

修士論文

宇宙論的起源の背景重力波による余剰次元の探求

Probing the Extra Dimensions
with Gravitational Wave Background
of Cosmological Origin

平松尚志

東京大学大学院 理学系研究科
物理学専攻 宇宙理論研究室

2004年1月

本論文の概要

一般相対性理論は、重力波の存在を予言している。近年の観測技術の発展により、その直接観測が現実味を帯びてきている。重力波には、「1つ1つの信号が分離可能な重力波」と、「全点からランダムにやって来て分離不可能な重力波」(背景重力波)がある。背景重力波はさらに、天体起源のものと、初期宇宙起源のものに分けられ、後者については、初期宇宙を直接プローブする唯一の手段であると考えられている。

初期宇宙では高エネルギー物理が重要になり、その帰結の一つとして余剰次元の存在がある。我々は現在の宇宙が4次元であると認識しているが、力の統一の観点から見ると、宇宙はより高い次元を持った時空であることが自然で、4次元以外の余剰次元はコンパクト化していると考えられる。近年、超弦理論やM理論の進展に伴い、ブレーン宇宙という全く新しいタイプのコンパクト化シナリオが現れ、高次元宇宙の有力なモデルとして注目されている。このモデルでは、余剰次元が無限に広いにも関わらず、実効的なコンパクト化がなされ、我々が住むブレーン上でニュートン重力が再現するというのが特徴である。

本論文では、こうした高次元宇宙モデルの検証の手段として、インフレーション起源の背景重力波を考え、高次元宇宙の効果が背景重力波のスペクトルにどのような影響を与えるかを考察した。現在、ニュートン重力の実験より、余剰次元のスケールは大きくても0.1mm程度以下と制限されている。しかし、余剰次元のスケールがこれを遥かに下回る場合、その検証は、重力波に委ねざるを得ない。生成当時にそのようなスケールであった背景重力波は、宇宙膨張で引き延ばされ、現在は $f_{\text{crit}} = 0.2\text{mHz}$ のスケールになっている。この周波数帯は、スペース重力波アンテナ LISA が感度を持つところであり、背景重力波の検出と共に、高次元宇宙の直接検証という期待が高まっている。

高次元宇宙を伝搬する重力波には、ブレーン上を伝搬する 0-mode と、余剰次元方向に伝搬する Kaluza-Klein(KK) mode の2種類のモードが存在する。インフレーションで生成された背景重力波は、ほとんどが 0-mode であることが知られているが、インフレーション後の進化において、宇宙膨張則の変化と KK-mode の励起により、生成された重力波の振幅に影響が出ることが指摘されている。

本研究では、こうした効果の影響を定量的に評価するため、数値計算を行い、インフレーション後の輻射優勢期における重力波の発展方程式を解き、重力波の振る舞いを定量的に調べた。その結果、超地平線スケールの重力波が地平線に再突入する際、ブレーン上での重力波の振幅が4次元の理論から予想される振幅より小さくなることが分かった。さらに、波動方程式を低エネルギー展開を用いて近似解析したところ、時間方向と余剰次元方向に変数分離できない形になっているために KK-mode が励起されることが分かった。このことは、重力波のスペクトルが4次元に比べて変更を受けることを意味し、 $f \lesssim f_{\text{crit}}$

においてスペクトルの振幅は小さくなる。振幅の減少は f_{crit} に近づくにつれて顕著であり、スペクトル全体が大きく変わることが予想される。

目次

1	はじめに	1
2	重力波	5
2.1	一般相対性理論	5
2.2	アインシュタイン方程式の線形化	7
2.2.1	線形化 I: 平坦な時空での伝播方程式	7
2.2.2	ゲージ変換	8
2.2.3	重力波の偏極	8
2.2.4	線形化 II: 曲がった時空での伝播方程式	10
2.3	重力波の生成	13
2.3.1	四重極公式	13
2.3.2	Isaacson の公式	15
2.3.3	重力波で運ばれるエネルギーと運動量	16
3	検出装置	21
3.1	観測の歴史	21
3.2	共振型検出器	21
3.3	レーザー干渉計	25
3.3.1	検出原理	25
3.3.2	稼働中のものと将来計画	27
3.3.3	干渉計の雑音源	31
3.3.4	LISA の雑音源	34
4	データ解析	35
4.1	最適フィルター	35
4.2	背景重力波に対するデータ解析	37
4.2.1	背景重力波	38
4.2.2	2 台の検出器の相関	39
4.2.3	最適フィルター	44
4.2.4	重力波の検出基準	45
4.2.5	背景重力波に対する稼働中の干渉計の感度	47
4.2.6	一般的なデータ解析	48

5	重力波源	50
5.1	天体からの重力波	50
5.1.1	超新星爆発	52
5.1.2	中性子星の脈動	52
5.1.3	コンパクトオブジェクトの連星系	54
5.2	背景重力波の起源	57
5.2.1	天体起源	57
5.2.2	初期宇宙起源	59
5.3	背景重力波に対する制限	62
5.3.1	ビッグバン元素合成 (BBN)	63
5.3.2	パルサータイミング	65
5.3.3	宇宙マイクロ波背景放射 (CMB)	65
6	高次元宇宙モデルにおけるインフレーション起源の背景重力波	68
6.1	インフレーション	68
6.1.1	ビッグバン宇宙論の問題点	68
6.1.2	インフレーションのダイナミクス	69
6.2	インフレーション起源の背景重力波	71
6.3	高次元宇宙モデル	76
6.3.1	Randall-Sundrum I (RSI)	77
6.3.2	Randall-Sundrum II (RSII)	79
6.3.3	RSIIモデルに基づくフリードマン宇宙の再現	81
6.4	背景重力波に現れる高次元効果	83
6.5	重力波の波動方程式	86
6.5.1	波動方程式の導出	86
6.5.2	ドジッターインフレーション	86
6.5.3	低エネルギー極限	88
6.6	数値計算の準備	90
6.7	数値計算の結果	94
6.8	低エネルギー展開による解析	98
6.9	結論	99
7	まとめと展望	102
	謝辞	104
	付録 A 数値計算	105
A.1	スペクトル法	105
A.2	予測子・修正子法	107

付 録 B 5次元宇宙モデル	109
B.1 アインシュタインテンソル	109
B.2 Israel 条件	111
B.3 ブレイン上のフリードマン方程式	113
B.4 ブレイン上のエネルギー保存則	114
B.5 波動方程式	114
B.6 Gradient Expansion	116

第1章

はじめに

アインシュタイン (A.Einstein) によって一般相対性理論 [1] が提唱されて、まもなく90年が経とうとしている。この間、一般相対性理論が宇宙論に及ぼした影響は計り知れず、観測においても様々な面から支持されており、いまや宇宙論の中樞を担うようになったと言える。

その一般相対性理論は、質量 (エネルギー) があればその周囲の時空がゆがむことを予言した。これが初めて確かめられたのは、理論が提唱されて3年後の1919年に遡る。エディントン (A.Eddington) が、その年の皆既日食を利用して太陽の方向にある星の位置を測定し、それが一般相対性理論の予言どおりにずれることを明らかにした。この現象は、いまでは重力レンズとして知られている。このような静的な時空のゆがみに対し、一般相対性理論は、時空のわずかな歪みが波動として伝わることも予言した。これを重力波という。重力波を観測することの重要性は、一般相対性理論の正しさを確固たるものにするという点だけでなく、天体物理学や宇宙論においていまだ解明されていない幾多の謎を解明できるというところにもある。例えば天体物理学では、中性子星の表面構造、ブラックホールの形成、初期天体の形成などがあり、宇宙論においては、重力のみでしか相互作用をしないダークマターの特定やインフレーション直後の初期宇宙の直接観測などが考えられる。

幸いにも、観測技術の目覚ましい発展により電波からガンマ線までの様々な波長の光を用いた観測や様々な宇宙線の検出が可能になり、これまで理論的にしか考えられてこなかった事象が次々と解明されてきている。これによって、宇宙論は精密科学の領域に達したと言えよう。重力波の観測も例外ではない。たしかに、重力波の直接観測にはまだ成功していないが、重力波の観測技術もこの10年の間に目覚ましい発展を遂げた。いまでは、太陽-地球間の距離に対して、原子一個分の長さの揺らぎをも検出できるまでに感度が上がっている。重力波の直接観測の成功も、まさに時間の問題であると言える。

重力波は、その性質から大きく二つのカテゴリーに分けられる。まず一つめは「一つ一つの信号が分離可能な重力波」である。これには、超新星爆発や連星中性子星の合体などの時にバーストとして放出されるものと、定常的に公転している連星系や中性子星の自転などに起因する連続波として放出されるものがある。この種の重力波には天体に関する詳細な情報が含まれており、あまり知られていない中性子星の性質やガンマ線バーストの正体など、数多くの謎が明らかになる可能性を秘めている。もう一つは、「全天からランダムにやって来て個々の信号を分離できない重力波」である。これは背景重力波とよばれている。背景重力波の中でも、特にインフレーション期の時空の量子揺らぎによって生成された背景重力波は、我々が観測できるもっとも古い情報を持っていると考えられている。宇宙マイクロ波背景放射は、誕生して40万年後の宇宙の姿を明らかにしたが、背景重力波は実に誕生して 10^{-44} 秒後の宇宙にまで遡ることができるのである。

このインフレーション起源の背景重力波には、地上の実験では到達し得ない、超高エネルギー実験の道具という一面もある。その実験対象として現在注目されているものに、高

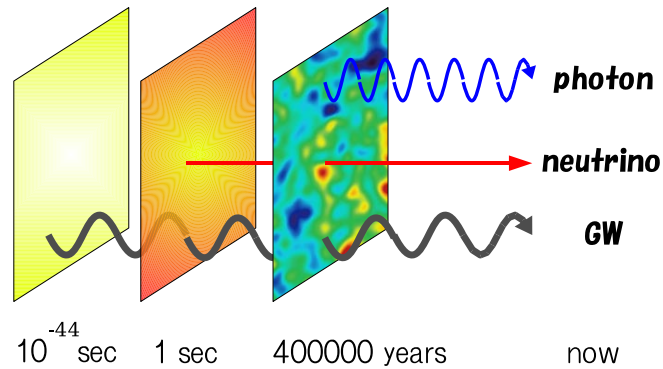


図 1.1: 初期宇宙で生成された背景重力波，背景ニュートリノ，背景マイクロ波 (CMB)。重力波が，もっとも古い宇宙の情報を持っている。

次元宇宙理論がある。近年の素粒子理論において展開されている超弦理論や M 理論などの統一理論は，我々の住む宇宙が 4 次元よりも高い次元を持つ空間に存在していることを示唆している。このような高次元宇宙の描像は，1920 年代のカルツァ (T.Kaluza) とクライン (O.Klein) による統一理論に端を発している。彼らの理論は，我々の住む 4 次元の世界に，小さく丸まった 5 次元の空間を付けたものである。これにより電磁場と重力場の統一を試みたのだが，彼らの理論は様々な問題から否定されることになった。その後，高次元の観点から力の統一を図るといふ彼らのアイデアは超弦理論へと受け継がれ，今に至っている。

たとえ高次元空間に我々が住んでいたとしても，我々が実際に認識しているのは 4 次元であるから，カルツァ・クライン理論のように，残りの次元はコンパクト化されていなければならない。この高次元のコンパクト化に対して，ランドール (L.Randall) とサンドラム (R.Sundrum) は新たなアイデアを提案した。彼らのアイデアは，5 次元の反ドジッター (anti de Sitter) 空間を考え，そこに我々の住むブレイン (brane) とよばれる膜状の宇宙を据えるというものである。反ドジッター空間には曲率が存在する。その曲率半径がある程度小さければ，たとえ反ドジッター空間の体積が無限大であったとしても，曲率によって実効的に 5 次元がコンパクト化され，ブレイン上で 4 次元の重力の法則が再現するのである。

ブレイン宇宙という考え方は，1990 年代半ばに超弦理論で発見された D-ブレインの流れを汲んでいる。超弦理論では，フェルミオンに対応する開いた弦が，その端を D-ブレインとよばれる膜に拘束されることで，D-ブレイン上にゲージ場を再現する。一方で，閉じた弦として記述される重力は高次元の空間を自由に伝播できるのである。このアイデアが相対論で生かされ，ブレイン宇宙論が誕生した。

最初，ランドールとサンドラムは，反ドジッター空間中に 2 枚のブレインを置いて反ドジッター空間の体積を有限にし，その片方のブレインに我々が住んでいると仮定することで，「質量の階層性問題」を解決できることを示した。質量の階層性とは，電弱相互作用の強さ (10^3 GeV) と重力相互作用の強さ (10^{19} GeV) との違いがあまりにも大きすぎる

ことをいう。この宇宙モデルは RSI モデルとよばれている。続いて彼らは、我々が住んでいない方のブレインを無限大の彼方に引き離すモデルを考案した。このモデルでは、質量の階層性問題は解決できないものの、先ほど述べた実効的なコンパクト化がなされることを示した。この宇宙モデルは RSII モデルとよばれている。RS モデルの出現によって、宇宙論の分野でも高次元の研究が飛躍的に進むこととなった。

このような流れを受けて、次に考えなければならないのは、我々が住んでいる世界が本当に高次元であるのかを検証することである。そこで、始めに述べた背景重力波が注目されるのである。もし、本当に高次元であれば、背景重力波が生成されたインフレーション直後の宇宙は、今でこそ見えなくなっている高次元空間と同じくらいの大きさであったと考えられる。そうなれば背景重力波の生成や伝播にも影響が現れるはずで、その痕跡を今も保ちつつけていると考えられる。そこで本研究では、高次元宇宙モデルにおけるインフレーション起源の背景重力波の振る舞いについて調べた。ところが、宇宙膨張の効果を取り入れた高次元宇宙モデルでは、重力波の波動方程式が解析的に解くことができない。そこで、本研究では数値計算の手法を用いた。その解析により、背景重力波の振幅が4次元の場合に比べて小さくなることを、初めて定量的に示すことができた。

本論文では、まず、インフレーション起源の背景重力波に関連する研究として、重力波の基礎理論、観測機器、検出データの解析方法、重力波源についてレビューする。そして、後半では高次元宇宙モデルに焦点を当てて、インフレーション起源の背景重力波の進化について考察する。構成は以下のとおりである。

第2章では重力波を背景時空からの摂動として扱い、アインシュタイン方程式を線形化することで重力波の発展方程式を導く。そして、その基本的な性質について述べ、質量の四重極モーメントの変動から放射される重力波の振幅、エネルギーなどを定式化する。

第3章では、重力波の観測に使用する2種類の装置について述べる。特に、背景重力波の観測を有望視されているレーザー干渉計に関しては、観測時に重要となる様々な雑音源についても述べる。

第4章では、検出器から得られたデータの解析方法を述べる。一般的に、データ解析にはマッチドフィルターという手法が用いられるが、背景重力波の検出には、さらに、複数の検出器の相関をとるという手法が不可欠になる。その背景について詳しく述べていく。

第5章では、重力波の検出が期待される連星中性子星などの天体や、天体起源、宇宙論的起源の背景重力波の振幅の見積もりを行う。第4章のマッチドフィルターで用いるフィルターは、この章で議論する重力波の波形やスペクトルの理論的予言を必要とする。

第6章では、筆者が修士課程で行った研究である、高次元宇宙におけるインフレーション起源の背景重力波の振る舞いについて述べる。前半では、本研究の背景となるインフレーションとそこで生成される背景重力波について詳しく述べる。後半では、Randall-Sundrum モデルを考えて、そこでの背景重力波の定性的な振る舞いを議論し、数値計算の手法を用いて定量的な解析をする。

第7章では本論文のまとめと今後の展望について述べる。また、本研究に用いた数値計算の方法や詳細な計算などについては、最後の付録にまとめた。

本論文で用いる数式の記法は次の通りである。

ベクトルやテンソルの添字

$$\begin{aligned} a, b, c, i, j, k, \dots &= 1, 2, 3 \\ \mu, \nu, \alpha, \beta, \dots &= 0, 1, 2, 3 \\ A, B, C, \dots &= 0, 1, 2, 3, 5 \quad (6 \text{ 章のみ}) \end{aligned}$$

テンソルの微分 微分記号は用いずに、テンソルの添え字で表す。

$$\begin{aligned} T^\mu{}_{\nu;\alpha} &\equiv \partial_\alpha T^\mu{}_\nu \\ T^\mu{}_{\nu;\alpha} &\equiv \nabla_\alpha T^\mu{}_\nu \\ T^\mu{}_{\nu|\alpha} &\equiv \overset{(3)}{\nabla}_\alpha T^\mu{}_\nu \end{aligned}$$

計量の符合

$$g_{\mu\nu} = (-, +, +, +, \dots), \quad (1.1)$$

$$\eta_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1, \dots). \quad (1.2)$$

単位系 5章までは4次元の話なので、重力定数は G と書く。6章は5次元の重力定数と区別する必要があるため、 G_4 と表記する。6.2節までは G と c を明示するが、それ以降は簡単のために、 $G_4 = c = 1$ の単位系を用いる。また、プランク質量は $M_{\text{pl}} \equiv (8\pi G_4)^{-1/2}$ と定義する。

第2章 重力波

この章では、重力波を扱うための数学的準備を行う。一般相対性理論はリーマン幾何学を用いて記述され、アインシュタイン方程式によって物質分布と時空の曲率が結び付いている。重力波は、そのようにして決まった背景時空からの摂動として記述される。重力波の発展方程式は、アインシュタイン方程式をその摂動について書き下すことで導くことができる。

2.1節では、一般相対性理論における曲率などの量をまとめる。2.2節では、それを踏まえてアインシュタイン方程式の線形化を行い、重力波の伝播方程式を導く。2.3節では、天体などから生成される重力波の振幅を見積もるのに有用な四重極公式を導き、さらに重力波によって運ばれる運動量やエネルギーについて述べる。

III Section 2.1 III 一般相対性理論

我々の住む時空の数学的モデルとしてリーマン (Riemann) 多様体を考える。この多様体上で定義される二本のベクトルを比較するとき、何らかの方法で同一の点に持ってきて比較しなければならない。その「平行移動」の方法にはいろいろ存在するが、一般相対性理論では、リーマン多様体の計量からその方法を一意的に決めることができる Levi-Civita 接続を採用する。この接続は、いわゆるアファイン接続の特殊な型である。平行移動して同一の点に持ってきたベクトル W^μ の変化率、すなわち共変微分を ∇W で書くと、アファイン接続による平行移動の場合、その共変微分は、

$$\nabla_\mu W^\nu \equiv \frac{\partial W^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} W^\lambda \quad (2.1)$$

となる。ここで $\Gamma^\nu_{\mu\lambda}$ がアファイン接続係数である。レヴィ・チビタ (Levi-Civita) 接続は、更に、多様体上に振れがない (振率がゼロ) という条件を課したものである。ここでは、

$$\Gamma^\nu_{\mu\lambda} = \Gamma^\nu_{\lambda\mu} \quad (2.2)$$

という条件を課すことに等しい。この条件を満たす接続係数を、特にクリストッフエル (Christoffel) 記号と呼ぶ。これは計量から一意的に決まり、

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\nu g_{\beta\mu} + \partial_\mu g_{\beta\nu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) \quad (2.3)$$

となる。

この量から、いま考えている多様体の曲率を定義できる。まず、リーマン曲率テンソル (Riemann curvature tensor) は、

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) V^\alpha = R^\alpha_{\beta\mu\nu} V^\beta \quad (2.4)$$

と定義される。これも、

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha{}_{\nu\beta} - \partial_\nu \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma} \Gamma^\gamma{}_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\beta} \Gamma^\gamma{}_{\mu\gamma} \quad (2.5)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\beta \partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\alpha \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\alpha \partial_\mu g_{\beta\nu} - \partial_\beta \partial_\nu g_{\alpha\mu}) \\ + g_{\lambda\sigma} (\Gamma^\lambda{}_{\beta\mu} \Gamma^\sigma{}_{\alpha\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\beta\nu} \Gamma^\sigma{}_{\alpha\mu}) \quad (2.6)$$

と計量で書くことができる。このテンソルには次の対称性がある：

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} \quad (2.7)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (2.8)$$

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} + R^\alpha{}_{\mu\nu\beta} + R^\alpha{}_{\nu\beta\mu} = 0 \quad (2.9)$$

特に最後の式は、第一ビアンキ恒等式 (Bianchi identity) と言われる。多様体の次元を n とすると、これらの対称性から独立成分は $n^2(n^2 - 1)/12$ 個となる。

リーマン曲率テンソルの1つ目と3つ目の足を縮約すると、リッチテンソル (Ricci tensor) が得られる。

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} = g^{\alpha\lambda} R_{\alpha\mu\lambda\nu} \quad (2.10)$$

$$= \partial_\lambda \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \Gamma^\sigma{}_{\lambda\sigma} - \Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} \quad (2.11)$$

このテンソルは、対称テンソル $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$ となっている。

更に縮約を取ると、スカラー曲率 (scalar curvature) が得られる。

$$R \equiv R^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.12)$$

4次元の場合、リーマンテンソルの独立成分は20個であるのに対し、リッチテンソルは10個である。つまり、リーマンテンソルには、リッチテンソルとは独立な成分も含まれていることになる。この成分は、

$$C^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} - (\delta^\alpha_{[\mu} R_{\nu]\beta} + R^\alpha{}_{[\mu} g_{\nu]\beta}) + \frac{1}{3} \delta^\alpha_{[\mu} g_{\nu]\beta} R \quad (2.13)$$

と表せて、これをワイル (Weyl) テンソルという。ここで、反対称記号 $A_{[a,b]} \equiv (A_{ab} - A_{ba})/2$ を用いた。このテンソルはリーマンテンソルと同じ対称性を持ち、とくに $C^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} = 0$ となる。後で分かるが、重力波はこのワイルテンソルの自由度によるものである。

アインシュタイン方程式は、

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.14)$$

である。導出は省くが、これは重力場の作用関数から変分原理によって導かれる [2]。ここで右辺は、重力場のソースを表すエネルギー運動量テンソル (energy momentum tensor) である。

IIII Section 2.2 IIII

アインシュタイン方程式の線形化

■ 2.2.1 ■

線形化I：平坦な時空での伝播方程式

重力波は、背景となる時空からの摂動として扱われる。この節では、真空中 ($T_{\mu\nu} = 0$) を伝播する重力波を考える。まずは背景となる時空がミンコフスキー (Minkowski) 時空の場合を考える。計量は、

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.15)$$

式(2.3)より、クリストッフエル記号は、

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\lambda}(h_{\lambda\mu,\nu} + h_{\lambda\nu,\mu} - h_{\mu\nu,\lambda}) \quad (2.16)$$

となる。ただし、 $\mathcal{O}(|h_{\mu\nu}|^2)$ 以上の項は無視している。リーマン曲率は式(2.5)より、

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(h_{\mu}{}^{\lambda}{}_{,\lambda\nu} + h_{\nu}{}^{\lambda}{}_{,\lambda\mu} - h_{\mu\nu}{}^{,\lambda}{}_{,\lambda} - h_{,\mu\nu}) \quad (2.17)$$

ただし、 $h \equiv \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$ である。スカラー曲率は式(2.12)より、

$$R = h_{\sigma}{}^{\lambda}{}_{,\lambda}{}^{,\sigma} - h^{,\lambda}{}_{,\lambda} \quad (2.18)$$

したがって、真空中 ($T_{\mu\nu} = 0$) のアインシュタイン方程式(2.14)は、

$$h_{\mu}{}^{\lambda}{}_{,\lambda\nu} + h_{\nu}{}^{\lambda}{}_{,\lambda\mu} - h_{\mu\nu}{}^{,\lambda}{}_{,\lambda} - h_{,\mu\nu} - h_{\sigma}{}^{\lambda}{}_{,\lambda}{}^{,\sigma} + h^{,\lambda}{}_{,\lambda} = 0 \quad (2.19)$$

となる。ここで、トレースが反転した摂動 $\bar{h}_{\mu\nu}$ を定義する。

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (2.20)$$

$$\bar{h} \equiv \eta^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu} = -h_{\mu\nu} \quad (2.21)$$

これをバーのない $h_{\mu\nu}$ について解いて式(2.19)に代入すると、

$$\bar{h}_{\nu}{}^{\lambda}{}_{,\lambda\mu} + \bar{h}_{\mu}{}^{\lambda}{}_{,\lambda\nu} - \bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\lambda}{}_{,\lambda} - \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\sigma}{}^{\lambda}{}_{,\lambda}{}^{,\sigma} = 0 \quad (2.22)$$

となる。これが重力波の波動方程式である。一見、複雑な形をしているが、次の節で述べるゲージ自由度を考慮することで、より簡単な形に書き直すことができる。

■ 2.2.2 ■ ゲージ変換

前の節で述べた摂動 $\bar{h}_{\mu\nu}$ には、基準となる背景重力場のどの点からの摂動であるかを定める自由度が残っている。これをゲージ自由度という。うまくゲージを固定することで、摂動 $h_{\mu\nu}$ の持つ物理的意味を変えずに方程式を簡単にする事ができる。

微少な座標変換（ゲージ変換） $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu - \xi^\mu$ を考える。この変換により、 $h_{\mu\nu}$ は、

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &\rightarrow h'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} h_{\alpha\beta} \\ &= h_{\mu\nu} + \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} \end{aligned} \quad (2.23)$$

と変換され、バー付きの摂動は、

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} - \xi^\alpha{}_{,\alpha} \eta_{\mu\nu} \quad (2.24)$$

と変換される。ここで座標条件、

$$\bar{h}'_{\alpha}{}^{\beta}{}_{,\beta} = 0 \quad (2.25)$$

を課すと、式 (2.22) は、

$$\bar{h}'_{\mu\nu}{}^{,\lambda}{}_{,\lambda} \equiv \square \bar{h}'_{\mu\nu} = 0 \quad (2.26)$$

となる。演算子 \square はダランベルシアン (d'Alembertian) であり、これは、カーテシアン (Cartesian) 座標を用いれば $\bar{h}'_{\mu\nu} = \Delta \bar{h}_{\mu\nu}$ という通常の波動方程式になる。では、このような座標条件を実際に課せることができるのかを考えよう。ゲージ変換後の摂動 $\bar{h}'_{\mu\nu}$ を微分すると、

$$\begin{aligned} \bar{h}'_{\alpha}{}^{\beta}{}_{,\beta} &= \bar{h}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{,\beta} + \xi_{\alpha}{}^{,\beta}{}_{,\beta} + \xi^{\beta}{}_{,\alpha\beta} - \delta_{\alpha}{}^{\beta} \xi^{\lambda}{}_{,\lambda\beta} \\ &= \bar{h}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{,\beta} + \xi_{\alpha}{}^{,\beta}{}_{,\beta} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

ゆえに、はじめに摂動 $\bar{h}_{\mu\nu}$ が与えられれば、ゲージ ξ^μ を、

$$\xi_{\alpha}{}^{,\beta}{}_{,\beta} \equiv \square \xi_{\alpha} = -\bar{h}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{,\beta} \quad (2.28)$$

の解にとれば、ゲージ変換後の $\bar{h}'_{\mu\nu}$ が式 (2.25) のようになることがわかる。

ここで出てきた波動方程式 (2.26) は、電磁場における電磁波と同じように、時空のわずかな歪み $h_{\mu\nu}$ が波動として背景の時空を伝播することを意味する。しかし、電磁波とは異なり、重力波は他の物質や場との相互作用が極めて弱い。陽子を例にとると、陽子にかかる電磁力と重力の強さの比は、

$$\frac{Gm_p^2}{e^2/4\pi\epsilon_0} \sim 10^{-39} \quad (2.29)$$

となる。つまり、遠方からやってきた重力波は重力以外のあらゆる物質や場の影響を受けることなく我々のところにやってくる事がわかる。しかし、同時に、それを検出するのも至難の業であることを意味する。

■ 2.2.3 ■ 重力波の偏極

式(2.28)を満たすゲージをとってくれば、摂動 $\bar{h}_{\mu\nu}$ の発展方程式が波動方程式になることがわかった。しかし、実はこれでもゲージ自由度を使いきっていない。式(2.28)を見ると、

$$\square\chi_\alpha = 0 \quad (2.30)$$

を満たす解を ξ_μ に加えて、 $\xi_\mu + \chi_\mu$ を新たなゲージとしても、ゲージ条件(2.25)はその形を崩さないのである。すなわち、

$$\square(\xi_\mu + \chi_\mu) = \square\xi_\mu = -\bar{h}_\alpha{}^\beta{}_{,\beta}, \quad (2.31)$$

となって式(2.28)を再び満し、重力波の方程式は式(2.26)となる。この節では、この残った自由度を使って、 $\bar{h}_{0\nu} = 0$ および $\bar{h}^\alpha{}_\alpha = 0$ とすることができることを見ていこう。

式(2.26)は通常の波動方程式であるから、平面波を解に持つ：

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \text{Re}[A_{\mu\nu} \exp(ik_\alpha x^\alpha)] \quad (2.32)$$

$A_{\mu\nu}$ は対称テンソルである。これを式(2.25)に代入すると、

$$k^\mu A_{\mu\nu} = 0 \quad (2.33)$$

を得る¹。具体的に議論を進めるため、ここで重力波が z 軸に沿って進むことを考えよう：

$$k^\mu = (\lambda, 0, 0, \lambda). \quad (2.34)$$

すると、式(2.33)より、

$$\lambda A_{0\nu} + \lambda A_{3\nu} = 0, \quad (2.35)$$

となるので、 $A_{\mu\nu}$ は行列の形で、

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & -A_{00} \\ * & A_{11} & A_{12} & -A_{01} \\ * & * & A_{22} & -A_{02} \\ * & * & * & A_{00} \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

と書くことができる。前節のゲージ自由度を使って、 $A_{\mu\nu}$ の自由度を10から6にまで減らしたことになる。

ここで式(2.30)を満たすゲージ χ^α を使ってさらにゲージ変換を行う。式(2.30)も平面波解：

$$\chi_\mu = \text{Re}[B_\mu \exp(ik_\alpha x^\alpha)], \quad (2.37)$$

¹背景時空は真空でも、 $\bar{h}_{\mu\nu}$ と同じオーダーのエネルギー運動量テンソルが右辺入る議論を2.3節で行うが、この場合は式(2.33)のようにならないので、この節の議論はこれ以上進めない。

を持つことに注意すると、ゲージ変換により、

$$\begin{aligned}\bar{h}'_{\mu\nu} &= \bar{h}_{\mu\nu} + \chi_{\mu,\nu} + \chi_{\nu,\mu} - \chi^\alpha{}_{,\alpha}\eta_{\mu\nu}, \\ \implies A'_{\mu\nu} &= A_{\mu\nu} + B_\mu k_\nu + B_\nu k_\mu - \eta_{\mu\nu} B^\alpha k_\alpha = 0,\end{aligned}\quad (2.38)$$

となる。ここで、 $\text{tr } A' = 0$ をゲージ条件 (χ_μ の自由度を1つ使う) として課すと、

$$0 = \eta^{\mu\nu} A'_{\mu\nu} = A^\mu{}_\mu - 2k_\mu B^\mu, \quad (2.39)$$

となる。あと3つの条件を課せるのだが、この自由度を式(2.36)の時間部分を0にすることに使う：

$$A'_{00} = A'_{01} = A'_{02} = 0, \quad (2.40)$$

$$\implies A_{0i} + B_0 k_i + B_i k_0 = 0. \quad (2.41)$$

これにより $A_{\mu\nu}$ の形は、

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_+ & A_\times & 0 \\ 0 & A_\times & -A_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

となった。ただし、 $A_+ \equiv A_{11}$ 、 $A_\times \equiv A_{12}$ とおいた。この記号の意味は、すぐ後に述べる。また、念のために言っておくと、式(2.39)と式(2.41)を使って B_μ を矛盾なく求めることができる。このゲージをとったときの重力波は、進行方向 (z 軸方向) に対して垂直な面に対して変動するようなモードを持つ。さらに、重力波の自由度は、 A_+ と A_\times の2つであることも分かる。このゲージをトランスバース-トレースレスゲージ (transverse-traceless(TT) gauge) という。TT ゲージのとき、トレースがないので摂動 $\bar{h}_{\mu\nu}$ はバーなしの $h_{\mu\nu}$ と区別する必要がない (式(2.20)を参照)。

さて、重力波の2つのモードについて具体的に見てみることにしよう。外力を受けていない質点は、測地線上に乗っている。そこに重力波が入ってくると、測地線方程式を介して質点が「動く」ことになる²。重力波が z 軸を伝わって入射したときの計量は、

$$ds^2 = -dt^2 + (1 + h_+(t-z)) dx^2 + (1 - h_+(t-z)) dy^2 + 2h_\times(t-z) dx dy + dz^2 \quad (2.43)$$

となる。 $h_\times(t-z) = 0$ のとき、 x - y 平面上での質点の動きは図2.2のようになる。見ての通り、一方の軸方向が広がっている間は、もう一方が縮んでいる。このモードをプラスモードという。 $h_+(t-z) = 0$ のときも同様の図が書ける。先ほどのモード比べると45度傾いたものになり、これをクロスモードという。この x, y 軸を2本のレーザー光路として重力波の到来を検出するのが、次の章で述べる重力波干渉計の基本原理である。

■ 2.2.4 ■ 線形化II：曲がった時空での伝播方程式

²質点は、重力波も含めた時空 $g_{\mu\nu}$ の測地線上に乗っている。

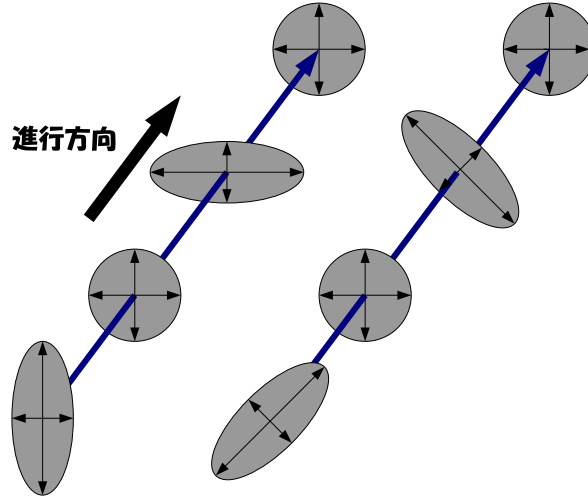


図 2.2: 重力波の2つの偏曲モード。進行している重力波のスナップショットで、左がプラスモード、右がクロスモードであるが、この名称はあくまでも相対的なもの。

次に、背景時空が曲がっている場合を考える。このときの計量は、

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^B + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (2.44)$$

となる。まず、曲率に関する量を摂動のオーダーに従って展開する。

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = \Gamma^{(0)\alpha}{}_{\beta\gamma} + \Gamma^{(1)\alpha}{}_{\beta\gamma} + \dots \quad (2.45)$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^{(0)} + R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)} + \dots \quad (2.46)$$

上付きの (k) は、 $\mathcal{O}(|h_{\mu\nu}|^k)$ の量であることを表す。クリストッフエル記号の1次の量は、

$$\Gamma^{(1)\alpha}{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g_B^{\alpha\lambda} (h_{\lambda\beta|\gamma} + h_{\lambda\gamma|\beta} - h_{\beta\gamma|\lambda}) \quad (2.47)$$

となる。ここで、下付きの $|$ は0次の背景時空 $g_{\mu\nu}^B$ による共変微分を表す³。次に、リッチテンソルの1次の量は、

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(1)} &= \dots = \Gamma^{(1)\lambda}{}_{\mu\nu|\lambda} - \Gamma^{(1)\lambda}{}_{\mu\lambda|\nu} \\ &= \frac{1}{2} g_B^{\lambda\alpha} (h_{\alpha\mu|\nu\lambda} - h_{\alpha\mu|\lambda\nu} + h_{\alpha\nu|\mu\lambda} + h_{\lambda\mu|\nu\alpha} - h_{\mu\nu|\alpha\lambda} - h_{\alpha\lambda|\mu\nu}) \end{aligned} \quad (2.48)$$

ここで、初めの2つの項は合わせてリーマンテンソル $R_{\alpha\beta\mu\nu}^{(0)}$ で書き表すことができる。更に、次の2つの項についても微分の順序を入れ替えることでリーマンテンソルを出すことができる。最終的に、

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left\{ h_{\nu}{}^{\lambda}{}_{|\lambda\mu} + h_{\mu}{}^{\lambda}{}_{|\lambda\nu} - h_{\mu\nu}{}^{\lambda}{}_{|\lambda} - h_{|\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. + R_{\nu\beta}^{(0)} h^{\beta}{}_{\mu} + R_{\mu\beta}^{(0)} h^{\beta}{}_{\nu} + \left(R_{\mu\beta\lambda\nu}^{(0)} + R_{\nu\beta\lambda\mu}^{(0)} \right) h^{\beta\lambda} \right\} \end{aligned} \quad (2.49)$$

³右辺は、定義どおり計算するとたくさんのお釣りの項が出てくるが、このように共変微分でまとめることができる。

スカラー曲率は,

$$R^{(1)} = g_{\text{B}}^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(1)} = (h_{\mu}{}^{\lambda}{}_{|\lambda}{}^{\mu} - h^{|\lambda}{}_{|\lambda}) - h^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(0)} \quad (2.50)$$

したがって, 方程式 (2.14) の左辺は,

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^{(1)} &= R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^{\text{B}} R^{(1)} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} R^{(0)} \\ &= \frac{1}{2} (h_{\nu}{}^{\lambda}{}_{|\lambda}{}_{\mu} + h_{\mu}{}^{\lambda}{}_{|\lambda}{}_{\nu} - h_{\mu\nu}{}^{|\lambda}{}_{|\lambda} - h_{|\mu\nu} \\ &\quad - g_{\mu\nu}^{\text{B}} (h_{\sigma}{}^{\lambda}{}_{|\lambda}{}^{\sigma} - h^{|\lambda}{}_{|\lambda}) - h_{\mu\nu} R^{(0)} + g_{\mu\nu}^{\text{B}} h^{\alpha\beta} R_{\mu\nu}^{(0)} \\ &\quad + R_{\beta\nu}^{(0)} h^{\beta}{}_{\mu} + R_{\beta\mu}^{(0)} h^{\beta}{}_{\nu} + (R_{\mu\beta\lambda\nu}^{(0)} + R_{\nu\beta\lambda\mu}^{(0)}) h^{\beta\lambda}) \end{aligned} \quad (2.51)$$

