1996.3.1

ゲージ場の量子論 II 訂正

221 ページ 18 行目の 「今度の場合, 前と異なり, ...」から、224 ページ 3 行目の 「... の最終表式である。」までを、次のように書き換えます。

今度の場合, 前と異なり, NG ボソン変数 $U(x) \in G$ は, ゲージ群 $G_{\mathrm{R}} \times G_{\mathrm{L}} \simeq G \times G$ の元の半分しかない。そこで, G_{R}か G_{L}のどちらか一方のカイラル変換だけを次々に行なっていって, $U(x)$ を 1 まで持っていくことにする。ここでは G_{R}で行なうことにすれば, 前の (8)∼(12) と同様にして次式を得る:

$$\begin{aligned}
&\Gamma[1, A_{\mathrm{R}}^{U^{-1}}, A_{\mathrm{L}}] - \Gamma[U, A_{\mathrm{R}}, A_{\mathrm{L}}] \\
&\qquad = -\frac{iN}{24\pi^2}\int_{M^4\times I}\omega_4^1(\widetilde{U}(t)\delta\widetilde{U}^{-1}(t), A_{\mathrm{R}}^{\widetilde{U}(t)U^{-1}}).
\end{aligned} \tag{26}$$

今度の場合, “積分定数項” $\Gamma[1, A_{\mathrm{R}}^{U^{-1}}, A_{\mathrm{L}}]$ は, 残念ながら, カイラル・ゲージ不変でないので落とすわけにゆかない。実際, カイラル・ゲージ変換 (24) の有限変換で, U は, $U \to U' = h_{\mathrm{R}} U h_{\mathrm{L}}^{-1}$ $(h_{\mathrm{R}} \in G_{\mathrm{R}}, h_{\mathrm{L}} \in G_{\mathrm{L}})$ と変換するから, $A_{\mathrm{R}}^{U^{-1}}$, A_{L}はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\left(A_{\mathrm{R}}^{U^{-1}}\right)' &= \left(A_{\mathrm{R}}^{h_{\mathrm{R}}}\right)^{h_{\mathrm{L}}U^{-1}h_{\mathrm{R}}^{-1}} = A_{\mathrm{R}}^{h_{\mathrm{L}}U^{-1}} = \left(A_{\mathrm{R}}^{U^{-1}}\right)^{h_{\mathrm{L}}} \\
(A_{\mathrm{L}})' &= (A_{\mathrm{L}})^{h_{\mathrm{L}}}
\end{aligned} \tag{27}$$

なる変換を受ける。[ここで $(A^{g_1})^{g_2} = A^{g_2 g_1}$ を用いた。] (27) 式は, $A_{\mathrm{R}}^{U^{-1}}$ と A_{L}が共に h_{L}で変換されること, すなわち, 右・左共通の “ベクトル的”ゲージ変換 $h_{\mathrm{V}} = h_{\mathrm{L}}$ を受けることを意味している。それゆえ, $\Gamma[1, A_{\mathrm{R}}^{U^{-1}}, A_{\mathrm{L}}]$ の関数形を決めるには, $\Gamma[1, A_{\mathrm{R}}, A_{\mathrm{L}}]$ の “ベクトル的”ゲージ変換の無限小形 $v_{\mathrm{R}} = v_{\mathrm{L}} = v$ の下での変換性のみを調べればよい。この変換の下で, $U(x) = 1$ は不変にとどまるから, $\Gamma[1, A_{\mathrm{R}}, A_{\mathrm{L}}]$ は (25) より

$$\delta\Gamma[1, A_{\mathrm{R}}, A_{\mathrm{L}}] = -\frac{iN}{24\pi^2}\int_{M^4}\left[\omega_4^1(v, A_{\mathrm{R}}) - \omega_4^1(v, A_{\mathrm{L}})\right] \tag{28}$$

を満たす。ところが, この式は, よく見れば **9 - 2** に与えた Bardeen の相殺項（の逆符号のもの）$-\int \mathcal{Y}(A)$ の満たす式と同一である。なぜなら, **9 - 2** (35)（の $-iN/24\pi^2$ 倍）で, ベクトル的変換の場合に対応して $C_{1\mathrm{R}} = C_{1\mathrm{L}} = v$ と置いて v の一次項の$\int_{M^4}$ 積分を見れば, 左辺が (28) の右辺に一致し, 右辺は第一項が $C_{1\mathrm{R}} - C_{1\mathrm{L}} = 0$ で消え第二項が $-\int \mathcal{Y}(A)$ の BRS 変換 δ となるからである。それゆえ,

