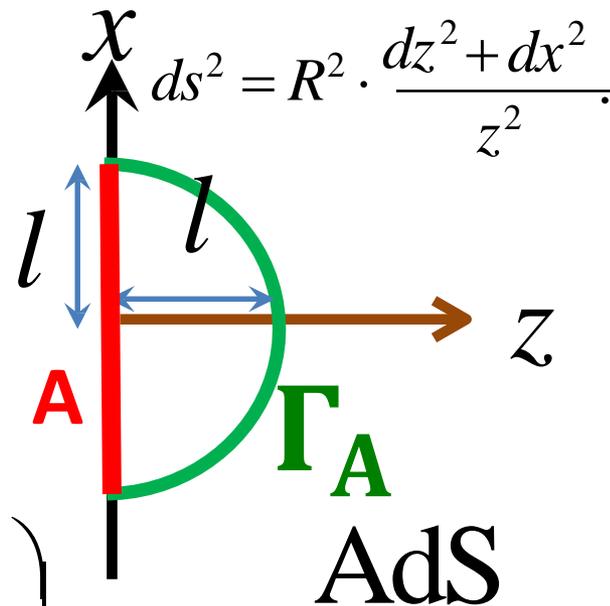
AdS BH = CFTの有限温度状態 \Rightarrow 混合状態 : $S_A \neq S_B$!

簡単な具体例: AdS3/CFT2

AdS3/CFT2においてホログラフィックなEEは、2点間の測地距離Lと等しい:

$$L = 2R \int_a^l dz \frac{l}{z \sqrt{l^2 - z^2}} = 2R \log \frac{2l}{a}$$

$$c = \frac{3R}{2G_N^{(3)}} \Rightarrow S_A = \frac{L}{4G_N} = \frac{c}{3} \log \left(\frac{2l}{a} \right)$$



[Central charge(中心電荷): [場の理論の計算結果

Brown-Henneaux 86]

Holzhey-Larsen-Wilczek 94を再現!]

2次元CFTのより複雑な場合や、高次元のCFTでは、HEEは既知の結果を再現するに加え、強結合CFTに関する多くの予言を与える。

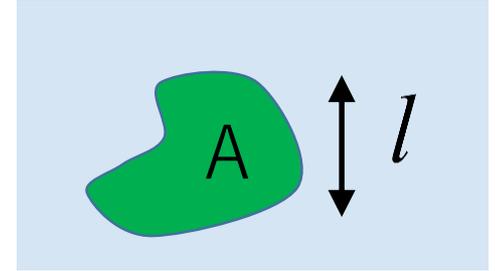
相互作用するCFTにおいて量子情報量を計算する他の手法

→超対称性の利用: 超対称性レンニエントロピー [西岡-Yaakov 2013]

HEEの一般的振る舞い(AdS_{d+2}/CFT_{d+1})

[笠-高柳 06,...]

$$S_A = \frac{\pi^{d/2} R^d}{2G_N^{(d+2)} \Gamma(d/2)} \left[p_1 \left(\frac{l}{\varepsilon}\right)^{d-1} + p_3 \left(\frac{l}{\varepsilon}\right)^{d-3} + \dots \right]$$



$$\dots + \begin{cases} p_{d-1} \left(\frac{l}{\varepsilon}\right) + p_d & (\text{if } d+1 = \text{odd}) \\ p_{d-2} \left(\frac{l}{\varepsilon}\right)^2 + q \log\left(\frac{l}{\varepsilon}\right) & (\text{if } d+1 = \text{even}) \end{cases}$$

面積則の発散

where $p_1 = (d-1)^{-1}$, $p_3 = -(d-2)/[2(d-3)]$,...

..... $q = (-1)^{(d-1)/2} (d-2)!! / (d-1)!!$

偶数次元のCFTでは
log発散の係数が普遍的
→ Central charge

奇数次元のCFTでは
定数項(F関数)が普遍的

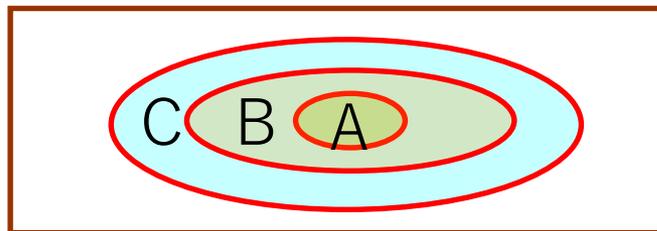
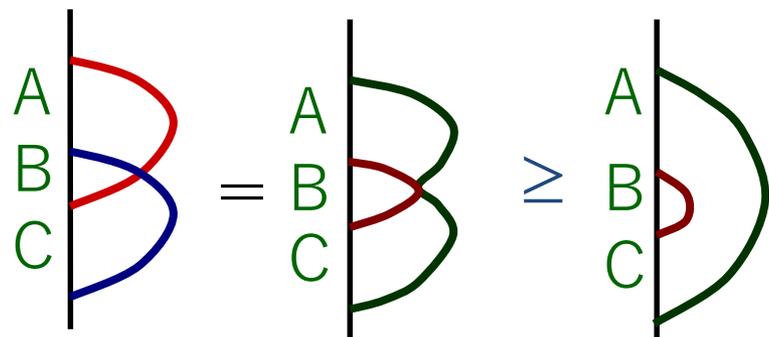
繰り込み群
で単調減少

このようにCFTの自由度は、EEで定量化できる。

しかし、余次元が2以上のDefectが存在する場合は繰り込み群で分配関数単調に変化するが、EEは単調ではない。[小林-佐藤-西岡-渡邊 2018]

強劣加法性 (Strong Subadditivity) の証明

量子情報の基本となる不等式の強劣加法性が幾何学的に証明できる！ [Lieb-Ruskai 73]



$$\Rightarrow S_{AB} + S_{BC} \geq S_{ABC} + S_B$$

[Headrick-高柳 2007]

「量子情報の不等式 = 幾何学の三角不等式」 となる！

実は、より強い不等式 (Monogamy of Mutual Information) が

古典重力極限では導かれる： $I(A; BC) \geq I(A; B) + I(A; C)$

量子重力効果で一般に破れる ← [Hayden-Headrick-Maloney 2011]

相互情報量： $I(A; B) \equiv S_A + S_B - S_{AB}$

[多数の部分領域 ⇒ エントロピー円錐： Bao-Nezami-大栗-Stoica-Sully-Walter 2015]

量子エンタングルメントとアインシュタイン方程式

$$S(\rho_A + \Delta\rho_A \parallel \rho_A) = \Delta S_A - \Delta H_A \approx 0, \quad (\rho_A \equiv e^{-H_A}).$$

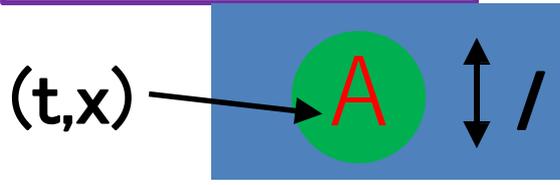
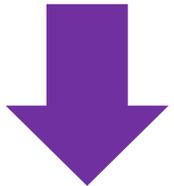


相対エントロピー - $S(\rho \parallel \sigma) = \text{Tr}[\rho(\log \rho - \log \sigma)]$

EEの第一法則

$$\Delta S_A \cong \Delta H_A$$

[Casini-Huerta-Myers 13, Bhattacharyya-野崎-宇賀神-高柳 13]



$$\left(\partial_t^2 - \partial_l^2 - \partial_x^2 - \frac{3}{l^2} \right) \Delta S_A(t, \vec{x}, l) = \langle O \rangle \langle O \rangle$$

[野崎-沼澤-Prudenziati-高柳 13]
[de Sitter space: de Boer-Haehl-Heller-Myers 16]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$$