ここで, 式 (2.20) と同様のトレース反転テンソル:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^{\text{B}} h, \quad h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^{\text{B}} h \quad (2.52)$$

を定義すると,

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^{(1)} &= \frac{1}{2} (\bar{h}_{\nu}{}^{\lambda}{}_{|\lambda}{}_{\mu} + \bar{h}_{\mu}{}^{\lambda}{}_{|\lambda}{}_{\nu} - \bar{h}_{\mu\nu}{}^{|\lambda}{}_{|\lambda} - g_{\mu\nu}^{\text{B}} \bar{h}_{\sigma}{}^{\lambda}{}_{|\lambda}{}^{\sigma} \\ &\quad - \bar{h}_{\mu\nu} R^{(0)} + g_{\mu\nu}^{\text{B}} \bar{h}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^{(0)} + R_{\beta\nu}^{(0)} \bar{h}^{\beta}{}_{\mu} + R_{\beta\mu}^{(0)} \bar{h}^{\beta}{}_{\nu} - 2R_{\mu\alpha\nu\beta}^{(0)} \bar{h}^{\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (2.53)$$

さらに, 背景時空が真空であると仮定と, $R_{\mu\nu}^{(0)} = 0, R^{(0)} = 0$ であるから⁴, 方程式 (2.14) は,

$$\bar{h}_{\nu}{}^{\lambda}{}_{|\lambda}{}_{\mu} + \bar{h}_{\mu}{}^{\lambda}{}_{|\lambda}{}_{\nu} - \bar{h}_{\mu\nu}{}^{|\lambda}{}_{|\lambda} - g_{\mu\nu}^{\text{B}} \bar{h}_{\sigma}{}^{\lambda}{}_{|\lambda}{}^{\sigma} - 2R_{\mu\alpha\nu\beta}^{(0)} \bar{h}^{\alpha\beta} = 0 \quad (2.54)$$

ここで, 式 (2.25) と同様のゲージ条件:

$$\bar{h}_{\nu}{}^{\lambda}{}_{|\lambda} = 0 \quad (2.55)$$

を課す。すると, 方程式 (2.14) は,

$$\bar{h}_{\mu\nu}{}^{|\lambda}{}_{|\lambda} + 2R_{\mu\alpha\nu\beta}^{(0)} \bar{h}^{\alpha\beta} = 0 \quad (2.56)$$

となる。この式は, 6章で用いる。

⁴真空であっても曲がっている (例: Schwarzschild 時空) ので, $R_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(0)} \neq 0$ 。また, 厳密に言えば, 真空であっても重力波自身によって背景時空が歪んで $R_{\mu\nu}^{(0)} \neq 0$ となる可能性もあるが, その効果は $\mathcal{O}(|h_{\mu\nu}|^2)$ 以上の量となるので, ここでの議論の範囲外。

III Section 2.3 III

重力波の生成

■ 2.3.1 ■

四重極公式

前節では、真空中の重力波の伝播を決める方程式 (2.56) を導いた。この節では、重力波の生成について考える。

天体から発生する重力波を計算するときは、式 (2.53) の右辺にエネルギー運動量テンソルを導入しなければならない。しかし、背景時空が真空 ($T_{\mu\nu}^{(0)} = 0$) で、エネルギー運動量テンソルが $h_{\mu\nu}$ と同じオーダーの量、すなわち $T_{\mu\nu}^{(1)}$ であれば、やはり $R_{\mu\nu}^{(0)} = 0, R^{(0)} = 0$ と置くことができる。結局、式 (2.56) の右辺に、 $h_{\mu\nu}$ と同じオーダーのエネルギー運動量テンソルを導入した形になる：

$$\bar{h}_{\mu\nu}{}^{|\lambda}{}_{|\lambda} + 2R_{\mu\alpha\nu\beta}^{(0)} \bar{h}^{\alpha\beta} = \frac{16\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}. \quad (2.57)$$

こうなると、時空全体はもはや真空ではないので、前節のような TT ゲージはとることができない。最終的には天体の重力場から重力波の成分だけを抜き出すため、TT 作用素をかける作業をするのだが、ここでの $\bar{h}_{\mu\nu}$ には、天体のニュートンポテンシャルなども含まれていることに注意されたい。

波源から十分遠い場所⁵で重力波の振幅を計算することになると、遠方では背景となる波源の重力場は無視できるから

$$\bar{h}_{\mu\nu}{}^{;\lambda}{}_{;\lambda} = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.58)$$

となる。これは源泉がある波動方程式であるから、遅延グリーン (Green) 関数を使って、

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y \quad (2.59)$$

と形式的に解くことができる。いま考えている位置は、天体のスケール \mathcal{L} に比べて十分遠いところ $r \equiv |\mathbf{x}| \gg \mathcal{L}$ であるから、

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = r - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{r} + \dots \quad (2.60)$$

となる。この展開を用いて、式 (2.59) のエネルギー運動量テンソルを展開すると、

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c}, \mathbf{y} \right) \\ = T_{\mu\nu} \left(t - \frac{r}{c}, \mathbf{y} \right) + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{cr} \frac{\partial}{\partial t} T_{\mu\nu} \left(t - \frac{r}{c}, \mathbf{y} \right) + \dots \end{aligned} \quad (2.61)$$

⁵天体のスケールに比べて十分遠く： $R \gg \mathcal{L}$ 、重力波の波長は背景時空の曲率半径よりも十分小さい： $R_B \gg \lambda$ 。

となる。ここで、天体の運動がゆっくりであるとするスローモーション近似を施す。それはすなわち、天体のエネルギー運動量テンソルの変化の時間スケール $\partial/\partial t$ が、光が天体の大きさを横切る時間スケール c/R に比べて十分長いとする近似で、上の式では、

$$\begin{aligned} \left| \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{cr} \frac{\partial}{\partial t} T_{\mu\nu} \left(t - \frac{r}{c}, \mathbf{y} \right) \right| &\leq \frac{R}{c} \left| \frac{\partial}{\partial t} T_{\mu\nu} \left(t - \frac{r}{c}, \mathbf{y} \right) \right| \\ &\ll \left| T_{\mu\nu} \left(t - \frac{r}{c}, \mathbf{y} \right) \right| \end{aligned} \quad (2.62)$$

とすることに対応する。これで、式(2.59)は、

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4 r} \int T_{\mu\nu} \left(t - \frac{r}{c}, \mathbf{y} \right) d^3 y \quad (2.63)$$

と変形できる。

重力波の成分は \bar{h}_{ij} に入っている。これを評価するために、

$$(T^{\alpha\beta} x^\mu x^\nu)_{,\alpha\beta} = (T^{\mu\beta} x^\nu + T^{\nu\beta} x^\mu)_{,\beta} = 2T^{\mu\nu} \quad (2.64)$$

という関係式を使うと、

$$\begin{aligned} \int T^{ij} d^3 y &= \frac{1}{2} \left(\int (T^{00} y^i y^j)_{,00} d^3 y + 2 \int (T^{k0} y^i y^j)_{,k0} d^3 y + \int (T^{kl} y^i y^j)_{,kl} d^3 y \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int (T^{00} y^i y^j)_{,00} d^3 y + 2 \int (T^{k0} y^i y^j)_{,0} dS_k + \int (T^{kl} y^i y^j)_{,\ell} dS_k \right) \\ &= \frac{1}{2} \int (T^{00} y^i y^j)_{,00} d^3 y \\ &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int \rho y^i y^j d^3 y \end{aligned} \quad (2.65)$$

と変形できる。3個目の等号では、表面積分を十分遠方で評価することで落とせることを使った。ここで、天体の四重極モーメントを、

$$D_{ij} \equiv \int \rho y^i y^j d^3 y \quad (2.66)$$

と定義すると、式(2.63)は、

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{D}_{ij} \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (2.67)$$

となる。

この摂動 $\bar{h}_{\mu\nu}$ の中にはニュートンポテンシャル等の成分も含まれている⁶。そこで、ここから重力波の成分のみを抜き出すために、TTゲージへ移行する。ただし、ここでは座標変換をあらわに施すことはせずに、 $\bar{h}_{\mu\nu}$ に対して TT 演算子を作用させてその成分を取

⁶きちんと計算すると、 $h_{00} = 2GM/c^2 r, h_{0i} = 0$ となることが分かる。

り出すことにする。天体から十分離れた場所を考えているので、重力波の波数ベクトルは天体を原点とする動径方向に向いているとしてよい。ゆえに、 $\bar{h}_{\mu\nu}$ の TT 成分は、

$$h_{ij}^{\text{TT}} = \bar{h}_{ij}^{\text{TT}} = \left(P_i^k P_j^\ell - \frac{1}{2} P_{ij} P^{k\ell} \right) \bar{h}_{k\ell} \quad (2.68)$$

$$P^{ij} \equiv \delta^{ij} - n^i n^j, \quad n^i \equiv \frac{x^i}{r}$$

と書くことができる。更に、トレースフリーの四重極モーメントを、

$$D^{ij} \equiv D^{ij} - \frac{1}{3} \delta^{ij} I^k_k \quad (2.69)$$

と定義すると、これに式 (2.68) の TT 演算子を作用させても変化しないので、結局、

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G}{c^4 r} \left(P_i^k P_j^\ell - \frac{1}{2} P_{ij} P^{k\ell} \right) \ddot{D}_{k\ell} \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (2.70)$$

となる。これを四重極公式という。

■ 2.3.2 ■ Isaacson の公式

アイザックソン (Isaacson) の方法 [3][4] に基づいて、重力波の持つエネルギーについて考える。曲率半径 L の背景時空に、振幅 ϵ 、波長 λ の重力波を考えると、真空のアインシュタイン方程式は次のように展開できる：

$$G_{\mu\nu}(g_{\alpha\beta}^{\text{B}} + h_{\alpha\beta}) = G_{\mu\nu}^{(0)} + G_{\mu\nu}^{(1)} + G_{\mu\nu}^{(2)} + G_{\mu\nu}^{(3)} + \mathcal{O}(|h_{\alpha\beta}|^4) = 0 \quad (2.71)$$

上付き添字 (k) は、 $\mathcal{O}(|h_{\alpha\beta}|^k)$ の量であることを表している。それぞれは、対応したオーダーの、計量についての二階微分を含んでいる。計量の二階微分は、

$$g_{\alpha\beta,\lambda\sigma}^{\text{B}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^2}\right), \quad h_{\alpha\beta,\lambda\sigma} = \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon}{\lambda^2}\right)$$

というオーダーであるから、各アインシュタインテンソルは、

$$G_{\mu\nu}^{(0)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^2}\right), \quad G_{\mu\nu}^{(1)} = \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon}{\lambda^2}\right), \quad G_{\mu\nu}^{(2)} = \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon^2}{\lambda^2}\right), \quad G_{\mu\nu}^{(3)} = \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon^3}{\lambda^2}\right) \quad (2.72)$$

というオーダーになる。

ここで、重力波の波長より長く、背景時空の曲率半径より短い長さ ℓ でアインシュタインテンソルの平均 (Brill-Hartle 平均 [5]) をとることを考える。これは、長さ ℓ/c の時間平均と考えてもよい。この平均をとると、平均をとるスケールより十分短いスケールで変化する $h_{\mu\nu}$ が含まれているために、 $\langle G_{\mu\nu}^{(1)} \rangle = 0$ となる。平均して残るのは、 $h_{\mu\lambda} h^{\lambda\nu}$ などの非線型項が作る、重力波 $h_{\mu\nu}$ よりもゆるやかに変化する成分である。その中でももっとも高次の項だけを見ると、結局、

$$G_{\mu\nu}^{(0)} = -\langle G_{\mu\nu}^{(2)} \rangle \quad (2.73)$$

を得る。ただし、スケールの関係上、0次の $G_{\mu\nu}^{(0)}$ は平均操作の影響を受けない。この式は、まさに重力波によって背景重力場が影響を受けているという形になっている。そこで、右辺の $\langle G_{\mu\nu}^{(2)} \rangle$ を重力波の有効ストレス・エネルギーテンソルと定義する：

$$G_{\mu\nu}^{(0)} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{\text{GW}}, \quad T_{\mu\nu}^{\text{GW}} \equiv -\frac{c^4}{8\pi G} \langle G_{\mu\nu}^{(2)} \rangle \quad (2.74)$$

つぎに、有効ストレス・エネルギーテンソルを重力波の振幅 $h_{\mu\nu}$ で書き表すことにしよう。下付き添字の計量については、式(2.44)で摂動を定義した。 $g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$ を用いて上付き添字の計量を展開すると、

$$g^{\mu\nu} = g_B^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + h^{\mu\alpha} h_{\alpha}{}^\nu + \dots, \quad (2.75)$$

となる。これを用いて、アインシュタインテンソルの定義式(2.14)から摂動の2次の量を拾ってくと、

$$G_{\mu\nu}^{(2)} = R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2} (g_B^{\mu\nu} R^{(2)} + h_{\mu\nu} R^{(1)}), \quad (2.76)$$

$$R^{(2)} = g_B^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^{(2)} - h^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^{(1)} + h^{\alpha\sigma} h_{\sigma}{}^\beta R_{\alpha\beta}^{(0)}, \quad (2.77)$$

$$R^{(1)} = g_B^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^{(1)} - h^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^{(0)}, \quad (2.78)$$

$$(2.79)$$

というようになる。ここで、真空中の重力波の発展方程式 $R^{(1)} = 0$ を使って $R^{(1)}$ に比例する項は消える。また、いま置いている仮定 ($\lambda \ll L$) を考慮すると、 $R_{\alpha\beta}^{(0)}$ に比例する項はすべて $\mathcal{O}(\epsilon^2/L^2)$ のオーダーであるのに対し、それ以外の項が $\mathcal{O}(\epsilon^2/\lambda^2)$ のオーダーであるので、前者は無視することができる。結局、

$$\langle G_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = \langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle - \frac{1}{2} g_B^{\mu\nu} g_B^{\alpha\beta} \langle R_{\alpha\beta}^{(2)} \rangle, \quad (2.80)$$

を得る。 $\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle$ については、平均をとる際に部分積分を行うことで $(h_{\mu}{}^\beta h_{\nu\beta}{}^{|\alpha})_{|\alpha}$ などの発散の形に変形できるものは表面積分に直して落とすことができ、さらに、TTゲージをとることで式(2.55)のような項が落ちることを考慮すると、結局、

$$\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = -\frac{1}{4} \langle h^{\alpha\beta}{}_{|\mu} h_{\alpha\beta|\nu} \rangle_{\text{TT}}, \quad (2.81)$$

となる[2][6]。ここで微分記号 $|$ は $g_B^{\alpha\beta}$ に関する微分であることを表す。よって、式(2.74)は、

$$T_{\mu\nu}^{\text{GW}} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle h^{\alpha\beta}{}_{|\mu} h_{\alpha\beta|\nu} \rangle_{\text{TT}} \quad (2.82)$$

となる。これを Isaacson の公式という。

■ 2.3.3 ■

重力波で運ばれるエネルギーと運動量

重力波は、その波源からエネルギーや運動量などを持ち去る。この節では、前節で求めた Isaacson の公式から、重力波によって運ばれるエネルギーなどを求める。

波源から重力波が放出されていると、式 (2.82) より、

$$-T_{0k}^{\text{GW}} n^k = -\frac{c^4}{32\pi G} \langle h^{\alpha\beta}{}_{;0} h_{\alpha\beta;k} \rangle_{\text{TT}} n^k, \quad (2.83)$$

というエネルギーの流れが波源から外向きに生じていることがわかる。これを、波源を中心とする十分に広い空間で積分すると、重力波によって波源から運ばれるエネルギーの放出率が求まる：

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE}{dt} \right) &= c \int_{r \rightarrow \infty} (-T_{0k}^{\text{GW}}) dS^k \\ &= \frac{c^5}{32\pi G} \int_{r \rightarrow \infty} d\Omega r^2 \langle -h^{ij}{}_{;0} h_{ij;k} n^k \rangle_{\text{TT}}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

ここで、 n^k は積分領域の表面に対する法線ベクトルである。十分遠方では、

$$h_{ij} = \frac{f_{ij}(ct - r, \theta, \phi)}{r}, \quad (2.85)$$

という関数形になるので、

$$h_{ij;k} n^k = -h_{ij,0} - \frac{1}{r} h_{ij}, \quad (2.86)$$

が成り立つ⁷。これを式 (2.84) に代入して、 $1/r^2$ の項は $1/r$ の項に比べて十分小さいことを考慮すると、

$$\left(\frac{dE}{dt} \right) = \frac{c^5}{32\pi G} \int_{r \rightarrow \infty} d\Omega r^2 \langle \dot{h}^{ij} \dot{h}_{ij} \rangle_{\text{TT}} \quad (2.87)$$

を得る。

ここで、1.3.1 節で求めた四重極公式 (2.70) を用いると、

$$\begin{aligned} \langle \dot{h}^{ij} \dot{h}_{ij} \rangle_{\text{TT}} &= \frac{4G^2}{c^8 r^2} \left(P_i^k P_j^\ell - \frac{1}{2} P_{ij} P^{k\ell} \right) \left(P_m^i P_n^j - \frac{1}{2} P_{mn} P^{ij} \right) \langle \ddot{D}_{k\ell} \ddot{D}^{mn} \rangle \\ &= \frac{4G^2}{c^8 r^2} \left(\delta^{km} \delta^{\ell n} - n^k n^m \delta^{\ell n} - n^\ell n^n \delta^{km} + \frac{1}{2} n^k n^\ell n^m n^n \right) \langle \ddot{D}_{k\ell} \ddot{D}^{mn} \rangle \end{aligned} \quad (2.88)$$

となる。ここで、 n^i の積分については公式：

$$\int d\Omega n^i n^j = \frac{4\pi}{3} \delta^{ij} \quad (2.89)$$

$$\int d\Omega n^i n^j n^k n^\ell = \frac{4\pi}{15} (\delta^{ij} \delta^{k\ell} + \delta^{ik} \delta^{j\ell} + \delta^{il} \delta^{jk}) \quad (2.90)$$

を用いると、結局、

$$\left(\frac{dE}{dt} \right) = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{D}_{k\ell} \ddot{D}^{k\ell} \rangle \quad (2.91)$$

⁷ $df/dr = -cdf/dt$ を使った。

を得る。ただし、 \mathcal{D} は $t - r/c$ の関数である。

同様の計算により、波源から運ばれる運動量や角運動量も求められる。角運動量は [7] より、

$$\frac{dJ_i}{dt} = \frac{2}{5} \epsilon_{ijk} \langle \ddot{\mathcal{D}}_{j\ell} \ddot{\mathcal{D}}_{\ell k} \rangle. \quad (2.92)$$

運動量は [8] より、

$$\frac{dP_i}{dt} = \frac{2}{63} \langle \ddot{\mathcal{D}}_{jk} \ddot{\mathcal{D}}_{jki} \rangle + \frac{16}{45} \epsilon_{ijk} \langle \ddot{\mathcal{D}}_{ja} \ddot{J}_{ka} \rangle \quad (2.93)$$

ただし、 \mathcal{D}_{ijk} は八重極モーメントで、 J_{ka} はカレント四重極モーメントである [8] :

$$\mathcal{D}_{ijk} = \left(\int \rho x^i x^j x^k d^3x \right)^{\text{Trace-Free}} \quad (2.94)$$

$$J_{ij} = \left(\int \rho \epsilon_{ipq} x^p v^q x^j d^3x \right)^{\text{Trace-Free}} \quad (2.95)$$

例として、連星系から放出される重力波を見積もってみよう。太陽質量程度の天体が高速で回転していると、そこから重力波が放出されて軌道が徐々に変化していく。Peters と Mathews はそれを解析的に求めた [7][9]。

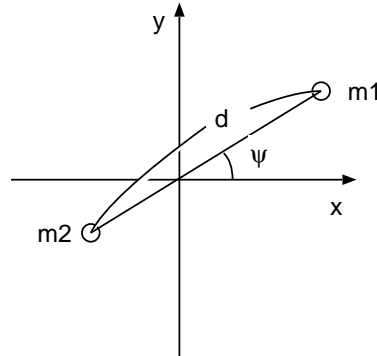


図 2.3: 連星の軌道モデル。

質量が m_1, m_2 の連星系を考える。連星系は $z = 0$ 面にあるとし、それぞれが十分離れていて各々が Kepler 運動しているとする。連星の重心を原点とする座標を取ると、それぞれの星の位置は、 $(d_1 \cos \psi, d_1 \sin \psi), (-d_2 \cos \psi, -d_2 \sin \psi)$ と表せる (図 2.3)。ここで、2つの星の間の距離を d とすると、

$$d_1 = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) d, \quad d_2 = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) d. \quad (2.96)$$

このとき、系の四重極モーメントは、式 (2.66) より、

$$D_{xx} = \mu d^2 \cos^2 \psi, \quad (2.97)$$

$$D_{yy} = \mu d^2 \sin^2 \psi, \quad (2.98)$$

$$D_{xy} = D_{yx} = \mu d^2 \sin \psi \cos \psi. \quad (2.99)$$

ここで、 μ は2つの星の換算質量である。離心率を e 、軌道長半径を a とすると、

$$d = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \psi}, \quad (2.100)$$

であり、公転角速度は、

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\sqrt{G(m_1 + m_2)a(1 - e^2)}}{d^2}, \quad (2.101)$$

となる。

上の D_{ij} を3階微分してトレース部分を落とし（式(2.69)を参照）、式(2.101)を用いて $\dot{\psi}$ の項を消すと、

$$\ddot{\ddot{D}}_{kl} \ddot{\ddot{D}}^{kl} = \frac{8}{15} \frac{G^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{c^5 a^5 (1 - e^2)^5} (1 + e \cos \psi)^4 \{12(1 + e \cos \psi)^2 + e^2 \sin^2 \psi\}, \quad (2.102)$$

を得る。角度 ψ について平均をとると、式(2.91)より、

$$\frac{dE}{dt} = \frac{32}{5} \frac{G^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{c^5 a^5 (1 - e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4\right), \quad (2.103)$$

となる。これが、重力波によって連星系から持ち出されるエネルギーである。 $e = 0$ として典型的な値を代入すると、

$$\frac{dE}{dt} = 1.08 \times 10^{33} \text{ erg/s} \left(\frac{a}{R_\odot}\right)^{-5} \left(\frac{m_1 + m_2}{2.8M_\odot}\right) \left(\frac{m_1}{1.4M_\odot}\right)^2 \left(\frac{m_2}{1.4M_\odot}\right)^2 \quad (2.104)$$

となる。同様に、式(2.92)より単位時間あたり、

$$\frac{dJ_i}{dt} = \frac{32}{5} \frac{G^{7/2} m_1^2 m_2^2 \sqrt{m_1 + m_2}}{c^5 a^{7/2} (1 - e^2)^2} \left(1 + \frac{7}{8} e^2\right), \quad (2.105)$$

の角運動量が持ち出される。

このエネルギーと角運動量の散逸によって、系の軌道が変化する。系の全エネルギー⁸と角運動量は、

$$E = -\frac{Gm_1 m_2}{2a}, \quad J^2 = G \frac{m_1^2 m_2^2}{m_1 + m_2} a(1 - e^2) \quad (2.106)$$

で与えられる。重力波によるエネルギー・角運動量散逸のタイムスケールが軌道周期よりも充分長い場合、式(2.103)と式(2.105)に式(2.106)を代入することで、軌道長半径 a と離心率 e の変化率が求まる⁹：

$$\frac{da}{dt} = -\frac{64G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{5c^5 a^3 (1 - e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4\right), \quad (2.107)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{304G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{15c^5 a^4 (1 - e^2)^{5/2}} e \left(1 + \frac{121}{304} e^2\right). \quad (2.108)$$

⁸運動エネルギー+重力ポテンシャル。

⁹式(2.105)を導出するまで e は一定と仮定していた。

また、ケプラー (Kepler) の第3法則：

$$\frac{G(m_1 + m_2)}{a^3} = \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2, \quad (2.109)$$

を使って式 (2.107) を書き直すと、軌道周期 P の変化率：

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{96(2\pi)^{8/3}G^{5/3}m_1m_2(m_1 + m_2)^{-1/3}}{5c^5} \frac{1}{P^{5/3}(1 - e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right), \quad (2.110)$$

となる。これらの式から、大きい軌道は徐々に小さくなって回転が速くなり、楕円軌道は徐々に円軌道になっていくことが分かる [10]。したがって、放出される重力波も 56 ページの図 5.18 のようになる。

第3章

検出装置

重力波の存在はハルス (R.A.Hulse) とテイラー (J.H.Taylor) による連星中性子星の観測から間接的に示されているが [11], 2.2.2 節でも述べたように, 重力波と物質 (検出器) との相互作用が非常に弱いこともあって, 残念ながらいまのところ直接検出には成功していない。しかし, 40 年以上にわたって続けられてきた重力波検出に関する研究は着実に進歩しており, 21 世紀に入って大型レーザー干渉計による本格的な観測が行われるようになった。さらに将来的には, インフレーション起源の背景重力波を捕らえるべく, 宇宙空間での観測を行う LISA (Laser Interferometric Space Antenna) や BBO (Big-Bang Observer) などといった計画もある。

本章では, レーザー干渉計を中心に, 重力波の検出装置の現状を紹介する。まず, 重力波の観測に関する歴史を 3.1 節 にまとめる。3.2 節 では金属の塊を使った古典的な検出器である共振型検出器を紹介する。そして 3.3 節 では背景重力波の検出が期待されるレーザー干渉計の検出原理と主要な雑音源について述べる。

III Section 3.1 IIII

観測の歴史

1960 年代, メリーランド大学の Weber がアルミの塊を用いて共振型重力波検出器を作成し, 1969 年にはそれと同じタイプの検出器で同時に重力波を検出したと報告した。しかし, その後, 他のグループによる追試では確認することができず, 1970 年代の半ばには, Weber の検出器では感度が悪すぎるため重力波の検出は不可能であるという認識に至った。近年では, mK オーダーの極低温状態の実現や, それに伴う超伝導技術の応用により, 量子論に起因する雑音が見える感度にまで達しつつある。

一方で, レーザー干渉計を用いた検出の構想も, 同時に進められていた。1970 年代になると, 実際に実験が行われるようになり, 1980 年代には, 10~30 メートルクラスの干渉計が作られた。1990 年代半ばになると, 日本をはじめ, 各国で大型の干渉計が作られるようになり, TAMA, GEO, LIGO は, ここ 1~2 年でサイエンスランが行われるまでに研究が進んだ。2003 年には, LIGO の観測からバースト波, 連続波, 背景重力波に対して制限をつける論文が出た。そして, 2007 年には, LIGO が大幅に改良を加えられることになっており, 重力波の初検出の期待が高まっている。

また, 背景重力波の検出に有効な宇宙空間での観測計画も挙げている。2012 年ころには, NASA と ESA によって進められている LISA が打ち上げられる予定で, その先には BBO というインフレーション起源の背景重力波をターゲットにした計画もある。将来的には, 1mHz~10kHz 程度の幅広い領域での観測が行われるようになると思われる。

以上のように, 現在考案されている重力波の検出器には共振型とレーザー干渉計の 2 つの種類がある。以降の節で, それぞれについて詳しく述べることにする。

III Section 3.2 III

共振型検出器

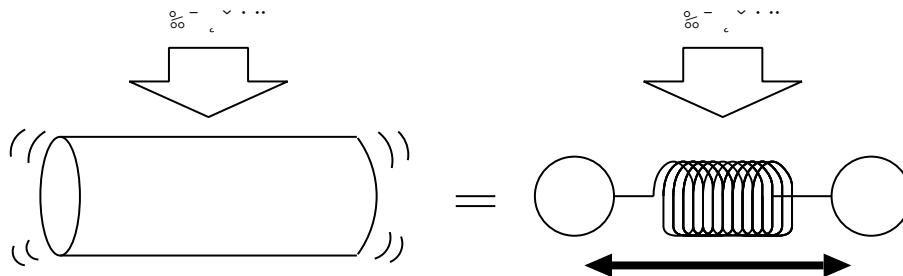


図 3.4: 共振型検出器の概念図。

まずは検出原理について述べる。2章で見てきたように、重力波は時空の微小な歪みとして記述されるので、2つの自由質点を考え、その間の距離（固有距離）を測定すれば良い。2つの質点間を指すベクトルを x^j とすると、この時空の歪みは質量 m の質点間に働く潮汐力 $F^i = mR^i_{0j0}x^j$ として現れる。金属の塊である共振型検出器（図 3.5）の両端を、いま考えている2つの質点に置き換えれば（図 3.4）、我々は拘束系の強制振動を観測することになる [10] :

$$m \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx_i}{dt} + \omega_0^2 x_i \right) = \frac{m}{2} \frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial t^2} x^j. \quad (3.1)$$

ここで、 Q は使用する金属の硬さを表すもので Q 値とよばれており、重力波の検出には、 Q 値の大きい（減衰の少ない）アルミニウムが主に使われている。また、 ω_0 は共振角振動数である。

共振型検出器はこのように単純な構造であるため、後述するレーザー干渉計に比べて安定した長時間運転が可能である。共振周波数の周辺でしか感度がないので、例えば近傍の超新星爆発からのバースト波の検出などに用途が限られるが、この狭いバンド幅を補うために、共振周波数の違う検出器を同時に運転するシロフォンとよばれる検出方法も考えられている [12]。

現在、主な共振型検出器としては表 3.1 に挙げたものがある [13]。このうち、MiniGRAIL は球形の検出器である¹⁰。これらは全て $h \sim 10^{-19}$ 程度の感度があり、 $h \sim 10^{-20}$ に達するのが当面の目標となっている。

¹⁰他に、GRAVITON（伯）、ELSA（伊）、TIGA[12]（米）などもある。球形の検出器は、重さを稼げる上に全ての方向に感度を持たせることができる。

名称	所在地	材質	大きさ	重さ	温度	共振周波数
AURIGA	伊 (Legnaro)	Al	3m, 60cm ϕ	2.3t	0.2K	911,929Hz
ALLEGRO	米 (Louisiana)	Al	3m	2.3t	4.2K	897,920Hz
EXPLORER	ス (CERN)	Al	3m, 60cm ϕ	2.3t	2.9K	906,923Hz
NAUTILUS	伊 (Roma)	Al	3m, 60cm ϕ	2.3t	0.1K	903,924Hz
NIOBE	濠 (Perth)	Nb		1.5t	5K	695,713Hz
MiniGRAIL	蘭 (Leiden)	CuAl	(球)65cm ϕ	1.15t	20mK	3250Hz

表 3.1: 主な共振型検出器。

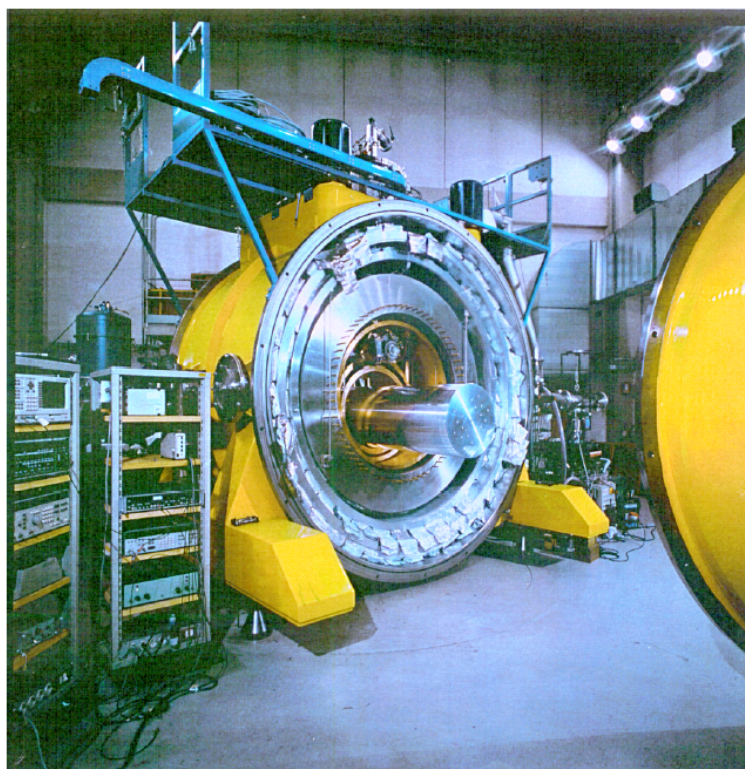


図 3.5: 巨大な極低温真空チェンバーの中心部にある銀色の円筒が NAUTILUS の本体。
[14] より転載。

III Section 3.3 III

レーザー干渉計

3.3.1

検出原理

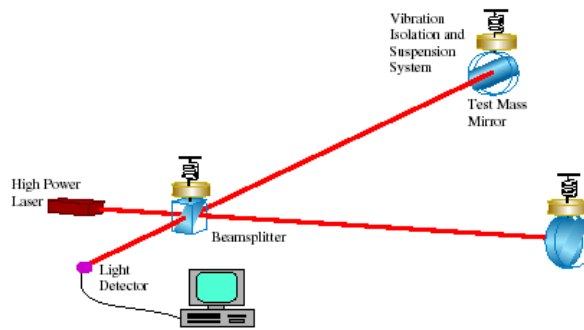


図 3.6: マイケルソン干渉計の概念図。レーザーがビームスプリッターで2つの方向に分けられ、それぞれの末端に設置されている鏡で反射されて再び合流する。[14] より転載。

マイケルソン干渉計

マイケルソン (Michelson) 干渉計は図 3.6 のように構成されている (LIGO の写真は図 3.8 を参照)。レーザーの光路は、高い真空状態になっている管の中に入っている。光源から出たレーザーは、まずビームスプリッターで2つの光路に分けられる。それぞれの光が管の端点に設置してある鏡に反射し、もと来た光路を戻っていく。合流した反射光がビームスプリッターの位置で干渉して、検出器へ入っていく。レーザーが二分された後、もし重力波が干渉計の鉛直方向を通過すると、片方の光路がもう片方に比べて長くなる。その光路を通った光が干渉すると、それぞれの位相がずれているため、干渉光の強さが元の光の強さより弱くなることになる。これを測定することで、重力波の到来を知るわけである。実際は、重力波がないときに検出器の前面の干渉光がなくなる様に、位相が反転するようにあらかじめ光路長を調整しておき、重力波が通過したときに暗くなるのではなく、明るくなるようにしてある (ダークフリンジ)。

重力波が干渉計の上空 (z 軸) からやってくると仮定する。このときの計量は $+$, \times モードが混ざっているが、ここでは単純に $+$ モードのみを考える：

$$\begin{aligned} ds^2 &= (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu \\ &= -c^2 dt^2 + (1 + h(t - z/c)) dx^2 + (1 - h(t - z/c)) dy^2 + dz^2, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$h(t - z/c) = h e^{i\omega(t-z/c)}. \quad (3.3)$$

光線の満たす測地線方程式は $ds^2 = 0$ より求められる。干渉計の位置を $z = 0$ とし、 x 軸方向へ進む光に注目すると、

$$\frac{dx}{dt} = \pm \frac{c}{\sqrt{1+h(t)}}. \quad (3.4)$$

干渉計の腕の長さを L とすると、ビームスプリッターと鏡の間の往復分の光路長は、上の方程式を $t - 2L/c$ から t まで積分することで、

$$\begin{aligned} \int_{t-2\frac{L}{c}}^t \frac{dx}{dt} dt &\approx \int_{t-2\frac{L}{c}}^t \left(1 - \frac{h(t)}{2}\right) dt \\ &= \frac{2L}{c} - \frac{h}{\omega} e^{i\omega(t-\frac{L}{c})} \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

となる。もう片方の腕についても同様の計算ができる。ただし、式 (3.2) から分かるように、そちらの方向では $h(t)$ の符号が逆転している。ゆえに、二本の腕の光路差は、

$$\Delta\ell \equiv 2\frac{L_1 - L_2}{c} - 2\frac{h}{\omega} e^{i\omega(t-\frac{L}{c})} \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) \quad (3.6)$$

となる。初めの項は、もともとの腕の長さの違いに起因する光路差であり、後ろの項が重力波によって動的に作られた光路差である。後者のみに注目して、波長 λ_L のレーザーの位相差に書き直すと、

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \frac{\Delta\ell}{\lambda_L} \\ &= \frac{2h}{\lambda_L \omega} e^{i\omega(t-\frac{L}{c})} \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

となる。この式から、 $\omega L/c = \pi/2$ 、すなわち、 $L = \lambda/4$ (λ は重力波の波長) のときに位相差が最大になることが分かる。例えば、1kHz の重力波に着目する場合、その波長は 300km であるから、腕の長さが 75km 必要になる。LISA のように宇宙空間で観測する場合は、基線長を長くとれるので問題ないのだが、地上で干渉計をつくる場合は現実的な長さではない。したがって、光路長を稼ぐために工夫が必要になる。そこで考えられたのが干渉計の中の光を何度も往復させて実効的な光路長を稼ぐという方法で、主に次の二つが挙げられる。

delay line 法

これは、図 3.7 の左にあるように、光が鏡に当たる場所を毎回変えることで往復させる方法である。原理は単純であるが、何度も反射させているうちに一部の光が真空管の壁面に当たって元のビームラインに戻ってくることがある。すると、元のビームラインとの間に大きな位相差を生じさせ、それが大きな雑音を生むことになる。また、この方法には非常に大きな高精度の鏡が必要になる。さらに、それを収納するための真空チェンバーやレーザーが通る真空管のサイズも必然的に大きくなってしまう。このような理由から、現在稼働中の大型干渉計ではこの方法を用いていない。少し小さな 30m の干渉計では、この方法を用いて $h_f \sim 10^{-19}/\sqrt{\text{Hz}}$ が達成されている [15]。

Fabry-Perrot(FP) 干渉計

この方法は、Drever らによって考案された [16]。図 3.7 の右にあるように、ビームスプリッター付近に 2 枚の鏡を追加して、それぞれの腕に光学的なキャビティを形成する。Delay line 法とは異なり、キャビティ内の同じ光路で“反射”（多重干渉）を繰り返す。これにより Delay line 法で生じる困難が回避されるのだが、FP キャビティはキャビティの長さとのレーザーの周波数に非常に敏感なため、制御に多少の困難が伴う。だが、いまはこちらの方法が主流になっている。

