1996.3.1

ゲージ場の量子論 II 訂正

221 ページ 18 行目の「 今度の場合, 前と異なり, ... 」から、224 ページ 3 行目の「 ... の最終表式である。」までを、次のように書き換えます。

今度の場合, 前と異なり, NG ボソン変数 $U(x) \in G$ は, ゲージ群 $G_{\rm R} \times G_{\rm L} \simeq G \times G$ の元の半分しかない。そこで, $G_{\rm R}$ か $G_{\rm L}$ のどちらか一方のカイラル変換だけを次々に行なっていって, $U(x)$ を 1 まで持っていくことにする。ここでは $G_{\rm R}$ で行なうことにすれば, 前の $(8)\sim(12)$ と同様にして次式を得る:

$$\begin{aligned} &\mathit{\Gamma}[1, A_{\rm R}^{U^{-1}}, A_{\rm L}] - \mathit{\Gamma}[U, A_{\rm R}, A_{\rm L}] \\ &\quad = -\frac{iN}{24\pi^2} \int_{M^4 \times I} \omega_4^1(\widetilde{U}(t)\delta\widetilde{U}^{-1}(t), A_{\rm R}^{\widetilde{U}(t)U^{-1}}). \end{aligned} \tag{26}$$

今度の場合, "積分定数項" $\mathit{\Gamma}[1, A_{\rm R}^{U^{-1}}, A_{\rm L}]$ は, 残念ながら, カイラル・ゲージ不変でないので落とすわけにゆかない。実際, カイラル・ゲージ変換 (24) の有限変換で, U は, $U \to U' = h_{\rm R} U h_{\rm L}^{-1}$ $(h_{\rm R} \in G_{\rm R}, h_{\rm L} \in G_{\rm L})$ と変換するから, $A_{\rm R}^{U^{-1}}$, $A_{\rm L}$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} \left(A_{\rm R}^{U^{-1}}\right)' &= \left(A_{\rm R}^{h_{\rm R}}\right)^{h_{\rm L} U^{-1} h_{\rm R}^{-1}} = A_{\rm R}^{h_{\rm L} U^{-1}} = \left(A_{\rm R}^{U^{-1}}\right)^{h_{\rm L}} \\ (A_{\rm L})' &= (A_{\rm L})^{h_{\rm L}} \end{aligned} \tag{27}$$

なる変換を受ける。[ここで $(A^{g_1})^{g_2} = A^{g_2 g_1}$ を用いた。]　(27) 式は, $A_{\rm R}^{U^{-1}}$ と $A_{\rm L}$ が共に $h_{\rm L}$ で変換されること, すなわち, 右・左共通の "ベクトル的"ゲージ変換 $h_{\rm V} = h_{\rm L}$ を受けることを意味している。それゆえ, $\mathit{\Gamma}[1, A_{\rm R}^{U^{-1}}, A_{\rm L}]$ の関数形を決めるには, $\mathit{\Gamma}[1, A_{\rm R}, A_{\rm L}]$ の "ベクトル的"ゲージ変換の無限小形 $v_{\rm R} = v_{\rm L} = v$ の下での変換性のみを調べればよい。この変換の下で, $U(x) = 1$ は不変にとどまるから, $\mathit{\Gamma}[1, A_{\rm R}, A_{\rm L}]$ は (25) より

$$\delta\mathit{\Gamma}[1, A_{\rm R}, A_{\rm L}] = -\frac{iN}{24\pi^2} \int_{M^4} \left[\omega_4^1(v, A_{\rm R}) - \omega_4^1(v, A_{\rm L})\right] \tag{28}$$

を満たす。ところが, この式は, よく見れば **9 - 2** に与えた Bardeen の相殺項 (の逆符号のもの) $-\int \mathcal{Y}(A)$ の満たす式と同一である。なぜなら, **9 - 2** (35) (の $-iN/24\pi^2$ 倍) で, ベクトル的変換の場合に対応して $C_{1\mathrm{R}} = C_{1\mathrm{L}} = v$ と置いて v の一次項の $\int_{M^4}$ 積分を見れば, 左辺が (28) の右辺に一致し, 右辺は第一項が $C_{1\mathrm{R}} - C_{1\mathrm{L}} = 0$ で消え第二項が $-\int \mathcal{Y}(A)$ の BRS 変換 δ となるからである。それゆえ,

$$\begin{aligned} \mathit{\Gamma}[1, A_{\mathrm{R}}, A_{\mathrm{L}}] \;\; &= \;\; -\int \mathcal{Y}(A_{\mathrm{R}}, A_{\mathrm{L}}) \\ &\qquad +(\text{ベクトル的ゲージ変換で不変な項}) \end{aligned} \tag{29}$$