➡ EEの第一法則は、摂動的アインシュタイン方程式と等価

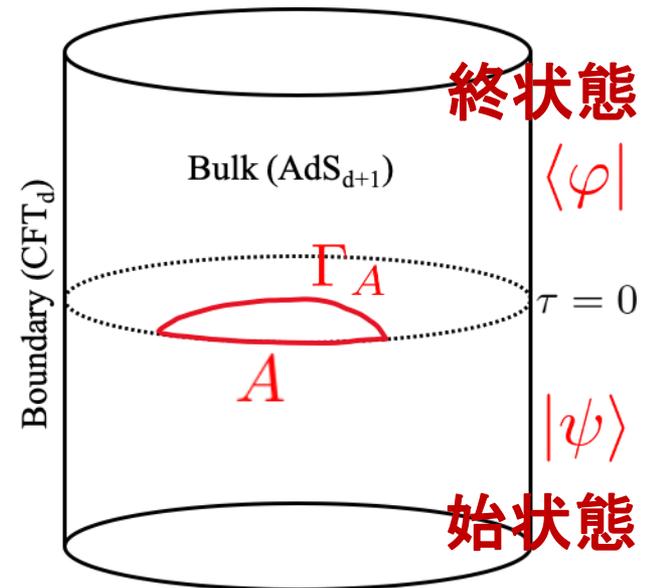
[Raamsdonk et.al. 13, 非線形レベルの議論: Faulkner et.al 17, 宇賀神-Sarosi 17]

擬エントロピーとゲージ重力対応

[中田-瀧-玉岡-魏-高柳, 2020]

虚時間で時間発展している重力理論の空間で、極小曲面の面積は、CFTの何を計算するのか？

答え:
$$S(\mathcal{T}_A^{\psi|\varphi}) = \min_{\Gamma_A} \frac{\text{Area}(\Gamma_A)}{4G_N}$$



擬エントロピー (Pseudo Entropy)

$$S(\mathcal{T}_A^{\psi|\varphi}) = -\text{Tr} \left[\mathcal{T}_A^{\psi|\varphi} \log \mathcal{T}_A^{\psi|\varphi} \right]$$

始状態 $|\psi\rangle$ 終状態 $\langle \varphi|$

$$\mathcal{T}^{\psi|\varphi} := \frac{|\psi\rangle \langle \varphi|}{\langle \varphi|\psi\rangle}$$

遷移行列

$$\left(\mathcal{T}_A^{\psi|\varphi} := \text{Tr}_{\bar{A}} \mathcal{T}^{\psi|\varphi} \right)$$

縮約した遷移行列
(一般にエルミートではない)

擬エントロピーの量子相転移への応用: 横磁場イジング模型

[魏-芝-玉岡-Mollabashi-高柳, 2020]

$$H = -J \sum_{i=0}^{N-1} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z - h \sum_{i=0}^{N-1} \sigma_i^x,$$

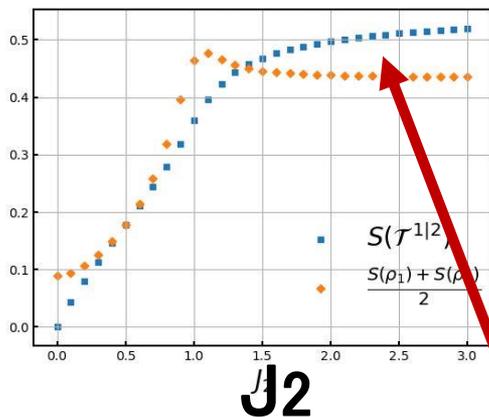
$\Psi_1 \rightarrow$ vacuum of $H(J_1)$

$\Psi_2 \rightarrow$ vacuum of $H(J_2)$

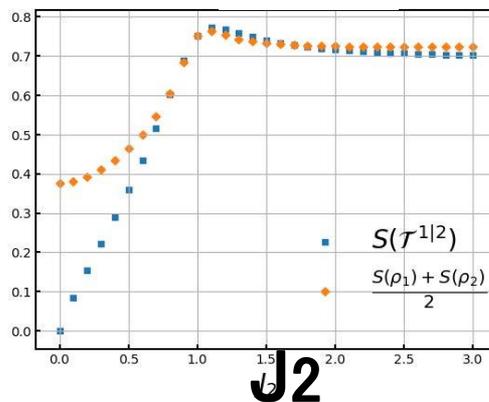
$$\tau_A^{1|2} = \frac{|\psi_1\rangle\langle\psi_2|}{\langle\psi_2|\psi_1\rangle} \Rightarrow S(\tau_A^{1|2})$$

$J < 1$ 常磁相
 $J > 1$ 強磁相

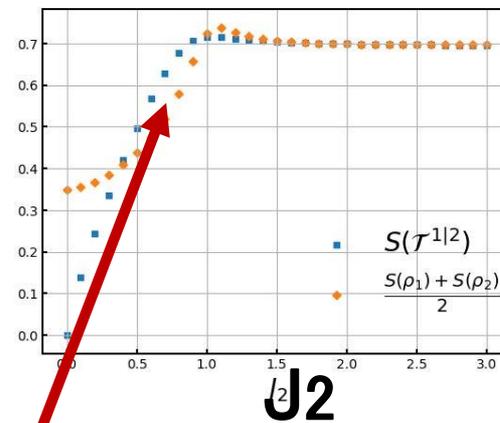
$J_1 = 1/2$



$J_1 = 1$



$J_1 = 2$



$N=16, N_A=8$

「 Ψ_1 と Ψ_2 が異なる相」の時のみ

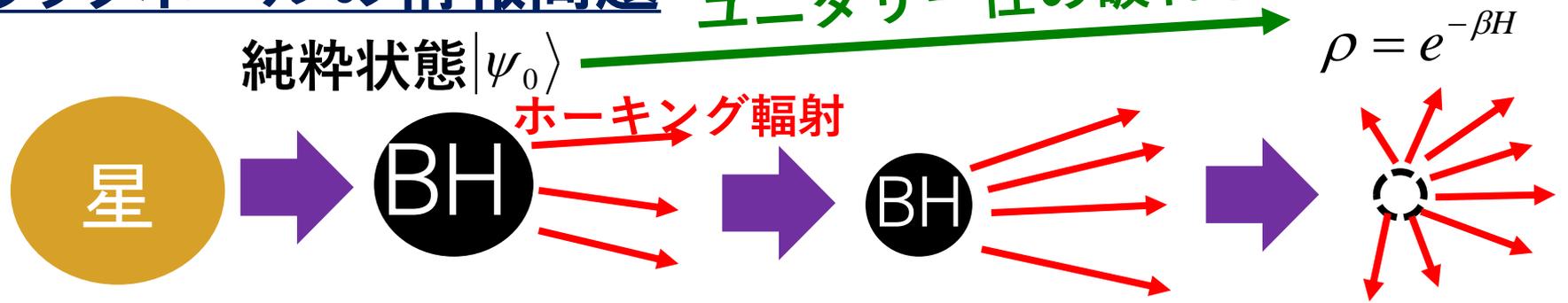
$$\Delta S = S(\tau_A^{1|2}) + S(\tau_A^{2|1}) - S(\rho_A^1) - S(\rho_A^2) > 0 \text{ となる!}$$

⑥ ブラックホールの情報問題への応用

ブラックホールの情報問題

ユニタリー性の破れ?

混合状態?