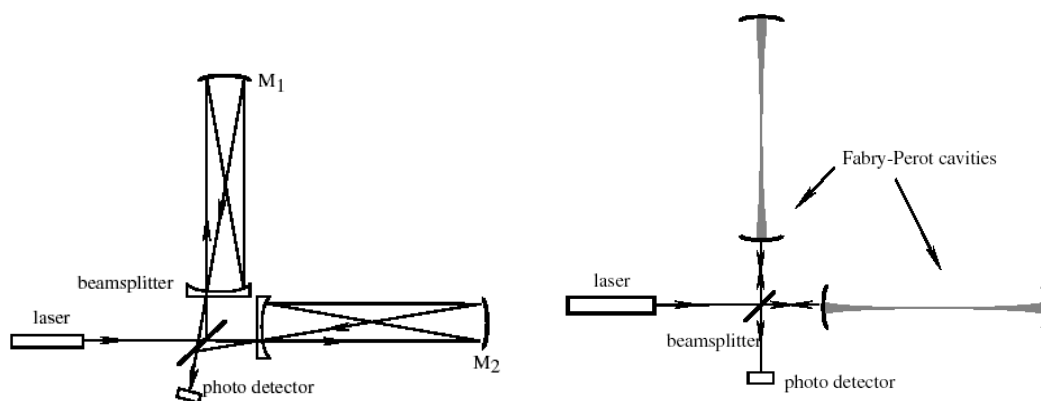


図 3.7: 左 : Delay Line 法, 右 : Fabry-Perrot 干渉計。[14] より転載。

3.3.2 稼働中のものと将来計画

現在、表 3.2 に挙げた大型レーザー干渉計が稼働中、もしくは建設中となっている。

現在、世界をリードしているのがカリフォルニア工科大学やマサチューセッツ工科大学が中心となって推進している LIGO (Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory) で、ワシントン州のハンフォード (Hanford) とルイジアナ州のリビングストン (Livingston) にそれぞれ設置されている (図 3.8)。このうち、ハンフォードのサイトには、同じ管の中に 4km の腕と 2km の腕を両方そなえており、計 3 台の干渉計として稼働している。2003 年 1 月に行われた実験で、 $f \sim 200\text{Hz}$ において $h \sim 10^{-22}$ の感度を達成した (図 3.10)。そして、2007 年には大幅な改良が加えられて Advanced LIGO として稼働することになっている。

GEO は、イギリスとドイツの共同プロジェクトとして 1995 年に建設が始まった。600m の干渉計に、シグナルリサイクリングとパワーリサイクリングを同時に搭載しているのが特徴である (33 ページの脚注を参照)。内蔵される鏡が増える分、光学系の制御が難しくなるが、高周波域で卓越するショットノイズを低減するには不可欠な技術となっている。2002 年には LIGO との同時運転が行われた [17][18]。

TAMA は1995年から計画が始まり、300mの干渉計を用いた観測が世界に先駆けて行われた。基線長が短いことや、都心に作られたことによる騒音などにより他の大型干渉計とくらべて達成可能な感度は劣ってはいるが、最近では1000時間を越える連続運転も可能にしており、その重要性はいまだ健在であると言えよう。現在は、現行の干渉計や、将来計画にある極低温重力波干渉計 (LCGT) に向けた技術の蓄積を主な目的としている。また、その低温鏡の技術開発のために、基線長100mのCLIOも建設を始めている。

地上でのレーザー干渉計では、設置できる場所に限りがあるため基線長をあまり伸ばせないことや、地面振動によるノイズなどがあるため、特に低周波域の観測ができない。そこで、人工衛星を使って宇宙空間に干渉計を構築する計画が挙げられている。NASA と ESA の共同プロジェクトである LISA については、2012年に基線長500万キロメートルの干渉計を構成する3台の人工衛星を打ち上げる予定になっている (図3.9)。それに続いて、インフレーション起源の背景重力波にターゲットを絞ったBBO (Big-Bang Observer) という計画も発表された。日本でも、天体起源の背景重力波 (5.2節参照) にじゃまされない0.1Hz帯を狙うDECIGO計画が立ち上がっている。

名称	所在地	基線長
TAMA300 (日)	日本 (三鷹)	300m
GEO600 (独英)	ドイツ (Hannover)	600m
LIGO (米)	アメリカ (Hanford, Livingston)	4km(H,L),2km(H)
VIRGO (伊仏)	イタリア (Pisa)	3km (建設中)

表 3.2: 稼働中・建設中の大型干渉計

名称	所在地	基線長	予定
LISA	宇宙	500万 km	2012年
DECIGO[19]	宇宙	10万 km?	2025年?
LCGT[20]	日本 (神岡)	3km	2007年?
advanced LIGO	アメリカ	4km,2km	2007年

表 3.3: 将来計画の大型干渉計



図 3.8: ハンフォードにある LIGO のサイト。 <http://www.nasa.gov/> より転載。

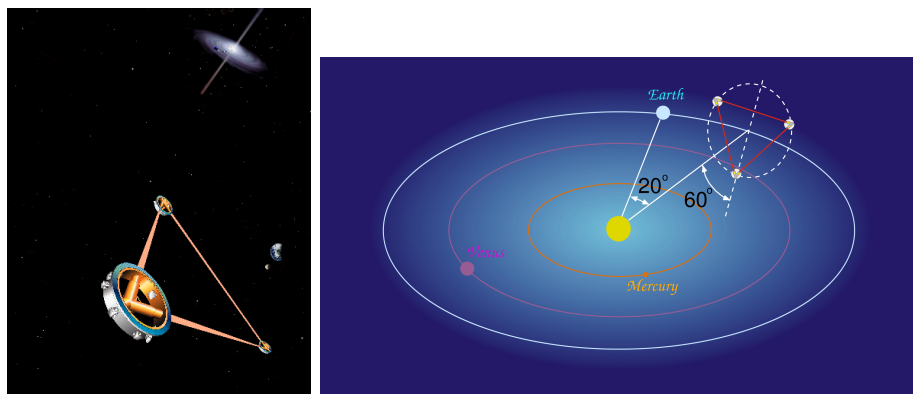


図 3.9: 左: LISA のイメージ図, 右: LISA の軌道。LISA は、太陽から見て地球の後方 20 度の位置を保ちながら地球を追いかける。同様の構成で複数の LISA を打ち上げるものや、地球軌道上に 6 機の衛星を星形に配置して $\sqrt{3}$ AU もの基線長を持つ干渉計にする構想もある。 <http://www.nasa.gov/> より転載。

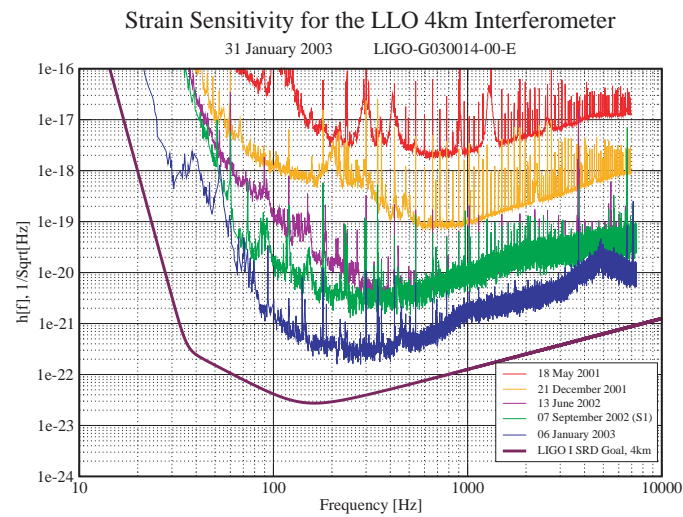


図 3.10: LIGO(Livingston) の感度曲線。一番下の青い曲線が 2003 年 1 月に行われた実験で得られたもの。[21] より転載。

3.3.3 干渉計の雑音源

この節ではレーザー干渉計に存在する主な雑音源について述べる。図 3.11 左は、地上のレーザー干渉計に存在する主な雑音を表しており、図 3.10 は LIGO の実際の雑音である。また、図 3.11 右は、LISA の感度を表している。

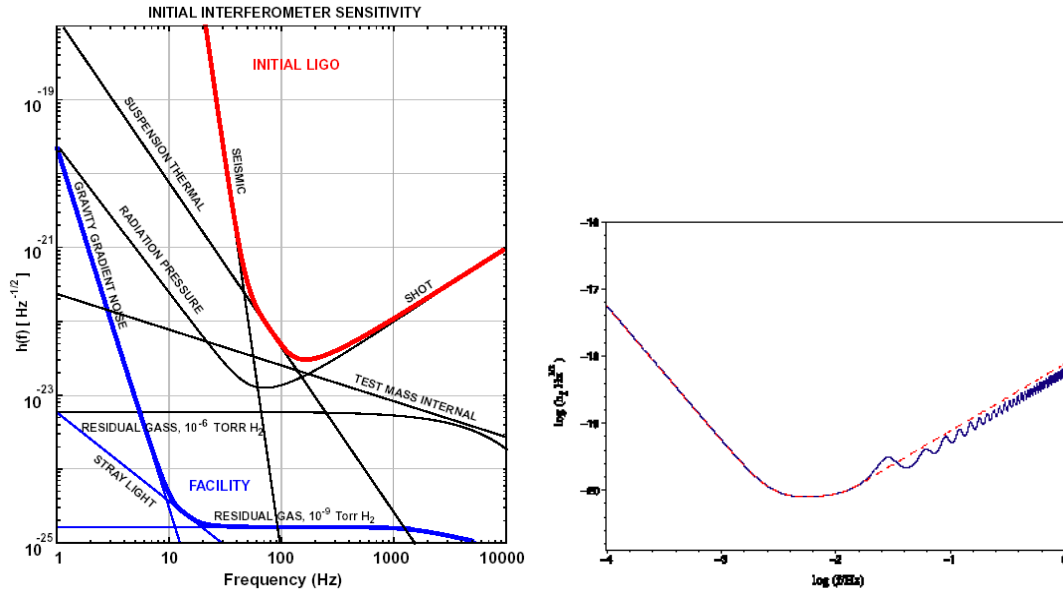


図 3.11: 主な雑音源。 $h(f) \equiv \sqrt{P(f)}$ で表している (37 ページ注釈参照)。左: 地上の干渉計は地面振動・熱雑音・ショットノイズが卓越している。この図には本文中にはない、鏡から乱反射した光による雑音 (stray light), 残留ガスによる散乱による雑音 (residual gas) も描かれている。[22] より転載。右: LISA の感度曲線。[23] より転載。

地面振動

地震、火山、風、月の潮汐力などにより、干渉計が設置されている地面は常に振動している。これが干渉計の鏡を支えるサスペンションを介して鏡に伝わることで、低周波域で卓越する雑音となる。典型的な大きさは [24],

$$x(f) \simeq 10^{-9} \text{m} / \sqrt{\text{Hz}} \quad (1\text{Hz} < f \simeq 10\text{Hz}), \quad (3.8)$$

$$x(f) \simeq \frac{10^{-7}}{f^2} \text{m} / \sqrt{\text{Hz}} \quad (10\text{Hz} < f). \quad (3.9)$$

この種のノイズは、干渉計の感度を最も良くする必要がある 100Hz 以上では、防振装置のために急激に減衰する。

また、地面振動によって干渉計の設置されている地表の密度に濃淡が生じると、それが鏡に対する引力のゆらぎとなる。これは gravity-gradient noise とよばれる。

熱雑音

鏡とそれを支えるサスペンションのブラウン運動に起因する雑音で、数十 Hz～100Hz 付近で卓越する。この種の雑音は、鏡を格納するキャビティの温度を下げることで遮断させることができる。日本の LCGT では、鏡を極低温まで冷やすことで熱雑音を抑え、量子限界に到達する計画になっている。

鏡，ワイヤー等の共振

図 3.10 を見ると、10Hz～10kHz にかけてところどころにピークが立っている。これは、鏡やワイヤー等の共振周波数とその倍音に対応するところである。

ショットノイズ（散乱雑音）

粒子的描像では、レーザー光は光子の集まりとみなす。その光子は、光源で使われている原子の高いエネルギー準位から、より低いエネルギー準位へおちるという確率的な過程より生じたものである。それゆえ、干渉計に入射した光子の数は揺らいでいる。単位時間あたりの光子の個数を n 、観測時間を τ とすると、全光子数 N とレーザー光の強度 P は、

$$N = n\tau, \quad (3.10)$$

$$P = nh\nu, \quad (3.11)$$

と書ける。波としての光の位相のゆらぎと粒子としての光子の数のゆらぎは、不確定性関係から、

$$\Delta\Phi\Delta N \sim 1, \quad (3.12)$$

となっている。レーザーのようなコヒーレント光の光子数はポアソン分布に従うので、 $\Delta N = \sqrt{N}$ であるから、

$$\Delta\Phi \sim \frac{1}{\Delta N} = \sqrt{\frac{h\nu}{P\tau}}, \quad (3.13)$$

が得られる。マイケルソン干渉計において、片方の鏡が Δx だけ動いたとすると、

$$\Delta\Phi = 2k\Delta x = \frac{4\pi}{\lambda}\Delta x, \quad (3.14)$$

という位相差に対応するので、式 (3.13) を変位に直すと、

$$\Delta x \sim \frac{\lambda}{4\pi} \sqrt{\frac{h\nu}{P\tau}}, \quad (3.15)$$

が得られる。この式から、レーザー光の強度 P を上げれば、ショットノイズが低減することが分かる。詳しい計算によれば、

$$\begin{aligned} h_{\text{shot}}(f) &= \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\hbar c \lambda}{2\pi P}} \\ &= 1.3 \times 10^{-20} \text{ Hz}^{-1/2} \left(\frac{4\text{km}}{L} \right) \left(\frac{\lambda}{0.545\mu\text{m}} \right)^{1/2} \left(\frac{1\text{W}}{P} \right), \end{aligned} \quad (3.16)$$

となる ($\text{Hz}^{-1/2}$ の次元を持つ) [24]。ショットノイズは周波数に依存しないにもかかわらず、図 3.11 左で「shot noise」と書かれている部分が右上がり ($\propto f$) になっているのは、式 (3.7) にあるように干渉計の長さを固定すると、高周波の重力波に対しては感度がなくなるからである¹¹。

輻射圧

レーザー光が鏡に当たって反射する際、光子の運動量が鏡に渡される。それが、鏡を揺らして雑音となる。レーザー光の強度 P に対して、鏡が受ける力は、

$$F_{\text{rad}} = \frac{P}{c}. \quad (3.17)$$

ここで問題なのは、ショットノイズによるレーザー光の強度のゆらぎ ΔP で鏡が非定常な力を受けることである。これによって鏡が受ける力のゆらぎは、

$$\Delta F = \frac{\Delta P}{c}, \quad (3.18)$$

となる。詳しい計算によれば、

$$h_{\text{rp}}(f) = \frac{1}{m f^2 L} \sqrt{\frac{\hbar P}{2\pi^3 c \lambda}}, \quad (3.19)$$

となる [24]。ショットノイズとは逆に、レーザー光の強度が下がれば低減できることがわかる。

このように、ショットノイズと輻射圧ノイズはレーザー光の強度の依存性が正反対なので、これらのノイズを最小に抑える最適なレーザー光の強度が存在する。ショットノイズ (式 (3.16)) と輻射圧ノイズ (式 (3.19)) を合わせた

$$h_{\text{oro}} = \sqrt{h_{\text{shot}}^2(f) + h_{\text{rp}}^2(f)}, \quad (3.20)$$

は、特に optical readout noise と呼ばれている。これが最小となるレーザーの強度は、

$$\begin{aligned} P_{\text{opt}} &= \pi c \lambda m f^2 \\ &= 0.5 \text{ MW} \left(\frac{\lambda}{0.545 \mu\text{m}} \right) \left(\frac{m}{10\text{kg}} \right) \left(\frac{f}{100\text{Hz}} \right)^2, \end{aligned} \quad (3.21)$$

となる。しかし、このような強度を持つレーザー光源を作るのは非常に困難であるので、実際は光学系に対して工夫を施している¹²。そして、レーザー光がこの強度のとき、式

¹¹ 正確には、干渉計の応答関数 (transfer function) として表現される [10][24]。

¹² 鏡に反射したレーザーの一部は光源に戻ってくる。この戻り光を再利用するために、ビームスプリッターと光源との間にリサイクリングミラーという鏡を置く。これをパワーリサイクリングという。この機構によって、実効的に光源の強度を稼ぐことができる。TAMA はこれを採用している [25]。また、ビームスプリッターと光検出器との間にも鏡を置いて、得られる信号を干渉計に戻して増幅するシグナルリサイクリングというものもある。GEO はこの 2 つの機構を採用している [26]。

(3.20) は,

$$h_{\text{SQL}}(f) = \frac{1}{\pi f L} \sqrt{\frac{\hbar}{m}}, \quad (3.22)$$

となる。これは標準量子限界と呼ばれており、干渉計で重力波を検出する上での一種の原理的限界を与えている。したがって、このノイズを全ての周波数帯に渡って低減することはできないのだが、スクイズド光を用いることで、狭い周波数帯でこの標準量子限界を越える手法が考案されている [27]。

■ 3.3.4 ■ LISA の雑音源

地上の干渉計とは異なり、宇宙空間で観測する LISA には地面振動に起因する雑音は無く、熱雑音もほとんど存在しない。一方で、基線長が極めて長く、宇宙空間という環境であるからこそ存在する雑音もいくつか存在する [28]。図 3.11 右はその感度曲線である。高周波側は地上の干渉計と同じくショットノイズが卓越しているが、低周波側では加速度雑音が、さらに全体的には位置雑音が存在する。また、インフレーション起源の背景重力波を検出するには、5.2 節で述べる連星系による背景重力波も雑音となる (図 5.20)。

acceleration noise

打ち上げられる 3 台の人工衛星は、それぞれができるだけ他からの力を受けない状態にしておかなければならない (drag-free)。しかし、完全に全ての力をキャンセルすることはできず、わずかな加速度が衛星の中にある鏡に加わることが考えられる。これが、重力波信号に対する雑音となる。例えば、衛星内の局所的な加熱による衛星の変形や、わずかに電荷を帯びた鏡にかかる電気力などが挙げられる。これらは加速度のゆらぎ $\delta a(f)$ であるから、位置のゆらぎ $\delta x(f)$ に直すには、 f^{-2} を乗じる必要がある ($\delta x(f) \simeq \delta a(f) f^{-2}$)。そのため、感度曲線は右下がりになる (図 3.11 右の低周波部分)。

optical-path noise

主に、使用するレーザーに起因する雑音である。地上の干渉計と同じく、偽の重力波の信号を生み出す原因になる。ショットノイズの他に、レーザーの照射方向・位相のずれに起因するものなどがある。[28] では、

$$h_f(f) \sim 40 \times 10^{-12} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}, \quad (3.23)$$

という見積もりを与えている。図 3.11 右の高周波部分はこれらの雑音が卓越しているのだが、周波数に依存しないにもかかわらず感度曲線が右上がり ($\propto f$) になっているのは、先ほど述べたように LISA の応答関数のためである [23][29]。

第4章

データ解析

この章では、前の章で述べた重力波検出器から得られた信号を解析する手法について述べる。一般に、重力波の解析にはマッチドフィルター (matched filter) という方法が用いられる。この方法は、あらかじめ理論から予想される重力波の波形 (テンプレート) を使って最適フィルターを構成し、それに検出器の出力を通すことで本物の信号と雑音とを区別して信号/ノイズ比 (以降, SN 比) を向上させるというものである。連星中性子星からの重力波のように、詳しい波形がわかるものに対して使われる。

しかし、検出器のノイズとの区別がつきにくく、詳しい波形もあまり良く分からない背景重力波に対しては、一台の検出器からのデータだけでは検出が難しい。そこで、データの相関をとるといった概念が重要になってくる。相関をとることで、ノイズによる信号に対して背景重力波の信号を際立たせることができるのである。このように相関をとることを考えると、今度は、互いの検出器の配置によって検出効率が変わってしまう事実に突き当たる。これは overlap reduction function (以降 ORF と略す) という関数で表現される。背景重力波の検出には、検出器の配置の仕方にも気を配らなければならないことがわかる。

4.1 節では、一台の検出器のデータに対して、SN 比を向上させるのに最も適したフィルターを導出する [30][31]。そして、背景重力波の検出に使われる相関を用いたデータ解析の手法を 4.2 節で述べる [32]。

III Section 4.1 III

最適フィルター

この節では、一台の検出器から得られたデータに対して、SN 比を向上させる最適フィルター (optimal filter) を用いたデータ解析法について述べる [33]。これは、理論から予言される重力波の波形をテンプレートとして用意し、それと検出器からの出力データを”掛け合わせる”ことによって、実効的な S/N 比を上げるといった手法である。

検出器の出力を $x(t)$ とする。この出力信号には、重力波の信号 $h(t)$ と検出器固有のノイズ $n(t)$ が含まれている：

$$x(t) = h(t - t_a) + n(t). \quad (4.1)$$

ここで、 t_a は信号の到達時刻を表す。この出力信号をフィルター $q(t)$ に通して時間積分すると、

$$\rho \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t)q(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(f)\tilde{q}^*(f) df, \quad (4.2)$$

という量が得られる。チルダ付きの量は、その量のフーリエ成分：

$$\tilde{x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dt x(t)e^{-2\pi ift}, \quad (4.3)$$

であることを表しており、 Hz^{-1} の次元を持っている。。 ρ の中に、フィルターによってふるいを掛けられた重力波の信号と検出器のノイズによる偽の信号が含まれている ($\rho = S + N$):

$$S \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(f) q^*(f) e^{-2\pi i f t_a} df, \quad (4.4)$$

$$N \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{n}(f) q^*(f) df. \quad (4.5)$$

検出器のノイズの大きさ $n(t)$ がガウス分布に従う確率変数ならば、フィルターをかけた ρ もガウス分布に従う確率変数である。検出器のノイズの (one-sided) パワースペクトル $P(|f|)$ を,

$$\langle \tilde{n}^*(f) \tilde{n}(f') \rangle \equiv \frac{1}{2} P(|f|) \delta(f - f'), \quad (4.6)$$

と定義すると (図 3.10 は $\sqrt{P(|f|)}$ を表している), $n(t)$ は平均が 0 で、分散が,

$$\langle n^2(t) \rangle = \int_0^{\infty} P(f) df, \quad (4.7)$$

であることがわかる。一方で、 ρ の平均と分散は,

$$\langle \rho \rangle = S = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(f) q^*(f) e^{-2\pi i f t_a} df, \quad (4.8)$$

$$\langle (\rho - \langle \rho \rangle)^2 \rangle = \langle N^2 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} P(|f|) |\tilde{q}(f)|^2 df, \quad (4.9)$$

となる。ここで、スカラー積:

$$(a, b) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{P(|f|)} \left[\tilde{a}(f) \tilde{b}^*(f) + \tilde{a}^*(f) \tilde{b}(f) \right], \quad (4.10)$$

を定義すると、SN 比は,

$$\left(\frac{S}{N} \right)^2 \equiv \frac{S^2}{\langle N^2 \rangle} = \frac{(h e^{-2\pi i f t_a}, P q)^2}{(P q, P q)}, \quad (4.11)$$

と書くことができる。ただし、 $P(|f|)$ は実数で、 $\tilde{h}^*(f) = \tilde{h}(-f)$, $\tilde{q}^*(f) = \tilde{q}(-f)$ であることを考慮している。この SN 比を最大にするフィルター、すなわち最適フィルターは,

$$\tilde{q}_{\text{opt}}(f) = \gamma \frac{\tilde{h}(f) e^{-2\pi i f t_a}}{P(|f|)}, \quad (4.12)$$

となることがわかる。ただし、 γ は任意定数である。 $\tilde{h}(f)$ は、検出器の出力に含まれているであろう、重力波による真の信号のフーリエ成分であることを思い出されたい。そして、この最適フィルターは、まさにいま知りたい重力波の信号 $\tilde{h}(f)$ を要求しているのである。そこでこの $\tilde{h}(f)$ として、ここで、理論から予想される波形 (テンプレート) を使

う。実際のイベントサーチでは¹³、様々なイベントのテンプレート $\tilde{h}_{\text{temp}}(f)$ に対する最適フィルター (4.12) を作り、それを式 (4.2) に代入して、

$$\rho_{\text{opt}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{x}(f)\tilde{h}_{\text{temp}}^*(f)}{P(f)} e^{-2\pi i f t_a} \quad (4.13)$$

が決められた値以上になったことをもって、そのイベントがあったことを決定している [25]。観測した重力波とテンプレートが完全に一致した場合、SN 比は、

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{opt}} = 2\sqrt{\int_0^{\infty} df \frac{|\tilde{h}(f)|^2}{P(f)}}, \quad (4.14)$$

となる。この SN 比は、次のように書くこともできる：

$$\frac{h_c}{h_n(f_c)} \equiv \frac{S}{N}. \quad (4.15)$$

ここで、

$$h_c \equiv 2\sqrt{\int_0^{\infty} \frac{P(f_c)}{P(f)} |\tilde{h}(f)|^2 f df}, \quad (4.16)$$

$$h_n(f) \equiv \sqrt{fP(f)}, \quad (4.17)$$

$$f_c \equiv \int_0^{\infty} \frac{|\tilde{h}(f)|^2}{P(f)} f df \left(\int_0^{\infty} \frac{|\tilde{h}(f)|^2}{P(f)} df \right)^{-1}, \quad (4.18)$$

と定義した。 h_c は特徴的振幅 (characteristic amplitude)、 f_c は特徴的周波数 (characteristic frequency) である。 h_c は、最適フィルターを考慮した重力波の振幅の見積もりの際によく使われる量で¹⁴、特に連続波 (例えば 56 の図 5.18) についてはその振動回数を N とすると、

$$h_c \simeq \sqrt{N}h, \quad (4.19)$$

という関係が成り立ち、バースト波よりも SN 比を得ることが分かっている [30]¹⁵。

h_c については、次のように検出器のノイズ $P(f)$ とは完全に独立した量を定義する場合もある [36]：

$$\langle h_{ij}(t)h^{ij}(t) \rangle = 2 \int_{f=0}^{f=\infty} h_c^2(f) d(\log f). \quad (4.20)$$

¹³同じイベントであっても、様々なパラメータに対するテンプレートが必要になる。連星の質量パラメータについては [34] を参照。

¹⁴被積分関数の分子と分母の次元を合わせて、 $h_f(f) \equiv \sqrt{P(f)}$ と $\sqrt{f}\tilde{h}(f)$ とを比較する図も良く見られる ([35] など)。共に $\text{Hz}^{-1/2}$ の次元を持っている。

¹⁵合体まで 3 分に迫っている連星中性子星は、あと 2600 回ほど公転する [10]。この場合、最適フィルターを使うことにより、ファクターで $\sqrt{2600} \simeq 51$ ほど SN 比が上がることになる。

III Section 4.2 III

背景重力波に対するデータ解析

背景重力波の場合、その信号と検出器のノイズは区別することができないため、4.1節で述べたような単独の検出器を使って最適フィルターをかける方法では、効率の良い検出が期待できない。そこで、背景重力波のデータ解析には、複数の検出器のデータの相関を取るという手法が用いられる。複数の検出器を使うことで、個々の検出器に特徴的なノイズに対し、全検出器で共通であるはずの背景重力波の信号とを際立たせることができる。そして、最適フィルターを用いることで、さらにSN比の高い検出が可能になる。また、1台のときとは違って、互いの検出器の配置のしかたが検出効率を大きく変えるようになる。これは overlap reduction function (ORF) という関数で表現される。

このような相関をとる手法は、マイケルソン (P.F. Michelson) [37] によって考案され、フラナガン (E.E. Flanagan) [38], クリステンセン (N. Christensen) [39], アレン (B. Allen) [32][40] などによって発展した。

■ 4.2.1 ■

背景重力波

背景重力波とは、無数にある波源からの重力波が重なりあって、CMBのように背景放射として存在する重力波である。その起源については5章と6章で述べることにする。この節では、背景重力波に対して、(1) 等方的¹⁶, (2) 偏向が無い, (3) 定常¹⁷, (4) 振幅の分布はガウシアン¹⁸ ということを仮定し、背景重力波のパワースペクトルについて述べる。これらの仮定は、あくまで以下の計算を簡単にするためのものであり、より一般的な議論は4.2.6節で行う。

背景重力波を議論するときには振幅 $h_{\mu\nu}$ や $h_c(f)$ よりも、次の量が使われる：

$$\Omega_{\text{GW}}(f) \equiv \frac{1}{\rho_c} \frac{d\rho_{\text{GW}}}{d \ln f}. \quad (4.21)$$

ρ_{GW} は背景重力波のエネルギー密度で、式(2.82)で $\mu = \nu = 0$ とおいて、

$$\rho_{\text{GW}} = \frac{c^2}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ab}(t, \mathbf{x}) \dot{h}^{ab}(t, \mathbf{x}) \rangle, \quad (4.22)$$

となる。ここでの $\langle \dots \rangle$ は時間平均であったが、仮定(3)とエルゴード性により、アンサンブル平均と考えてもよい。また、 ρ_c は臨界エネルギー密度 (フリードマンモデルにおける“閉じた宇宙”と“開いた宇宙”との境目)：

$$\rho_c \equiv \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G} \approx 1.6 \times 10^{-8} h_0^2 \text{ ergs/cm}^3, \quad (4.23)$$

¹⁶5.2節で述べる銀河系の天体起源の背景重力波に関しては、おそらく非等方的な分布になると考えられる。

¹⁷変化のタイムスケールが観測時間よりもずっと長い波源に対しては成り立つ。

¹⁸波源が少数の背景重力波の場合は成り立たない。

で、 h_0 は無次元化した現在のハッブル定数：

$$H_0 = 3.2 \times 10^{-18} h_0 \text{ sec}^{-1}, \quad (4.24)$$

である¹⁹。式(4.21)と式(4.23)を合わせると、 $h_0^2 \Omega_{\text{GW}}(f)$ という量がハッブル定数に依存しない量になるのでよく使われている。また、 Ω_{GW} と式(4.20)の $h_c(f)$ とは、

$$\Omega_{\text{GW}}(f) = \frac{2\pi^2}{3H_0^2} f^2 h_c^2(f), \quad (4.25)$$

$$h_c(f) \simeq 1.263 \times 10^{-18} \left(\frac{1\text{Hz}}{f} \right) \sqrt{h_0^2 \Omega_{\text{GW}}(f)}. \quad (4.26)$$

という関係がある。

続いて、背景重力波のパワースペクトル $H(f)$ を計算する。背景重力波の振幅 $h_{ab}(t, \mathbf{x})$ を展開すると、

$$h_{ab}(t, \mathbf{x}) = \sum_{A=+, \times} \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{S^2} d\hat{\Omega} h_A(f, \hat{\Omega}) e^{i2\pi f(t - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{x}/c)} e_{ab}^A(\hat{\Omega}), \quad (4.27)$$

となる。この $h_A(f, \hat{\Omega})$ に対し、背景重力波のパワースペクトル $H(f)$ は、

$$\langle h_A^*(f, \hat{\Omega}) h_{A'}(f', \hat{\Omega}') \rangle = \delta^2(\hat{\Omega}, \hat{\Omega}') \delta_{AA'} \delta(f - f') H(f), \quad (4.28)$$

というように定義される。ここで、仮定(1)(2)(3)を用いており、

$$\delta^2(\hat{\Omega}, \hat{\Omega}') = \delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta'), \quad (4.29)$$

である。偏向テンソル $e_{ab}^A(\hat{\Omega})$ は、基底ベクトルを、

$$\hat{\Omega} = (\cos \phi \sin \theta) \hat{x} + (\sin \phi \sin \theta) \hat{y} + (\cos \theta) \hat{z}, \quad (4.30)$$

$$\hat{m} = (\sin \phi) \hat{x} - (\cos \phi) \hat{y}, \quad (4.31)$$

$$\hat{n} = (\cos \phi \cos \theta) \hat{x} + (\sin \phi \cos \theta) \hat{y} - (\sin \theta) \hat{z}, \quad (4.32)$$

と定義することにより（図4.12を参照）、

$$e_{ab}^+(\hat{\Omega}) = \hat{m}_a \hat{m}_b - \hat{n}_a \hat{n}_b, \quad (4.33)$$

$$e_{ab}^\times(\hat{\Omega}) = \hat{m}_a \hat{n}_b + \hat{n}_a \hat{m}_b, \quad (4.34)$$

と書くことができる。式(4.22)に式(4.27)の時間微分を代入し、式(4.28)を使うことで、

$$H(f) = \frac{3H_0^2}{32\pi^3} |f|^{-3} \Omega_{\text{GW}}(|f|), \quad (4.35)$$

と計算することができる。よって、式(4.28)を Ω_{GW} を用いて書き直すと、

$$\langle h_A^*(f, \hat{\Omega}) h_{A'}(f', \hat{\Omega}') \rangle = \frac{3H_0^2}{32\pi^3} \delta^2(\hat{\Omega}, \hat{\Omega}') \delta_{AA'} \delta(f - f') |f|^{-3} \Omega_{\text{GW}}(|f|), \quad (4.36)$$

となる。

¹⁹WMAP より $h = 0.72 \pm 0.05$ 。

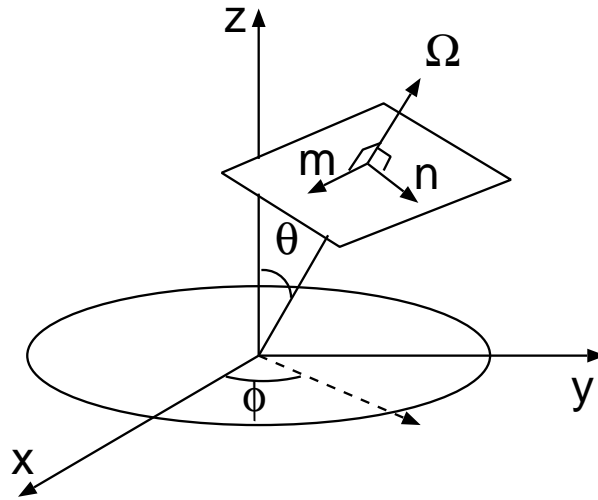


図 4.12: この章で用いる座標系。

■ 4.2.2 ■ 2台の検出器の相関

次に、2台の検出器のデータに対して相関をとることを考える。検出器のノイズについても、(a) 定常、(b) ノイズの振幅の分布はガウシアン、(c) 互いの検出器のノイズは相関がなく背景重力波とも相関がない、(d) ノイズの方が背景重力波の振幅よりも大きいことを仮定する。これらの仮定は、背景重力波に対して課した仮定よりも現実的でないと思われるかも知れないが、より一般的な議論は同じく 4.2.6 節に譲ることにして、ここではデータの相関をとることについての本質的な部分にのみ着目する。

さて、2台の検出器のデータ $s_1(t) = h_1(t) + n_1(t)$ と $s_2(t) = h_2(t) + n_2(t)$ に対して、観測時間 $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ において相関をとる：

$$S = \int_{-T/2}^{T/2} dt s_1(t) s_2(t). \quad (4.37)$$

S の平均 μ と分散 σ は、

$$\mu = \langle S \rangle, \quad \sigma^2 = \langle S^2 \rangle - \langle S \rangle^2, \quad (4.38)$$

であり、SN 比は、

$$\frac{S}{N} = \frac{\mu}{\sigma}, \quad (4.39)$$

となる。

まずは平均 μ について考える。仮定 (c) を使うと $\langle n_1(t)n_2(t) \rangle$ や $\langle h_1(t)n_1(t) \rangle$ などの項が落ちるので、

$$\begin{aligned} \mu = \langle S \rangle &= \int_{-T/2}^{T/2} dt \langle h_1(t)h_2(t) \rangle \\ &= T \langle h_1(t)h_2(t) \rangle, \end{aligned} \quad (4.40)$$

となる。 $\langle h_1(t)h_2(t) \rangle$ が時間に依らないことを使っているが、それはすぐ後で分かる。 μ を Ω_{gw} で表すために、まずは検出器の指向性を考える。重力波干渉計の場合、2本の腕がビームスプリッターを原点として \hat{X}_i^a, \hat{Y}_i^a という方向を向いているとする²⁰。ここで添字 i は干渉計の番号を表している。この干渉計は、2種類の偏向が混ざっている重力波 $h_{ab}(t, \mathbf{x})$ に対して、

$$h_i(t) \equiv h_{ab}(t, \mathbf{x}) \frac{1}{2} (\hat{X}_i^a \hat{X}_i^b - \hat{Y}_i^a \hat{Y}_i^b), \quad (4.41)$$

という応答をする²¹。式(4.27)を式(4.41)に代入し、の $\langle h_1(t)h_2(t) \rangle$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \langle h_1(t)h_2(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} df' \int d\hat{\Omega} \int d\hat{\Omega}' F_1^A(\hat{\Omega}) F_2^B(\hat{\Omega}') \langle h_A^*(f, \hat{\Omega}) h_B(f', \hat{\Omega}') \rangle \\ &\quad \times e^{-i2\pi f(t - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{x}/c)} e^{i2\pi f'(t - \hat{\Omega}' \cdot \mathbf{x}'/c)} \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$= \frac{8\pi}{5} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3H_0^2}{32\pi^3} |f|^{-3} \Omega_{\text{GW}}(|f|) \gamma(f), \quad (4.43)$$