$$
\begin{aligned}
\mathit{\Gamma}[1, A_{\mathrm{R}}, A_{\mathrm{L}}] \; &= \; -\int \mathcal{Y}(A_{\mathrm{R}}, A_{\mathrm{L}}) \\
&\qquad + \text{（ベクトル的ゲージ変換で不変な項）} \qquad (29)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。ここで $A_{\mathrm{R}}, A_{\mathrm{L}}$ に $A_{\mathrm{R}}^{U^{-1}}, A_{\mathrm{L}}$を代入すれば, カイラル・ゲージ変換は $A_{\mathrm{R}}^{U^{-1}}, A_{\mathrm{L}}$に対しベクトル的ゲージ変換 (27) となるから, $-\int \mathcal{Y}(A_{\mathrm{R}}^{U^{-1}}, A_{\mathrm{L}})$ 以外の項は, カイラルゲージ不変な斉次方程式 $\delta\mathit{\Gamma} = 0$ の解となり, 落としてよいことがわかる。したがって, (25) の特解$\mathit{\Gamma}_{\mathrm{WZW}}[U, A_{\mathrm{R}}, A_{\mathrm{L}}]$ は, $-\int \mathcal{Y}(A_{\mathrm{R}}^{U^{-1}}, A_{\mathrm{L}})$ $-$[(26) 右辺] で与えられる。(26) の右辺に対してさらに, 前の (14) から (23) に至る変形を行えば,

$$
\begin{aligned}
&\mathit{\Gamma}_{\mathrm{WZW}}[U, A_{\mathrm{R}}, A_{\mathrm{L}}] \\
&\quad = \frac{iN}{24\pi^2}\biggl\{ \int_{M^4} \Bigl[\alpha_4(dU \cdot U^{-1}, A_{\mathrm{R}}) - \Bigl(\frac{24\pi^2}{iN}\Bigr)\mathcal{Y}(A_{\mathrm{R}}^{U^{-1}}, A_{\mathrm{L}})\Bigr] \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{10}\int_{M^4 \times I} \mathrm{tr}\Bigl[\Bigl(U^{-1}(x,t)(d+\delta)U(x,t)\Bigr)^5\Bigr]\biggr\} \qquad (30)
\end{aligned}
$$

が得られる。ただし $U(x,t) \in G$ は, $U(x,0) = 1$ と $U(x,1) = U(x)$ とをつなぐ任意の経路である。

G_{R}変換のみを利用して求めたこの表式 (30) は, 右・左の入れ換え — パリティ共役変換

$$
A_{\mathrm{R}} \;\longleftrightarrow\; A_{\mathrm{L}} \;, \quad U \;\longleftrightarrow\; U^{-1} \qquad (31)
$$

の下での（反）対称性が明白ではない。しかしながら, (21) のα_4および **9 - 2** (37) の $\mathcal{Y}$ の表式を用いて (30) をあらわに A_{R}, A_{L}, U で書き表してみれば,

次のような（反）対称性の明白な表式が得られる[†]:

$$（変更無し） \tag{32}$$

$$（変更無し） \tag{33}$$

ただし, p.c. は前項にパリティ共役変換 (31) を行って得られる項を表し, d はすぐうしろの項のみを微分するものとする。(32), (33) がカイラル群の場合の Wess-Zumino-Witten 項の最終表式である。

277 頁の略解 **9.8** を次のように書き換えます。

9.8　**9 - 3** (32) の $-Z$（負号に注意）への, それぞれの項の寄与は,

$$\begin{aligned}
\alpha_4(V, A_{\mathrm{R}}) \quad &\longrightarrow \quad \mathrm{tr}\Big[V(A_{\mathrm{R}}dA_{\mathrm{R}} + dA_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{R}} + A_{\mathrm{R}}^3) - \frac{1}{2}VA_{\mathrm{R}}VA_{\mathrm{R}} - V^3A_{\mathrm{R}}\Big] \\
-\mathcal{Y}(A_{\mathrm{R}}^{U^{-1}}, A_{\mathrm{L}}) \quad &\longrightarrow \quad \mathrm{tr}\Big[(F_{\mathrm{R}}^{U^{-1}} + F_{\mathrm{L}})(A_{\mathrm{R}}^{U^{-1}}A_{\mathrm{L}} - A_{\mathrm{L}}A_{\mathrm{R}}^{U^{-1}}) \\
&\qquad -((A_{\mathrm{R}}^{U^{-1}})^3A_{\mathrm{L}} - A_{\mathrm{L}}^3A_{\mathrm{R}}^{U^{-1}}) + \frac{1}{2}A_{\mathrm{R}}^{U^{-1}}A_{\mathrm{L}}A_{\mathrm{R}}^{U^{-1}}A_{\mathrm{L}}\Big]
\end{aligned}$$

である。ただし, $V \equiv dU \cdot U^{-1} = -UdU^{-1}$を用いた。$v \equiv dU^{-1} \cdot U = -U^{-1}dU$ を導入し, $A_{\mathrm{R}}^{U^{-1}} = U^{-1}A_{\mathrm{R}}U - v$ の表式を代入して辛抱強く計算すればよい。このとき, **9 - 3** (32) 下の脚注に示した全微分項 $d(A_{\mathrm{R}}UA_{\mathrm{L}}dU^{-1})$ を加えることに注意せよ。また, 恒等式 $dv = v^2$や $UvU^{-1} = -V$ 等を用いると便利である。

---

† (30) から (33) の結果を得る際に次の全微分項を落とした:

$$(-iN/48\pi^2)\int_{M^4} d(A_{\mathrm{R}}UA_{\mathrm{L}}dU^{-1}).$$