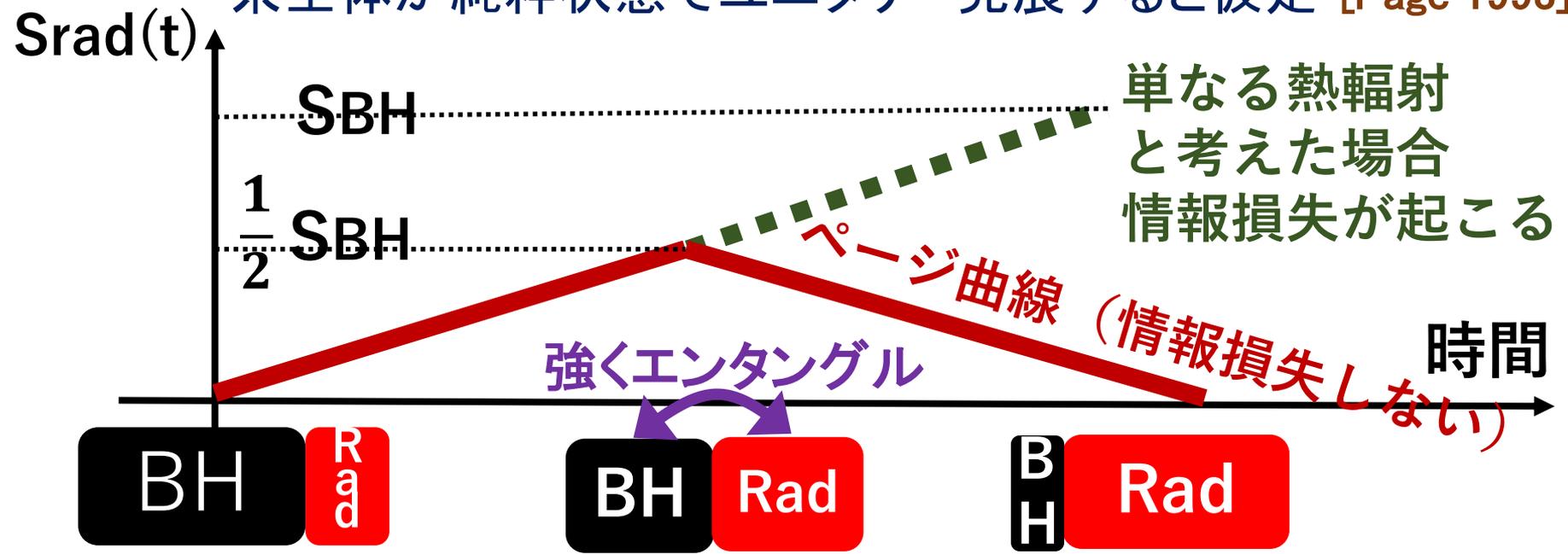
純粋状態 $|\psi_0\rangle$

$$\rho = e^{-\beta H}$$

ページ曲線

BHと輻射の間のEEの時間発展 $S_{rad}(t)$ を考える

系全体が純粋状態でユニタリー発展すると仮定 [Page 1993]



単なる熱輻射
と考えた場合
情報損失が起こる

強くエンタングル

ページ曲線 (情報損失しない)

アイランド公式によるページ曲線の導出

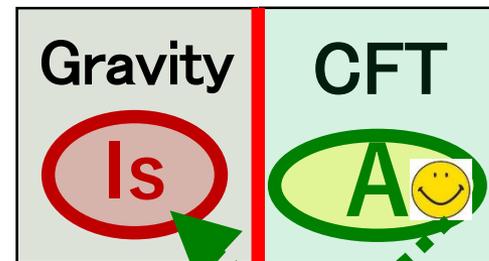
アイランド公式 [Penington 2019, Almheiri et.al. 2019]

$$S_A = \text{Min}_{I_S} \left[\frac{\text{Area}(\partial I_S)}{4G_N} + S_{A|I_S} \right]$$

部分系AのEE
→ 輻射のEE

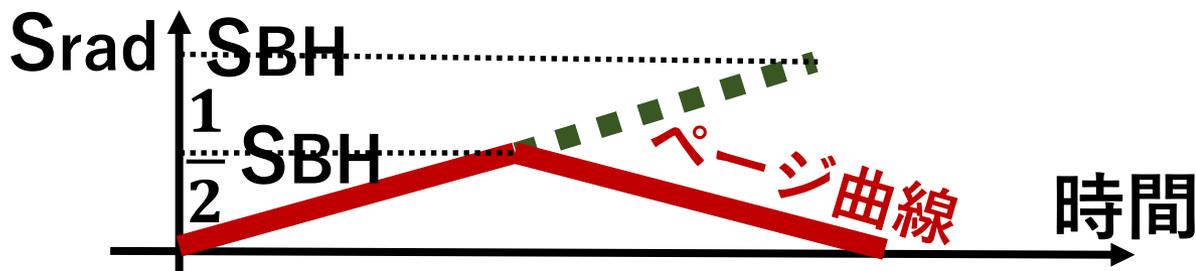
アイランドの
BHエントロピー

場の量子論的
エンタングルメント



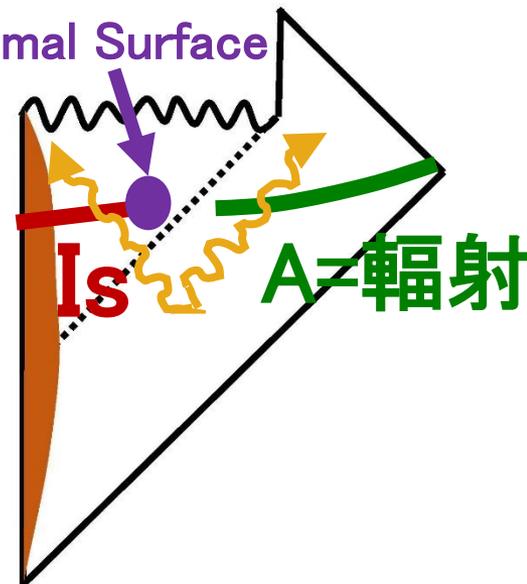
アイランド内部を
観測できる！

BH蒸発が進むとBH内部の**アイランド領域**の情報をホーキング輻射から取り出せるようになり、ページ曲線を再現できる。



Quantum

Extremal Surface



[漸近的に平坦な2次元重力: 姉川-飯塚 2020]

アイランド公式の導出法

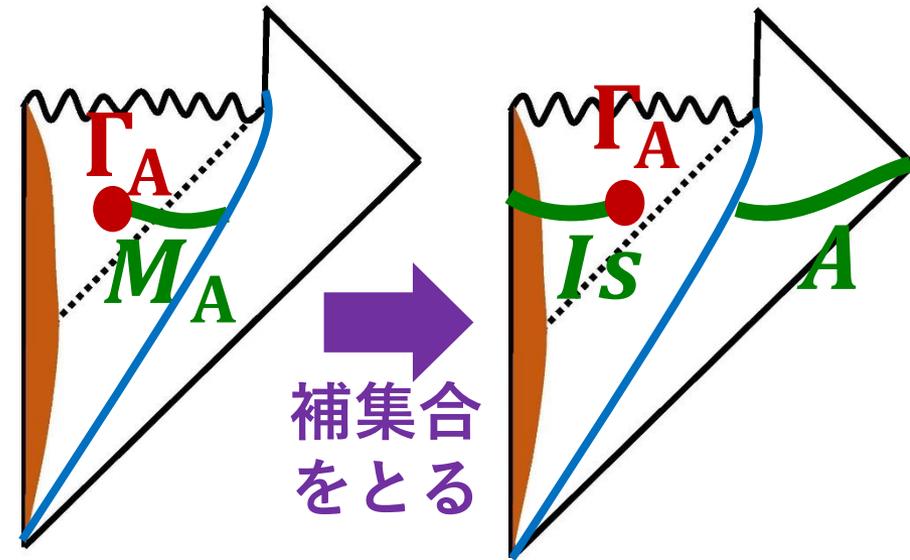
(1) HEEの量子補正

$$S_A = \text{Min}_{\Gamma_A} \left[\frac{\text{Area}(\Gamma_A)}{4G_N} + S_{M_A}^{\text{Bulk}} \right]$$