となる (t に依存していないことに注意されたい)。ただし、一つめの等号で $h_A(-f, \hat{\Omega}) = h_A^*(f, \hat{\Omega})$ を使っており、さらに、

$$F_i^A(\hat{\Omega}) \equiv e_{ab}^A(\hat{\Omega}) d_i^{ab} \equiv e_{ab}^A(\hat{\Omega}) \frac{1}{2} (\hat{X}_i^a \hat{X}_i^b - \hat{Y}_i^a \hat{Y}_i^b), \quad (4.44)$$

$$\gamma(f) \equiv \frac{5}{8\pi} \sum_{A=+, \times} \int_{S^2} d\hat{\Omega} e^{i2\pi f \hat{\Omega} \cdot \Delta \mathbf{x}/c} F_1^A(\hat{\Omega}) F_2^A(\hat{\Omega}), \quad (4.45)$$

$$\Delta \mathbf{x} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{x}',$$

と定義した。この $F_i^A(\hat{\Omega})$ は応答関数 (response function) といい²²、 d^{ab} という形を成している検出器の、偏向 e_{ab}^A に対する応答を表す量である。また、応答関数に、重力波の到達時間差 $\Delta \mathbf{x}/c$ に起因する位相因子をかけて角度について積分した $\gamma(f)$ を overlap reduction function (ORF) という。ORF は、2台の検出器間の信号到達時刻のずれや (miss coincident)、検出器の向いている方向のずれ (miss alignment) が存在することに起因する相関信号の減衰度を表している。例えば干渉計の場合、2台の干渉計の腕の向いている方向が完全に一致していて、しかも全く同じ位置 (現実には不可能だが $\Delta \mathbf{x} = 0$) にあるとすれば、ORF は $\gamma(f) = 1$ になる。しかし、2台の設置場所が遠く離れていて ($\Delta \mathbf{x}$ が大) 信号の到達時間の差が大きかったり、腕が全く異なる方角を向いていると $\gamma(f) \rightarrow 0$ になって、相関をとっても検出効率が良くないことになる。たとえば、ハンフォードとリビングストンにある2台のLIGO間のORFは図4.13のようになっている。この2台は互いに90度以上ずれているために $f \rightarrow 0$ で $\gamma < 0$ となっており、さらに、計4本の腕が同一面内にないために $|\gamma(0)| < 1$ となっている。また、2台の間の距離に対応する50Hz ($= 3000\text{km}/2c$) で急激に0に近づいていることもわかる (正確には64Hzで0)。

²⁰ \hat{X}^a と \hat{Y}^a は直交している必要はない。例えばGEOは94.33度となっている。円筒型や球型の検出器に関しては[36]を参照。

²¹ h_{ab} が純粋なクロスモード e_{ab}^{\times} で、干渉計の腕が $\hat{X}^a = m^a, \hat{Y}^a = n^a$ とプラスモードにしか感度がないように設定すると、たしかにこの式から $h(t) = 0$ となることがわかる。

²² LISAの場合も、若干複雑になるが同様の計算ができる [23][29]。

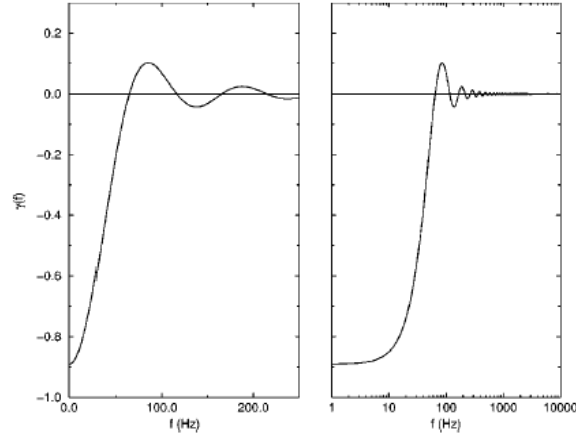


図 4.13: LIGO(Hanford) と LIGO(Livingston) の間の overlap reduction function(ORF)。右の図は周波数を対数表示にしたもの。[32] より転載。

最終的に得られた結果は、式 (4.40) と式 (4.43) より、

$$\mu = \frac{3H_0^2 T}{20\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} |f|^{-3} \Omega_{\text{GW}}(|f|) \gamma(f), \quad (4.46)$$

となる。

続いて、分散 σ^2 について考える。仮定 (c)(d) を使うと、

$$\sigma^2 \equiv \langle S^2 \rangle - \langle S \rangle^2 \approx \langle S^2 \rangle \quad (4.47)$$

$$\approx \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-T/2}^{T/2} dt' \langle n_1(t) n_1(t') \rangle \langle n_2(t) n_2(t') \rangle \quad (4.48)$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} df' \delta_T^2(f - f') P_1(|f|) P_2(|f'|), \quad (4.49)$$

を得る。ここで $P_i(|f|)$ はノイズのパワースペクトルであり、式 (4.6) と同様に、

$$\langle n_i(f) n_j(f') \rangle \equiv \frac{1}{2} P_i(|f|) \delta(f - f') \delta_{ij}, \quad (4.50)$$

と定義される。また、

$$\delta_T(f) \equiv \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{-i2\pi ft} = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f}, \quad (4.51)$$

である。観測時間 T を 10^7 秒とすると、 $\delta_T(f - f')$ は $|f - f'| \sim 1/T \sim 10^{-7}$ Hz 程度の範囲でしか値を持たない。その一方で、 $P_i(|f|)$ は数 100 Hz 程度の範囲で変化するので、式 (4.49) において、 δ_T が変化する間は $P_i(|f|)$ はほぼ一定としてよい。したがって、 $\delta_T(f - f') \approx \delta_T(0) = T$ を考慮して、式 (4.49) は、

$$\sigma^2 \approx \frac{T}{4} \int_{-\infty}^{\infty} df P_1(|f|) P_2(|f|) \quad (4.52)$$

となる。

式(4.40)と式(4.52)からSN比は、

$$\frac{S}{N} \approx \frac{3H_0^2}{10\pi^2} \sqrt{T} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} df |f|^{-3} \Omega_{\text{gw}}(|f|) \gamma(f)}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} df P_1(|f|) P_2(|f|)}} \quad (4.53)$$

となる。この式から、観測時間 T が長いほどSN比が良くなることが分かる。背景重力波の検出には、数ヶ月から数年の連続観測が想定されている場合が多い。

■ 4.2.3 ■ 最適フィルター

4.2.1 節で述べたマッチドフィルターの手法は、背景重力波に対しても使われる。フィルター $Q(t, t')$ に通した相関関数は、

$$S \equiv \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-T/2}^{T/2} dt' s_1(t) s_2(t') Q(t, t'), \quad (4.54)$$

と表せる。重力波もノイズも定常であることから、最適なフィルターは $Q(t, t') = Q(t - t')$ という形であることがわかる。また、41 ページでも述べたように、2つの検出器の間に重力波の到達時間差があると SN 比が小さくなってしまう。したがって、 $t - t'$ が $\Delta \mathbf{x}/c$ より大きいと急激に 0 になるフィルターが最適であると考えられる。典型的な観測時間 T は、 $\Delta \mathbf{x}/c$ よりずっと大きいので²³、 t' についての積分区間を拡張することができる：

$$S = \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' s_1(t) s_2(t') Q(t - t') \quad (3.48)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} df' \delta_T(f - f') \tilde{s}_1^*(f) \tilde{s}_2(f') \tilde{Q}(f). \quad (4.55)$$

ただし、最後の等号ではフーリエ変換を行った。

まず平均 μ は、フィルターが入ったことによって式 (4.40) より、

$$\mu = \langle S \rangle = \frac{3H_0^2}{20\pi^2} T \int_{-\infty}^{\infty} df |f|^{-3} \Omega_{\text{gw}}(|f|) \gamma(|f|) \tilde{Q}(f), \quad (4.56)$$

となる。

分散 σ^2 についても式 (4.52) を導いたのと同様に計算できて、

$$\sigma^2 \approx \frac{T}{4} \int_{-\infty}^{\infty} df P_1(|f|) P_2(|f|) |\tilde{Q}(f)|^2, \quad (4.57)$$

となる。

式 (4.10) と同じようにスカラー積を定義する：

$$(A, B) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} df A^*(f) B(f) P_1(|f|) P_2(|f|). \quad (4.58)$$

これを用いると、平均 μ 、分散 σ^2 および SN 比は、

$$\mu = \frac{3H_0^2}{20\pi^2} T \left(\tilde{Q}, \frac{\gamma(|f|) \Omega_{\text{gw}}(|f|)}{|f|^3 P_1(|f|) P_2(|f|)} \right), \quad (4.59)$$

$$\sigma^2 = \frac{T}{4} (\tilde{Q}, \tilde{Q}), \quad (4.60)$$

$$\left(\frac{S}{N} \right)^2 = \frac{\mu^2}{\sigma^2} \approx \left(\frac{3H_0^2}{10\pi^2} \right)^2 T \frac{\left(\tilde{Q}, \frac{\gamma(|f|) \Omega_{\text{gw}}(|f|)}{|f|^3 P_1(|f|) P_2(|f|)} \right)^2}{(\tilde{Q}, \tilde{Q})}, \quad (4.61)$$

²³LIGO なら 2つの干渉計の間がおおよそ 3000km であるから、最大の時間差は 0.01 秒。一方で、観測時間は 1 年程度のスケールである。

と書くことができるので、SN比を最大にできるフィルターは、

$$\tilde{Q}(f) = \lambda \frac{\gamma(|f|)\Omega_{\text{gw}}(|f|)}{|f|^3 P_1(|f|)P_2(|f|)}, \quad (4.62)$$

となる。 λ は任意定数である。4.1節で述べたように、フィルターに含まれている Ω_{GW} には5章で述べるテンプレートを用いるわけだが、もし完全にマッチしたとするとSN比は、

$$\frac{S}{N} \approx \frac{3H_0^2}{10\pi^2} \sqrt{T} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} df \frac{\gamma^2(|f|)\Omega_{\text{gw}}^2(|f|)}{f^6 P_1(|f|)P_2(|f|)}}, \quad (4.63)$$

となる。フィルター $\tilde{Q}(f)$ は図4.14のようになっており、検出器の感度がもっとも良い周波数帯のデータを取り出すようになっている。

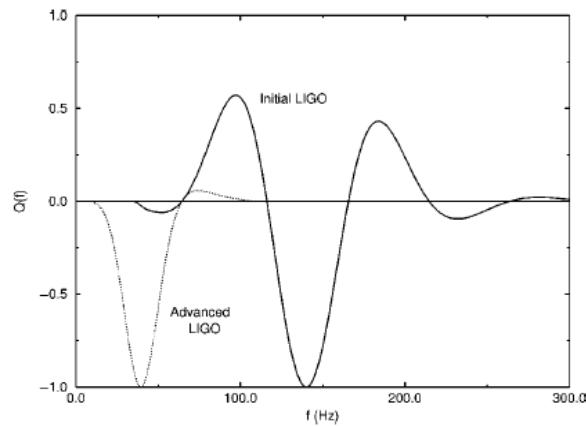


図 4.14: $\Omega_{\text{GW}} = \text{const.}$ の背景重力波に対する、LIGO と advanced LIGO の最適フィルター。それぞれ最大値で規格化してある。[32] より転載。

■ 4.2.4 ■ 重力波の検出基準

あるSN比で信号が検出された場合、それが本当に背景重力波によるものであったのか、それともノイズなどによりたまたま検出されたものなのかを決める必要がある。それは通常、統計的手法に頼って、Neyman-Pearson criterion という基準が用いられる [32]。この基準は、いわゆる最尤法に基づく決定基準と等価のものである。

1年間の観測をした場合、最適フィルターを用いると式(4.55)より2つの信号 \tilde{s}_1 と \tilde{s}_2 は $|f - f'| < 1/T \approx 3 \times 10^{-8} \text{Hz}$ の幅でしか相関しないことがわかる。一方で、干渉計のバンド幅は100Hz程度あるので、確率変数としての S は、非常に多くの確率変数 \tilde{s} で構成されていることになる。よって、中心極限定理より、確率変数 S はガウシアンであると

してよい。 $\mathbf{s} \equiv (S_1, S_2, \dots, S_n)$ を観測の標本とすると²⁴、その標本平均と標本分散は、

$$\hat{\mu} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i, \quad (4.64)$$

$$\hat{\sigma}^2 \equiv \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (S_i - \hat{\mu})^2, \quad (4.65)$$

となる。

検出基準を作るために、仮説検定を考える。次の仮説を立てる：

H_0 : 背景重力波の信号は検出されていない、

H_1 : 背景重力波の信号が検出された (平均値 μ は未知)。

さらに、次の条件付き確率を定義する：

$p(\mathbf{s}|0)$: 背景重力波の信号が含まれていないときに、観測結果 \mathbf{s} を得る確率

$$p(\mathbf{s}|0) = (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-n/2} \exp \left[-\sum_{i=1}^n \frac{S_i^2}{2\hat{\sigma}^2} \right], \quad (4.66)$$

$p(\mathbf{s}|\mu)$: 背景重力波の信号が平均 μ で含まれているときに、観測結果 \mathbf{s} を得る確率

$$p(\mathbf{s}|\mu) = (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-n/2} \exp \left[-\sum_{i=1}^n \frac{(S_i - \mu)^2}{2\hat{\sigma}^2} \right]. \quad (4.67)$$

ただし、母数 n が大きいことから $\sigma \approx \hat{\sigma}$ と近似した。観測結果の集合を H_0, H_1 に対応する二つの領域 R_0, R_1 に分割する。つまり、もし $\mathbf{s} \in R_i$ ならば仮説 H_i を採用すると約束する。このとき、次の2種類の「間違い」が存在する：

本当は背景重力波の信号がないにもかかわらず、仮説 H_1 を採用してしまう間違い

$$\alpha \equiv \text{false alarm rate (有意水準)} \equiv \int_{R_1} d\mathbf{s} p(\mathbf{s}|0) \quad (4.68)$$

本当は背景重力波の信号が存在するにもかかわらず、仮説 H_0 を採用してしまう間違い

$$\beta(\mu) \equiv \text{false dismissal rate} \equiv \int_{R_0} d\mathbf{s} p(\mathbf{s}|\mu) \quad (4.69)$$

α と $\beta(\mu)$ は、それぞれの間違いを犯す確率を表す。したがって、 $\delta(\mu) \equiv 1 - \beta(\mu)$ は「背景重力波の信号が存在するときに、きちんと存在すると認識する」確率を表し、detection rate (もしくは検出力) という。 α を固定し、detection rate を最大にする検出の決定基準を選ぶのが妥当である。これは、Neyman-Pearson criterion として規定されている：

$\hat{\mu} < z_\alpha \hat{\sigma} / \sqrt{n}$ ならば H_0 を採用

$\hat{\mu} \geq z_\alpha \hat{\sigma} / \sqrt{n}$ ならば H_1 を採用

²⁴エルゴード性から、一つの観測の異なる時間帯のデータをとってきても良い

z_α は、標準正規分布で右側が α となる $z = (\hat{\mu} - \mu)/(\hat{\sigma}/\sqrt{n})$:

$$z_\alpha = \sqrt{2}\operatorname{erfc}^{-1}(2\alpha), \quad (4.70)$$

である。

上の決定基準を採用するなら、逆に、false alarm rate, false dismissal rate を、

$$\alpha = \operatorname{Prob}(\hat{\mu} \geq z_\alpha \hat{\sigma}/\sqrt{n} | \mu = 0) = \operatorname{prob}(z \geq z_\alpha) = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{z_\alpha}{\sqrt{2}}\right), \quad (4.71)$$

$$\beta(\mu) = \operatorname{Prob}(z < z_\alpha - \sqrt{n}\mu/\hat{\sigma}) = 1 - \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{z_\alpha - \sqrt{n}\mu/\hat{\sigma}}{\sqrt{2}}\right), \quad (4.72)$$

と計算することができる。

4.2.5 背景重力波に対する稼働中の干渉計の感度

前節の検出基準に従い、ここでは背景重力波の信号が実際に存在したとして、 δ の確率でそれを検出できる Ω_{GW} の最低値を求めてみよう。 $1 - \beta(\mu) \geq \delta$ とし、母数が非常に多いことから $\hat{\sigma}$ を σ に置き換えると、式 (4.70)(4.72) より、

$$\frac{S}{N} = \frac{\mu}{\sigma} \geq \sqrt{\frac{2}{n}}[\operatorname{erfc}^{-1}(2\alpha) - \operatorname{erfc}^{-1}(2\delta)], \quad (4.73)$$

となる。インフレーション起源の背景重力波を想定して、式 (4.63) にある $\Omega_{\text{GW}}(f)$ が周波数に依存しない定数であるとする (式 (6.53) 参照)。これを式 (4.63) に代入し、式 (4.73) より観測可能な Ω_{GW} を求めると、

$$\Omega_{\text{GW}} \geq \frac{1}{\sqrt{T_{\text{tot}}}} \frac{10\pi^2}{3H_0^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} df \frac{\gamma^2(|f|)}{f^6 P_1(|f|) P_2(|f|)} \right]^{-1/2} \times \sqrt{2}[\operatorname{erfc}^{-1}(2\alpha) - \operatorname{erfc}^{-1}(2\delta)], \quad (4.74)$$

となる。ただし、 T_{tot} は全観測時間で $T_{\text{tot}} = nT$ 。背景重力波を 4ヶ月 ($\sim 10^7$ 秒) 観測したとき、 $\alpha = 0.05, \delta = 0.95$ での Ω_{GW} は、

$$\begin{aligned} h_0^2 \Omega_{\text{GW}}^{95\%, 5\%} &= 5.74 \times 10^{-6} && \text{initial LIGO pair} \\ h_0^2 \Omega_{\text{GW}}^{95\%, 5\%} &= 5.68 \times 10^{-11} && \text{advanced LIGO pair} \end{aligned}$$

となる [32]。このように、advanced LIGO では背景重力波に対する感度が現行の LIGO に比べて 5桁も良くなる。

5.3.3 節で詳しく述べるが、インフレーション起源の背景重力波は CMB の非等方性の観測から $h_0^2 \Omega_{\text{GW}} < 7 \times 10^{-14}$ という上限値が与えられている。数値だけを比較すると advanced LIGO ですら背景重力波の検出は難しいことになる。しかし、これはあくまで α と γ を仮定したときの統計上の検出限界であり、原理的に不可能であるというわけではないので悲観的になる必要はない。ちなみに、6台の衛星を使った次世代の LISA では、

これまでの議論を繰り返すことで、SN比が1-3で検出できると見積もられている [23]。また、本研究の課題である高次元宇宙モデルを考えると、高周波域で背景重力波の強度が増すことが示唆されている。これならば、LIGOでも検出が可能になるかも知れない。それと同時に、高次元の直接観測ができる可能性がある。詳しくは6章を参照されたい。

■ 4.2.6 ■ 一般的なデータ解析

これまで、4.2.1節（背景重力波）や4.2.2節（ノイズ）に挙げたような仮定をして話を進めてきた。この節では、より一般的な議論をしている研究を紹介する。

ノイズが非定常の場合

一般に、時間帯によって検出器のノイズ強度は異なる。ノイズが大きいときや小さいときに関わらず、全てのデータを重みもかけずに等しく扱うのは効率が悪い。そこで、式(4.40)のような平均をとる際に、全体のデータをノイズの大きい時間帯と小さい時間帯に細分し、各時間帯の分散の逆数を重みとした重み付き平均を使うようにすると良いことを [32] では議論している。

2台の検出器のノイズの間に相関がある場合

ノイズが相関を持つ例としては、大域的なものでは宇宙線や地球磁場の揺らぎなどがあり、2台の検出器が比較的近い場所にある場合は、地面振動が相関を持つ可能性がある [39]。局所的なものでは、同じ材質のワイヤーの振動によるものや、LIGOのように同じ真空管に2つの干渉計が収まっている場合には残留ガスによるノイズがある [39]。

このような相関するノイズが存在すると、それを背景重力波による信号であると誤認する恐れがある。例えば、地球磁場の揺らぎによる偽の信号を Ω に直すと、

$$\Omega_{\text{correlated noise}} = \begin{cases} 10^{-7} & \text{(noisy)} \\ 1.5 \times 10^{-9} & \text{(quiet)} \end{cases} \quad (4.75)$$

になると見積もられている [32]。advanced LIGO の場合、4か月間の相関で $\Omega \sim 6 \times 10^{-11}$ というオーダーの観測を目標にしているので、これは深刻な問題になる。

波源が非等方の場合

波源が非等方である場合、式(4.28)の $H(f)$ に角度依存性を持たせる必要がある。[41] では、

$$\langle h_A^*(f, \hat{\Omega}) h_{A'}(f', \hat{\Omega}') \rangle = \delta_{AA'} \delta(f - f') \delta^2(\hat{\Omega}, \hat{\Omega}') H(f) P(\hat{\Omega}) \quad (4.76)$$

として解析を行っている。これをもとにして、[42] では LISA における背景重力波の非等方性の検出を議論している。

波源やノイズが非ガウシアン的な場合

インフレーション起源の背景重力波の場合は生成される粒子数（グラビトン）が非常に多いが（6.2節参照），天体起源の背景重力波の場合は波源の数がそれほど多くはないために，中心極限定理が破れて振幅の確率分布関数が非ガウシアンになると考えられる。これは，検出器のノイズに対しても言える。

確率分布関数が正規分布からずれると，4.2.4節で述べた信号検出の決定基準が変化し，4.2.5節で述べた検出可能な背景重力波の強度が変わる。[43]では，正規分布関数にデルタ関数を加えた分布関数を用いて，デルタ関数の寄与を変えることで検出限界値を見積もっている。非ガウシアンノイズについては，[44]を参照されたい。

データの組み合わせ

4.2節で説明した2台の検出器からのデータの相関をとる手法は，もちろん3台以上のものにも応用できる。しかし，この方法で必ずしもSN比が向上するとは限らない。例えば，感度の良い検出器と悪い検出器が混ざっている場合，感度の悪い干渉計のデータが全体のSN比を下げてしまうことがある。このような場合は，各検出器のデータに重みをつけて平均をとる手法の方がSN比を高くできる可能性がある。それは節で説明したものと同様の考え方で，各検出器のデータセットの分散の逆数を重みとして平均をとる。こうすると，[32]で議論している4台の干渉計について，検出可能な Ω_{GW} を最大で1桁向上できる（表4.4）。

検出器	$h^2\Omega_{\text{GW}}$ (95%,5%)	
	相関	組み合わせ
LIGO(H),LIGO(L),VIRGO,GEO	6.49×10^{-6}	4.17×10^{-6}
LIGO(H),LIGO(L),VIRGO,TAMA	2.51×10^{-5}	4.50×10^{-6}
LIGO(H),LIGO(L),GEO,TAMA	5.44×10^{-5}	5.54×10^{-6}
LIGO(H),VIRGO,GEO,TAMA	4.68×10^{-5}	8.28×10^{-6}
LIGO(L),VIRGO,GEO,TAMA	3.84×10^{-5}	7.27×10^{-6}

表 4.4: 4台の干渉計について，相関をとる方法と重み付き平均をとる方法とでの検出限界強度の違い。[32]より。

Time Delay Interferometry

LISAでの基線長は500万キロメートルにも及ぶため，となりの衛星までレーザーが届くのに17秒もの時間がかかる。これを利用し，データをうまく組み合わせることで，衛星間の位置のずれに起因するレーザーの位相や周波数のノイズを低減する Time Delay Interferometry という手法が考えられている [45][46]。これによって，いくつか問題あるものの，原理的には上記のノイズを厳密に相殺することができる。

第5章

重力波源

重力波のデータ解析には最適フィルターが用いられることを前の章で説明した。その最適フィルターには、各重力波源について詳細な波形もしくはスペクトルが必要になることも述べた。本論文の目的であるインフレーション起源の背景重力波を検出するためにも、インフレーションの性質などを考慮して詳細なスペクトルを作る必要がある。このようなテンプレートが必要なと同時に、背景重力波の検出には、フォアグラウンドとして存在する他の重力波源についても考える必要がある。

この章では、まず始めに重力波源として考えられている主な天体について、その性質から考えられる重力波の振幅や特徴的な波形について述べる (5.1 節)。これによって、背景重力波の検出に適した周波数帯などが明らかになるであろう。そして5.2 節で、背景重力波の起源について述べる。5.1 節で述べるような天体起源の重力波も、数が非常に多く、位置の同定が困難な場合は、背景重力波として扱わざるを得なくなる。インフレーション起源の背景重力波を検出するためには、これらの天体起源の背景重力波の性質について詳細に研究する必要がある。5.2 節の前半では、この天体起源の背景重力波の中でも、LISA や DECIGO などの宇宙空間観測に密接に関わってくる連星白色矮星起源のものについてレビューする。後半では、インフレーションを起源としない、その他の背景重力波についてもいくつか述べておく。ただし、インフレーション起源の背景重力波のスペクトルについては、章を改めて詳しく述べることにする。最後の5.3 節では、5.2 節で述べる宇宙論的起源の背景重力波に対して元素合成などから付けられている制限について述べる。

III Section 5.1 III

天体からの重力波

2.3 節で述べたように、重力波の生成には対象となる系の質量や空間スケール、動的变化の時間スケールが大きく関わってくる。通常考えられる天体系は、それらが一定の範囲に収まっている。例えば、大質量ブラックホールならば質量が $10^{11} M_{\odot}$ 、大きさが数天文単位で、自転や公転の時間スケールは秒単位を下回ることはそうそうない。コンパクトオブジェクトの連星系ならば、質量はせいぜい数 M_{\odot} 程度で大きさは $10^6 \sim 10^8$ km 程度、公転の時間スケールは数時間～数日となっている。このことから、図 5.15 に示したように、放出される重力波の周波数帯も自ずと決まってくる。

以下で、個々の天体系について述べていく。

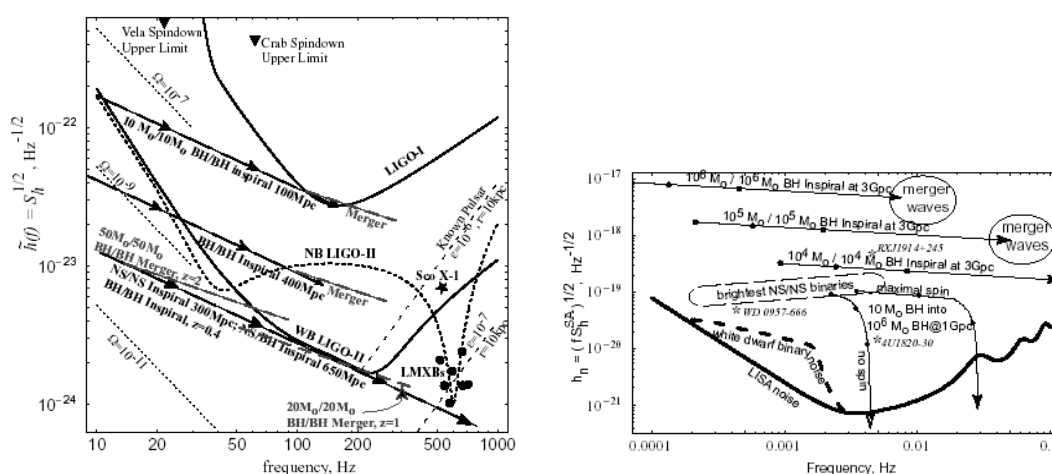


図 5.15: 標準的波源と LIGO (左) / LISA (右) の感度曲線。縦軸は $\text{Hz}^{-1/2}$ の次元になっている。左: 右端で右上がりになっている破線は扁平率 ϵ の中性子星, その下方の点は低質量 X 線連星 (LMXB) とよばれる連星系, 左端から右下へ向かって横断している矢印は, 中性子星やブラックホールが成す連星系の合体までを表している。LIGO-II は Advanced LIGO のこと。右: 上方を左から右に横断している矢印は, 宇宙論的距離にある大質量ブラックホールの連星系によるもので, 矢印上の点は合体まであと 1 年, 1 ヶ月, 1 日の時点を表している。左下の太い点線は, 銀河系内の連星白色矮星による背景重力波を表している。[35] より転載。

5.1.1 超新星爆発

超新星爆発は、最大光度に達したときのスペクトルの特徴によってI型、II型に分けられ、さらにI型についてはHeやSiの輝線が見えるか否かによってIa, Ib, Icと細分される。このうち、Type Iaについては、C, O, Mg, Neなどで構成されている白色矮星に伴星からのガスが降着することでChandrasekhar質量を越え、爆発(Acretion Induced Collapse, AIC)するものと考えられている。それ以外のものはコア崩壊型爆発とよばれ、約 $8M_{\odot}$ 以上の重い星が重力崩壊を起こして爆発するものである。中心部に鉄のコアができると、熱源を失うために重力崩壊を起こし、中心部で中性子化が進む。中性子のコアができるとバウンス(bounce)が起き、落ちてきた外層が 10^{51} ergものエネルギーで外に向かってはじき飛ばされる。

このようなコア崩壊型の重力崩壊は、銀河系で年に $6 \times 10^{-4} \sim 1.6 \times 10^{-2}$ 回おこると見積もられている[47]。また、AICの場合は、連星系の進化や降着のシステムが十分に理解されてはいないために見積もりは困難ではあるが、銀河系に存在する中性子過剰な原子核が全てAIC起源であると仮定すると、 10^{-5} /年という上限値が得られる。また、近年のpopulation synthesisによる見積もりでは、 $8 \times 10^{-7} \sim 8 \times 10^{-5}$ /年という値が得られている[48]。

コア崩壊型の超新星爆発は大きい質量が非常に短いタイムスケールで運動するため、四重極モーメント D_{ij} の変化が激しく、強い重力波源になると期待されている。発生する重力波の大きさは、コアの形、バウンスの深さ、バウンスのタイムスケール、コアの回転エネルギーに強く依存する。このような効果を考慮して重力波の大きさを見積もるには数値計算するしか手段がないのだが(図5.16)、放出されるエネルギーからおおよそその振幅を見積もることができる。[30]より、解放されたエネルギーのうち、重力波に転換されたエネルギーを ΔE とすると、

$$h_c \simeq 2.7 \times 10^{-20} \left(\frac{\Delta E}{M_{\odot} c^2} \right)^{1/2} \left(\frac{1 \text{kHz}}{f_c} \right)^{1/2} \left(\frac{10 \text{Mpc}}{r_0} \right), \quad (5.1)$$

となる。 ΔE の典型的な値は $6 \times 10^{-11} M_{\odot} c^2 \lesssim \Delta E \lesssim 8 \times 10^{-8} M_{\odot} c^2$ 程度で、振幅に直すと、10Mpcの距離で $4 \times 10^{-25} \lesssim h_c \lesssim 4 \times 10^{-23}$ 程度になる[49]。また、図5.16の右にあるように、周波数はおおよそ $100 \text{Hz} \lesssim f \lesssim 1 \text{kHz}$ の範囲になる。

5.1.2 中性子星の脈動

超新星爆発や連星の合体によって生まれたばかりの中性子星は、非常に高温で1秒間に1000回もの回転をしているものと考えられている。このような中性子星では、星が変形することによって非軸対称なモードが誘起されて、それが質量のモーメントとなって重力波を放出する。回転エネルギーを T 、重力エネルギーを W としたとき、Newtonianに

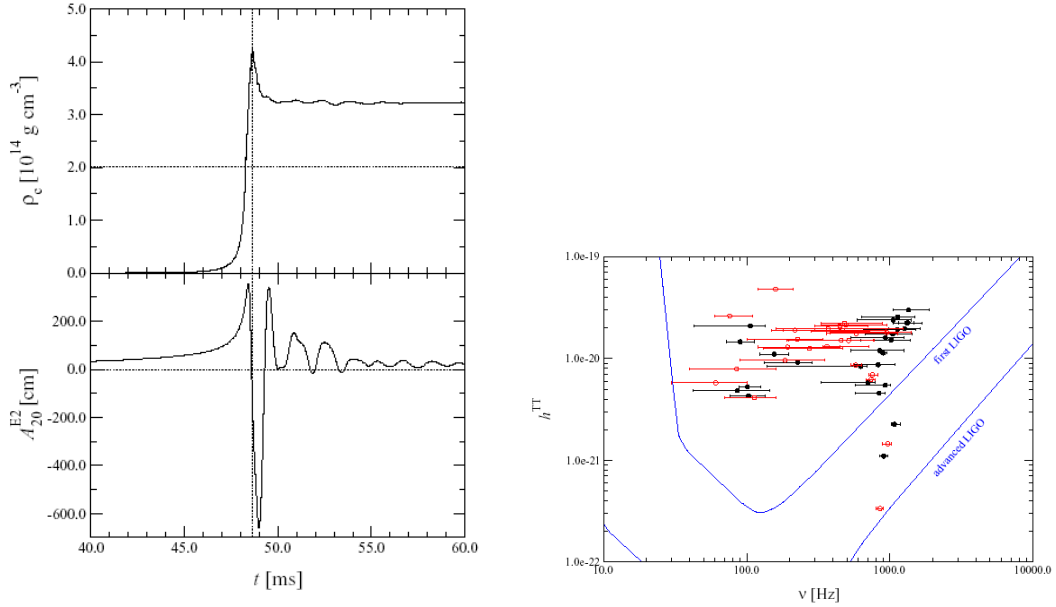


図 5.16: 左はシミュレーションによる中心密度と重力波（四重極）の波形。右は 10kpc 離れた超新星からの重力波の振幅を、26 種類のモデルで計算した結果。LIGO の感度曲線は $h_{\text{rms}} = \sqrt{fP(f)}$ の値。[50] より転載。

において次のような criterion がある²⁵。

$$\frac{T}{|W|} \gtrsim 0.27 \quad \text{力学的 (dynamical) 不安定,}$$

$$\frac{T}{|W|} \gtrsim 0.14 \quad \text{永年 (secular) 不安定.}$$

力学的不安定

自転が非常に高速なため、星が力学的なタイムスケール ($\sim 1/\sqrt{G\rho}$) で変形する。そのためにラグビーボールのような形 (bar-mode) になり、質量の多重極（主に四重極）モーメントを誘起し、重力波を発生する。変形した星の扁平率を ϵ 、大きさを R 、質量を M 、角速度を Ω とすると、距離 d にいる観測者が感じる重力波の振幅は、

$$h \sim \frac{MR^2\Omega^2}{d} \approx 9 \times 10^{-23} \left(\frac{\epsilon}{0.2}\right) \left(\frac{f}{3\text{kHz}}\right)^2 \left(\frac{15\text{Mpc}}{d}\right) \left(\frac{M}{1.4M_{\odot}}\right) \left(\frac{R}{10\text{km}}\right) \quad (5.2)$$

となる [54]。

中性子星には強い磁場が存在すると考えられているが [55]、磁場が存在すると、力学的なタイムスケールで星全体を一樣回転させる方向に作用するので不安定になりにくい。

²⁵ただし、この基準は一樣密度、非圧縮性、一樣回転、MacLaurin 回転体を仮定した場合である。微分回転でもおおよそ成り立つ ([51] など) が、その度合いがあまりにも大きいと、0.01 を越えただけで不安定になる [52]。また、遠心力のため、星の中心から外れたところに密度のピークができると、0.10 程度になる ([53] など)。

永年不安定

このフェーズでは、非常にゆっくりとしたタイムスケールで、星の粘性や重力波の放出などによるエネルギーの散逸によって不安定性が卓越する。その中でも、Chandrasekhar[56]と、Friedmann, Schutz[57] によって発見された CFS-instability が重力波のソースとして有力視されている。CFS-instability には、f, r, p, g, w の各モードが存在する。ここでは特に重要 r-mode を取り上げる [58][59][60][61]。

r-mode は、星の速度場に関する非軸対称な摂動のモードの1つである。星の回転系において、

$$\delta\mathbf{v} = \alpha R\Omega \left(\frac{r}{R}\right)^\ell \mathbf{Y}_{\ell m}^B e^{i\omega r t} + \mathcal{O}(\Omega^3), \quad \mathbf{Y}_{\ell m}^B = \frac{\hat{r} \times (r\nabla Y_{\ell m})}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}, \quad (5.3)$$

という形の摂動として記述される。ここで、 α は摂動の振幅、 R は星の半径で、 Ω は角速度を表す。また、 $\mathbf{Y}_{\ell m}^B$ は magnetic タイプのベクトル球面調和関数 [8] である。この速度場の摂動は、図 5.17 のようなパターンを描き、これが振動する。

星の回転系において、速度場の摂動が持つ運動エネルギーは、

$$E = \frac{1}{2} \int \rho |\delta\mathbf{v}|^2 d^3x + \mathcal{O}(\Omega^4) \quad (5.4)$$

である。その変化率は、

$$\frac{dE}{dt} = -\omega_i \omega_r \sum_{\ell \geq m} N_\ell \omega_i^{2\ell} \left(|\delta D_{\ell m}|^2 + \frac{4\ell |\delta J_{\ell m}|^2}{c^2(\ell+1)} \right) - \int (2\eta \delta\sigma_{ab}^* \delta\sigma^{ab} + \zeta \delta\sigma^* \delta\sigma) d^3x \quad (5.5)$$

となる [62]²⁶。摂動は粘性²⁷によってエネルギーを失っていくが、一方で、重力波が放出されるとエネルギーが増加していくのが分かる。これが不安定性を生んでいる。2000 年になって、Lindblom[66] や Stergioulus[67] らによって非線型効果も取り入れたシミュレーションが行われ、 $\alpha \sim \mathcal{O}(1)$ まで成長することが確かめられた。

放出される重力波の振幅は、

$$h(t) = 1.8 \times 10^{-24} \alpha \left(\frac{\nu_s}{1\text{kHz}}\right) \left(\frac{20\text{Mpc}}{d}\right) \quad (5.6)$$

となっている [68]。一方で、磁場や中性子流体の超伝導・超流動効果、クラストの存在、ハイペロン [69] の存在などを考慮すると、r-mode の成長は抑えられてしまうことが知られている。

5.1.3 コンパクトオブジェクトの連星系

²⁶式 (5.4) を時間微分し、摂動オイラー方程式を使って右辺の時間微分項を消していくと得られる。

²⁷通常、体積粘性は Urca プロセスを [63][64]、せん断粘性は中性子同士の衝突などによる摩擦を考える [63][65]。

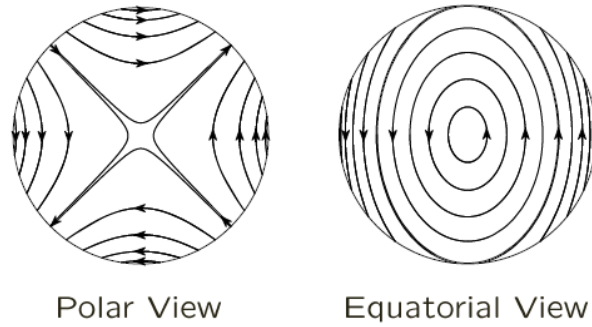


図 5.17: \mathbf{Y}_{20}^B を極側から見たものと、赤道面から見たもの。[58] より転載。

連星中性子星の代表的なものとして、1974年にハルス (R. A. Hulse) とテイラー (J. H. Taylor) によって発見された PSR1913+16 がある。重力波の放出によって連星の公転軌道が収縮すると考えると、PSR1913+16 からのパルスの到達時刻のずれが説明できることから、重力波の存在が間接的に証明された。現在までに、表 (5.5) に挙げたような連星中性子星が確認されているが、宇宙年齢以内で合体するものはわずか3つしかない。特に、2003年末に発見された J0737-3039[70] は合体までの時間がこれまで知られているものの中で最も短く、銀河に存在する連星中性子星の個数の見積もり、さらには重力波干渉計でのイベントレートの見積もりに大きく影響を与えた。これらの観測結果と統計的手法に基づく見積もりにより、連星中性子星の合体率 [71] は銀河系で年に $3.6 \times 10^{-5} \sim 6.5 \times 10^{-4}$ 回、advanced LIGO でのイベントレートに換算すると年に 80 ~ 1500 回観測できるとされている (いずれも 95% C.L.)。

