付録B (18) 式の証明

Appendix B の (18) 式は、Caseの論文 (K. M. Case, Phys. Rev. 97 (1955) 810-823) に出ているものです。彼の証明は憶えていませんが次のように証明できます:

命題

ローレンツ共変性から、一般に

$$\frac{1}{m!}\gamma^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}\,\gamma^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_\ell}\,\gamma_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m} = (-)^{\left[\frac{m}{2}\right]}\,d_{m\ell}\,\gamma^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_\ell} \tag{18}$$

と書けるが、この係数 $d_{m\ell}$ は

$$d_{m\ell} = (-)^{m\ell}\{\text{多項式}\,(1+x)^{n-\ell}(1-x)^\ell\text{の中の}\,x^m\text{の係数}\}$$

で与えられる。

証明) (18) 式左辺で, $(\nu_1\nu_2\cdots\nu_\ell) = (12\cdots\ell)$ の場合を考えれば充分だから、

$$\text{(18) 式左辺} \times (-)^{\left[\frac{m}{2}\right]} = \sum_{\mu_1>\mu_2>\cdots>\mu_m} \gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_m}\,(\gamma^1\gamma^2\cdots\gamma^\ell)\,\gamma_{\mu_m}\gamma_{\mu_{m-1}}\cdots\gamma_{\mu_1} \tag{1}$$

を考える。後ろの m 個の γ 行列 $\gamma_{\mu_m}, \gamma_{\mu_{m-1}}, \cdots, \gamma_{\mu_1}$ を順次 $(\gamma^1\gamma^2\cdots\gamma^\ell)$ を跳び越えさせて、前の因子 $\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_m}$ とつぶして行く。 γ_μ の 2 乗は 1 だから、この計算は、添え字の組 $(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m)$ の各々に対して (跳び越した際の符号) ± 1 が出て、それを加えれば良いことになる。しかしこれは、多項式

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & 2 & & \ell & \ell+1 & \ell+2 & & n \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
(-1)^{m\ell} & (1-x) & (1-x) & \cdots & (1-x) & (1+x) & (1+x) & \cdots & (1+x)
\end{array} \tag{2}$$

の x^m の係数に等しい。なぜなら、先ず、この多項式の x^m を与える各項は、時空が n 次元の場合の、添え字の組 $(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m)$ の取り方と 1:1 に対応しており、かつ、(跳び越した際の符号として全体の $(-1)^{m\ell}$ 以外に)、 μ_i が 1, $\cdots$, ℓ なら、-1、 μ_i が $\ell+1$, $\cdots$, n なら、$+1$、の符号が各々余分に出るからである。 (証明終わり)

Remark: この公式からすぐにわかる面白い等式。

ℓ が次元 $n = 2k$ の半分の時 $(\ell = n/2 = k)$ は、$(1+x)^{n-\ell}(1-x)^\ell = (1-x^2)^k$ だから、x の奇数ベキは全て無くなる。したがって、

$$\gamma^{\text{奇数個}\mu}\,\gamma^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_k}\,\gamma_{\text{奇数個}\mu} = 0\ . \tag{3}$$

よって、例えば、

時空 4 次元	時空 6 次元	時空 10 次元
$\gamma^\mu\,\sigma^{\nu\rho}\,\gamma_\mu = 0$	$\gamma^\mu\,\gamma^{\nu\rho\sigma}\,\gamma_\mu = 0$ $\gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3}\,\gamma^{\nu\rho\sigma}\,\gamma_{\mu_1\mu_2\mu_3} = 0$	$\gamma^\mu\,\gamma^{\nu_1\cdots\nu_5}\,\gamma_\mu = 0$ $\gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3}\,\gamma^{\nu_1\cdots\nu_5}\,\gamma_{\mu_1\mu_2\mu_3} = 0$ $\gamma^{\mu_1\cdots\mu_5}\,\gamma^{\nu_1\cdots\nu_5}\,\gamma_{\mu_1\cdots\mu_5} = 0$