CFTのEE

古典重力の寄与

バルクのEE

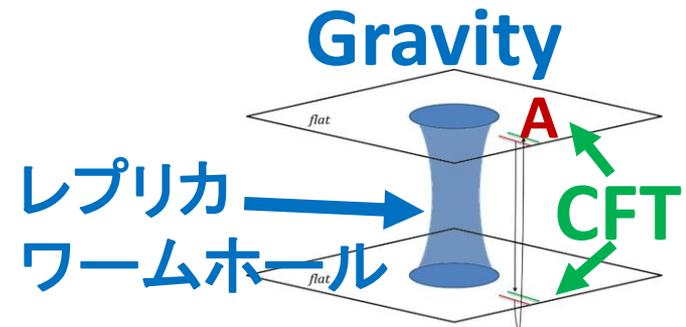


→ AdS/CFT を平坦時空などへ一般化するとアイランド公式を得る。

(2) レプリカ・ワームホール

[Penington-Shenker-Stanford-Yang 19,
Almheiri-Hartman-Maldacena-Shaghoulian-Tajdini 19]

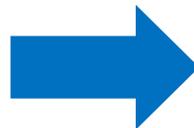
→ 2次元(JT)重力ではアイランド公式
が導出できる。



(3) ダブルホログラフィー (AdS/BCFT+ブレーンワールド)

→ 多少定性的な議論であるが、任意の次元に適用できる。

HEE in AdS/BCFT [高柳 2010]



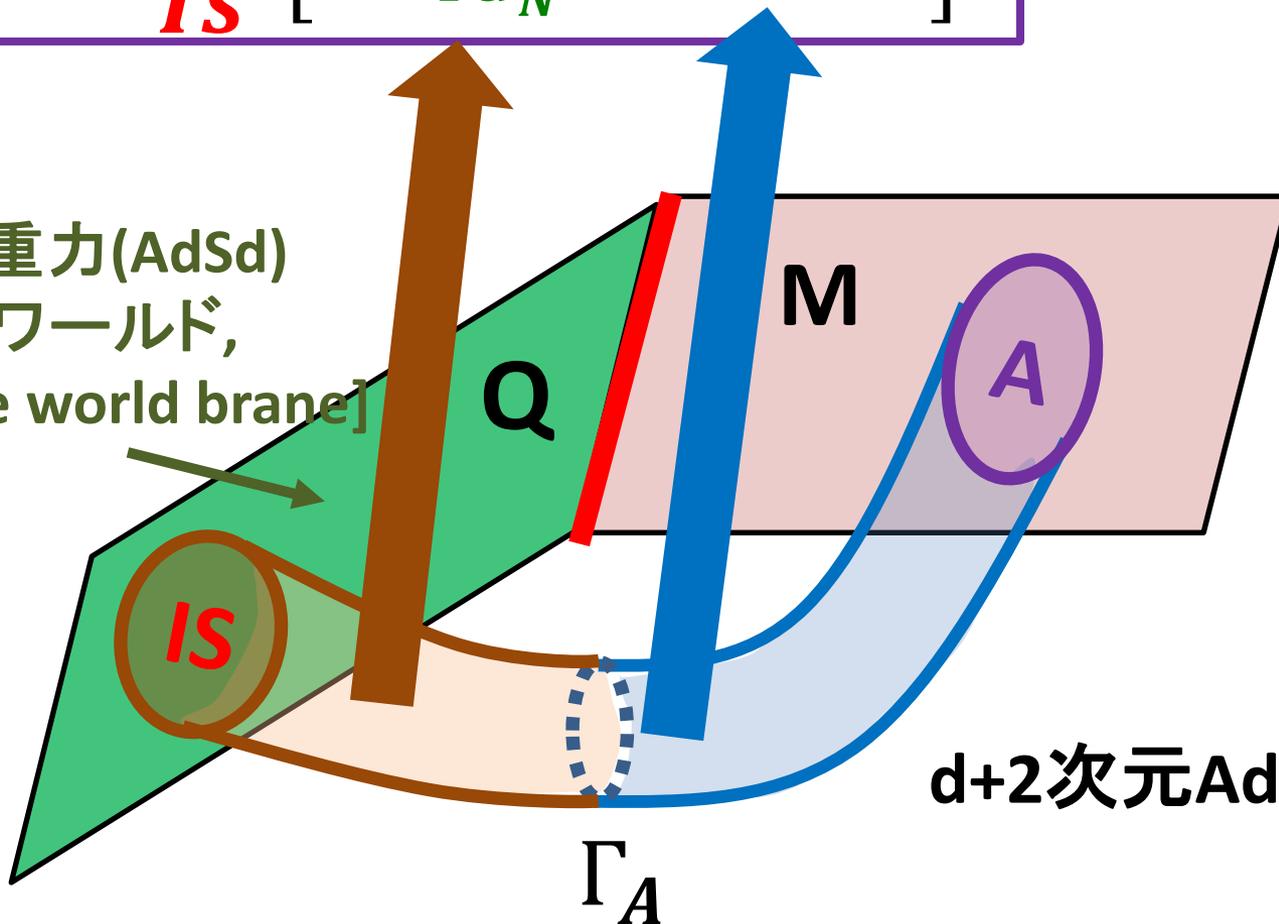
アイランド公式

Induced gravity entropy

[Island/BCFT duality:
鈴木-高柳 2202.08462]

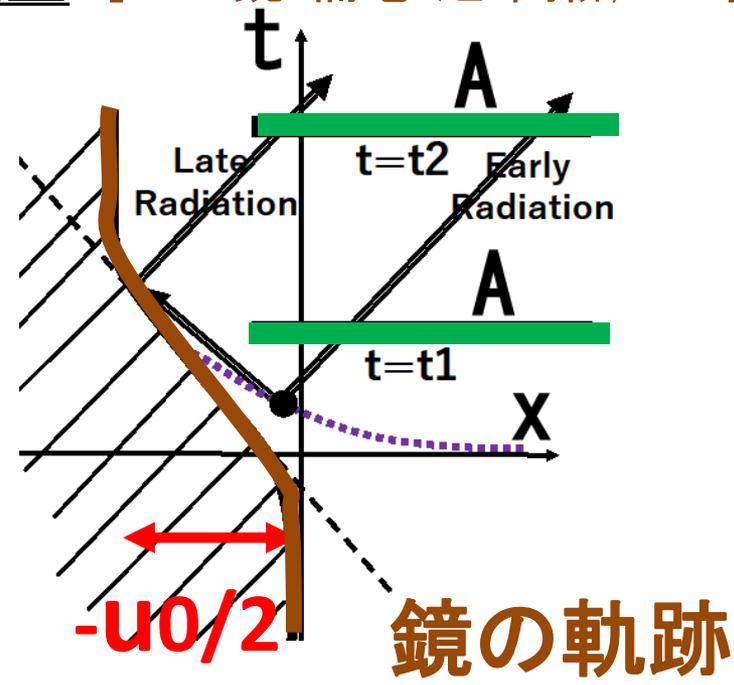
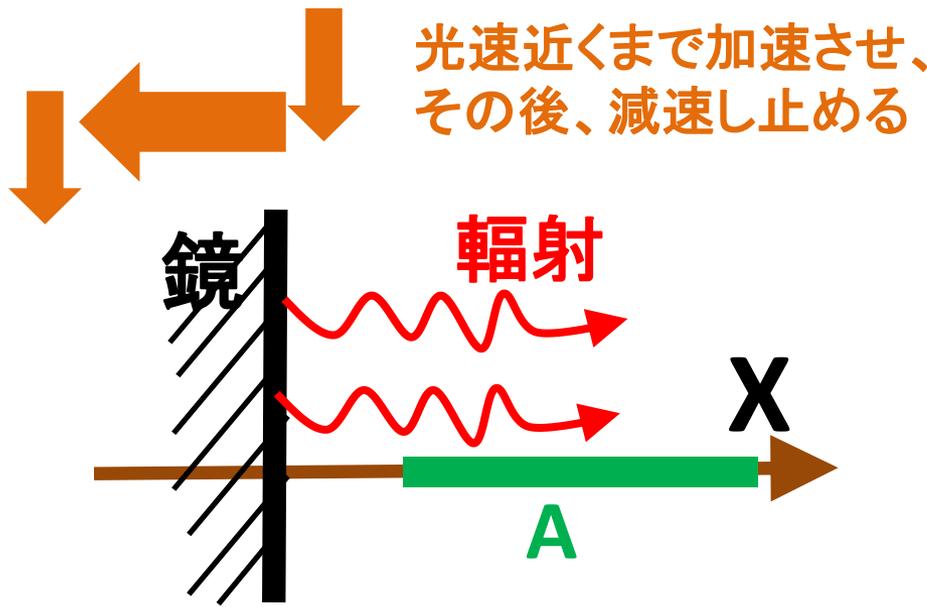
$$S_A = \text{Min}_{Is} \left[\frac{\text{Area}(\partial Is)}{4G_N} + S_{A \cup Is} \right]$$