放出される重力波の振幅は、式 (2.70) と 2.3 節の四重極モーメントを使って ($\psi = \Omega t$) :

$$h = 6.4 \times 10^{-24} \left(\frac{r}{200 \text{Mpc}} \right)^{-1} \left(\frac{M_{\text{chirp}}}{1.2 M_{\odot}} \right)^{5/3} \left(\frac{f}{20 \text{Hz}} \right)^{2/3} \times \begin{cases} \cos(2\pi ft)(\cos^2 i + 1)/2 & (+) \\ \sin(2\pi ft)2 \cos i & (\times) \end{cases} \quad (5.7)$$

となる [10]。ここで、 $M_{\text{chirp}} \equiv (m_1 m_2)^{3/5} (m_1 + m_2)^{-1/5}$ はチャープ質量 (chirp mass) といい、重力波の観測から始めに求まる質量に関する量である。典型的な波形は、図 5.18 のようなものである。

また前の章で、最適フィルターを使うと周期的な重力波はその回数の平方根だけ SN 比が向上することを述べた。そこで定義した特徴的振幅 (4.16) は、

$$h_c \sim 3.2 \times 10^{-22} \left(\frac{M_{\text{chirp}}}{1.2 M_{\odot}} \right)^{5/6} \left(\frac{f}{20 \text{Hz}} \right)^{-1/6} \left(\frac{r}{200 \text{Mpc}} \right)^{-1} \times \begin{cases} \cos(2\pi ft)(\cos^2 i + 1)/2 & (+) \\ \sin(2\pi ft)2 \cos i & (\times) \end{cases} \quad (5.8)$$

となる [10]。

準周期的な公転が続き、星の潮汐力が効きはじめると星が変形し、最終的には合体する。連星中性子星が合体すると、ある条件下でブラックホールが形成される。できたばかりのブラックホールは不安定なので、安定になるまで重力波を放出し続ける（リングダウン (ring down)）。このときの重力波は減衰振動になっており、ブラックホールの準固有振動と言われている（図 5.18 の右端）。

PSR	P_p (ms)	P_b (日)	e	d (kpc)	τ_{merge} (年)
B1913+16	59.0	0.323	0.62	7	3×10^8
B1534+12	37.9	0.417	0.27	0.7	2.7×10^9
B2124+11C	30.5	0.335	0.68	10	2.2×10^8
B2303+46	1066.4	12.3	0.658	4	3.3×10^{12}
J0737-3039	22.7	0.102	0.088	0.5–0.6	8.5×10^7

表 5.5: 現在までに確認されている主な連星中性子星。J0737-3039 は 2003 年末に発見されたもの。

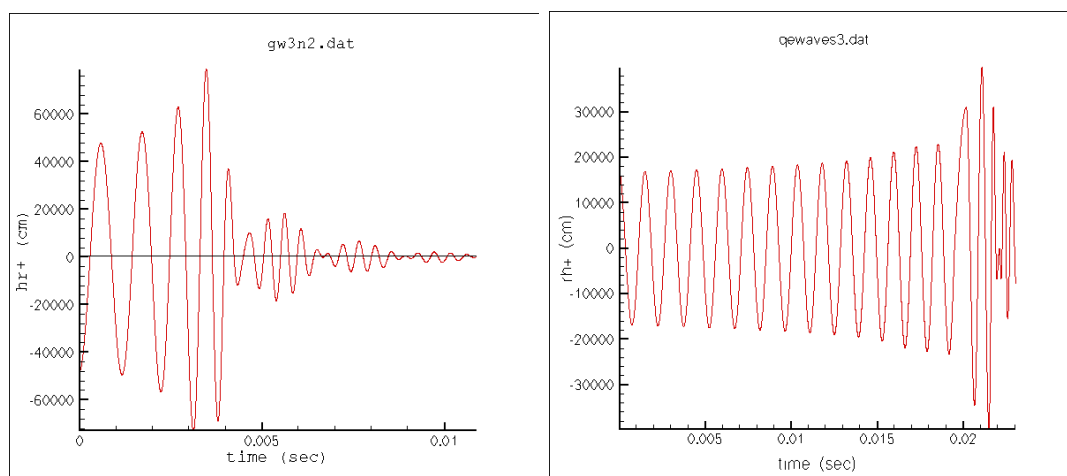


図 5.18: チャープ信号の一例。どちらも質量 $1.4M_{\odot}$ の中性子星の連星で、状態方程式などが少し異なる。時間が経つにつれて振幅を増していき、同時に周波数が高くなっていくのがわかる。そして、もっとも振幅が高いところが中性子星の合体期で、その後は減衰振動が続く。http://www.astrogravs.gsfc.nasa.gov/より転載。

 IIII Section 5.2 IIII
 背景重力波の起源

この節では、背景重力波の起源について述べる。

背景重力波の起源は、天体起源と宇宙論的起源の2つに大別される。天体起源のもので最も寄与が大きいのは、銀河系内に数多く存在する白色矮星の連星系で、LISA の観測可能な周波数帯に入っている。一方、宇宙論的起源というのは、極初期宇宙における時空の変化によって生成されたものを指す。この中でも重要な、インフレーション起源の背景重力波は章を改めて話すことにし、ここでは、その他の宇宙論的起源の背景重力波を扱う。

宇宙論的起源の背景重力波として考えられているものを、図 5.19 と図 5.21 に挙げた。また、連星白色矮星起源のものについては、図 5.20 と図 5.15 右を参照されたい。

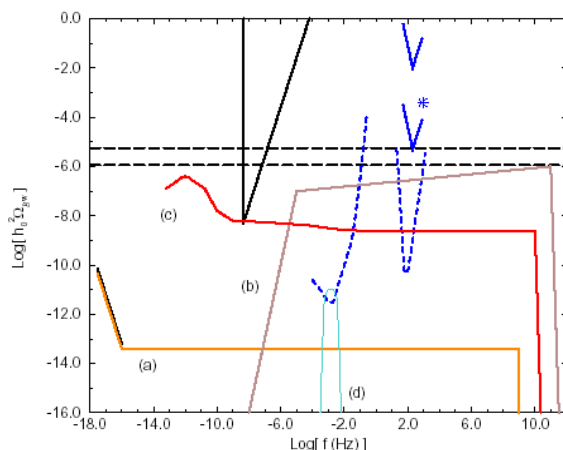


図 5.19: 背景重力波のスペクトル。(a) インフレーション起源, (b) 宇宙紐, (c) 弦理論, (d) 真空の相転移。[72] より転載。

 ■ 5.2.1 ■
 天体起源

LISA や LIGO のような検出器でインフレーション起源の背景重力波を観測するには、天体起源の背景重力波の影響も考慮しなければならない。天体起源の背景重力波には、非常に数が多い連星白色矮星や、宇宙論的距離からの超新星爆発などに起因するものがある。特に LISA などの宇宙における観測では、銀河系内の連星白色矮星からの寄与が大きいと考えられている。LISA にとっての連星白色矮星は、必ず検出できる可能性があるという点で重要な波源ではあるが、一方で、インフレーション起源の背景重力波などの検出に主眼を置くと、逆に一種の雑音 (binary confusion noise) として認識される。この節で

は, [73] によって半解析的に求められた, 連星白色矮星からの背景重力波のスペクトルについて述べる。

[73] より, 年齢が $\tau_0 \sim \tau_0 + d\tau_0$ で連星形成当時の公転周期が $P \sim P + dP$, 質量が $M \sim M + dM$ の CWDBs の個数分布は,

$$\frac{d^3n(M)}{dPdMd\tau_0} = -\alpha \frac{1}{P} \frac{dF_n(M)}{dM} G_n g(M) \quad (5.9)$$

で与えられる。 $n(M)$ は CWDB の柱密度 (column density) で, $F_n(M)$ は initial mass function 中で質量が M よりも大きいものの割合 ([74] の表 9), G_n は現在の銀河系ディスクにおける星の誕生率で $G_n = 8.2 \times 10^{-9}$ 個 / 年 \cdot pc² となっている。 $g(M)$ は質量のカットオフを表すパラメータで, 現在の宇宙年齢 ($T_0 = 10^{10}$ 年) 中に白色矮星になれる質量の下限 $M_{\text{crit}} = 1.12M_\odot$ に対して,

$$g(M) = \begin{cases} 0 & M \leq M_{\text{crit}} \\ 1 & M > M_{\text{crit}} \end{cases} \quad (5.10)$$

で与えられる。また, α は定数である。

まずは式 (5.9) を連星の年齢 τ_0 について積分する。形成当初の公転周期 P に対して年齢が τ_0 となった時の公転周期を Q とすると, その時間変化は式 (2.110) で $e = 0$ とすることにより,

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{d\tau_0} &= -\frac{96G^{5/3}}{5c^5} (2\pi)^{8/3} \frac{M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^{1/3}} Q^{-5/3} \\ &\equiv -k_0 Q^{-5/3} \end{aligned} \quad (5.11)$$

となるので,

$$\begin{aligned} \frac{d^2n}{dMdQ} &= \int \frac{d^3n}{dPdMd\tau_0} \frac{dP}{dQ} d\tau_0 \\ &= -\alpha \frac{dF_n(M)}{dM} \frac{Q^{5/3}}{k_0} G_n g(M) \int \left(\frac{dP}{P} \right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{for } Q < Q_c, P_2^{\text{max}} \leq Q \\ \alpha \frac{dF_n(M)}{dM} \frac{Q^{5/3}}{k_0} G_n g(M) \ln \left(\frac{P_{\text{max}}}{Q} \right) & \text{for } P_2^{\text{min}} \leq Q \leq P_2^{\text{max}} \\ \alpha \frac{dF_n(M)}{dM} \frac{Q^{5/3}}{k_0} G_n g(M) \ln \left(\frac{P_{\text{max}}}{P_2^{\text{min}}} \right) & \text{for } Q_c \leq Q \leq P_2^{\text{min}} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$P_{\text{max}} = \min \left\{ Q \left(1 + \frac{8}{3} k_0 T_0 Q^{-8/3} \right)^{3/8}, P_2^{\text{max}} \right\}$$

となる。ここで, 現在観測される周期 Q について以下のような場合分けを行った。

1. 考える最大の初期周期 P_2^{max} を越えるような連星系は存在しない。また, Q_c を下回るような周期を持つ連星系はロッシュローブ (Roche Lobe) を共有している状態であると考えられ, CWDBs の範疇から外れる。

2. 現在観測される公転周期が P_2^{\max} より小さいが, P_2^{\min} より大きいもの。
3. 現在観測される公転周期が考える最小の初期周期 P_2^{\min} より小さいが, CWDBs の範疇から外れる限界の Q_c より大きい。

それぞれについて, 積分の上端と下端が異なる。 P_{\max} は, 現在観測される周期 Q から考えられる初期周期を表しており, 宇宙年齢だけ遡った時の周期と考える最大初期周期 P_2^{\max} のうち小さい方を取るようになっている。質量に依存する P_2^{\min} , P_2^{\max} , Q_c は [75] を参照されたい。

発生した重力波の光度は式 (2.103)(2.109) より,

$$L = 2.16 \times 10^{45} \text{ erg/s} \left(\frac{M_1}{M_\odot} \right)^2 \left(\frac{M_2}{M_\odot} \right)^2 \left[\frac{M_1}{M_\odot} + \frac{M_2}{M_\odot} \right]^{-2/3} Q^{-10/3}, \quad (5.13)$$

フラックス F_ν ($\text{erg/cm}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{Hz}$) は,

$$\frac{dF_\nu}{dM} = \frac{z_0 f(z_0)}{(3.086 \times 10^{18})^2} \left(-\frac{d^2 n}{dM dQ} \right) \frac{2}{f^2} \frac{L}{2z_0}, \quad f(z_0) \approx 10.41 - \log z_0, \quad (5.14)$$

となっている。ここで, z_0 は銀河系の中心に対する円筒座標系で質量 M の天体の分布を,

$$\rho = \rho_0 e^{-|z|/z_0} e^{-R/R_0} \quad (5.15)$$

としたときの垂直方向のスケールで [74], [73] の付録より $z_0 = 90 \text{ pc}$ となっている。また, ここに表記した $f(z_0)$ は近似式であり, 厳密な計算については同じく [73] の付録を参照されたい。さらに重力波の振幅は [76] より,

$$h = 5.61 \times 10^{-20} \frac{\sqrt{F_\nu}}{f} \text{ Hz}^{-1/2}, \quad (5.16)$$

となる。ここに式 (5.14) を積分したものを代入すると, 図 5.20 のような連星白色矮星からの背景重力波のスペクトルを書くことができる²⁸。この図には, 同様の解析によって求めることができる, おおぐま座 W 型変光星 (WUMa), 激変星 (CB), 主系列連星 (UB), 連星中性子星 (NB, BH-NB) からの寄与も含まれている。

■ 5.2.2 ■ 初期宇宙起源

真空の相転移

初期宇宙において宇宙膨張が進み, 力の相転移 (1次相転移) が起ると, 高いエネルギー密度の真空の中に, 相転移が完了した低いエネルギー密度の真空ができる。これをバブル (bubble) という。バブルは, 内外のエネルギー差をバブルの壁の運動エネルギーに

²⁸[73] では $\alpha = 0.14/\log 10$ 。

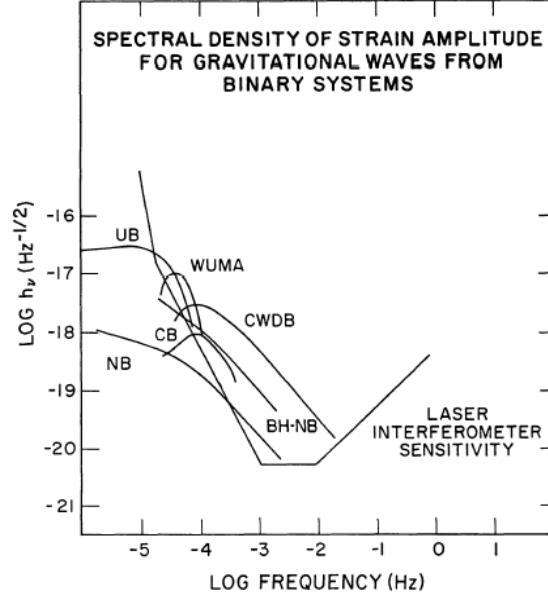


図 5.20: 連星白色矮星からの背景重力波のスペクトル。[73] より転載。

変換して膨張を始める。すると、隣りのバブルと衝突し、重力波が生じる。この重力波のスケールは、バブルの衝突時刻に依存している。温度 T_* の時に相転移が起ったとすると、その時のハッブルパラメータを H_* 、相対論的な粒子の種数を g_* として、ピークとなる周波数は、

$$f_{\max} \approx 5.2 \times 10^{-8} \left(\frac{\beta}{H_*} \right) \left(\frac{kT_*}{1\text{GeV}} \right) \left(\frac{g_*}{100} \right)^{1/6} \text{ Hz}, \quad (5.17)$$

となる [40]。ここで、 β はバブルの生成率で、 $\beta/H_* \approx 4 \log(M_{\text{Pl}} c^2 / kT_*) \approx 10^2$ [77][78][79]。例えば、電弱相転移が 1 次相転移であれば、 $kT_* \approx 100\text{GeV}$ なので $f_{\max} \approx 4.1 \times 10^{-3}\text{Hz}$ となる。

また、バブルの内外のエネルギー密度比を $\alpha = \rho_{\text{vac}}/\rho_{\text{thermal}}$ とすれば、

$$\Omega_{\text{GW}}(f_{\max})h^2 \approx 1.1 \times 10^{-6} \kappa^2 \left(\frac{\beta}{H_*} \right)^{-2} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^2 \left(\frac{v^3}{0.24+v^3} \right) \left(\frac{g_*}{100} \right)^{-1/3} \quad (5.18)$$

を得る [78]。 v は壁の速度で、 κ は運動エネルギーに転換される真空エネルギーの割合で $10^{-2} < \kappa < 1$ という値になる。 10^9GeV で 1 次相転移があれば、advanced LIGO で観測可能となる。しかし、電弱相転移 (10^2GeV) では、 $\Omega_{\text{gw}} \sim 10^{-22}$ となって観測は困難である。

宇宙紐起源

宇宙紐 (cosmic strings) は、大統一理論 (Grand Unification Theory, GUT) における 10^{16}GeV での相転移で生成される。特徴は、1) 単位長さあたり $\mu \sim 10^{22}\text{g/cm}$ ($G\mu/c^2 \sim$

10^{-6}) の質量を持つ位相欠陥で、2) μ と等しい張力を持ち、3) ループを作ると重力波を放出して崩壊する。放出される重力波は、

$$\Omega_{\text{GW}} \sim 10^{-7} \left(\frac{\mu}{10^{-6}} \right)^{1/2} \quad \text{for all } f \gtrsim 10^{-8} \text{Hz} \left(\frac{10^{-6}}{\mu} \right), \quad (5.19)$$

と見積もられている [30][80]。図 5.19 中の曲線はシミュレーションによるもので、かなり広い周波数帯でフラットなスペクトルを持つのも特徴の一つである。宇宙紐の崩壊数を解析的に見積もるには、スケーリング則 [40][81] が用いられるがここでは割愛する。

サイクリックモデル

サイクリックモデルは、スタインハート (P. Steinhardt) らによって作られた宇宙モデルである [82]。このモデルでは、宇宙は膨張と収縮を繰り返し、終りも始まりもない進化をする。6.1, 6.2 節で述べるようにインフレーション理論では宇宙が指数関数的膨張をするときにゆらぎが生成されるが、このモデルでは宇宙が収縮するときにゆらぎを生成する。そのため、重力波の振幅は図 5.21 のように「青く」なる [83]。

このような「青い」スペクトルを作るモデルとしては、弦理論の有効理論から導かれる pre-Big Bang シナリオなどもある [84][85] (図 5.19 の (c))。

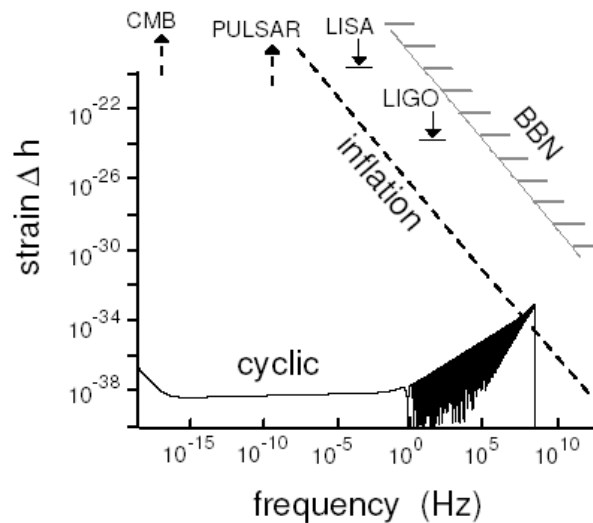


図 5.21: サイクリックモデルにおける背景重力波。

III Section 5.3 III
 背景重力波に対する制限

背景重力波の存在量には、元素合成、パルサータイミング、宇宙マイクロ波背景放射の観測から制限が付けられている (図 5.22)。この節では、それらについて [36] をもとにして述べることにする。

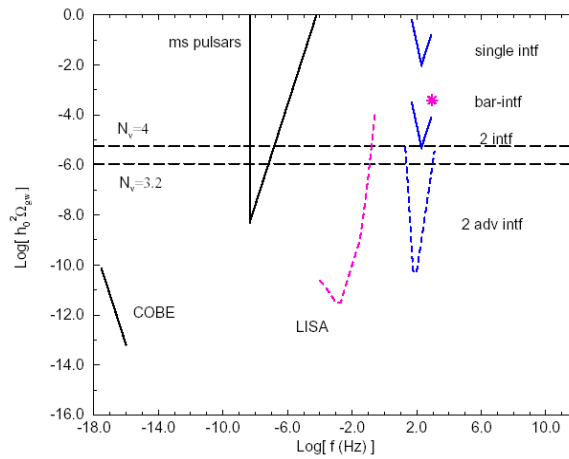


図 5.22: 背景重力波に対する制限。もっとも低周波側にある制限は CMB, nHz 帯にある楔形の制限はパルサー、横にのびる点線は元素合成による制限である。[72] より転載。

■ 5.3.1 ■ ビッグバン元素合成 (BBN)

宇宙誕生から1秒が経つと、宇宙の温度はおよそ1MeV程度まで下がる。このころになると、強い相互作用が陽子・中性子の熱運動を凌駕し、原子核を形成ようになる。この元素合成の過程は詳しく研究されており、その機構に含まれる唯一のパラメータ η (バリオン光子比, 元素合成の開始温度を決める) で ${}^7\text{Li}$ までの軽元素の abundance が決まる。

まず初期の段階で、陽子・中性子が温度 T の熱平衡状態にあるとする²⁹ と、その個数比は、

$$\frac{n_n}{n_p} = e^{-\frac{Q}{T}} \quad (5.20)$$

となる。ここで、 Q は陽子と中性子の質量差で、 $Q = m_n - m_p \approx 1.3\text{MeV}$ となっている。それからしばらく経つと、中性子が徐々に崩壊を始める。そのプロセスは弱い相互作用によって支配されているので、反応率はおおよそ、

$$\Gamma_{pe \rightarrow n\nu} \sim G_F^2 T^5 \quad (5.21)$$

となる。このベータ崩壊をするには、陽子と電子がある程度近づいていなければならない。しかし、宇宙は膨張しているので、結局、ベータ崩壊のタイムスケールと宇宙膨張のタイムスケールを比べて、前者が後者に比べて短い間だけ崩壊が進むことになる。すなわち、

$$\Gamma_{pe \rightarrow n\nu} \simeq H = \sqrt{\frac{\rho}{3M_{\text{pl}}^2}} \quad (5.22)$$

となったときに崩壊が止まって、陽子・中性子の個数比が固定される。相対論的になっている粒子の種数を g_* と書くと³⁰、宇宙のエネルギー密度は、

$$\begin{aligned} \rho &= g_* \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\epsilon}{e^{\epsilon/T} - 1} \\ &\simeq g_* \frac{\pi^2}{30} T^4 \end{aligned} \quad (5.23)$$

となる。ここで、環境が非常に高温であることから $\epsilon \simeq p, |\mu| \ll T$ を仮定した。よって、

$$\Gamma_{pe \rightarrow n\nu} \simeq \frac{T^2}{M_{\text{pl}}} \sqrt{\frac{\pi^2 g_*}{90}} \quad (5.24)$$

となる。したがって、式(5.21)より、陽子・中性子の個数が固定されるときの宇宙の温度は $T \sim g_*^{1/6}$ となることがわかる。もし、背景重力波が宇宙のエネルギー密度に大きく寄与しすぎると、式(5.23)より種数 g_* を増やすことになる。そして元素合成が始まる時刻

²⁹中性子の寿命が約887秒であるのに対し、宇宙が始まってまだ1秒しか経っていないので熱平衡状態にあると言える。

³⁰粒子がボソンかフェルミオンかによって寄与が異なる。ボソンなら1, フェルミオンなら7/8の寄与がある。

が大きくなりすぎてしまい、軽元素の生成量が現在の観測と合わなくなってしまう。これを逆に考えて、背景重力波の存在量に制限をつけるのである。

種数 g_* は、実効的なニュートリノの世代数 N_ν を使って言い直すことができる。この元素合成の時期に相対論的粒子として振舞うのは、電子、光子、ニュートリノであるから、

$$g_* = 2 + \frac{7}{8}(4 + 2N_\nu) \quad (5.25)$$

ここで、初めの2は光子のヘリシティ、7/8はフェルミオンであることから、4は電子と陽電子のヘリシティ、 $2N_\nu$ はニュートリノ各世代にヘリシティが2あることに起因する。標準模型では、 $N_\nu = 3$ 、すなわち $g_* = 43/4$ である。さて、相対論的粒子に、重力波（グラビトン）が加わると、それを実効的なニュートリノの世代数に焼きなおすことができる。一般に、上で挙げた以外のものが相対論的粒子として振舞うと、粒子の自由度は、

$$\frac{43}{4} + \sum_{\text{extra bosons}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{\text{extra fermions}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 = 2 + \frac{7}{8}(4 + 2N_\nu) \quad (5.26)$$

と書ける。グラビトンはボソンなので $g_i = 2$ となる。 $(T_i/T)^4 = \rho_{\text{gw}}/\rho_\gamma$ と、左辺第二項から寄与によって、

$$\sum_{\text{extra bosons}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 = 2 \frac{\rho_{\text{gw}}}{\rho_\gamma} \quad (5.27)$$

となる。 ρ_γ は光子のエネルギー密度。このエネルギー密度の比は元素合成当時のものであるから、これを現在の値に直そう。グラビトンは、元素合成の時にはすでに他の粒子とデカップルしているので、 ρ_{gw} は $1/a^4$ に比例する。一方で ρ_γ は、相対論的粒子の自由度が宇宙膨張の際に変化するので³¹、エントロピーの保存： $g_S(T)T^3a^3 = \text{constant}$ を用いると、 $1/(a^4g_S^{4/3})$ に比例することが分かる。したがって、

$$\left(\frac{\rho_{\text{gw}}}{\rho_\gamma}\right)_0 = \left(\frac{\rho_{\text{gw}}}{\rho_\gamma}\right)_{\text{NS}} \left(\frac{g_S(T_0)}{g_S(1\text{MeV})}\right)^{4/3} = \left(\frac{\rho_{\text{gw}}}{\rho_\gamma}\right)_{\text{NS}} \left(\frac{3.913}{10.75}\right)^{4/3} \quad (5.28)$$

となるので、

$$\left(\frac{\rho_{\text{gw}}}{\rho_\gamma}\right)_0 \leq 0.227(N_\nu - 3) \quad (5.29)$$

が得られる。エネルギー密度を Ω で書き直すと、

$$\rho_{\text{gw}} = \int d(\log f) \frac{d\rho_{\text{gw}}}{d\log f} = \frac{\rho_c}{h_0^2} \int d(\log f) h_0^2 \Omega_{\text{gw}} \quad (5.30)$$

$$\rho_\gamma = \frac{\rho_c}{h_0^2} h_0^2 \Omega_\gamma \quad (5.31)$$

であり、観測から³²、

$$h_0^2 \Omega_\gamma \simeq 2.481 \times 10^{-5} \quad (5.32)$$

³¹現在は $g = 2$ になっている。

³²Particle Data Group, Phys. Rev. D50(1994)1173

ゆえに,

$$\int_{f=0}^{f=\infty} d(\log f) h_0^2 \Omega_{\text{gw}} \leq 5.6 \times 10^{-6} (N_\nu - 3) \quad (5.33)$$

が得られる。これは特定の周波数における制限ではなく、背景重力波の全体量に対する制限となっている（図 5.22 を横断する点線）。

実は、元素合成から決まる N_ν に対する制限は、解析の際の様々な誤差が重なり合うためにあまり厳しくない。[86] によれば、 $N_\nu < 4$ が妥当としている。

■ 5.3.2 ■

パルサータイミング

パルサーは宇宙で最も正確な時計として時を刻んでいる。例えば、B1937+21 は 9 年間の観測で 10^{-16} ms の精度でパルス信号を放出していることが確認されている。しかし、このようなパルサーと我々の間にあまりに大きい背景重力波が存在すると、その観測に矛盾するようなパルス到着時刻のずれが生じてしまう。このような観点から、パルサーは天然の重力波検出器となる。

パルス信号の到達時刻のずれの大きさを ϵ とし、全観測時間を T とする。到達時刻のずれが全て背景重力波によるものと仮定すると、背景重力波の振幅は、

$$h_c \sim \frac{\epsilon}{T} \sim \epsilon f \quad (5.34)$$

となる。PSR B1855+09 の観測から $f = f_* \equiv 4.4 \times 10^{-9}$ Hz に対して、

$$h^2 \Omega_{\text{GW}} < 4.8 \times 10^{-9} \quad (90\% \text{c.l.}), \quad (5.35)$$

という制限が付いている [87]。式 (4.25) より $h^2 \Omega_{\text{GW}} \propto h_c^2$ であるから、 $f > f_*$ に対して、

$$h^2 \Omega_{\text{GW}} < 4.8 \times 10^{-9} \left(\frac{f}{f_*} \right)^2, \quad (5.36)$$

という制限になる [36][72]（図 5.22 の楔形の制限）。

■ 5.3.3 ■

宇宙マイクロ波背景放射 (CMB)

1940 年代後半に予言された宇宙マイクロ波背景放射の存在は、1965 年にペンジラス (A.A.Penzias) とウィルソン (R.W.Wilson) によって初めて確かめられた。1992 年には CMB 観測衛星 COBE (COsmic Background Exploler) が初の全天サーベイを行い、2.725K の等方な黒体放射の中に、わずかな非等方性があることを観測した。

特に大きいスケール ($2 \leq l \leq 30$) の温度揺らぎは、重力によって作られることが知られている (Sachs-Wolfe 効果)。その大部分は、重力ポテンシャルの揺らぎが生成するスカラーモードなのだが、あとに述べるインフレーション理論の予言によると、わずかに

テンソルモードである重力波の寄与があると考えられている。COBE の観測から四重極 ($\ell = 2$) の温度揺らぎは,

$$\frac{\delta T}{T} \simeq 5 \times 10^{-6}, \quad (5.37)$$

となっている。この温度揺らぎの原因が、全て重力波によるものであるとすれば、背景重力波の振幅に対して制限をつけることができる。

光の最終散乱面 (last scattering surface, LSS) における背景重力波の振幅を $h_c(f)_{\text{LSS}}$ とすると、重力波の振幅は宇宙膨張によって減衰 ($h \propto 1/a(\eta)$) するので、現在の振幅 $h_c(f)_{\text{today}}$ は,

$$h_c(f)_{\text{today}} = \frac{a_{\text{hor}}}{a_0} h_c(f)_{\text{LSS}} \simeq \frac{a_{\text{hor}}}{a_{\text{LSS}} z_{\text{LSS}}} h_c(f)_{\text{LSS}}, \quad (5.38)$$

となる。ここで、 a_{hor} は考えている波長の背景重力波が宇宙の地平線に突入するときのスケールファクターで、 a_0 は現在のスケールファクターである。また、 z_{LSS} は LSS の赤方偏移である。

$$\frac{a_{\text{hor}}}{a_{\text{LSS}}} \simeq \frac{1}{(\eta_{\text{LSS}} f)^2} \text{(要確認)}, \quad (5.39)$$

である。ここで、 f は注目している背景重力波の現在の周波数である。次に、LSS の時刻 η_{LSS} を求める。物質優勢期のスケールファクターは、conformal time で書くと、

$$a(\eta) \propto \eta^2, \quad (5.40)$$

であるから、現在の conformal time は、

$$\eta_0 = \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^\infty \frac{dz}{H(z)} \simeq \frac{2}{H_0}. \quad (5.41)$$

ただし、 $a(z) = 1/(1+z)$ 、 $H(z) \simeq H_0(1+z)^{3/2}$ を用いた。これを使うと、LSS の時刻は、

$$\eta_{\text{LSS}} = \eta_0 \sqrt{\frac{a_{\text{LSS}}}{a_0}} \simeq \frac{\eta_0}{\sqrt{z_{\text{LSS}}}} \simeq \frac{2}{H_0 \sqrt{z_{\text{LSS}}}}, \quad (5.42)$$

となる。よって、式 (5.38)(5.39) より、

$$h_c(f) = \left(\frac{H_0}{2f} \right)^2 h_c(f)_{\text{LSS}}, \quad (5.43)$$

を得る。

LSS における温度揺らぎが全て重力波の場合、

$$h_c(f)_{\text{LSS}} \simeq \frac{\delta T}{T}, \quad (5.44)$$

であって、式 (4.25) より、

$$\Omega_{\text{GW}}(f) = \frac{2\pi^2}{3H_0^2} f^2 h_c^2(f) \sim \left(\frac{H_0}{f} \right)^2 \frac{\delta T}{T}, \quad (5.45)$$

となる。四重極の温度揺らぎ式 (5.37) に加え、 $\ell < 30$ までの多重極を考慮すると、

$$h_0^2 \Omega_{\text{gw}} < 7 \times 10^{-11} \left(\frac{H_0}{f} \right)^2 \quad (3 \times 10^{-18} \text{Hz} < f < 10^{-16} \text{Hz}) \quad (5.46)$$

という制限を得る [88]。現在のところ、インフレーション起源の背景重力波の上限値は、この CMB からの制限で決まっている (図 5.22 と図 5.19)。

第6章

高次元宇宙モデルにおけるインフレーション起源の背景重力波

超紐理論や M 理論に代表される素粒子論によって、我々の住む宇宙が高次元空間であることが示唆されている。これはたいへん興味深いことではあるが、現在、ニュートン重力の正しさを検証する実験から許されている高次元空間の大きさの上限値が 0.1mm と小さいため [89][90]、地上の実験などでそれを実証することは非常に困難である。しかし、重力波なら実証できる可能性がある。

2.2.2 節でも述べたように、重力波は物質との相互作用が非常に弱い。そのため、インフレーション中の量子ゆらぎによって生成された重力波は、他の物質によって乱されることなく生成当時の情報を保持していると考えられている。そのころの宇宙のスケールが余剰次元のスケールと同程度であれば、余剰次元方向に伝播できる重力波は何らかの影響を受けるはずであり、余剰次元の有無を背景重力波の観測を通してプローブできる可能性がある。生成ときに波長が 0.1mm であった重力波は、宇宙膨張の結果、現在 0.2mHz 程度の周波数になっているので、3章で述べたスペース干涉計 LISA や BBO といったプロジェクトの重要なターゲットになっている。

この章では、まず、インフレーションと背景重力波の生成、および高次元宇宙モデルについて述べる。その後で、数値計算による高次元宇宙における背景重力波の定量的な解析について述べる。なお、後半の内容は、小山和哉氏、樽家篤史氏との共同研究によるオリジナルな結果に基づいたものである [91]。

III Section 6.1 III インフレーション

■ 6.1.1 ■ ビッグバン宇宙論の問題点

1929年のハッブル (E.Hubble) による膨張宇宙の観測を受けて、ガモフ (G.Gamow) が1947年にビッグバン宇宙モデルを提唱した。それを実証する証拠がいくつも上がっている一方で、この宇宙モデルには宇宙の初期条件に関する原理的問題が存在する。

まず一つが平坦性問題である。フリードマン方程式：

$$H^2 = \frac{8\pi G_4}{3} \rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda_4 c^2}{3}, \quad (6.1)$$

を、密度パラメータ $\Omega_0 \equiv \rho/\rho_c$ (ρ_c は式 (4.23)) を使って書き直すと、

$$\Omega_0 - 1 = \frac{K}{a^2 H^2}, \quad (6.2)$$

となる。ただし宇宙定数 Λ_4 は無視した。宇宙が平坦 ($K = 0$) な場合、それはいつまでも平坦であり、 $\Omega_0 = 1$ のままである。しかし、 $K \neq 0$ の場合は Ω_0 が時間変化する。物質優勢の宇宙 ($a(t) \propto t^{2/3}, H \propto t^{-1}$) なら $|\Omega_0 - 1| \propto t^{2/3}$ 、輻射優勢の宇宙 ($a(t) \propto t^{1/2}, H \propto t^{-1}$) なら $|\Omega_0 - 1| \propto t$ となる。現在の宇宙はほぼ平坦 ($\Omega_0 = 1.02 \pm 0.02$ [92]) であるから、元素合成の時期まで遡ると、

$$|\Omega_0(t_{\text{nuc}}) - 1| \lesssim 10^{-16}, \quad (6.3)$$

となって、過去の宇宙ではとてつもない精度で $\Omega_0 \approx 1$ にファインチューニングされている必要がある。これが平坦性問題である。

次の問題は地平線問題³³である。光の最終散乱面において因果関係のある領域は、共動距離にして $180\Omega_0^{-1/2}h^{-1}\text{Mpc}$ であり、我々から見ると天球上の視角2度の領域に相当する。この領域の内側では、光と電子の相互作用によって光の温度がならされることで CMB がほとんど同じ温度になる。しかし、COBE (COsmic Background Explorer) や WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) の観測で、あらゆる方向からの CMB が10万分の1度の精度で同じ温度であることがわかった。因果関係のない領域どうして同じ温度になるためには、初期条件として、全天のゆらぎが一様であることを必要とする。これが地平線問題である。

この他にも、グラビティーノ (超重力理論)、モジュライ粒子 (超弦理論)、モノポールや宇宙紐などの位相欠陥 (統一理論) などの過剰生成問題がある。

これらの問題を解決する手段として、1980年代初頭、A.Guth[93] と K.Sato[94] によってインフレーションが提唱された。インフレーションとは、加速度的な宇宙膨張 ($a(t) \propto e^{Ht}$) のことである。この膨張により、式 (6.2) は、

$$|\Omega_0 - 1| \propto e^{-2Ht}, \quad (6.4)$$

となって Ω_0 の初期値が適当な値でも、短時間の間に急激に $\Omega_0 \rightarrow 1$ となる。これによって平坦性問題のファインチューニングを回避することができる。また、地平線問題に関しても、インフレーションがあることで、図 6.23 のように初期の段階で因果関係のあった領域が宇宙の地平線の外へでて再び地平線の中に入るようになるので、現在の大スケールでの等方性が説明できる。さらに、インフレーションの前に生成されたグラビティーノなどの粒子も、急激な膨張によって密度が薄まり、現在の観測制限にかからないようになる。

6.1.2 インフレーションのダイナミクス

次に、インフレーションをどのように起こすかを考えよう。以下では、宇宙項 Λ_4 はゼロとする。インフレーションは加速度的膨張であるから $\ddot{a}(t) > 0$ が条件である。アインシュタイン方程式から、フリードマン方程式 (6.1) と対になって出てくる方程式：