が成り立つ。ここで $A_{\mathrm{R}}, A_{\mathrm{L}}$ に $A_{\mathrm{R}}^{U^{-1}}, A_{\mathrm{L}}$を代入すれば, カイラル･ゲージ変換は $A_{\mathrm{R}}^{U^{-1}}, A_{\mathrm{L}}$に対しベクトル的ゲージ変換 (27) となるから, $-\int \mathcal{Y}(A_{\mathrm{R}}^{U^{-1}}, A_{\mathrm{L}})$ 以外の項は, カイラルゲージ不変な斉次方程式 $\delta\mathit{\Gamma} = 0$ の解となり, 落としてよいことがわかる。したがって, (25) の特解$\mathit{\Gamma}_{\mathrm{WZW}}[U, A_{\mathrm{R}}, A_{\mathrm{L}}]$ は, $-\int \mathcal{Y}(A_{\mathrm{R}}^{U^{-1}}, A_{\mathrm{L}})$ $-[(26)$ 右辺$]$ で与えられる。(26) の右辺に対してさらに, 前の (14) から (23) に至る変形を行えば,

$$\begin{aligned} &\mathit{\Gamma}_{\mathrm{WZW}}[U, A_{\mathrm{R}}, A_{\mathrm{L}}] \\ &\quad = \frac{iN}{24\pi^2}\Bigg\{ \int_{M^4} \Big[\alpha_4(dU\cdot U^{-1}, A_{\mathrm{R}}) - \Big(\frac{24\pi^2}{iN}\Big)\mathcal{Y}(A_{\mathrm{R}}^{U^{-1}}, A_{\mathrm{L}})\Big] \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{10}\int_{M^4\times I} \mathrm{tr}\Big[\Big(U^{-1}(x,t)(d+\delta)U(x,t)\Big)^5\Big] \Bigg\} \end{aligned} \tag{30}$$

が得られる。ただし $U(x,t) \in G$ は, $U(x,0) = 1$ と $U(x,1) = U(x)$ とをつなぐ任意の経路である。

G_{R}変換のみを利用して求めたこの表式 (30) は, 右・左の入れ換え — パリティ共役変換

$$A_{\mathrm{R}} \;\longleftrightarrow\; A_{\mathrm{L}}\ , \quad U \;\longleftrightarrow\; U^{-1} \tag{31}$$

の下での (反) 対称性が明白ではない。しかしながら, (21) のα_4および **9 - 2** (37) の $\mathcal{Y}$ の表式を用いて (30) をあらわに A_{R}, A_{L}, U で書き表してみれば,

次のような (反) 対称性の明白な表式が得られる†:

$$\text{(変更無し)} \tag{32}$$

$$\text{(変更無し)} \tag{33}$$

ただし, p.c. は前項にパリティ共役変換 (31) を行って得られる項を表し, d はすぐうしろの項のみを微分するものとする。(32), (33) がカイラル群の場合の Wess-Zumino-Witten 項の最終表式である。

277 頁の略解 **9.8** を次のように書き換えます。

9.8　9 - 3 (32) の $-Z$ (負号に注意) への, それぞれの項の寄与は,

$$\begin{aligned}
\alpha_4(V, A_{\rm R}) &\longrightarrow \mathrm{tr}\left[V(A_{\rm R}dA_{\rm R} + dA_{\rm R}A_{\rm R} + A_{\rm R}^3) - \frac{1}{2}VA_{\rm R}VA_{\rm R} - V^3A_{\rm R}\right] \\
-\mathcal{Y}(A_{\rm R}^{U^{-1}}, A_{\rm L}) &\longrightarrow \mathrm{tr}\Big[(F_{\rm R}^{U^{-1}} + F_{\rm L})(A_{\rm R}^{U^{-1}}A_{\rm L} - A_{\rm L}A_{\rm R}^{U^{-1}}) \\
&\qquad -((A_{\rm R}^{U^{-1}})^3A_{\rm L} - A_{\rm L}^3A_{\rm R}^{U^{-1}}) + \frac{1}{2}A_{\rm R}^{U^{-1}}A_{\rm L}A_{\rm R}^{U^{-1}}A_{\rm L}\Big]
\end{aligned}$$

である。ただし, $V \equiv dU\cdot U^{-1} = -UdU^{-1}$を用いた。$v \equiv dU^{-1}\cdot U = -U^{-1}dU$ を導入し, $A_{\rm R}^{U^{-1}} = U^{-1}A_{\rm R}U - v$ の表式を代入して辛抱強く計算すればよい。このとき, **9 - 3** (32) 下の脚注に示した全微分項 $d(A_{\rm R}UA_{\rm L}dU^{-1})$ を加えることに注意せよ。また, 恒等式 $dv = v^2$や $UvU^{-1} = -V$ 等を用いると便利である。

---

† (30) から (33) の結果を得る際に次の全微分項を落とした:

$$(-iN/48\pi^2)\int_{M^4} d(A_{\rm R}UA_{\rm L}dU^{-1}).$$