d+1 次元重力(AdSd)
[ブレーンワールド,
End of the world brane]

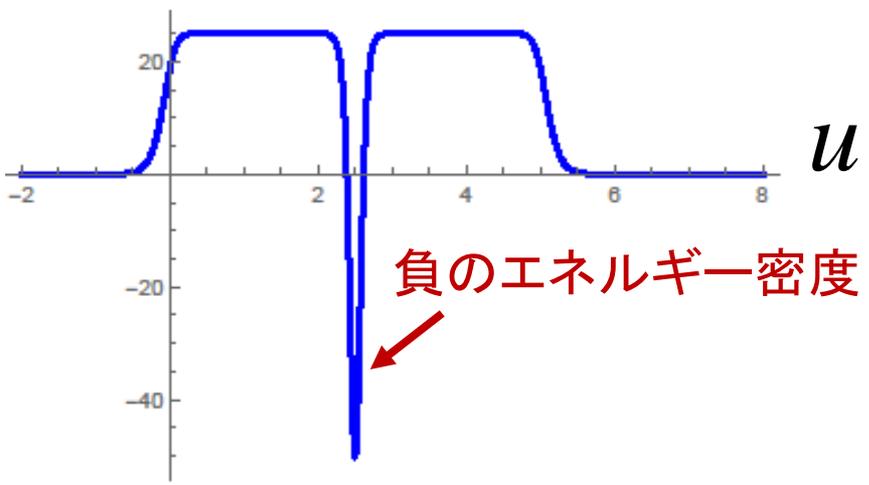


d+2次元AdS時空

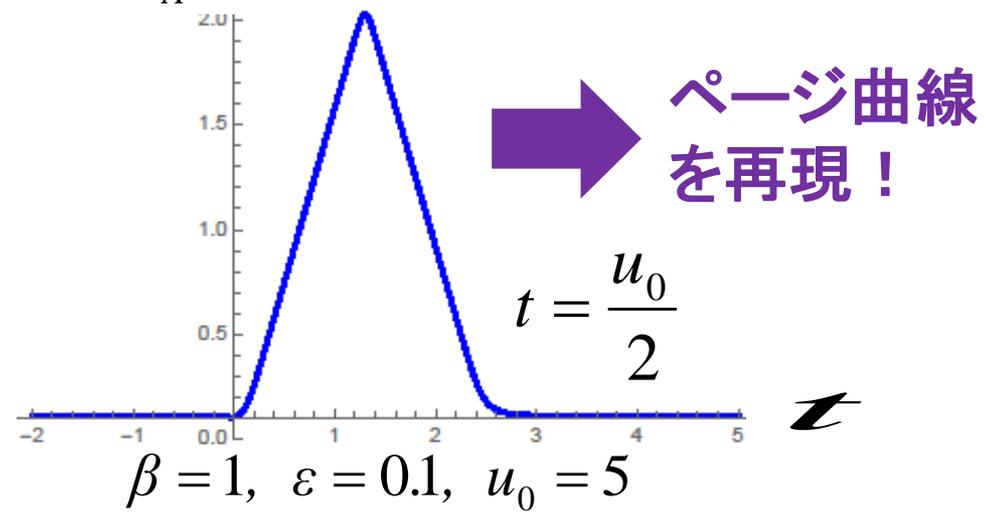
ブラックホールの蒸発を記述する動く鏡模型 [Aka-魏-楠亀-芝-高柳, 2021]



エネルギーフラックス



S_A/c エンタングルメント・エントロピー



⑦ 量子ビットからの時空の創発

このエントロピー公式は、プランク面積あたり1量子ビットのエンタングルメントの存在を意味する。

$$S_A = \frac{\Gamma_A \text{の面積}}{4l_P^2}$$

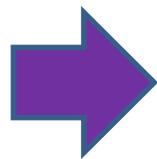
プランク長: $l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.6 \times 10^{-35} m$

$\Rightarrow 1 \text{ cm}^2$ の面積で 10^{65} 量子ビット

Bell pair

Planck scale mini Universe

プランク長



量子ビットは時空全体に満ちているのでは？
→テンソルネットワークはその具体的模型！

テンソルネットワーク (TN)

[DMRG: White 92,.. CTM: 西野-奥西 96,
PEPS: Verstraete-Cirac 04, ...]

量子多体系の状態を精度よく表す波動関数の幾何学的記述法

波動関数 = 量子エンタングルメントのネットワーク

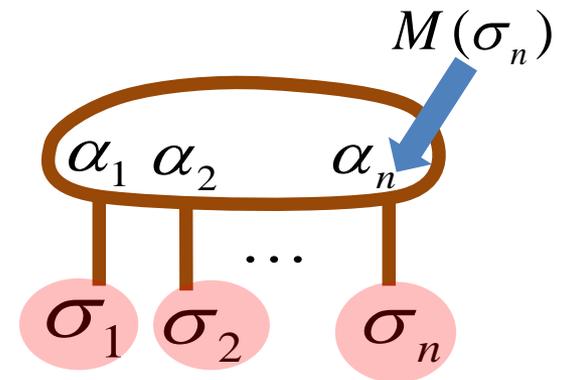
(1) 最も簡単な例 (基本単位): EPRペア  $|EPR\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$

(2) 行列積状態 (Matrix product states)

$$|\Psi\rangle = \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n} \text{Tr}[M(\sigma_1)M(\sigma_2)\cdots M(\sigma_n)] |\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\rangle$$

n Spins

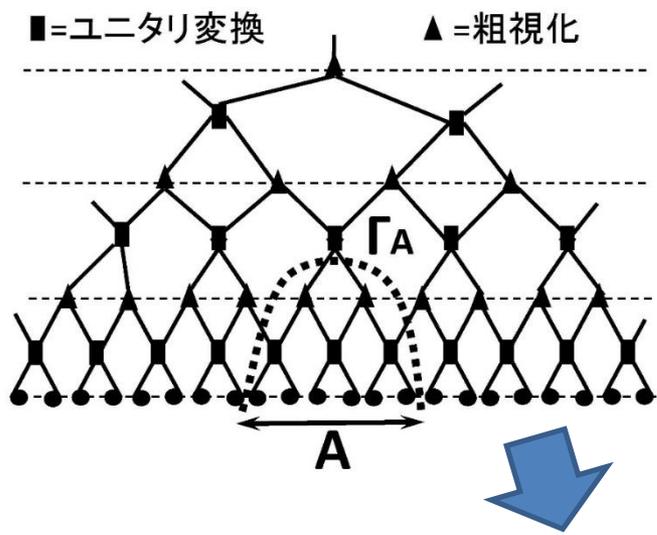
$$\alpha_i = 1, 2, \dots, \chi, \quad \sigma_i = 0 \text{ or } 1.$$