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G_4}{3}(\rho + 3p) \quad (6.5)$$

³³粒子的地平線。ブラックホールに生じる事象の地平線とは異なる。

より, $\ddot{a}(t) > 0$ を満たすには, $\rho + 3p < 0$ であれば十分であることがわかる。我々の周りにある通常の物質は, このような状態方程式を満たさない。しかし, ポテンシャル $V(\phi)$ の中を運動するスカラー場 $\phi(t)$ を考えると, エネルギー密度と圧力が,

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (6.6)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (6.7)$$

となるので [95],

$$\rho_\phi + 3p_\phi = 2\dot{\phi}^2 - 2V(\phi), \quad (6.8)$$

となって, スカラー場の運動が “ゆっくり” ($\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$) であれば $\rho_\phi + 3p_\phi < 0$ の条件を満たすことがわかる。インフレーションを引き起こすこのスカラー場はインフラトン (inflaton) とよばれている。インフラトンのポテンシャル $V(\phi)$ の形で, 様々なインフレーションモデルを構築することができる。また, インフラトンがポテンシャル中をゆっくり運動することで引き起こされるインフレーションを, 特にスローロールインフレーション (slow-roll inflation) という。式 (6.1)(6.5) より得られるエネルギー保存則:

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p), \quad (6.9)$$

とフリードマン方程式 (6.1) に, 式 (6.6)(6.7) を代入すると, インフラトンとスケールファクターの発展方程式:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G_4}{3} \left(V(\phi) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2\right), \quad (6.10)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -\frac{dV}{d\phi}, \quad (6.11)$$

が得られる。スローロール近似: $|\dot{\phi}|^2 \ll V(\phi), |\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}|$ を考えると,

$$H^2 \simeq \frac{8\pi G_4}{3} V(\phi) = \frac{1}{3M_{\text{pl}}^2} V(\phi), \quad (6.12)$$

$$3H\dot{\phi} \simeq -V'(\phi), \quad (6.13)$$

となる。この近似は,

$$\epsilon(\phi) = \frac{M_{\text{pl}}^2}{2} \left(\frac{V'}{V}\right)^2, \quad \eta(\phi) = M_{\text{pl}}^2 \frac{V''}{V}, \quad (6.14)$$

という2つのスローロールパラメーター (slow-roll parameter) が,

$$\epsilon(\phi) \ll 1, \quad |\eta(\phi)| \ll 1, \quad (6.15)$$

となるときに成り立つ。

III Section 6.2 III

インフレーション起源の背景重力波

前の節で説明したインフレーションは、我々が現在見ている様々な大規模構造の種となる「密度ゆらぎ」を生成する。これと同時に、インフレーション中には、背景重力波も生成される。この節では、4次元の宇宙論におけるインフレーション起源の背景重力波の生成について述べる [36][96]。

平坦な Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker 計量 ($K = 0$) に摂動を加える。

$$g_{\mu\nu} = a(\eta)^2(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}), \quad (6.16)$$

$a(\eta)$ は conformal time :

$$\eta = \int \frac{dt}{a(t)}, \quad (6.17)$$

で表した scale factor である。 $h_{\mu\nu}$ をモード展開すると、

$$h_{\mu\nu} = \sqrt{8\pi G_4} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2k}} \frac{1}{a(\eta)} \sum_{A=+, \times} \left(c_A(\mathbf{k}) \psi_{\mathbf{k}}(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + c_A^\dagger(\mathbf{k}) \psi_{\mathbf{k}}^*(\eta) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right) e_{\mu\nu}^{\text{TT}(A)}(\hat{\Omega}) \quad (6.18)$$

と書ける。 G_4 は重力定数で、 $\sqrt{8\pi G_4}$ というファクターは重力場の作用から決まるカノニカルな規格化因子である [36][95][97]。2.2.4 節で曲がった時空での重力波の伝搬方程式を導いたが、いまの場合、計量が、

$$g_{\mu\nu}^{\text{B}} = \text{diag}(-a^2(\eta), a^2(\eta), a^2(\eta), a^2(\eta)), \quad (6.19)$$

の背景時空を重力波が伝搬する。また、いまは計量の摂動が $a^2(\eta)h_{\mu\nu}$ という形になっているので、式 (6.18) を波動方程式 (2.56) に代入したあとで、 $h_{\mu\nu} \rightarrow a^2(\eta)h_{\mu\nu}$ という変換を行う。すると、モード関数 $\psi_{\mathbf{k}}(\eta)$ に関する方程式、

$$\frac{d^2\psi_{\mathbf{k}}}{d\eta^2} + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) \psi_{\mathbf{k}} = 0, \quad (6.20)$$

が得られる。ここで、プライム (') は η に関する微分を表す。また、偏向を表す A は省略した。

ここから、係数 c, c^\dagger を生成・消滅演算子と解釈し、時空の量子化を行う。ただし、背景重力場 $a(\eta)^2\eta_{\mu\nu}$ は古典的に取り扱い、摂動部分 $a(\eta)^2h_{\mu\nu}$ のみを量子化する。まず、真空を定義したいのだが、膨張している時空では時空全体に渡って一意的に決まる真空は存在しない。Minkowski 時空では、Poincaré 対称性を持つ真空を定義するという指導原理が存在するのだが、いま考えている時空は非定常であるため時間座標の決め方に任意性が残り、各時刻で異なった真空を定義しうる。それが原因となって、粒子生成という現象が引

き起こされるのである³⁴。それでは、宇宙を図 6.23 のようにドジッターインフレーション期 (DS), 輻射優勢期 (RD), 物質優勢 (MD) の3つに分け, それぞれは瞬間的に遷移するものとして, 背景重力波の生成を具体的に見ていくことにしよう。

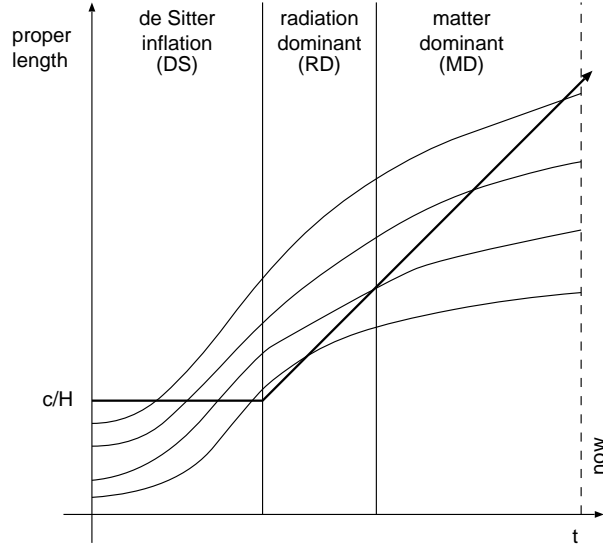


図 6.23: 宇宙の地平線距離 c/H とゆらぎのスケールとの関係。大きいスケールのゆらぎほど先の時刻に地平線を出て, 後の時刻に再突入する。下の2つのゆらぎのスケールは, 宇宙が輻射優勢であるときに地平線に再突入している。

まず, DS について, そこでの生成・消滅演算子を用いて真空を定義する:

$$C_+^{\text{DS}}(\mathbf{k})|0\rangle_{\text{DS}} = C_-^{\text{DS}}(\mathbf{k})|0\rangle_{\text{DS}} = 0. \quad (6.21)$$

宇宙膨張により背景重力場が変化して RD に移行すると,

$$C_+^{\text{DS}}, C_-^{\text{DS}}, \psi_{\mathbf{k}}(\eta) \longrightarrow C_+^{\text{RD}}, C_-^{\text{RD}}, \Psi_{\mathbf{k}}(\eta), \quad (6.22)$$

となって, 生成・消滅演算子とモード関数が変化する。それに伴って真空も,

$$C_+^{\text{RD}}(\mathbf{k})|0\rangle_{\text{RD}} = C_-^{\text{RD}}(\mathbf{k})|0\rangle_{\text{RD}} = 0, \quad (6.23)$$

と変化し, これは一般に $|0\rangle_{\text{DS}}$ とは一致しない。

この背景時空の遷移に伴う粒子生成を, Bogoliubov 変換の手法を用いて計算する。Bogoliubov 変換は, 次のように定義される:

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\eta) = \sum_{\mathbf{k}'} (\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \psi_{\mathbf{k}'}(\eta) + \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \psi_{\mathbf{k}'}^*(\eta)). \quad (6.24)$$

³⁴初めに negative frequency mode しかなかったとしても, 宇宙膨張の結果, positive frequency mode が混ざってくる (mode mixing) と言い換えることもできる。この考え方は, 6.4 節に出てくる 0-mode と Kaluza-Klein mode とのモードミキシングに似ている。

ここで, $\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ を Bogoliubov 係数という。これを, 上の展開式 (6.18) に代入して, 生成・消滅演算子間の関係に書き直すと,

$$C^{\text{DS}}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}'} \{ \alpha_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} C^{\text{RD}}(\mathbf{k}') + \beta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}^* C^{\text{RD}\dagger}(\mathbf{k}') \} \quad (6.25)$$

$$C^{\text{RD}}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}'} \{ \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^* C^{\text{DS}}(\mathbf{k}') - \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} C^{\text{DS}\dagger}(\mathbf{k}') \} \quad (6.26)$$

を得る。以降, $+$ と \times は区別しない。Bogoliubov 係数は, 生成・消滅演算子の交換関係:

$$[C(\mathbf{k}), C^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad [C(\mathbf{k}), C(\mathbf{k}')] = 0, \quad (6.27)$$

より,

$$\sum_{\mathbf{k}} (\alpha_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}}^* - \beta_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}} \beta_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}}^*) = \delta_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} \quad (6.28)$$

$$\sum_{\mathbf{k}} (\alpha_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}} \beta_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}} - \beta_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}}) = 0 \quad (6.29)$$

を満たす。いま考えている背景時空は時間変化するので, エネルギーを生成される粒子に与えることができる。しかし, 同時に一様かつ等方であるので, その対称性から, 運動量を与えることはできない。すなわち,

$$\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \alpha_f \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \beta_f \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (6.30)$$

となり, 式 (6.25)(6.26) は,

$$C^{\text{DS}}(f) = \alpha_f C^{\text{RD}}(f) + \beta_f^* C^{\text{RD}\dagger}(f), \quad (6.31)$$

$$C^{\text{RD}}(f) = \alpha_f^* C^{\text{DS}}(f) - \beta_f C^{\text{DS}\dagger}(f). \quad (6.32)$$

また, 式 (6.24) と式 (6.29) は,

$$\Psi_f(\eta) = \alpha_f \psi_f(\eta) + \beta_f \psi_f^*(\eta), \quad (6.33)$$

$$|\alpha_f|^2 - |\beta_f|^2 = 1, \quad (6.34)$$

となる。ここで, f は波数 \mathbf{k} に対応する周波数を表す。

粒子数は各膨張期 ($a = \text{DS, RD, MD}$) で,

$$N_a(f) \equiv C^{a\dagger}(f) C^a(f), \quad (6.35)$$

と定義される。これらの間の関係式は, 式 (6.32) および式 (6.34) より,

$$N_{\text{RD}}(f) = (1 + 2|\beta_f|^2) N_{\text{DS}}(f) + |\beta_f|^2, \quad (6.36)$$

というようになる。したがって, 粒子が存在しない DS から RD に移行した場合, RD の粒子数は,

$$C^{\text{RD}\dagger} C^{\text{RD}} |0\rangle_{\text{DS}} = |\beta_f|^2 |0\rangle_{\text{DS}} \neq 0 \quad (6.37)$$

となって粒子が生成されていることがわかる。

どれだけの背景重力波が生成されるかを見るために、各膨張期のモード関数を求め、式(6.33)から $|\beta_f|^2$ を求める。各膨張期のスケールファクターは、cosmic time では $a(t) \propto e^{Ht}$ (DS), $t^{1/2}$ (RD), $t^{2/3}$ (MD)となるが、式(6.17)を使って conformal time で書き表すと、

$$a(\eta) \propto \begin{cases} -\frac{1}{\eta} & (-\infty < \eta < \eta_1 < 0) & \text{DS} \\ \eta & (\eta_1 < \eta < \eta_{\text{eq}}) & \text{RD} \\ \eta^2 & (\eta_{\text{eq}} < \eta) & \text{MD} \end{cases} \quad (6.38)$$

となる³⁵。これを式(6.20)に代入すると：

$$\text{DS, MD} : \psi'' + \left(k^2 - \frac{2}{\eta^2} \right) \psi = 0, \quad (6.39)$$

$$\text{RD} : \psi'' + k^2 \psi = 0. \quad (6.40)$$

これを解くと、各膨張期でのモード関数 (negative frequency mode) が得られる：

$$\text{DS, MD} : \psi^-(t) = \left(1 - \frac{i}{k\eta} \right) e^{-ik\eta}, \quad (6.41)$$

$$\text{RD} : \psi^-(t) = e^{-ik\eta}. \quad (6.42)$$

まず、 $\eta = \eta_1 < 0$ でDSからRDへ遷移することを考えよう。遷移する時刻において、モード関数とその一階微分の連続性を課すと、

$$\alpha_k = 1 - \frac{i}{k\eta_1} - \frac{1}{2k^2\eta_1^2}, \quad \beta_k = \frac{1}{2k^2\eta_1^2} e^{-2ik\eta_1}, \quad (6.43)$$

を得る。これらは、式(6.34)を満たしていることに注意されたい。粒子数を式(6.37)から計算すると、

$$N_k = |\beta_k|^2 = \frac{1}{4k^4\eta_1^4} \quad (6.44)$$

となる。

もう少し分かりやすい式に直すために、 η_1 を観測量に書き換えよう。波数 k は共動座標系で見たときの波数であるから固有座標系から見た物理的な波数 k_{phys} とは、

$$2\pi f = (k_{\text{phys}})_0 = \frac{k}{a(t_0)}, \quad (6.45)$$

という関係にある。ここで添字の0は現在の時刻での値であることを表している。また、 η_1 と固有座標系での時刻 t との関係は、式(6.17)より、

$$\eta_1 = \int_0^{t_1} e^{Ht} dt = \frac{1}{H} e^{Ht_1} = \frac{a(t_1)}{H}, \quad (6.46)$$

³⁵conformal time では $\eta = [-\infty, \infty]$ である。

であるから、式(6.44)の $k\eta_1$ は、

$$k|\eta_1| = 2\pi f a(t_0)|\eta_1| = \frac{2\pi f a(t_0)}{H a(t_1)} = \frac{2\pi f}{H} \left(\frac{t_0}{t_{\text{eq}}}\right)^{2/3} \left(\frac{t_{\text{eq}}}{t_1}\right)^{1/2} \equiv \frac{f}{f_1}, \quad (6.47)$$

となる。ただし、 t_{eq} は輻射と物質のエネルギー密度が等しくなる時刻で、

$$\left(\frac{t_0}{t_{\text{eq}}}\right)^{2/3} = 1 + z_{\text{eq}} = 2.32 \times 10^4 (h^2 \Omega_0) \left(\frac{T}{2.75\text{K}}\right)^{-4} \simeq 2.40 \times 10^4 (h^2 \Omega_0), \quad (6.48)$$

であり [98], f_1 は、

$$f_1 \equiv \left(\frac{H}{2\pi z_{\text{eq}}}\right) \left(\frac{t_1}{t_{\text{eq}}}\right)^{1/2} \simeq 10^9 \left(\frac{H}{10^{-4} M_{\text{pl}}}\right)^{1/2}, \quad (6.49)$$

である [36]。

さて、輻射優勢に遷移する際に生成される粒子数(6.44)が分かったわけだが、次にこれを Ω_{GW} に直すことを考えよう。各々のグラビトンが hf のエネルギーを持ち、ヘリシティが2であることを考慮すると、重力波のエネルギー密度は、

$$\rho_{\text{GW}} = 2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi\hbar)^3} hf N_f = 16\pi^2 \int_0^\infty d(\log f) f^4 N_f, \quad (6.50)$$

ゆえに、

$$\frac{d\rho_{\text{GW}}}{d\log f} = 16\pi^2 N_f f^4, \quad (6.51)$$

となる。よって、式(4.21)(4.23)より、

$$h_0^2 \Omega_{\text{GW}} \simeq 3.6 \left(\frac{N_f}{10^{37}}\right) \left(\frac{f}{1\text{kHz}}\right)^4 \quad (6.52)$$

となる。これに式(6.44)を代入すると、

$$h_0^2 \Omega_{\text{GW}} \simeq 10^{-13} \left(\frac{H}{10^{-4} M_{\text{pl}}}\right)^2 \quad (f_{\text{eq}} < f < f_c) \quad (6.53)$$

となって、背景重力波のスペクトルは周波数に依存しないことが分かる(図5.19中の(a))。スローロールインフレーションの場合もほぼ平坦だが、スローロールパラメーター ϵ が有限なので $f^{-2\epsilon}$ という周波数依存性がある [36][95]。 f_{eq} は、輻射と物質のエネルギー密度が等しい時期の地平線の大きさ c/H と同じ波長を持つ背景重力波の周波数で、

$$f_{\text{eq}} = \frac{1}{2\pi} \frac{4(\sqrt{2}-1)}{3t_{\text{eq}}} \frac{1}{z_{\text{eq}}} \simeq 10^{-16} h^2 \Omega_0 \text{ Hz}, \quad (6.54)$$

である [36]。また、いまはDSからRDの遷移を瞬間的に行っているために³⁶、カットオフ周波数 f_c は無限大であるが、実際は有限な時間 $\Delta t = a(t_1)(t_{\text{after}} - t_{\text{before}})$ だけかけて滑らかに遷移するはずである。遷移時間が有限な場合は、

$$\beta_k \sim e^{f/f_c}, \quad f_c \equiv \frac{a(t_1)}{a(t_0)} \frac{1}{\Delta t}, \quad (6.55)$$

³⁶しかも2階微分である \dot{H} が不連続。

という形でカットオフが入ることが知られている [36][96][99]。

ところで、周波数が $f < f_{\text{eq}}$ ，すなわち物質優勢期に地平線に再突入するスケールの背景重力波に対しては、 RD から MD への遷移も考えなければならない。これも上と同様の方法で計算でき、

$$h^2\Omega_{\text{GW}}(f) \simeq 10^{-13} \left(\frac{f_{\text{eq}}}{f}\right)^2 \left(\frac{H}{10^{-4}M_{\text{pl}}}\right)^2, \quad 3 \times 10^{-18}\text{Hz} < f < f_{\text{eq}}, \quad (6.56)$$

となることがわかる [36][96] (図 5.19 中の (a))。

5.2 節でも述べたが、 $3 \times 10^{-18}\text{Hz} < f < f_{\text{eq}}$ のスケールに対しては CMB からの制限が存在する。式 (6.56) より、これをインフレーションのエネルギースケールに焼き直すと：

$$H < 6 \times 10^{-5}M_{\text{pl}} \quad (95\% \text{c.l.}), \quad (6.57)$$

となる [100]。

III Section 6.3 III

高次元宇宙モデル

ここまでは、時空が空間 3 次元 + 時間 1 次元の 4 次元で表されるとして話を進めてきた。ここからは、空間の次元を増やした高次元宇宙モデルに焦点を当てる。

4 つの力 (電磁気・弱・強・重力) の統一という観点に立つと、我々の住む時空はむしろ 11 次元や 26 次元といった高次元空間であることが超弦理論や M 理論などで示唆されている。とはいえ、我々が実際に認識しているのは 4 次元であるから、残りの次元をコンパクト化しなければ様々な実験や観測とつじつまが合わない。その一例としてカルツァ・クライン (Kaluza-Klein) 理論がある。1920 年代に、カルツァとクラインは、平坦な 5 次元時空を考えてそのうち 1 次元を S^1 にコンパクト化することで、4 次元のアインシュタイン-マクスウェル理論に帰着することを示した。そのアイデアは、超弦理論や M 理論といった素粒子論に受け継がれ、高次元空間を使った力の統一が盛んに議論されるようになった。そのような中で、1990 年代半ばに、超弦理論において D-ブレーン (D-brane) が発見された。D-ブレーンは超弦理論においてもっとも基本的なオブジェクトで、開いた弦の端点がそこに拘束されることで、D-ブレーン上にゲージ場を再現する。このブレーンというアイデアは宇宙論にももたらされ、1998 年、アルカニハミド (N.Arkani-Hamed)、ディモポウロス (S.Dimopoulos)、ドバリ (G.Dvali) らは、カルツァ・クライン理論と同じようなコンパクト化を施した平坦な高次元空間にブレーンを埋め込む宇宙モデルを提唱した (ADD モデル [101][102])。彼らのモデルは、後で述べる質量の階層性問題を解決するために考案された。また、重力以外の物質はブレーンに局在し、重力だけが高次元空間を伝搬できると言うアイデアにより、比較的大きな余剰次元があっても観測と矛盾しないことが示された。その流れを受けて、翌 99 年には、ランドール (L.Randall) とサンドラム (R.Sundrum) が、新たなコンパクト化のアイデアとして、ブレーンを 5 次元の反ドジッター空間 (anti de Sitter, 以降 AdS_5 と略す) に埋め込むことを考えた。彼らのアイ

デアは、 AdS_5 空間に存在する曲率で余剰次元をコンパクト化するというものである。そのモデルには、2枚のブレーンを考えるもの (RSI, [103]) と、1枚のブレーンを考えるもの (RSII, [104]) がある。RSI は、ADD と同じように、質量の階層性問題を解決するために考案されたもので、RSII は、5次元の体積が無限大であるにもかかわらず、 AdS_5 の曲率でもって余剰次元を実効的にコンパクト化するモデルである。とくに RSII は、ブレーン上でニュートン重力が再現する。

RS モデルは1つの Toy モデルに過ぎないのだが、そのアイデアは大変興味深く、これをベースにした研究が数多くされた。その中で、Binétruy らは、RSII をベースにしてブレーンが宇宙膨張をする解を見出した [105]。この解は、指数関数的な計量を持つ AdS_5 空間中をブレーンが動くことによって、ブレーン上の計量を時間変化させることができる。

以下では、RSI, RSII の特徴を詳しく述べる。とくに本研究で使用する RSII については、[105] をもとにしてブレーンが宇宙膨張をする解を導出する³⁷。また、簡単のため、4次元の重力定数 G_4 と光速 c を 1 とした単位系を用いる。

■ 6.3.1 ■ Randall-Sundrum I (RSI)

まずは、ブレーンが2枚のモデルについて述べる [103]。このモデルは、もともと質量の階層性問題を解決するために考えられた。階層性問題とは、電弱相互作用のエネルギースケールが 10^3 GeV であるのに対し、重力のエネルギースケールが 10^{19} GeV と、実に 16 桁もの差があるのが不自然であることをいう。

図 6.24 のように、丸まっている 5次元空間を考える。ただし、表現の都合上、円筒として描いてある。この 5次元空間には負の宇宙定数 $\Lambda_5 < 0$ が存在しており、全体が AdS_5 空間になっている。この円筒の領域はバルク (bulk) とよばれている。ここで、バルクの時間一定面、すなわち 4次元空間に着目する。ただし、図 6.24 では円として表現されている。この円に2つの点をとる (点とは言っても 3次元空間である)。そして、その点は鏡のようになっており、両側の場の値が等しいと仮定する：

$$u(\phi) = u(-\phi), \quad u(\pi + \phi) = u(\pi - \phi). \quad (6.58)$$

これは \mathbb{Z}_2 対称性とよばれている³⁸。図 6.24 では、円筒が半分に折り畳まれたように描かれている。こうすると、先ほどの2点がバルクの端点となり、それがブレーン (空間が 3次元なのでとくに 3-brane) である。ここで注意されたいのは、重力以外の全ての物質や場はブレーン上のみで移動もしくは相互作用することができ、重力だけが 5次元方向へ伝播することができると仮定することである。このセットアップでアインシュタイン方程式を解くと、

$$ds^2 = e^{-2r_c|\phi|/\ell} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2, \quad (6.59)$$

という計量が得られる [103]。 ℓ は AdS_5 の曲率半径である。ブレーン上の計量は $\phi = 0, \pi$ で与えられ、ミンコフスキー時空になっている。そして、 $\phi = 0$ にあるブレーンから離れるに従って空間は指数関数的に縮んでゆくことがわかる (図 6.25 はそのイメージ)。

³⁷なお、高次元宇宙モデルについてのより詳しいレビューは [106][107][108] などがある。

³⁸ $\mathbb{Z}_2 = 1, -1$ であり、5次元目の空間は円 S^1 をこれで割った空間 S^1/\mathbb{Z}_2 となる。

5次元の作用関数を余剰次元の部分だけ積分すると,

$$M_{\text{pl}}^2 = \ell M_5^3 (e^{2r_c\pi/\ell} - 1), \quad (6.60)$$

となって [106], 5次元のプランク質量 M_5 と4次元のプランク質量 M_{pl} との間に, バルクの大きさ r_c で決まる関係式が成り立つ。したがって, この M が重力のエネルギースケールであると考え, それを電弱相互作用のエネルギースケールである 10^3 GeV においても, $r_c\pi/\ell \sim 35$ 程度に選べば, ブレイン上で通常のプランクエネルギー 10^{19} GeV が再現するのである。これで, 共通のエネルギースケール $M = 1 \text{ TeV}$ というのが存在することになって, 階層性問題が解決するというのがこの宇宙モデルの最も重要な点である。

ブレインにはテンション (tension) とよばれる量が存在する。これはブレインの“張力”であり, 一種の真空のエネルギーのようなものである。図 6.24 に示した「+brane」はテンションが正のブレイン ($\lambda > 0$) で, 「-brane」はテンションが負のブレイン ($\lambda < 0$) に対応する。この階層性問題は, 我々の住んでいるブレインが負のテンションを持つブレインであるとする事で解決する。ところが, その負のテンションが原因で, このブレイン上では反重力的な振る舞いが生じ, 残念ながら現実的なモデルではないことが指摘されている [109]。

6.3.2 Randall-Sundrum II (RSII)

RSI では2枚のブレーンが存在し、5次元の大きさ r_c を適度に調整することで階層性問題を解決できた。一方の RSII [104] では、我々が住んでいるブレーンは正のテンションを持つブレーンであり、RSI に存在した負のテンションを持つブレーンを5次元方向に対して無限に遠ざけたモデルである ($r_c \rightarrow \infty$)。これによってブレーンが1枚になり、考えるべき問題が単純化されたわけだが³⁹、 M_{pl} と M_5 との関係が、

$$M_{\text{pl}}^2 = \ell M_5^3 (1 - e^{-2r_c \pi / \ell}) \rightarrow \ell M_5^3, \quad (6.61)$$

となってしまう [106]、 ℓ^{-1} と M_5 との間に新たな階層性を入れない限り階層性問題を解決できない。その代わりに、5次元方向が無限に大きいにもかかわらず、ブレーン上では実効的にニュートン重力が再現するという新しいタイプのコンパクト化が実現する。本研究は階層性問題の解決が課題なのではなく、背景重力波の高次元効果を評価するのが目的なので、ブレーンが1枚である RSII を宇宙モデルとして採用する。

改めて言うと、テンションが正の3次元ブレーン上に我々が住んでおり、その外側に反ドジッター空間のバルクが無限に広がっていると考えるのが RSII モデルである。その計量は、

$$ds^2 = e^{-2y/\ell} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (6.62)$$

となる。ただし、5次元の座標として y (RSI での $r_c \phi$ に対応する座標) を使っている。このモデルの場合は、バルク中にもう一方の端が存在しないため、バルクの大きさは AdS_5 のスケール ℓ でのみ特徴付けされる。さらに、ブレーン上で重力相互作用を考えると、ポテンシャルの形で、

$$V(r) = \frac{GM}{r} \left(1 + \frac{2\ell^2}{3r^2} \right), \quad (6.63)$$

と書けることがわかっている [112]。長距離の極限 ($r \gg \ell$) をとると正しくニュートン重力が再現されていることが分かる。逆に、小さいスケールでは重力の逆2乗則が破れ、高次元が存在することによる影響が現れるのである。しかし、現在、そのようなずれが 0.1mm のスケールまで存在していないことが明らかにされており [89][90]、地上において重力の強さを直接的に測定するこれまでの手法では、余剰次元の有無を決めるのは技術的に困難であると思われる。

一方で、初期宇宙にまで遡ると、宇宙のスケールは余剰次元と同程度であったと考えられ、余剰次元の大きさが相対的に大きくなることでその存在を確かめやすくなる。そのプローブとなりうるのが、インフレーション起源の背景重力波なのである。以下では、余剰次元が存在する場合、背景重力波にどのような痕跡を残すかを調べるため、RSII モデルを宇宙膨張するように拡張したモデルを説明し、そのもとで、重力波がどのような振る舞いをするか考察していく。

³⁹2枚のブレーンモデルでは、負のブレーン上の物質場を考え、2枚が5次元空間に安定して存在するかどうかを議論しなくてはならない [110][111]。

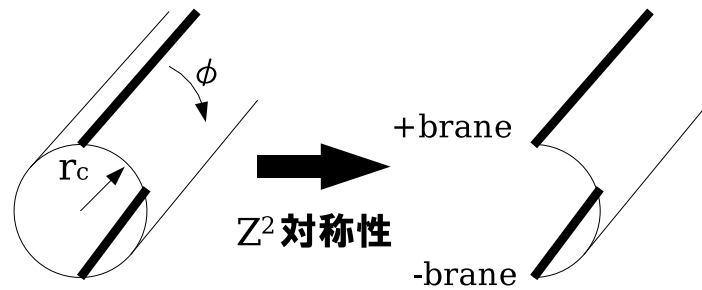


図 6.24: Z_2 対称性の模式図。

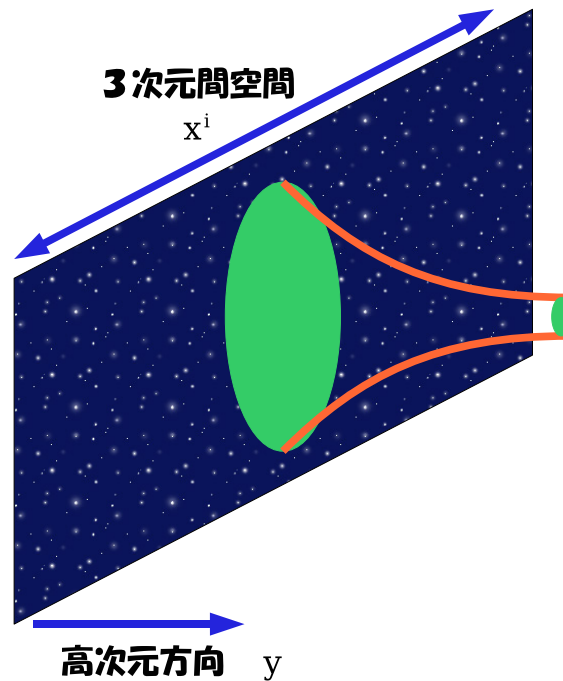


図 6.25: 3次元ブレイン (3-brane) に我々が住んでいる。5次元空間が反ドジッター空間であるので、ブレインから離れるほど固有長さが小さくなる。それを緑の円で模式的に示した。

■ 6.3.3 ■ RSIIモデルに基づくフリードマン宇宙の再現

RSモデルでは、ブレインのテンションと AdS₅ 空間に存在する宇宙定数 Λ_5 とをつりあわせることでブレイン上の宇宙定数 Λ_4 を実効的に消去し、ブレイン上がミンコフスキー時空になっている。そのため、このままでは宇宙膨張を表現することができない。そこでこの節では、Binétruy らの議論に従って、RSII モデルをベースにしてブレイン上で宇宙膨張が実現されるような解を求める [105]。

ブレインが一様等方宇宙であるとし、次のような形の計量を仮定する（ブレインに対する Gaussian Normal Coordinate）：

$$ds^2 = -n^2(t, y)dt^2 + a^2(t, y)\gamma_{ij}dx^i dx^j + dy^2. \quad (6.64)$$

$n(t, y)$ は時間座標の刻み方を表すものでラプス (lapse) 関数といい、 $a(t, y)$ をワープファクター (warp factor) という。 γ_{ij} は4次元のフリードマンモデルと同じく極大対称の3次元計量で、 $k = -1, 0, 1$ がその曲率を表す。この座標系では、ブレインは $y = 0$ に存在し、 $y > 0$ にバルクが広がっている。アインシュタイン方程式は式 (2.14) より、

$$G_{AB} \equiv R_{AB} - \frac{1}{2}g_{AB}R = -\Lambda_5 g_{AB} + \kappa_5^2 T_{AB}, \quad (6.65)$$

となる。ここで $\Lambda_5 < 0$ は前に述べたバルクの宇宙定数で、 κ_5 は5次元の重力定数：

$$\kappa_5^2 = 8\pi G_5 = \frac{1}{M_5^3}, \quad (6.66)$$

である。重力以外の物質はブレイン上にのみ存在すると仮定すると⁴⁰、エネルギー運動量テンソルは、

$$T^A{}_B = T^A{}_B|_{\text{brane}} \equiv S^A{}_B \delta(y) = \text{diag}(-\rho_b, p_b, p_b, p_b, 0)\delta(y), \quad (6.67)$$

という形になる。 ρ_b, p_b はブレイン上のエネルギー密度と圧力で、物質の寄与とテンションの寄与とに分解すると：

$$\rho_b = \rho + \lambda, \quad p_b = p - \lambda, \quad (6.68)$$

となる。アインシュタインテンソル G_{AB} は、付録 B.1 で導出した式 (B.21) になる。ブレ

⁴⁰バルクにスカラー場を入れて、ブレイン上でインフレーションを起こすという議論もある。例えば [113]。

イン上の宇宙は平坦 $k = 0$ であるとする、式 (B.21) で $k = 0, b = 1$ とおいて、

$$G_{00} = 3 \left\{ \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - n^2 \left(\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right) \right\}, \quad (6.69)$$

$$G_{ij} = a^2 \gamma_{ij} \left\{ \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} + 2 \frac{n'}{n} \right) + 2 \frac{a''}{a} + \frac{n''}{n} \right\} \\ + \frac{a^2}{n^2} \gamma_{ij} \left\{ \frac{\dot{a}}{a} \left(-\frac{\dot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{n}}{n} \right) - 2 \frac{\ddot{a}}{a} \right\}, \quad (6.70)$$

$$G_{05} = 3 \left(\frac{n' \dot{a}}{n a} - \frac{\dot{a}'}{a} \right), \quad (6.71)$$

$$G_{55} = 3 \left\{ \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} + \frac{n'}{n} \right) - \frac{1}{n^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{n}}{n} \right) + \frac{\ddot{a}}{a} \right) \right\}, \quad (6.72)$$

となる。この式と (6.67) を等置することでアインシュタイン方程式となる。

まずは $G_{05} = 0$ より、

$$\frac{n'}{n} - \frac{\dot{a}'}{\dot{a}} = 0. \quad (6.73)$$

これを y で積分して、

$$n(t, y) = C(t) \dot{a}(t, y). \quad (6.74)$$

時間座標としてブレイン上の cosmic time を採用すると、

$$n(t, 0) = 1, \quad (6.75)$$

という条件が課されるので、

$$n(t, 0) = C(t) \dot{a}(t, 0) = 1 \iff C(t) = \frac{1}{\dot{a}(t, 0)} \equiv \frac{1}{\dot{a}_0(t)}, \\ \therefore n(t, y) = \frac{\dot{a}(t, y)}{\dot{a}_0(t)}. \quad (6.76)$$

$a_0(t) \equiv a(t, 0)$ はブレイン上の宇宙膨張を表すスケールファクター (scale factor) である。

次に、00 成分に着目すると、

$$G^0_0 = g^{00} G_{00} = -\frac{G_{00}}{n^2} = -\Lambda_5 - \kappa_5^2 \rho_b(t) \delta(y). \quad (6.77)$$

右辺にデルタ関数が含まれているので、 $y > 0$ の部分と境界 $y = 0$ の部分とに分けて考える。まずは $y > 0$ に対して、式 (6.76) を使って整理すると、

$$\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a} \right)^2 + \frac{\Lambda_5}{3} = \left(\frac{\dot{a}_0}{a} \right)^2, \quad (6.78)$$

$$\implies (a^2)'' + \frac{2\Lambda_5}{3} a^2 = 2(\dot{a}_0)^2. \quad (6.79)$$

これを y で積分すると,

$$a^2(t, y) = A(t) \sinh(2y/\ell) + B(t) \cosh(2y/\ell) - \frac{\ell^2}{2} (\dot{a}_0)^2, \quad (6.80)$$

が得られる⁴¹。 ℓ は,

$$\ell \equiv \sqrt{-\frac{6}{\Lambda_5}}. \quad (6.81)$$

積分定数 $A(t), B(t)$ は, $y = 0$ での境界条件である Israel 条件によって決まる (付録 B.2)。式 (B.31)(B.32) と式 (6.76) より,

$$a(t, y) = a_0(t) \left(\cosh(\mu y) - \left(1 + \frac{\rho(t)}{\lambda}\right) \sinh(\mu|y|) \right), \quad (6.82)$$

$$n(t, y) = \cosh(\mu y) + \left(\frac{2\rho(t) + 3p(t)}{\lambda} - 1 \right) \sinh(\mu|y|), \quad (6.83)$$

となる。ただし, \mathbb{Z}_2 対称性のため \sinh 関数の中身が $|y|$ になっている。

次に, ブレイン上のスケールファクター $a_0(t)$ について考える。これは4次元の場合と同様に, フリードマン方程式の解として与えられる。しかし, いまの場合, ブレイン上のフリードマン方程式はバルクの存在によって変更を受ける。これは, 式 (6.78) を積分したものをブレイン上で評価することで (付録 B.3):

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}_0}{a_0} \right)^2 = \frac{\kappa_4^2}{3} \rho \left(1 + \frac{\rho}{2\lambda} \right), \quad (6.84)$$

となる。また, 同時に, エネルギー保存則 (付録 B.4):

$$\dot{\rho}_b = 3H(\rho + p), \quad (6.85)$$

も満たさなければならない。本研究では, ブレイン上の状態方程式として $p = w\rho$ を使い, これらの方程式を連立させてエネルギー密度とスケールファクターの解析解を用いる。具体的な式は, 6.6 節で述べることにする。