CFTに関するテンソルネットワークの例

例1: MERA [Vidal 2005]

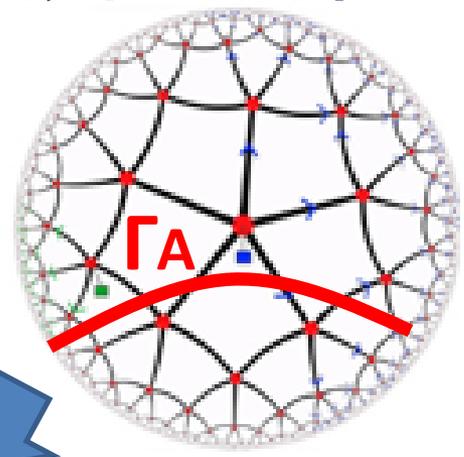
⇒量子臨界点 (CFT) の良い
変分法の波動関数



例2: HAPPY模型:

[Patawski-吉田-Harlow
-Preskill 2015]

⇒量子誤り訂正符号を
多数組み合わせた模型



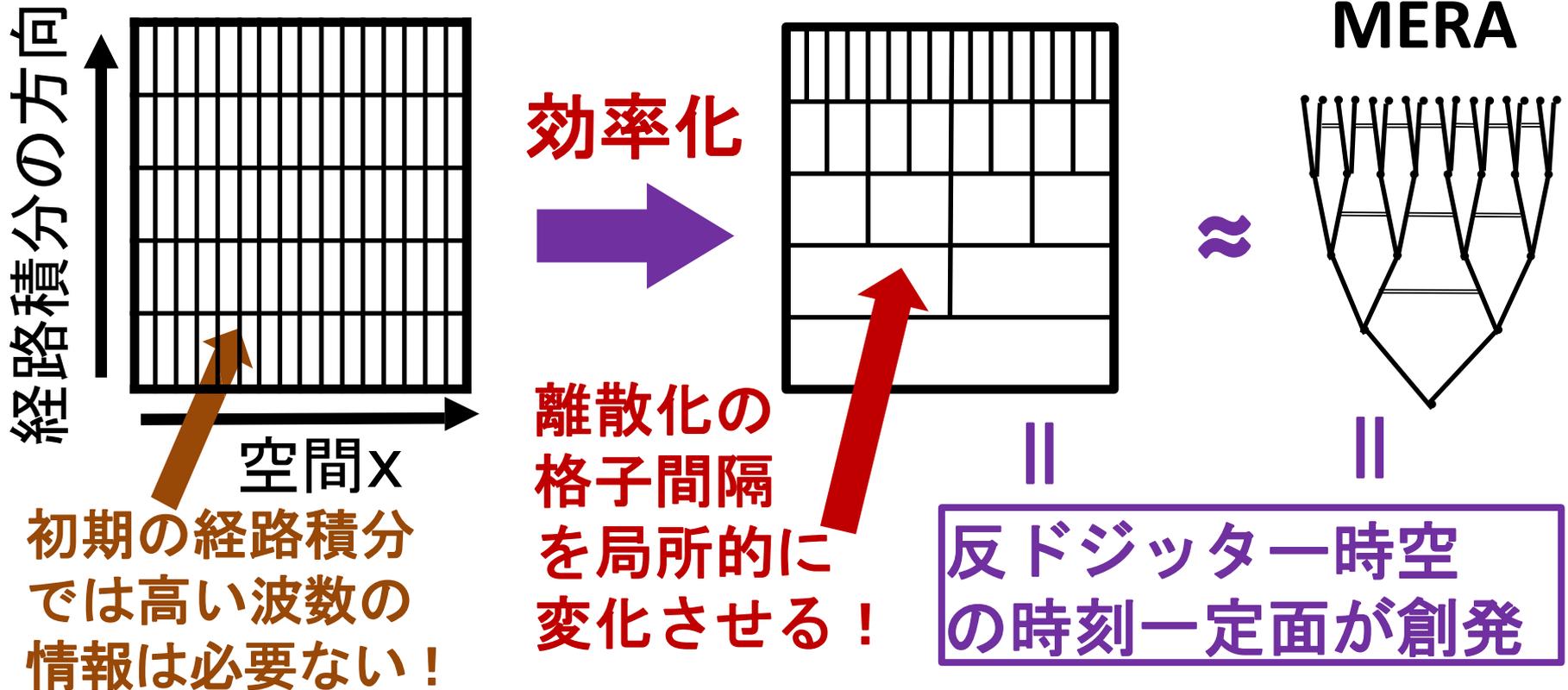
量子ビットの幾何学構造 = 反ドジッター空間

これがAdS/CFT対応における時空創発の原理? [Swingle 09,.....]

テンソルネットワークの連続極限をとって場の理論を考えたい！

手法2: CFTの経路積分の効率化 [Caputa-Kundu-宮地-渡邊-高柳 2017]

同じ量子状態を表す経路積分の中で計算コストが最小なものを選ぶ！



経路積分の効率化を具体的にどうやるか？

離散化の格子間隔の局所的な変化を計量で表す：

$$ds^2 = e^{2\omega(x,z)} (dx^2 + dz^2).$$

CFTの性質より波動関数は次の性質を持つ：

$$\Psi[\phi, \omega] = e^{N[\omega]} \cdot \Psi[\phi, \omega = 0]$$

N[ω]を最小とする計量が最も効率的な経路積分。

(N=「量子計算の複雑性」の一種 [Cf. Susskind 2014-])

2次元CFTでは、N[ω]はリュービル作用と等しい。

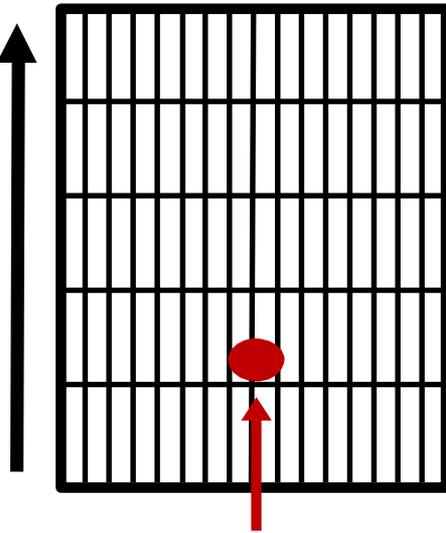
$$N_{2D}[\omega] = \frac{c}{24\pi} \int dx dz \left[(\partial_x \omega)^2 + (\partial_z \omega)^2 + e^{2\omega} \right]$$

**最小化すると
AdSの計量**

$$e^{2\omega} = z^{-2}.$$

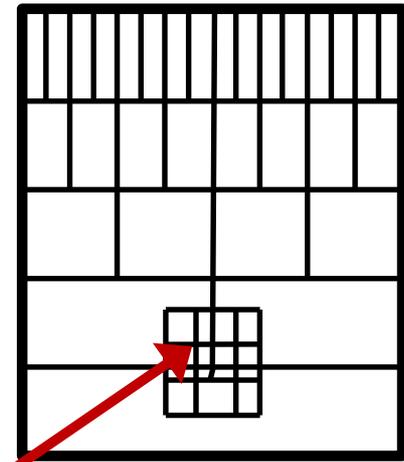
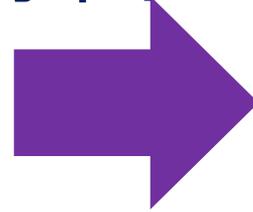
励起状態に対する経路積分の効率化

経路積分



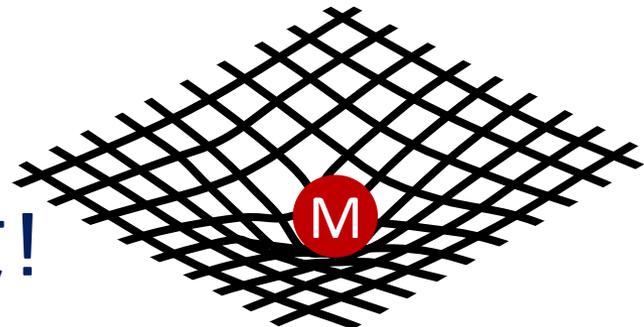
局所的励起
(エネルギー源)

効率化



離散化を細かくする必要がある
⇒計量が大きくなる

エネルギー源(=情報源)
が背景の時空を曲げる
⇒一般相対論の本質!