III Section 6.4 III

背景重力波に現れる高次元効果

前の節で述べた高次元宇宙モデルにおいて, インフレーションが起ったときに生成される背景重力波について考えよう。余剰次元がある場合, 高エネルギーであった初期の宇宙では次のような効果が考えられる:

- 通常とは異なる宇宙膨張則
- Kaluza-Klein mode の励起

⁴¹本来は G^5_5 に関するアインシュタイン方程式も考慮しなければならない (付録 B.3 を参照)。

6.1 節で述べたように、背景重力波のスペクトルと宇宙膨張則は密接に関わっている。前の節で述べたように、いま考えている宇宙モデルでは、フリードマン方程式 (6.84) に ρ^2 に比例する補正項が入るため、膨張則が通常とは異なる振る舞いをする。たとえば、ブレイン上が輻射優勢の場合、

$$H \sim \rho^2 \implies a_0 \propto t^{1/4}, \quad (6.86)$$

というように $t^{1/2}$ に比べて少し“遅い”膨張をする。すなわち、図 6.26 に示したように、短波長の背景重力波は、 ρ^2 の項が卓越している状態のブレインの地平線に再突入し、スペクトルの形が変化すると考えられる。6.2 節で用いた Bogoiubov 変換の手法を使うと、 $\Omega_{\text{GW}} \propto f^{4/3}$ となる。高次元の効果が出始める周波数を現在の値に換算すると、

$$f_{\text{crit}} \simeq 2 \times 10^{-4} \text{ Hz} \left(\frac{\ell}{0.1 \text{ mm}} \right)^{-1/2} g_*^{-1/12} \left(\frac{g_*}{g_{*S}} \right)^{1/3} \frac{T}{2.728 \text{ K}}, \quad (6.87)$$

となる [114]。0.1mm という余剰次元のスケールは、ニュートン重力が正しいことが実験によって示されている下限値である [89][90]。

一方、Kaluza-Klein mode (以降、KK-mode と略す) とは、余剰次元方向に逃げていく重力波のモードである。これはブレイン上で見ると、質量を持ったグラビトンのように振る舞う。これに対し、ブレイン上を伝搬するモードを 0-mode という。これは、質量のない通常のグラビトンとして振る舞う。次の節で詳しく述べるが、インフレーション期の量子ゆらぎによって生成された背景重力波のほとんどは、0-mode であることが知られている。この 0-mode が地平線に再突入すると、KK-mode を励起することが示唆されているのである。これは 6.2 節で説明した粒子生成と同じことである。4次元の場合は、式 (6.24) のように、インフレーション期に生成された positive frequency mode が輻射優勢期の positive frequency mode と negative frequency mode との和で書かれていた。同様に、インフレーション期の 0-mode が地平線に再突入すると輻射優勢・物質優勢期の 0-mode だけでは再現することができず、KK-mode を混ぜなければならないのである。すなわち、モードミキシング (mode mixing) が本質であり、いまのようにブレインが動いているという描像では、KK-mode の励起が必ず起るのである。

インフレーション中に生成される 0-mode の量も、4次元の場合と異なることが知られている。4次元の場合は、

$$\delta E_{\text{brane}} \approx \frac{M_4}{2} \left(\frac{H}{2\pi} \right), \quad (6.88)$$

となるのだが [95]、いまのモデルの場合は余剰次元の存在のために、

$$\delta E_{\text{brane}} = \frac{M_4}{2} \left(\frac{H}{2\pi} \right) \left\{ \sqrt{1 + \ell^2 H^2} - \ell^2 H^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \ell^2 H^2}}{\ell H} \right\}^{-1/2}, \quad (6.89)$$

となる [107][115]。これは低エネルギー極限 $\ell H \ll 1$ をとると、4次元の場合に帰着する。この効果を観測で得られれば余剰次元を直接観測するということにつながるのだが、この補正は $\ell H \rightarrow \infty$ の極限をとっても、4次元との差が $\sqrt{2}$ 倍になるだけであり、インフレーションのエネルギースケールなどがよほど正確に決まらない限り観測は困難である。

一方、高周波の背景重力波であれば、上に挙げたような効果が期待できるため、余剰次元の直接観測も現実味を帯びるのである。

そこで、高次元宇宙における背景重力波の振幅を定量的に見積もる必要がある。これまで、Bogoliubov 変換を使った議論として、ドジッターインフレーションからミンコフスキー時空への遷移を考えたものや [116], 途中でハッブルパラメーターが変化するドジッターインフレーションを想定した研究がある [97]。また、フリードマン宇宙を想定した研究として、生成される KK-mode の質量のスペクトルを低エネルギーの極限で考察するものや [117], “near-brane limit” とよばれる近似を用いたもの [118], 座標系に関する議論をしているもの [119] などがある。しかし、現実的なモデルで余剰次元の効果を定量的に評価することにはこれまで成功していない。

そこで本研究では、ブレイン上がフリードマン宇宙が再現されているモデルにおいて、背景重力波の波動方程式 (2.56) を数值的に解析することにより、振幅を定量的評価した。具体的には、ドジッターインフレーションで生成された 0-mode が、輻射優勢宇宙となっているブレインでどのように振る舞うかを調べた。数値計算には、スペクトル法的一种であるチェビシェフ・コロケーション法 (Tchebychev Collocation Method) と予測子・修正子法を用いた。そして、この数値計算の結果の妥当性を検証するためと、その振る舞いを定性的に理解するために、波動方程式を低エネルギー展開して解析を行った。

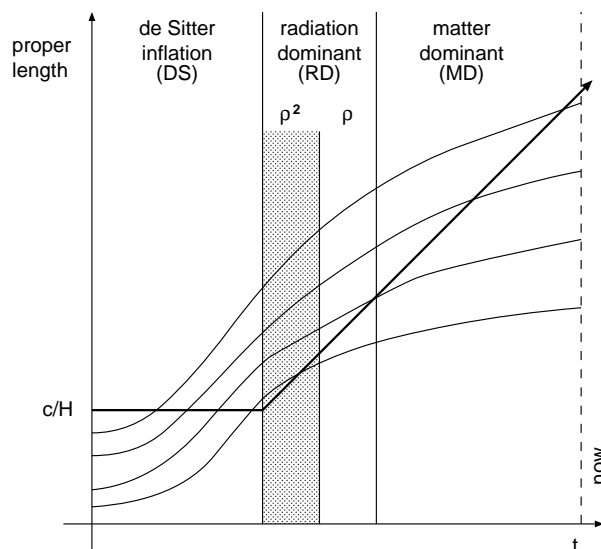


図 6.26: ブレイン上の宇宙膨張と、生成された背景重力波のスケール。本論では、ブレイン上でインフレーションを起こすという問題には立ち入らないが、図 6.23 をナイーブに 5次元化するとこのようになる。網掛けの部分が 4次元の場合と異なる。一番下のゆらぎのスケールは、フリードマン方程式中の ρ^2 の項が効いている時期に地平線に再突入している。

III Section 6.5 III

重力波の波動方程式

■ 6.5.1 ■

波動方程式の導出

はじめに、5次元時空における重力波の発展方程式を導出しておこう。式(6.64)に対してテンソル型の摂動を考える：

$$\delta_{ij} \rightarrow \delta_{ij} + E^{(A)}(t, \mathbf{x}, y) e_{ij}^{(A)}, \quad (6.90)$$

$$|E^{(A)}(t, \mathbf{x}, y)| \ll 1 \quad A = +, \times. \quad (6.91)$$

式(2.56)から、摂動 $E(t, \mathbf{x}, y)$ の発展方程式が得られる。詳細は付録B.5に付記した。フーリエ変換：

$$E_{\mathbf{k}}(t, y) = \int E(t, \mathbf{x}, y) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad (6.92)$$

を施して方程式を書き直すと（添え字 \mathbf{k} は省略），

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \left(\frac{3\dot{a}}{a} - \frac{\dot{n}}{n} \right) \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{n^2}{a^2} k^2 E - n^2 \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \left(\frac{3a'}{a} + \frac{n'}{n} \right) \frac{\partial E}{\partial y} \right) = 0, \quad (6.93)$$

となる [115]。また、この摂動 $E(t, y)$ に対しても Israel 条件が課される。付録B.2より、ブレイン上の非等方ストレス π_{ij} を無視することで、

$$\left. \frac{\partial E}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad (6.94)$$

となる。

一般にブレイン上がフリードマン宇宙となっている場合は、この波動方程式を解析的に解くことができない。しかし、ブレイン上がドジッター時空のとき、フリードマン宇宙であっても低エネルギー極限 ($\rho \ll \lambda$) をとったときは例外的に解くことができる。以下、この2つを実際に解いてみることで、波動方程式の定性的な振る舞いについて述べる。

■ 6.5.2 ■

ドジッターインフレーション

ブレイン上がドジッター時空である場合、波動方程式(6.93)は解析的に解くことができる。この場合、 H は定数であるから、式(6.84)より、エネルギー密度 $\rho(t)$ も定数となる。したがってワープファクター(6.82)とラプス関数(6.76)は、

$$a(t, y) = a_0(t) \mathcal{A}(y), \quad (6.95)$$

$$n(t, y) = \mathcal{A}(y), \quad (6.96)$$

というように、変数分離の形に書くことができる。ただし、

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(y) &\equiv \cosh(\mu y) - \left(1 + \frac{\rho}{\lambda}\right) \sinh(\mu|y|), \\ &= \ell H \sinh\{\mu(y_c - |y|)\}\end{aligned}\quad (6.97)$$

であり、 $y = y_c$ は Gaussian Normal Coordinate の座標特異点で、 $\mathcal{A}(y_c) = 0$ より、

$$y_c = \ell \coth^{-1}\left(1 + \frac{\rho}{\lambda}\right), \quad (6.98)$$

となっている。式 (6.97) を使って、空間座標 y を共形座標 z に移す：

$$z = \int \frac{dy}{\mathcal{A}(y)} = \text{sgn}(y) \frac{1}{H} \log \left\{ \coth \frac{y_c - |y|}{2\ell} \right\}. \quad (6.99)$$

すると式 (6.97) は、

$$\mathcal{A}(z) = \frac{\ell H}{\sinh(H|z|)}, \quad (6.100)$$

となる。

波動方程式 (6.93) もまた、

$$E(t, y) = \int dm \phi_m(t) \mathcal{E}_m(y), \quad (6.101)$$

と変数分離の形に書き直せる。これを式 (6.93) に代入すると、

$$\ddot{\phi}_m + 3H\dot{\phi}_m + \left(m^2 + \frac{k^2}{a_0^2(t)}\right) \phi_m = 0, \quad (6.102)$$

$$\mathcal{E}_m'' + 4\frac{\mathcal{A}'(y)}{\mathcal{A}(y)}\mathcal{E}_m' + \frac{m^2}{\mathcal{A}^2(y)}\mathcal{E}_m = 0, \quad (6.103)$$

となって、 $\phi_m(t)$ と $\mathcal{E}_m(y)$ それぞれの方程式に分かれる。 m は KK-mode の質量を表す。これを解くと、

$$\phi_m(t) = e^{-\frac{3}{2}Ht} B_\nu \left(\frac{k}{H} e^{-Ht} \right), \quad (6.104)$$

$$\mathcal{E}_m(y) = \mathcal{A}^{-\frac{3}{2}}(y) L_{3/2}^\nu \left(\sqrt{1 + \frac{\mu^2}{H^2} \mathcal{A}^2(y)} \right), \quad (6.105)$$

となる [108]。ここで、 B_ν はベッセル関数 (J_ν) とノイマン関数 (N_ν) の線形結合で、 $L_{3/2}^\nu$ はルジャンドル陪関数 ($P_{3/2}^\nu, Q_{3/2}^\nu$) の線形結合で表される。また、

$$\nu = i\sqrt{\frac{m^2}{H^2} - \frac{9}{4}}, \quad (6.106)$$

である。とくに 0-mode ($m = 0$) に注目すると、式 (6.105) より、

$$\mathcal{E}_0(y) = \text{const.} \quad (6.107)$$

が解になっていることがわかる。

ここで、式(6.103)を z 座標に移す。

$$\Psi_m(z) \equiv \mathcal{A}^{3/2}(z)\mathcal{E}_m(z), \quad (6.108)$$

と定義すると、

$$\frac{d^2\Psi_m}{dz^2} - V(z)\Psi_m = -m^2\Psi_m, \quad (6.109)$$

$$V(z) = \frac{15}{4\ell^2}\mathcal{A}^2(z) + \frac{9}{4}H^2 - \frac{3}{\ell}\left(1 + \frac{\rho}{\lambda}\right)\delta(z - z_b), \quad (6.110)$$

というシュレーディンガー方程式のような形に変形できる。ここで、 $z = z_b$ は z 座標でのブレインの位置で、

$$z_b = \frac{1}{H} \sinh^{-1} \ell H, \quad (6.111)$$

である。また、ポテンシャル(6.110)のデルタ関数は一つだけ束縛状態を作る。それが式(6.107)の 0-mode に対応している。

ここに現れるポテンシャルは、図 6.27 左にあるような形をしており、volcano ポテンシャルとよばれている。0-mode は $m = 0$ であるから、式(6.110)に現れるデルタ関数型のポテンシャルの束縛状態に対応している。その次の励起状態、すなわち最低エネルギー状態の KK-mode は $m = 3H/2$ のところに対応している。このように、ドジッター時空では、0-mode と KK-mode との間にギャップが存在する。このギャップのため、ドジッターインフレーション中に生成されるテンソルモードは、大部分が 0-mode で、KK-mode の生成は強く抑制されてしまう。スローロールインフレーションの場合は方程式を変数分離の形にできないので厳密には上の議論が成り立たないのだが、定性的には同様のことが言え、生成される揺らぎはの大部分が 0-mode である。このことは、数値計算における初期条件の課し方について 1 つの基準を与える。

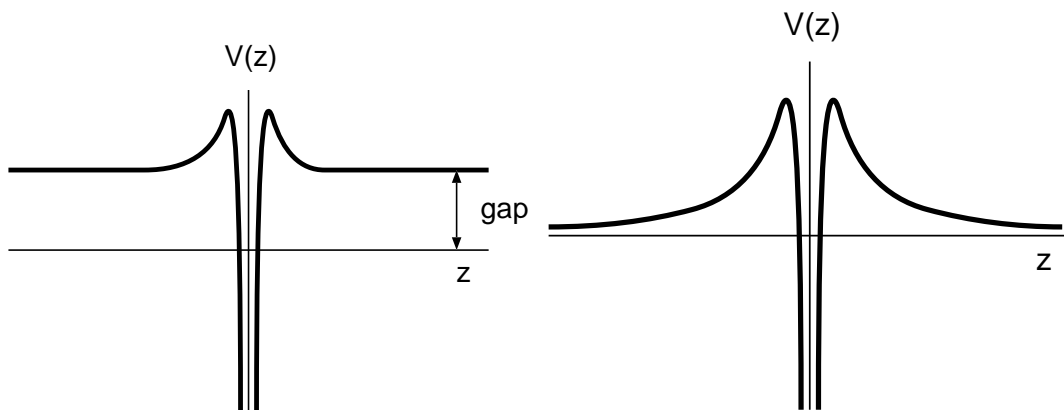


図 6.27: volcano ポテンシャル。左はブレイン上がドジッター時空のときで、右は低エネルギー極限をとったとき。

■ 6.5.3 ■ 低エネルギー極限

ブレイン上のエネルギー密度が低い極限 ($\rho \ll \lambda$) をとったときも、解析的に解くことができる。この場合、ワープファクターとラプス関数は式 (6.82)(6.83) より、

$$a(t, y) = a_0(t)e^{-\mu|y|}, \quad (6.112)$$

$$n(t, y) = e^{-\mu|y|}, \quad (6.113)$$

となる。波動方程式 (6.93) を書き下すと、

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + 3H \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{k^2}{a_0^2} E - e^{-2\mu|y|} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} - 4\text{sgn}(y)\mu \frac{\partial E}{\partial y} \right) = 0, \quad (6.114)$$

となって、変数分離ができる⁴²。前の節と同様に、式 (6.101) を使って変数分離すると、

$$\ddot{\phi}_m + 3H\dot{\phi}_m + \left(m^2 + \frac{k^2}{a_0^2(t)} \right) \phi_m = 0, \quad (6.115)$$

$$\mathcal{E}_m'' - 4\text{sgn}(y)\mu\mathcal{E}_m' + m^2 e^{-\mu|y|} \mathcal{E}_m = 0, \quad (6.116)$$

となる。さらにシュレーディンガー方程式の形に直す。前の節と全く同じ計算をすればよいのだが、低エネルギーであるから $\ell H \rightarrow 0$ であることに注意すると、直ちに、

$$\frac{d^2 \Psi_m}{dz^2} - V(z)\Psi_m = -m^2 \Psi_m, \quad (6.117)$$

$$V(z) = \frac{15}{4z^2} - \frac{3}{\ell} \delta(z - z_b), \quad (6.118)$$

となることがわかる。ただし今度は、

$$\mathcal{A}(z) = \frac{\ell}{z}, \quad z_b = \ell \quad (6.119)$$

である。このポテンシャルは、図 6.27 右のようになる。

このときの重力波の振る舞いを、波動方程式 (6.115)(6.116) から見てみることにしよう。まず、式 (6.115) は 4 次元の方程式に帰着することに注意されたい。つまり、6.2 節で議論した 4 次元の場合のモード関数についての方程式 (6.20) で $\psi = a(\eta)\phi(\eta)$ とし、さらに conformal time ‘ η ’ を cosmic time ‘ t ’ に戻すと、 $m = 0$ とした式 (6.115) に一致する。このように、低エネルギーの極限では、高次元理論における 0-mode が 4 次元の理論における通常の重力波（質量 0 のグラビトン）に対応するのである。このとき、KK-mode は質量が m の粒子（グラビトン）に見えることが分かる。また、式 (6.115) の $\dot{\phi}$ の項から、時間が経つにつれて、重力波の振幅は減衰していくことが見てとれる。さらに、 ϕ の項を見てみると、時間が経つにつれて小さくなってゆき、重力波の波長が伸びていくことがわかる。

⁴² $H = 0$ とすると、ブレイン上がミンコフスキー時空のときの重力波の波動方程式になる。

これらは宇宙膨張の結果引き起こされることで、4次元の場合と振る舞いは同じである。したがって、低エネルギー極限をとってしまうと、高次元の効果が見えなくなってしまう。

次に、図6.27の左右の図を比較してみよう。まず気づくのは、ドジッターインフレーションのときに存在したギャップは、低エネルギー極限のときには存在しないことである。ドジッターインフレーションから輻射・物質優勢の宇宙を経て、宇宙のエネルギー密度が徐々に低くなっていくわけだから、いま考えたい、フリードマン宇宙の volcano ポテンシャルはこれらの図の中間に位置するものと考えられる。しかし、前にも述べたように、ブレイン上がフリードマン宇宙のときは波動方程式(6.93)が変数分離形にならず、ここで行ったような単純な議論はできない。

したがって、高次元効果は、ドジッターインフレーションと低エネルギー極限の中間領域である、高エネルギーの領域において本質的かつ重要になることがわかる。この領域は、上で述べたように、波動方程式を解析的に解くこともできず、低エネルギー極限をとることもできない。そのために、数値計算によって波動方程式(6.93)を直に解く必要がある。

III Section 6.6 III 数値計算の準備

前の節で述べたように、4次元との違いを調べるためには、解析的に解くことが不可能な高エネルギー領域のフリードマン宇宙を調べなければならない。この節では、そのために必要な数値計算のセットアップについて述べる。

インフレーションとしては、ドジッターインフレーションを考える。そして、その直後は輻射優勢宇宙となるので、ドジッターインフレーションで生成された重力波が輻射優勢宇宙でどのように振る舞うかを調べればよい。

6.5.2 節で述べたように、ドジッターインフレーションの場合は生成される背景重力波が 0-mode であるので、初期条件は式(6.107)より、

$$E(t, y) = \text{const.}, \quad (6.120)$$

となる。解くべき方程式(6.93)を見ると、超地平線スケール ($H^{-1} \ll a_0 k^{-1}$) ではこれが解になっているので、この初期条件は超地平線スケールの重力波に課すべきである。したがって、方程式の発展は、 $H^{-1} \ll a_0 k^{-1}$ となるところから始めなければならない。本研究ではこれを $\tau_0 = 0.8$ とした。

方程式に含まれているワープファクター $a(t, y)$ とラプス関数 $n(t, y)$ は、式(6.82)(6.83)にそれぞれ与えられている。これらに含まれている、ブレイン上のスケールファクター $a_0(t)$ とエネルギー密度 $\rho(t)$ は、フリードマン方程式(6.84)とエネルギー保存則(6.85)を解くことで得られる。状態方程式を $p = w\rho$ と仮定すると(輻射優勢では $w = 1/3$)、

$$\epsilon(\tau) = \epsilon_*(\tau^2 + 2c\tau - 2c)^{-1}, \quad (6.121)$$

$$a_0(\tau) = a_*(\tau^2 + 2c\tau - 2c)^{\frac{1}{3(1+w)}}, \quad (6.122)$$

を得る。ここで、

$$\epsilon(\tau) \equiv \frac{\rho(\tau)}{\lambda}, \quad \tau \equiv \frac{t}{t_*}, \quad c \equiv \sqrt{1 + \frac{\epsilon_*}{2}} - 1, \quad (6.123)$$

と定義した。 t_* は、注目するスケールの背景重力波がブレイン上の地平線に再突入する時刻を表している。他の*付きの量は、この時刻での値であることを表している。この解を用いると、 $a_0(t) = 0$ となる時刻、すなわちビッグバン特異点の時刻 t_s は、

$$\frac{t_s}{t_*} = 1 - \sqrt{1 + \frac{\epsilon_*}{2}} + \sqrt{\frac{\epsilon_*}{2}}, \quad (6.124)$$

となる。また、 ϵ_* を固定することで、注目する重力波のスケールが決まることに注意されたい。いま述べたように、 $t = t_*$ で重力波が地平線に再突入するので、

$$k = (a_0 H)_* = \frac{1}{\ell} \sqrt{\epsilon_* (\epsilon_* + 2)}. \quad (6.125)$$

となる。ただし、 $a_* = 1$ とした。

6.5.2節でも述べたように、本研究で使用している Gaussian Normal Coordinate(6.64)には座標特異点が存在する。ドジッター時空の場合は、式(6.98)より y 座標が一定の位置に存在したが、今の場合は、これが $y = y_c(\tau)$ というように時間変化する。式(6.98)と式(6.121)より、

$$a(t, y_c) = 0 \quad \rightarrow \quad y_c(\tau) = \frac{1}{2\mu} \log \left\{ \frac{2}{\epsilon_*} (\tau + c)^2 \right\}, \quad (6.126)$$

となる。このことを踏まえて、本研究では、計算領域を有限にするために人工的なブレイン(レギュレーターブレイン)をバルク中に置いた。もちろんこれは、座標特異点よりもブレイン側($y_{\text{reg}} < y_c$)に置かなければならない。したがって、レギュレーターブレインの位置は、

$$y_{\text{reg}}(\tau) = \gamma y_c(\tau), \quad (6.127)$$

で、 $0 < \gamma < 1$ でなければならない。レギュレーターブレインと我々の住むブレインの位置関係を、図6.28に示した。続いて、このレギュレーターブレイン上に課される界条件を考えよう。6.5.1節で述べたように、我々の住むブレイン上に課される境界条件は式(6.94)である。これを、“運動する境界”であるレギュレーターブレインに拡張する。すなわち、

$$n^\mu \frac{\partial E}{\partial x^\mu} \Big|_{y=y_{\text{reg}}(\tau)} = 0, \quad (6.128)$$

とおくことにする。ここで、 n^μ は、図6.28のようにレギュレーターブレインの軌道を (τ, y) 平面に書いたときに現れる法線ベクトルである。この境界条件を書き下すと、時間微分と空間微分を共に含んだ形になる。また、結果のところ述べるが、レギュレーターブレインを置いても最終結果にはあまり影響しない。

さて、これで物理的なセットアップは完了した。まとめると、 ϵ_* と γ をパラメータとし、波動方程式(6.93)を解く。初期条件はドジッターインフレーションで生成された

0-mode を仮定し、これが超地平線スケール ($H^{-1} \ll a_0 k^{-1}$) となるように初期時刻を設定する。我々の住むブレインの境界条件は、Israel 条件に起因する式 (6.94) に与えられている。一方、Gaussian Normal Coordinate を使用するため、式 (6.98) に示した位置に座標特異点が存在する。そこで、バルク中の $y < y_c(\tau)$ の位置にレギュレーターブレインを置くことにした。このレギュレーターブレインの位置は、座標特異点の位置に合わせて時間変化するようにしてある。以上を図 6.28 に示した。

次に、波動方程式を実際に解くための数値計算方法を述べる。本研究では、スペクトル法的一种であるチェビシェフ・コロケーション法を使用する。詳細は付録 A.1 を参照されたい。まず y 方向を、 $N + 1$ 個の点をとって離散化する。その取り方はいろいろあるが、ここでは Gauss-Lobatto collocation point :

$$z_n = \cos \frac{n\pi}{N}, \quad (6.129)$$

を使用する。これは点の位置が一様でなく、特に境界付近で細かくなっている。

$$y \rightarrow z = \frac{2y}{y_{\text{reg}}(\tau)} - 1, \quad (6.130)$$

という座標変換により空間座標を $z = [-1, 1]$ に移し、チェビシェフ多項式 (A.3) の定義域に合うようにした上で、振幅 $E(t, z)$ をチェビシェフ多項式 (A.3) で展開する :

$$E(t, z_n) = \sum_k a_k(t) T_k(z_n). \quad (6.131)$$

$\partial E / \partial y$ や $\partial^2 E / \partial y^2$ などの微分量は、式 (A.10) を使って高い精度で計算できる。そして、係数 $a_k(t)$ を、アダムス・バシユフォース・モールトン (Adams-Bashforth-Maoulton) 法に基づく予測子・修正子法で時間発展させる。予測子・修正子法については、付録 A.2 を参照されたい。

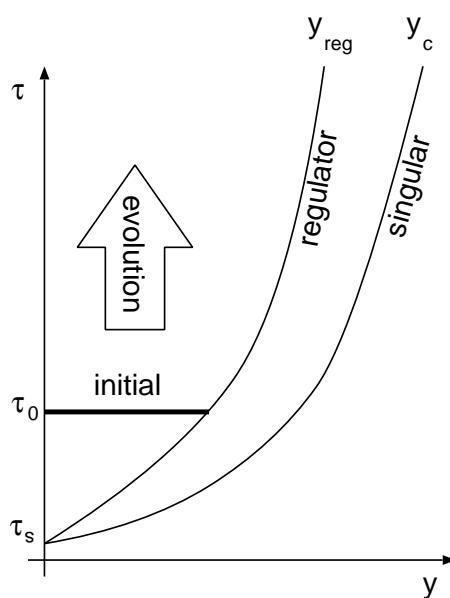


図 6.28: 数値計算のセットアップ。

III Section 6.7 III

数値計算の結果

Gaussian Normal Coordinate では、ビッグバン特異点に近づくほど、すなわち ϵ_* が大きくなるほど高次元方向の計算領域が小さくなる特性がある。それが原因で、特にレギュレーターブレイン付近で病的な振る舞いを引き起こすことが分かった。そこで、本研究では、 $\epsilon_* = 0.05 \sim 0.3$ の範囲で計算を行った。また、この計算の前に、コードの信頼性を確認するために、6.5.2 節で述べたドジッターインフレーションと、6.5.3 節で述べた低エネルギー極限の場合に対するテスト計算も行った。そして、この2つのテスト計算が解析的と一致することを確認した。

図 6.29 に、 $\epsilon_* = 0.2, \gamma = 0.8$ の計算結果を示した。横軸が時間で、縦軸が背景重力波の振幅を表している。また、コロケーションポイント数は $N = 64$ とした。実線が本研究の数値計算の結果で、大きい破線は 4 次元の場合の解析解である。前の節で述べたように、低エネルギー極限をとると 4 次元の理論に一致するので、ここでは輻射優勢 ($w = 1/3$) として式 (6.115) を解いて、初期時刻で振幅を合わせてプロットした。それは、

$$\phi \sim \frac{1}{\sqrt{\tau}} \cos \sqrt{\tau}, \quad (6.132)$$

といった形になる。数値計算の結果の方に目を移すと、まず、全体的に宇宙膨張による減衰 ($E \propto a_0^{-1}$) が見られるが、4 次元の解析解と比べると減衰の度合いが大きいことがわかる (同じ図の右上の小窓)。

図 6.30 は、先ほどの図とは直交する方向である、時間一定面でスライスしたものである。5 次元方向について一様な初期条件 (6.120) から始まって、すぐに 5 次元方向に対して歪んでおり、KK-mode の励起があったことを示唆している。これは 6.4 節で定性的に議論したことと合致している。また、6.5 節で述べたポテンシャルの議論でも、ギャップのあるドジッター時空のポテンシャルが時間変化し、ギャップがなくなって KK-mode が励起するようになったという描像と一致していることがわかる。

次に、本研究で仮定したレギュレーターブレインの影響を調べるために、いろいろな場合の γ について同様の数値計算を行った。図 6.31 がその結果で、横軸は γ 、縦軸は 4 次元の理論で予言される振幅 ($E \propto a_0^{-1}$) と、数値計算で得られた振幅との比を表している。その値は、図 6.29 に見られる各ピークで計算したダンピングファクターの平均値である⁴³。また、 ϵ_* についても 3 種類の値をとって数値計算を行った。いずれの場合も、レギュレーターブレインの位置に依存するものの、 ϵ_* 依存性の方が大きいことや、 $\gamma \rightarrow 1$ の極限で一定値に収束する兆候を見せていることから、レギュレーターブレインの影響は比較的小さいものと考えられる。ちなみに、 $\gamma = 0.85, 0.9$ に関しては、 $N = 128$ として計算を行った。

⁴³どのピークで計算しても、ほとんど同じ値が得られた。これは、KK-mode の励起の度合いが、重力波が地平線に再突入する時刻でほぼ決まっていることを示している。

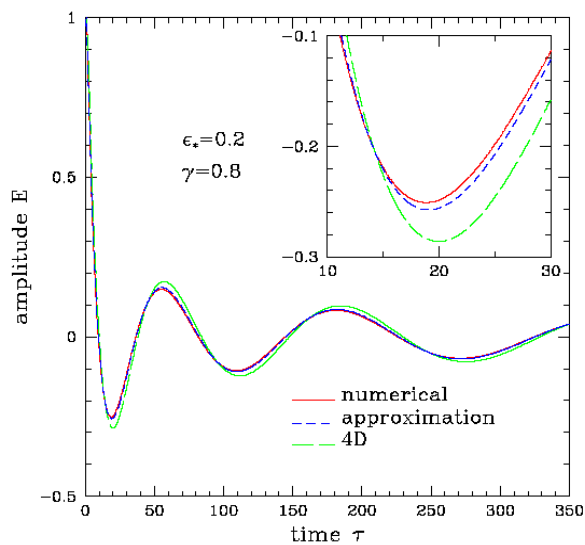


図 6.29: ブレイン上の背景重力波の振幅を表している。実線はシミュレーション結果で、大きい破線は4次元での解析解。細かい破線は、次の節で議論する近似解である。右上の小窓は、 $10 < \tau < 30$ の部分を拡大したもの。

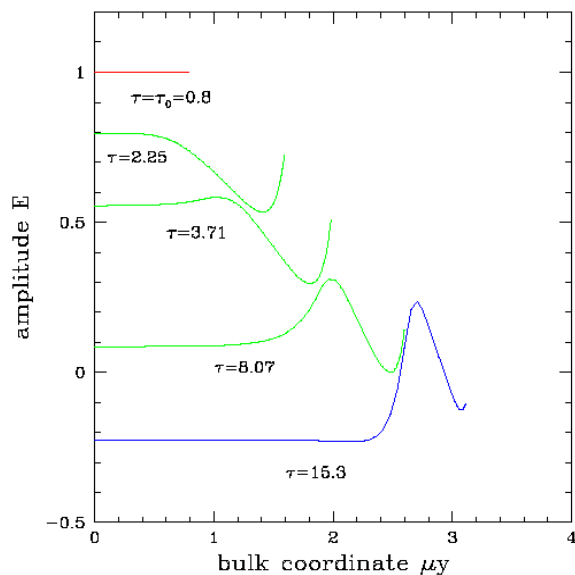


図 6.30: 時間一定面でのスナップショット。図 6.29 と同じく、 $\epsilon_* = 0.2, \gamma = 0.8$ である。端点の座標が異なるのは、レギュレーターブレインが動いていることによる。

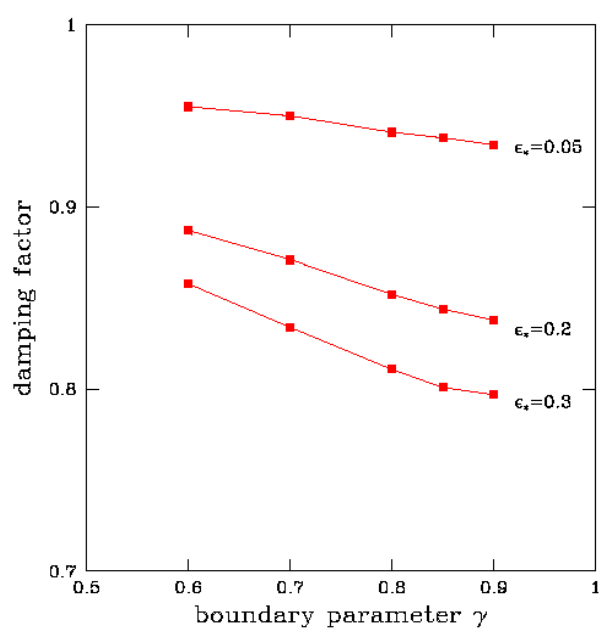


図 6.31: 振幅の”ダンピングファクター”。4次元の解析解とシミュレーションで得られた振幅との比である。レギュレーターブレインの位置パラメータの関数としてプロットしてある。

III Section 6.8 III
低エネルギー展開による解析

前の節で得られた数値計算の結果を定性的に解釈するため、この節では波動方程式 (6.93) を低エネルギー展開した近似方程式を使って議論する。幸い、今回は比較的エネルギーの低い領域 ($\epsilon_* = 0.05 \sim 0.3$) の計算であったので、この近似方程式が数値計算の結果を再現する可能性がある。

ϵ を小さいものとして、摂動 $E(\tau, y)$ 、スケールファクター $a_0(\tau)$ 、ハッブルパラメーター $H(\tau)$ を次のように展開する：

$$E(\tau, y) = E_0(\tau) + E_1(\tau, y) + E_2(\tau, y) + \dots, \quad (6.133)$$

$$a_0(\tau) = e^{\alpha(\tau)} = e^{\alpha_0(\tau)}(1 + \alpha_1(\tau) + \dots), \quad (6.134)$$

$$H(\tau) = H_0(\tau) + H_1(\tau) + \dots. \quad (6.135)$$

ここで、 $E_k(\tau, y), \alpha_k(\tau), H_k(\tau)$ はそれぞれ $\mathcal{O}(\epsilon^k)$ の量であることを表してる。さらに、時間微分 $\partial/\partial\tau$ はハッブルパラメーター H_0 、空間微分 $\partial/\partial y$ はバルクのスケール μ のオーダーになっているので、微分の間にも、

$$\frac{\partial/\partial\tau}{\partial/\partial y} \sim \frac{H}{\mu} \sim \mathcal{O}(\epsilon^{1/2}), \quad (6.136)$$

という階層性があることに注意されたい [120][121]。この展開方法は Gradient Expansion とよばれている (付録 B.6)。 ϵ^2 のオーダーまで展開した結果は次の通りである：

$$\begin{aligned} \square_\tau E_0 &= 2\epsilon_* (1 - 2B(y_0)) \square_\tau^2 E_0 - 3\epsilon (1 - 2B(y_0)) \square_\tau E_0 \\ &+ \left\{ 3\frac{H_1}{H_0} - 12\epsilon (1 - 2B(y_0)) \right\} H_0 \dot{E}_0 \\ &+ \{-2\alpha_1 - 4\epsilon (1 - 2B(y_0))\} \left(\frac{k}{e^{\alpha_0}}\right)^2 E_0. \end{aligned} \quad (6.137)$$

ただし、

$$\square_\tau E_0 \equiv -\frac{\partial^2 E_0}{\partial\tau^2} - 3H_0 \frac{\partial E_0}{\partial\tau} - \left(\frac{k}{e^{\alpha_0}}\right)^2 E_0, \quad (6.138)$$

$$B(y_0) \equiv \frac{\mu y_0}{1 - e^{-2\mu y_0}}, \quad (6.139)$$

である。 y_0 はレギュレーターブレインの位置で、展開を簡単にするために、 y 座標一定の位置に固定した：

$$y_0 = \gamma y_c(\tau_0). \quad (6.140)$$

このように境界条件を課すことは、前の節の最後でも述べたように、KK-mode の励起が $\tau \sim 1$ でほぼ決まっており、後の時刻の境界の振る舞いにはあまり依存しないということから正当化される⁴⁴。

⁴⁴動いているレギュレーターブレインの場合も同様の展開ができるのだが、それは式 (6.137) に $y_{\text{reg}}(\tau)$ やその時間微分に関するおびただしい数の項が付随するだけで本質的には変わらない。

この近似方程式 (6.137) を解いたものを, 図 6.29 に示した。この近似方程式には, \square_τ^2 という項があることに注意されたい。この種の高階微分項は, バルク中を重力波が伝播することで引き起こされる非局所的な効果に起因している。いまの場合, 計算したエネルギー領域が比較的低いことから, バルク中を重力波が伝搬し, それが再びブレーンに戻ってくるような効果はほとんどないと考えられる。さらに, 展開を2次までで打ち切ったことによって, これらの項は病的な振る舞いをする。そのため, この近似方程式を解く際には \square_τ^2 の項は無視した。前の節の数値計算結果を再現していることがわかる。したがって, 背景重力波の定性的振る舞いを議論するために, この近似方程式を用いることにする。