経路積分の効率化とゲージ重力対応の関係

[Boruch-Caputa
-Ge-高柳 2021]

反ドジッター宇宙の波動関数

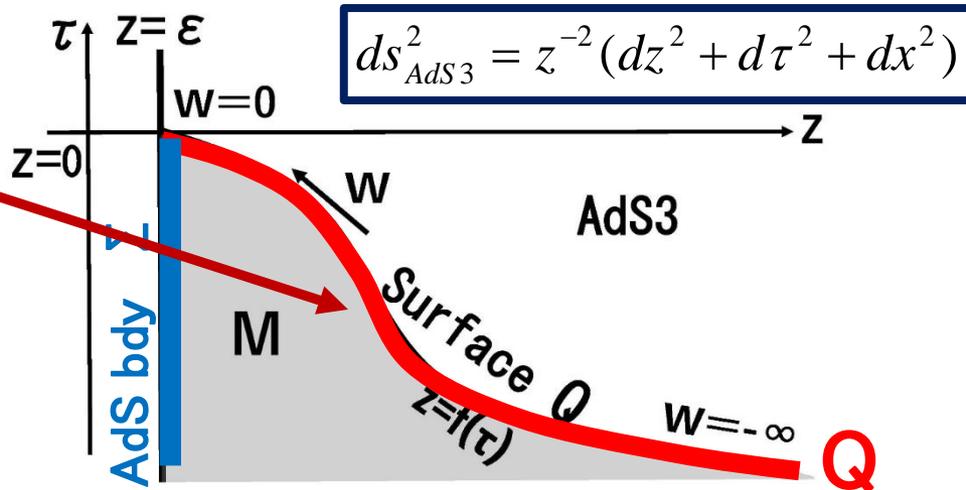
AdS3のHartle-Hawking 波動関数
(Q上の計量の汎関数)

リュービル作用 $N_{2D}[\omega]$!

$$\Psi_{HH}^{(T)}[e^{2\phi} \delta_{ab}] \equiv \int Dg_{\mu\nu} e^{-I_G[g]} \delta(g|_Q - e^{2\phi} \delta_{ab}) \approx e^{-C_{2D}[\phi]}, \dots$$

Q上の計量

$$ds^2|_Q = e^{2\phi} (dw^2 + dx^2)$$



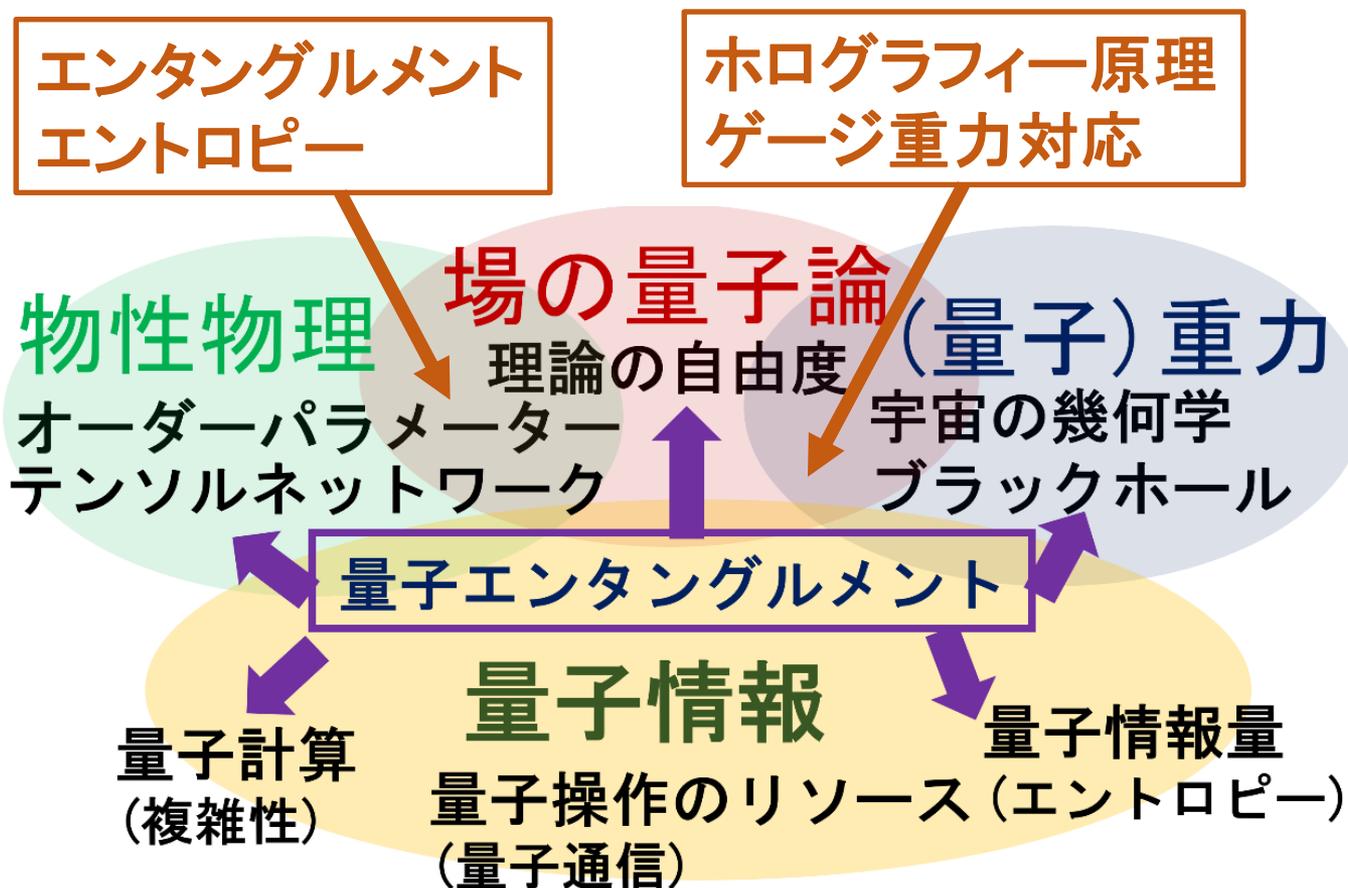
経路積分の効率化 = 経路積分複雑性 $N_{2D}[\omega]$ の最小化
= Hartle-Hawking波動関数の最大化 !

⑧ おわりに

本講演では量子情報理論と理論物理学の深い関係を概説した。

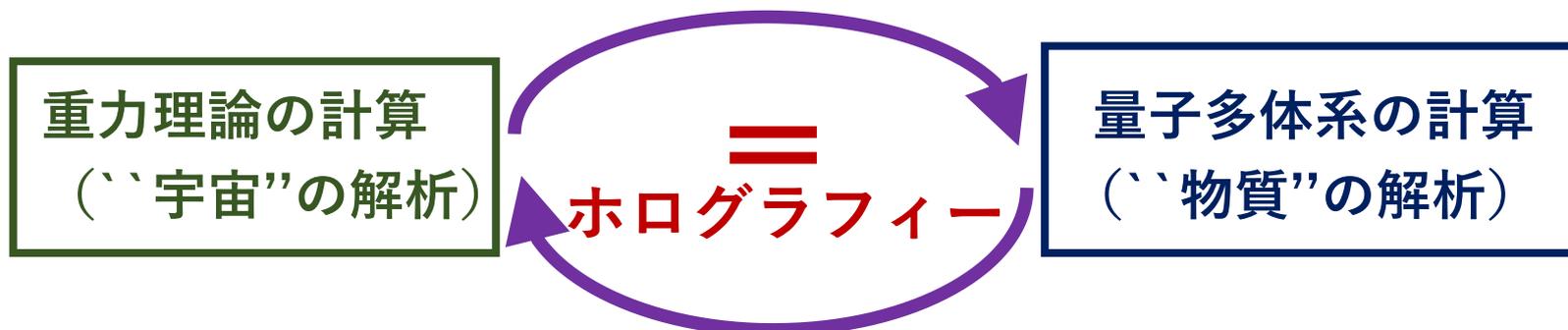
この背後にあるのは、

「量子系のエンタングルメント」=「量子系の幾何学」



このような発展から次のような期待が湧いてくる。

重力理論(一般相対論)は、最速の“量子コンピューター”？



重力理論の時空は量子ビットの集合体？

ホログラフィー原理は、これまで「宇宙」の宇宙定数が負である反ドジッター時空の場合が主な対象となってきた。

今後は、その基礎原理を量子情報の観点からさらに掘り下げると同時に、現実の宇宙（ドジッター宇宙やビックバン宇宙）へ拡張することが重要なテーマの一つ。

参考文献

(2-1) 拙著 「ホログラフィー原理と量子エンタングルメント」
臨時別冊・数理科学 SGC106 (SDB Digital Books 25)
サイエンス社 2014年

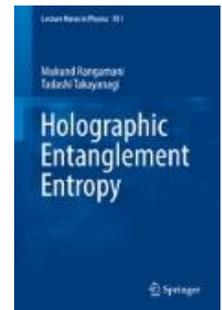


(2-2) 拙著 「量子エンタングルメントから創発する宇宙」
(基本法則から読み解く物理学最前線 23)
共立出版 2020年



(2-3) T. Nishioka,
“Entanglement entropy: holography and renormalization group”
Rev.Mod.Phys. 90 (2018) 3, 035007 [arXiv:1801.10352]

(2-4) M. Rangamani and T. Takayanagi,
“Holographic Entanglement Entropy”
Lecture Notes in Physics, Springer, 2017 [arXiv:1609.04645]



(2-5) T. Nishioka, S. Ryu and T. Takayanagi
“Holographic Entanglement Entropy: An Overview”
J.Phys.A 42 (2009) 504008 [arXiv: 0905.0932]

ご清聴ありがとうございました。

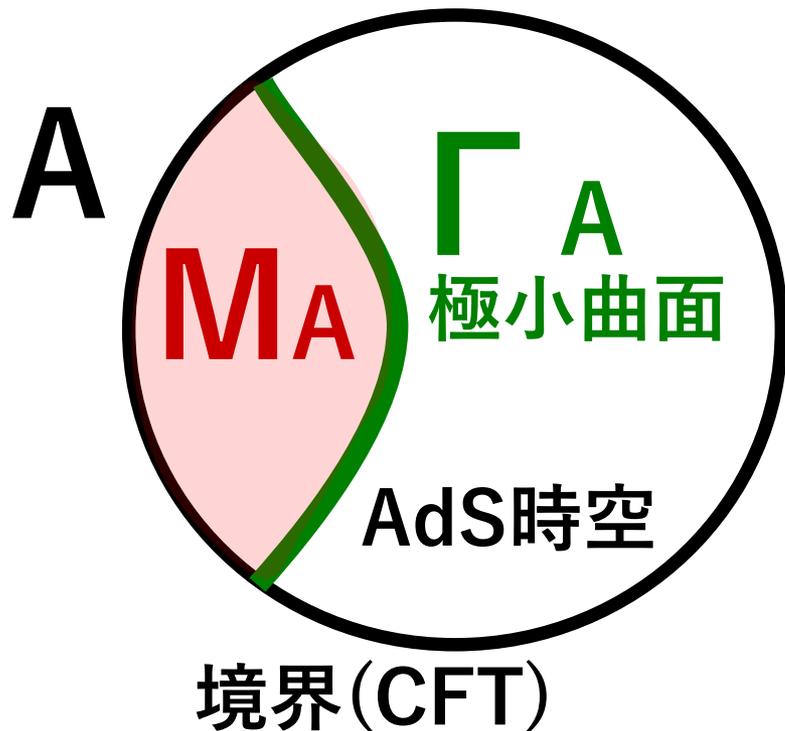
エンタングルメント・ウェッジ(EW)

ゲージ理論 (CFT) の領域Aに対応するAdS時空の領域は？

⇒エンタングルメント・ウェッジ M_A と呼び、

「Aと Γ_A に囲まれる領域」で与えられる。

$$\rho_A \text{ in CFT} \Leftrightarrow \rho_{M_A} \text{ in AdS gravity}$$



[Czech-Karczmarek-Nogueira-Raamsdonk 2012,
Wall 2012,
Headrick-Hubeny-Lawrence-Rangamani 2014,
Jafferis-Lewkowycz-Maldacena-Suh 2015,
Dong-Harlow-Wall 2016, ...]

Firewall問題(AMPSパラドクス)とアイランド

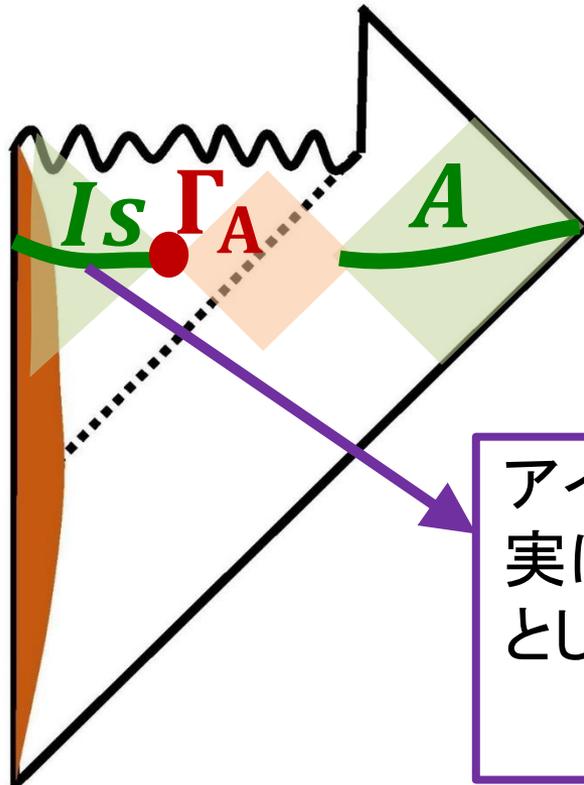
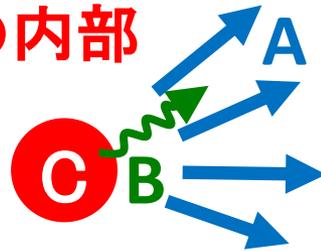
A = BHが半分蒸発するまでに出了た輻射

B = その直後に出了た輻射

C = ブラックホールの内部

AとBは最大エンタングル
(∵ 輻射EEは減少 ← Page曲線)

BとCは最大エンタングル
(∵ ホーキング輻射は対生成)



解決!

Firewall問題

量子エンタングルメント
のモノガミー性に反する!
(量子ビットは同時に二つの
量子ビットとエンタングルできない。)

アイランドのエンタングルメント・ウェッジから
実は、「C=BHの内部とA=輻射は、ヒルベルト空間
として独立ではない」ことが分かる!

$$H_{\text{全体}} \neq H_A \otimes H_B \otimes H_C$$