近似方程式 (6.137) を書き直すと,

$$\begin{aligned} \ddot{E}_0 + 3H_0 \left(1 + \frac{H_1}{H_0} + 4\epsilon|1 - 2B(y_0)| \right) \dot{E}_0 \\ + (1 - 2\alpha_1 + 4\epsilon|1 - 2B(y_0)|) \left(\frac{k}{e^{\alpha_0}} \right)^2 E_0 = 0 \end{aligned} \quad (6.141)$$

と書ける。ここで, $B(y_0) > 1/2$ であることを使っている。この式を, 4次元の理論から得られる波動方程式と同等の, 低エネルギー極限をとった 0-mode ($m = 0$) の波動方程式 (6.115) と比較してみよう。 \dot{E}_0 に関する項と E_0 に関する項の係数に, それぞれ2種類の補正項が含まれていることがわかる。1つは, 宇宙膨張則が4次元の場合とは異なることに起因する項で, H_1/H_0 や $-2\alpha_1$ といった補正項になっている。散逸に関わる \dot{E}_0 の係数を見てみると, 式 (B.96) より,

$$\frac{H_1}{H_0} < 0 \quad \text{for late time,} \quad (6.142)$$

となっていることがわかる。これは, 振幅が増幅されていることを意味している。

2つめの補正項は, 計量が時間 τ と空間 y に分離できないことに起因する項で, y_0 の関数 $B(y_0)$ と $\epsilon(\tau)$ の積で表されている。やはり \dot{E}_0 の方を見ると,

$$4\epsilon|1 - 2B(y_0)| > 0, \quad (6.143)$$

となっていことがわかる。これは, 振幅が減衰することを意味している。すなわち, 計量が時間と空間に分離できないことが KK-mode の励起を引き起こしているということ, 近似解析からも理解できた。これが, 前の節で行った数値計算結果の定性的な解釈である。

III Section 6.9 IIII

結論

この章では, RSII に基づく宇宙モデルにおいてブレーンが輻射優勢期であるときの, インフレーション起源の背景重力波の振る舞いを定量的に評価した。そして, その強度が, 4次元の理論で予言される振幅よりも小さくなることがわかった (図 6.29, 6.31)。ま

た, この数値計算の結果を定性的に解釈するために, 5次元の波動方程式 (6.93) を低エネルギー展開して, ブレイン上における近似的な波動方程式 (6.137) を導いた。そして, この近似方程式が数値計算の結果を再現することを確認 (図 6.29), 近似方程式の構造から, 数値計算の結果に見られた強度の過剰な減衰が KK-mode の励起によるものであることがわかった。数値計算で扱った背景重力波のスケールは, フリードマン方程式の ρ^2 の項が効き始めるスケールよりも少し大きい程度 ($\epsilon_* \lesssim 1$) のものであったが, そのスケールでもすでに高次元の効果が見られ, 平坦なスペクトルが右下がりになる兆候がある (図 6.32 の青い矢印)。これは, 背景重力波を使って余剰次元の有無を調べる上で重要な手がかりとなる。

しかし, より定量的なスペクトルの予測をするには, ρ^2 の効果によって強度を増すと考えられる小さいスケールの背景重力波も調べなければならない (図 6.32 の赤い破線矢印)。さらに, 高エネルギーの宇宙で KK-mode が生成されると, 逃げた KK-mode の一部が AdS_5 の曲率によって curvature scattering をおこし, 再びブレインに戻ってくることが [122] では指摘されている。このようなことから, 小さいスケール, すなわち高周波の背景重力波が増強されれば, 地上の干渉計での検出も可能になるかも知れない (4.2.5 節参照)。

$\epsilon_* > 1$ での計算を進めるためには, 本研究で仮定したレギュレーターブレイン上に課す境界条件をより現実的なものにしなければならない。本研究では, 我々の住むブレイン上の Israel 条件を拡張した動く境界のノイマン条件を課したが, それによって $\epsilon_* \sim 1$ ではレギュレーターブレインによる非物理的な反射の効果により, 得られた結果が病的な振る舞いをしていた。これを回避するために, 例えば, 無反射境界条件を課すことが考えられる。また, 数値コードの観点からは, Poincaré Coordinate を用いて $\epsilon_* > 1$ における計算領域を広げることが重要であると考えている。

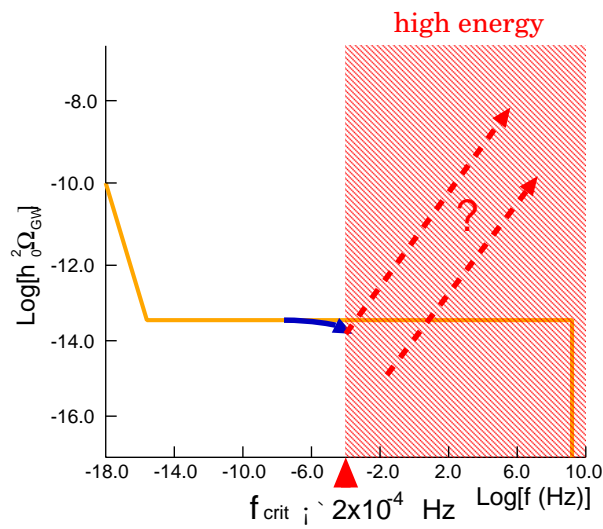


図 6.32: 本研究から考えられる、余剰次元の効果を入れたインフレーション起源の背景重力波のスペクトル。「high energy」と書いてある領域は、余剰次元の大きさを 0.1mm としたときに、その影響を受ける領域を表す。本研究では、そこに差しかかった部分を計算した（青い矢印）。赤い破線の矢印は、 ρ^2 の効果がある場合のスペクトルの変化を表している（6.4 節を参照）。これがどのような位置に来るかを調べるには、より高エネルギーの計算を進める必要がある。

第7章

まとめと展望

本論文では、まず重力波について理論と観測の両面からレビューを行った。理論のレビューとして、アインシュタイン方程式の線形化より重力波の波動方程式を導出し、質量の四重極モーメントの時間変化によって放出される重力波の振幅やエネルギーなどについて述べた。観測のレビューとしては、現在稼働中の大型レーザー干渉計を中心に紹介し、そこから得られるデータの解析方法を述べた。とくに背景重力波の検出には、複数台の検出器の相関をとる必要があり、その際には overlap reduction function という関数で表される、検出器の配置の仕方が重要になってくることを述べた。さらに、典型的な重力波源について、その振幅やイベントレートなどの見積もりを行った。

6章では、本論文の中心に据えられる、高次元宇宙モデルにおける背景重力波の振る舞いについて述べた。その前半では、インフレーションとそこで生成される背景重力波についてレビューし、本研究で使用した Randall-Sundrum モデルを中心に高次元宇宙モデルを概説した。後半では、筆者と樽家氏、小山氏によるオリジナルな研究である、インフレーション起源の背景重力波の振る舞いを定量的に考察した。ランドールとサンドラムによって作られた、反ドジッター空間にブレーンが埋め込まれている5次元宇宙モデルをもとにした、ブレーンがフリードマン宇宙となっているモデルを採用した。そして、そこでの背景重力波の伝搬方程式を導出し、それをスペクトル法 (Tchebychev Collocation 法) による数値計算を行い、背景重力波のスペクトルの定量的な評価を試みた。

余剰次元が存在する場合は、

- フリードマン方程式に補正項が加わることによる宇宙膨張則の変化
- 高次元方向へと伝搬するモードである Kaluza-Klein モードの励起

という点において、4次元の理論と異なっている。これらの効果によって、余剰次元が0.1 mmの大きさの場合、現在の重力波の周波数に直して、0.2mHz より高い周波数帯に何らかの影響が出ると考えられる。インフレーション中の量子ゆらぎによって生成される背景重力波は、ほとんどがブレーン上を伝搬する0-modeであることから、本研究では、ドジッターインフレーション中に生成された0-modeが、あとに続く輻射優勢宇宙でどのように振る舞うかを、波動方程式を直接解くことによって定量的に解析した。

数値計算の結果、Kaluza-Klein モードが励起されることが確認され、それによってブレーン上の背景重力波の振幅が、4次元の理論で予想される振幅より小さくなることが分かった。これは、背景重力波のスペクトルに直すと、0.2mHz より少し低い周波数帯で、すでに余剰次元の効果が出ており、平坦であったスペクトルが右下がりになると考えられる (図6.32)。さらに、この結果を定性的に解釈するため、波動方程式を低エネルギー展開して得られる近似方程式を用いて解析を行った。その結果、得られた近似方程式は数値計算の結果を再現し、輻射優勢宇宙の計量が時間と余剰次元方向に分離できないことが、Kaluza-Klein モードの励起の原因であることがわかった。

本研究は、余剰次元の影響がでるエネルギー領域を計算したわけだが、より詳しいスペクトルを得るためには、さらに高いエネルギーになっているブレイン上での背景重力波の振る舞いを調べなければならない。そのようなブレインでは、先ほど述べた、フリードマン方程式の補正項が効いてくる上に（図 6.32 の赤い矢印）、一度ブレインから逃げた Kaluza-Klein モードが再びブレインに戻ってくる効果（curvature scattering）も出てくることも期待される。もし、余剰次元が実際に存在してこのような効果が背景重力波に現れれば、LISA や advanced LIGO といった次世代の大型重力波干渉計によって、余剰次元が直接的に観測される可能性がある。したがって、このような高エネルギー領域の解析が必要になってくる。しかし、それには座標系や境界条件について、さらに詳細な研究を重ねなければならないと考えている。座標系については、本研究ではブレインを基準に考える Gaussian Normal Coordinate を用いたが、これに対して、バルク（余剰次元が広がっている領域）を基準にする Poincaré chart とよばれる座標系を用いる方法がある。この座標系を用いると、図 7.33 に示したように、初期の宇宙に遡っても計算領域がつぶれないために、数値計算が可能になるかもしれないのである。さらに、Gaussian Normal Coordinate に存在した座標特異点も存在せず、非物理的な影響が少ない境界条件を与えられる可能性がある。一方で、Gaussian Normal Coordinate では静止していたブレインが、Poincaré chart を使用すると動いてしまうという困難に遭遇する（図 7.33 右でブレイン位置が変化していることに注意されたい）。幸い、本研究で使用しているスペクトル法は、かなり複雑な境界条件にも適応できるので、この点に関しては乗り越えられると思っている。今後は、この Poincaré chart を用いた解析に取り組むことで、背景重力波のスペクトルを定量的に評価していきたい。

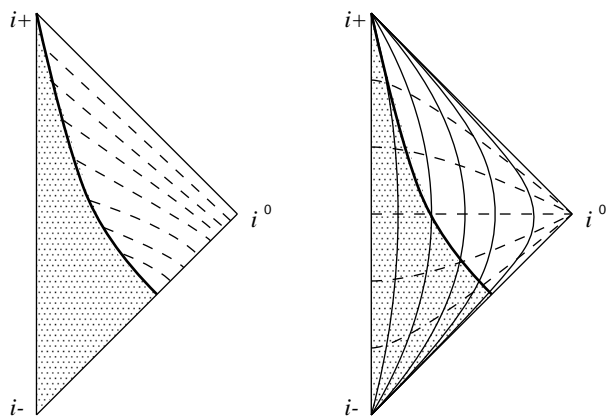


図 7.33: AdS_5 中に配置されたブレインをペンローズ図で表した。太い線がブレインである。左は Gaussian Normal Coordinate を張ったもの、右は Poincaré chart を張ったもの。点線は時間座標が一定の面、実線は空間座標が一定の面を表している。Poincaré chart では、ブレインの空間座標が時々刻々と変化していることがわかる。

謝辞

本修士論文を執筆するにあたり、多大なる時間と労力を費やし細部に渡ってご指導を承りました樽家篤史助手には、感謝の言葉もございません。篤く御礼申し上げます。また、樽家助手は、私に重力波の研究を始めるそもそものきっかけを与えて下さり、その後も研究全般にわたってご支援とご助力を賜りました。重ねて御礼申し上げます。

小山和哉氏は、私に本研究のテーマを与えて下さり、ゼミなどを通じて高次元宇宙論や摂動論に関する様々なご指導を承りました。また、本研究の投稿論文の執筆に際しても、数々のご助言を賜りました。

指導教官である須藤靖助教授には、本研究の数値計算に使用したパソコンをはじめ、私の研究環境を整えて頂きました。

佐藤勝彦教授は、私の研究に興味を持って頂き、研究会などにおいて有益なご助言を賜りました。

姫本宣朗氏は、樽家助手、小山氏と共に、私の修士論文におけるデータ解析、背景重力波の起源に関するゼミを開いて頂き、その場で数多くのご助言、ご指導を賜りました。

同期の仙洞田雄一君とは余剰次元の検証という同じテーマで研究しており、相対論、高次元宇宙論に関する活発な議論ができ、大いに役立ちました。

柴田研（駒場キャンパス）の関口雄一郎君には、相対論に関する基礎的な事柄を多く教えて頂きました。また、同研究室の石井正幾君と共に、数値相対論と重力波に関する有益な情報を頂きました。

大阪市立大学の石原秀樹教授には、研究会において、高次元時空における重力波の伝搬に関して丁寧なご説明を賜り、本論文はもちろん、今後の研究に大いに役立つ情報をご教授下さいました。

京都大学基礎物理学研究所の田中貴浩助教授には、私の研究室に足を運んで頂き、議論の場を持たせて頂きました。

宇宙理論研究室の皆様には、研究生活における様々な場面で手助けをして頂きました。また他にも、研究会などにおいて多くの方々にご助言を頂きました。この場を借りて、改めて御礼申し上げます。

付録 A 数値計算

A.1 スペクトル法

ここでは、本研究で用いたチェビシエフ・コロケーション (Tchebychev Collocation) 法について述べる。詳しくは、[123] を参照されたい。

例として、 $x \in [-1, 1]$ で定義されている $u(t, x)$ の波動方程式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (\text{A.1})$$

を考える。この $u(t, x)$ をチェビシエフ多項式で展開する：

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^N a_n(t) T_n(x). \quad (\text{A.2})$$

チェビシエフ多項式は、

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x) \quad (\text{A.3})$$

と定義され、とくに定義域の両端では、

$$T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n, \quad \frac{dT_n}{dx}(\pm 1) = (\pm 1)^{n+1} n^2, \quad (\text{A.4})$$

となる (図 A.1 左)。この展開によって、式 (A.1) は、

$$\sum_{n=0}^N \frac{\partial^2 a_n}{\partial t^2} = \sum_{n=0}^N a_n(t) \frac{d^2 T_n}{dx^2} \quad (0 \leq n \leq N), \quad (\text{A.5})$$

となる。

ここで、 x を離散化する。通常の差分法では等間隔に差分点をとるが、チェビシエフ多項式の定義 (A.3) から、次のように差分点をとると良いことが分かる：

$$x_k = \cos \frac{k\pi}{N}. \quad (\text{A.6})$$

スペクトル法では、このような差分点をコロケーションポイント (collocation point) と呼ぶ。特に、上の形のコロケーションポイントは、Gauss-Lobatto 型と呼ばれる (図 A.1 右)。このとき、式 (A.2) は、

$$u(t, x_k) = \sum_{n=0}^N a_n(t) \cos \frac{nk\pi}{N} \quad (\text{A.7})$$

となって、係数 $a_n(t)$ を高速フーリエ変換を用いて計算することができる。

次に、式 (A.5) の右辺にあるチェビシェフ多項式の微分を考える。スペクトル法では、この微分を精度良く求めることができる。式 (A.2) を x で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_k) &= \sum_{n=0}^N a_n(t) \frac{dT_n}{dx}(x_k) \\ &\equiv \sum_{n=0}^N a_n^{(1)}(t) T_n(x_k) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

となる。ただし 2 番目の等式で、 u の微分を改めて $T_n(x)$ で展開しなおした。この $a_n^{(1)}(t)$ は、チェビシェフ多項式の関係式：

$$2T_k(x) = \frac{T'_{k+1}(x)}{k+1} - \frac{T'_{k-1}(x)}{k-1} \quad k \geq 1, \quad (\text{A.9})$$

を使うと、

$$\begin{aligned} a_N^{(1)} &= 0, \\ a_{N-1}^{(1)} &= 2Na_N, \\ a_k^{(1)} &= a_{k+2}^{(1)} + 2(k+1)a_{k+1} \quad (1 \leq k \leq N-2), \\ a_0^{(1)} &= \frac{1}{2} (a_2^{(1)} + 2a_1), \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

というように、漸化式で求めることができる [123]。いまの例の場合、2階微分なのでこの作業をもう一度繰り返して行い $a_n^{(2)}$ を得る¹。これで波動方程式 (A.5) は、

$$\frac{\partial^2 a_n}{\partial t^2} = a_n^{(2)}(t) \quad (0 \leq n \leq N-2) \quad (\text{A.11})$$

という、 $a_n(t)$ に関する $N-1$ 元連立常微分方程式になる。これを、次の節で述べる予測子・修正子法で解けばよい。 a_{N-1} と a_N については次で述べる。

方程式に課される境界条件を考える。例として、ディリクレ (Dirichlet) 条件とノイマン (Neumann) 条件を左右の境界に課することにする：

$$u(t, -1) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1) = 0. \quad (\text{A.12})$$

式 (A.4) より、これらは、

$$u(t, -1) = 0 \implies \sum_0^N a_n(t) T_n(-1) = \sum_0^N (-1)^n a_n = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 1) = 0 \implies \sum_0^N a_n(t) T'_n(1) = \sum_0^N n^2 a_n = 0, \quad (\text{A.14})$$

という代数方程式になる。 a_{N-1} と a_N は式 (A.11) で時間発展させなかったため、この境界条件から値を求めればよい。本研究では境界条件が非常に複雑な形になるが、このように簡単な代数方程式に帰着するので都合が良い。

¹ $a_N^{(2)} = a_{N-1}^{(2)} = 0$ となる。

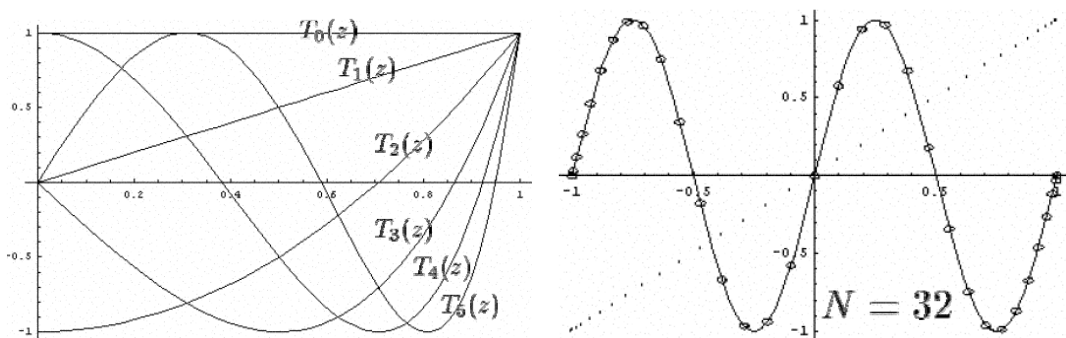


図 A.1: 左 : Tchebychev 多項式的具体例。右 : 直線と \sin 関数上に $32 + 1$ 点のコロケーションポイント描いたもの。 $z = \pm 1$ の付近で密集している様子がわかる。

A.2 予測子・修正子法

1 階の常微分方程式,

$$y' = f(t, y) \quad (\text{A.15})$$

を, 時間刻み h で時間発展させることを考える。 $t_n \equiv t_0 + nh$, $y_n \equiv y(t_n)$ と定義し, $y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-k+1}$ がすでに分かっているものとする。まず, オイラー法などの陽解法を用いて y_{n+1} の値を予測する。そして, その値 y_{n+1}^* を使って新しい $f(t, y)$ の予測値 $f(t_{n+1}, y_{n+1}^*)$ を求める。さらに, その値を使って, 台形則などの陰解法で修正値 y_{n+1} を求める。この修正値と予想値 y_{n+1}^* との差が, 目的の精度に達していなければ, その修正値を用いて右辺を計算し, さらに修正を重ねる。この一連の方法を, 予測子・修正子法という。本研究では, 予測子・修正子法の一般的な方法であるアダムス (Adams) 法を用いた。これは, ニュートンの後退差分による補間多項式を用いた方法である。以下, この方法について述べる [124]。

まずは予測子について述べる。 y_n まで分かっているすると, y_{n+1} の値は式 (A.15) を積分して,

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \quad (\text{A.16})$$

と書ける。右辺の関数 $f(t, y(t))$ の近似多項式 $F(t)$ を考える。この $F(t)$ の求め方はいろいろあるが, ここではラグランジュ補間の特殊形である, ニュートンの後退差分公式を用いる。後退差分は,

$$\begin{cases} \nabla f_n & \equiv f_n - f_{n-1}, \\ \nabla^m f_n & \equiv \nabla^{m-1} f_n - \nabla^{m-1} f_{n-1}, \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

と定義される。ここで, $f_n \equiv f(t_n, y(t_n))$ とした。 k 次のニュートンの後退差分公式は,

$$\begin{aligned} F_k(t) &= F_k(t_n + \beta h) \\ &= f_n + \beta \nabla f_n + \frac{\beta(\beta+1)}{2!} \nabla^2 f_n + \dots + \frac{\beta(\beta+1) \dots (\beta+k-1)}{k!} \nabla^k f_n, \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

となる。式 (A.16) の右辺の被積分関数をこの近似多項式に置き換えると、

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &\simeq y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} F_k(t) dt \\
&= \int_0^1 F_k(t_n + \beta h) h d\beta \\
&= h \int_0^1 \left(f_n + \beta \nabla f_n + \frac{\beta(\beta+1)}{2!} \nabla^2 f_n + \cdots + \frac{\beta(\beta+1) \cdots (\beta+k-1)}{k!} \nabla^k f_n \right) \\
&\equiv h (c_0 f_n + c_1 \nabla f_n + c_2 \nabla^2 f_n + \cdots + c_k \nabla^k f_n),
\end{aligned} \tag{A.19}$$

となる。ここで、

$$c_m \equiv \int_0^1 \frac{\beta(\beta+1) \cdots (\beta+m-1)}{m!} d\beta, \tag{A.20}$$

と定義した。 c_m の具体的な値は、表 A.1 のようになる。式 (A.19) をアダムス・バシフオーズ (Adams-Bashforth) 法という。本研究では、 $k=4$ の公式を用いた。このとき、初めの y_0, y_1, y_2, y_3 は別の方法で求めておかなければならない。本研究では、4 次のルンゲ・クッタ (Runge-Kutta) 法を用いた。

m	0	1	2	3	4	5
c_m	1	1/2	5/12	3/8	251/720	95/288
d_m	1	-1/2	-1/12	-1/24	-19/720	-3/160

表 A.1: 予測子の係数 c_m と修正子の係数 d_m 。

次に修正子について述べる。まずは予測値 y_{n+1}^* を用いて、 $f_{n+1}^* = f(t_{n+1}, y_{n+1}^*)$ を求める。そして、この f_{n+1}^* を含めて f_{n-k+2} までの値を用いて、ニュートンの後退差分公式を使う。今度は、

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_k(t) &= \tilde{F}_k(t_{n+1} + (\beta-1)h) \\
&= f_{n-1}^* + (\beta-1) \nabla f_{n+1}^* + \frac{(\beta-1)\beta}{2!} \nabla^2 f_{n+1}^* + \cdots \\
&\quad + \frac{(\beta-1)\beta(\beta+1) \cdots (\beta+k-2)}{k!} \nabla^k f_{n+1}^*,
\end{aligned} \tag{A.21}$$

となる。これをまた式 (A.16) に代入すると、

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &\simeq y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \tilde{F}_k(t) dt \\
&\equiv h (d_0 f_{n+1}^* + d_1 \nabla f_{n+1}^* + d_2 \nabla^2 f_{n+1}^* + \cdots + d_k \nabla^k f_{n+1}^*),
\end{aligned} \tag{A.22}$$

が得られる。ここで、

$$d_m \equiv \int_0^1 \frac{(\beta-1)\beta(\beta+1) \cdots (\beta+m-2)}{m!} d\beta, \tag{A.23}$$

と定義した。 d_m の具体的な値は、表 A.1 のようになる。式 (A.22) をアダムス・モールトン (Adams-Moulton) 法という。本研究では、これも $k=4$ の公式を用いた。

付録B 5次元宇宙モデル

B.1 アインシュタインテンソル

以下，余剰次元方向の座標は y とし，テンソルの成分としては5と表記する。 k は計量の3次元部分 γ_{ij} に含まれている，フリードマン宇宙の曲率を表す。

計量

$$ds^2 = g_{AB}dx^A dx^B = -n^2(t, y)dt^2 + a^2(t, y)\gamma_{ij}dx^i dx^j + b^2(t, y)dy^2 \quad (\text{B.1})$$

クリストッフェル記号

$$\Gamma^A_{BC} = \frac{1}{2}g^{AD}(g_{BD,C} + g_{CD,B} - g_{BC,D}) \quad (\text{B.2})$$

$A = 0$:

$$\Gamma^0_{00} = \frac{\dot{n}}{n}, \quad \Gamma^0_{0i} = 0, \quad \Gamma^0_{ij} = \frac{a\dot{a}}{n^2}\gamma_{ij}, \quad (\text{B.3})$$

$$\Gamma^0_{05} = \frac{n'}{n}, \quad \Gamma^0_{i5} = 0, \quad \Gamma^0_{55} = \frac{b\dot{b}}{n^2}. \quad (\text{B.4})$$

$A = i$:

$$\Gamma^i_{00} = 0, \quad \Gamma^i_{0j} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^i_j, \quad \Gamma^i_{jk} = \overset{(3)}{\Gamma^i}_{jk}, \quad (\text{B.5})$$

$$\Gamma^i_{05} = 0, \quad \Gamma^i_{j5} = \frac{a'}{a}\delta^i_j, \quad \Gamma^i_{55} = 0. \quad (\text{B.6})$$

$A = 5$:

$$\Gamma^5_{00} = \frac{nn'}{b^2}, \quad \Gamma^5_{0j} = 0, \quad \Gamma^5_{ij} = -\frac{aa'}{b^2}\gamma_{ij}, \quad (\text{B.7})$$

$$\Gamma^5_{05} = \frac{\dot{b}}{b}, \quad \Gamma^5_{i5} = 0, \quad \Gamma^5_{55} = \frac{b'}{b}. \quad (\text{B.8})$$

ただし，

$$\overset{(3)}{\Gamma^i}_{jk} \equiv \frac{1}{2}\gamma^{i\ell}(\gamma_{j\ell,k} + \gamma_{k\ell,j} - \gamma_{jk,\ell}), \quad (\text{B.9})$$

である。

リッチテンソル

$$R_{AB} = \Gamma^C_{AB,C} - \Gamma^C_{AC,B} + \Gamma^C_{AB}\Gamma^E_{CE} - \Gamma^E_{AC}\Gamma^C_{BE} \quad (\text{B.10})$$

$$R_{00} = \frac{\dot{n}}{n} \left(3\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \right) - 3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{n^2}{b^2} \left\{ \frac{n'}{n} \left(3\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b} \right) + \frac{n''}{n} \right\} + 6k\frac{n^2}{a^2} \quad (\text{B.11})$$

$$R_{0i} = 0 \quad (\text{B.12})$$

$$R_{05} = 3 \left(\frac{n'\dot{a}}{na} + \frac{a'\dot{b}}{ab} - \frac{\dot{a}'}{a} \right) \quad (\text{B.13})$$

$$R_{ij} = \left[\frac{a^2}{b^2} \left\{ \frac{a'}{a} \left(-2\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} - \frac{n'}{n} \right) - \frac{a''}{a} \right\} \right. \quad (\text{B.14})$$

$$\left. + \frac{a^2}{n^2} \left\{ \frac{\dot{a}}{a} \left(2\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} - \frac{\dot{n}}{n} \right) + \frac{\ddot{a}}{a} \right\} + 2k \right] \gamma_{ij} \quad (\text{B.15})$$

$$R_{i5} = 0 \quad (\text{B.16})$$

$$R_{55} = \frac{b^2}{n^2} \left\{ \frac{\dot{b}}{b} \left(3\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{n}}{n} \right) + \frac{\ddot{b}}{b} \right\} + \left\{ \frac{b'}{b} \left(3\frac{a'}{a} + \frac{n'}{n} \right) - 3\frac{a''}{a} - \frac{n''}{n} \right\} \quad (\text{B.17})$$

γ_{ij} から作られるクリストッフエル記号 $\Gamma^{(3)i}_{jk}$ の微分などが気になるかも知れないが、この量から作られるリーマンテンソルを計算すると、

$$R^{(3)i}_{jkm} = k(\delta^i_k \gamma_{jm} - \delta^i_m \gamma_{jk}), \quad (\text{B.18})$$

と γ_{ij} で書くことができるので、リッチテンソルにも $\gamma_{ij,k}$ のような微分量は入ってこない。

スカラー曲率

$$R = 2 \left[\frac{1}{n^2} \left\{ 3\frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} - \frac{\dot{n}}{n} \right) - \frac{\dot{b}\dot{n}}{bn} + 3\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} \right\} \right. \quad (\text{B.19})$$

$$\left. - \frac{1}{b^2} \left\{ 3\frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b} + \frac{n'}{n} \right) - \frac{b'n'}{bn} + 3\frac{a''}{a} + \frac{n''}{n} \right\} + 3\frac{k}{a^2} \right]$$

アインシュタインテンソル

$$G_{AB} = R_{AB} - \frac{1}{2}g_{AB}R, \quad (\text{B.20})$$

$$\begin{aligned}
G_{00} &= 3 \left\{ \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \right) - \frac{n^2}{b^2} \left(\frac{a''}{a} + \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b} \right) \right) + k \frac{n^2}{a^2} \right\} \\
G_{ij} &= \frac{a^2}{b^2} \gamma_{ij} \left\{ \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} + 2 \frac{n'}{n} \right) - \frac{b'}{b} \left(\frac{n'}{n} + 2 \frac{a'}{a} \right) + 2 \frac{a''}{a} + \frac{n''}{n} \right\} \\
&\quad + \frac{a^2}{n^2} \gamma_{ij} \left\{ \frac{\dot{a}}{a} \left(-\frac{\dot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{n}}{n} \right) - 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \left(-2 \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{n}}{n} \right) - \frac{\ddot{b}}{b} \right\} - k \gamma_{ij} \\
G_{05} &= 3 \left(\frac{n' \dot{a}}{n a} + \frac{a' \dot{b}}{a b} - \frac{\dot{a}'}{a} \right) \\
G_{55} &= 3 \left\{ \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} + \frac{n'}{n} \right) - \frac{b^2}{n^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{n}}{n} \right) + \frac{\ddot{a}}{a} \right) - k \frac{b^2}{a^2} \right\}
\end{aligned}$$

アインシュタイン方程式は,

$$G_{AB} \equiv R_{AB} - \frac{1}{2} g_{AB} R = -\Lambda_5 g_{AB} + \kappa_5^2 T_{AB}, \quad (\text{B.21})$$

エネルギー運動量テンソルは,

$$T^A_B = T^A_B|_{\text{brane}} \equiv S^A_B \frac{\delta(y)}{b} = \text{diag}(-\rho_b, p_b, p_b, p_b, 0) \frac{\delta(y)}{b}, \quad (\text{B.22})$$

である。以下では, $b = 1$ とする。

B.2 Israel 条件

ブレイン上にエネルギーが存在すると, ブレインの外部曲率 K_{AB} に跳びができる。それを式に書くと,

$$[K^A_B - K \delta^A_B] = -\kappa_5^2 S^A_B, \quad (\text{B.23})$$

となる [125]。これを Israel 条件という。ここで $[\dots]$ は,

$$[A] \equiv A(y = +0) - A(y = -0), \quad (\text{B.24})$$

を表している。この Israel 条件は作用から導くことができるのだが [126], ここではもう少し簡単な議論からワープファクターとラプス関数に対する Israel 条件を導く。

ワープファクター $a(t, y)$ とラプス関数 $n(t, y)$ は, ブレイン上で連続でなければならない:

$$a(t, +0) = a(t, -0), \quad n(t, +0) = n(t, -0). \quad (\text{B.25})$$

しかし, アインシュタイン方程式 (B.21) を見ると, 右辺にデルタ関数が入っていることから, ブレインの両側で 1 階微分の値が跳び, 2 階微分はデルタ関数的に振る舞う。そこで, a, n の 2 階微分を, デルタ関数的な部分とそうでない部分とに分ける:

$$a'' = \widehat{a}'' + [a'] \delta(y), \quad n'' = \widehat{n}'' + [n'] \delta(y). \quad (\text{B.26})$$

ここで、 \widehat{a}'' と \widehat{n}'' はデルタ関数的な振る舞いをする a'' , n'' からデルタ関数を抜き去った部分として定義する。これらをアインシュタイン方程式 (B.21) に代入し、両辺のデルタ関数の係数を比較すると、

$$\frac{[n']}{n} = \frac{\kappa_5^2}{3}(2\rho_b + 3p_b), \quad (\text{B.27})$$

$$\frac{[a']}{a} = -\frac{\kappa_5^2}{3}\rho_b, \quad (\text{B.28})$$

が得られる。ここで \mathbb{Z}_2 対称性を考慮すると、

$$a(t, y) = a(t, -y), \quad n(t, y) = n(t, -y), \quad (\text{B.29})$$

であるから、これらを y で微分すると、

$$a'(t, y) = -a'(t, -y), \quad n'(t, y) = -n'(t, -y), \quad (\text{B.30})$$

となる。よって、式 (B.27)(B.28) は、

$$\left(\frac{n'}{n}\right)_{y=+0} = \frac{\kappa_5^2}{6}(2\rho_b + 3p_b), \quad (\text{B.31})$$

$$\left(\frac{a'}{a}\right)_{y=+0} = -\frac{\kappa_5^2}{6}\rho_b. \quad (\text{B.32})$$

となる。

この Israel 条件を式 (6.80) :

$$a^2(t, y) = A(t) \sinh(y/\ell) + B(t) \cosh(y/\ell) - \frac{\ell^2}{2} \dot{a}_0(t)^2, \quad (\text{B.33})$$

に対して使ってみよう。まず、 $a(t, 0) = a_0(t)$ より、

$$B(t) = a_0^2(t)(1 + 2\ell^2 H^2). \quad (\text{B.34})$$

そして、Israel 条件 (B.32) より、

$$A(t) = 2a_0 a'(t, +0) = -\frac{\kappa_5^2}{3} a_0^2(t) \ell \rho_b = -a_0^2(t) \frac{\rho_b}{\lambda} = -a_0^2(t) \left(1 + \frac{\rho}{\lambda}\right) \quad (\text{B.35})$$

ここで、 $\kappa_5^2 = 3/\ell\lambda$ を使った。以上より、

$$a^2(t, y) = a_0^2(t) \left(-\left(1 + \frac{\rho}{\lambda}\right) \sinh(y/\ell) + \left(1 + \frac{\ell^2 H^2}{2}\right) \cosh(y/\ell) - \frac{\ell^2 H^2}{2} \right) \quad (\text{B.36})$$

となる。

この Israel 条件は、計量の摂動に対しても課される。とくに重力波 (テンソルモード) E_{ij} の場合、式 (B.23) の左辺は $\delta K^i_j = E^i_{j,5}/2$ となり、右辺からはトランスバース・トレースレスである非等方ストレス $\delta S^i_j = \delta \pi^i_j$ のみが効いてくる。よって、

$$E^i_{j,5}|_{y=0} = \delta \pi^i_j, \quad (\text{B.37})$$

となる [108]。多くの場合、ブレイン上の非等方ストレス π^i_j は無視されるので、

$$E^i_{j,5}|_{y=0} = 0, \quad (\text{B.38})$$

となる [115]。

B.3 ブレイン上のフリードマン方程式

アインシュタイン方程式 (B.21) の 00 成分と 55 成分に注目すると,

$$G^0_0 = -\Lambda_5 - \kappa_5^2 \rho_b(t) \delta(y), \quad (\text{B.39})$$

$$G^5_5 = -\Lambda_5, \quad (\text{B.40})$$

であり, $y > 0$ の部分についてこれらを変形すると,

$$F(t, y) \equiv (aa')^2 + \frac{\Lambda_5}{6} a^4 - \dot{a}_0^2 a^2 - ka^2, \quad (\text{B.41})$$

と定義して,

$$F' = 0, \quad \dot{F} = 0 \quad (\text{B.42})$$

となることがわかる。これらは同時に満されなくてはならないので,

$$F = -C = 0 \implies \dot{a}_0^2 a^2 = \frac{a'^2}{a^2} + \frac{\Lambda_5}{6} + \frac{C}{a^4} - \frac{k}{a^2}, \quad (\text{B.43})$$

となって, C は t にも y にも依らない定数でなければならない。Israel 条件 (B.32) を使って, この式を $y \rightarrow 0$ で評価すると, ブレイン上でのフリードマン方程式:

$$H^2 = \frac{\Lambda_5}{6} + \frac{\kappa_5^4}{36} \rho_b^2 + \frac{C}{a_0^4} - \frac{k}{a_0^2} \quad (\text{B.44})$$

$$= \frac{\Lambda_4}{3} + \frac{\kappa_4^2}{3} \rho \left(1 + \frac{\rho}{2\lambda}\right) + \frac{C}{a_0^4} - \frac{k}{a_0^2}, \quad (\text{B.45})$$

が得られる。ただし,

$$\kappa_4^2 \equiv \frac{\kappa_5^4 \lambda}{6}, \quad (\text{B.46})$$

$$\Lambda_4 \equiv \frac{1}{2} \left(\Lambda_5 + \frac{\kappa_5^4 \lambda^2}{6} \right), \quad (\text{B.47})$$

と定義した。

4次元の場合と比較すると, C に比例する項と ρ^2 に比例する項が新たに加わっている。 C に比例する項は輻射のように振る舞うことから暗黒放射 (dark radiation) と呼ばれており, バルク中にブラックホールを考えると, この C はそのブラックホールの質量に対応する。 ρ^2 に比例する項は, 初期の宇宙において宇宙膨張則を変化させる。例えば, 輻射優勢の場合, 4次元では $a_0 \propto t^{1/2}$ であるが, いまの場合,

$$H^2 \propto \rho^2 \implies a_0 \propto t^{1/4}, \quad (\text{B.48})$$

となることがわかる。

また本論文では, 暗黒放射 C と 4次元の宇宙定数 Λ_4 がなく, さらに平坦な宇宙 $k = 0$ を仮定しているので [115], フリードマン方程式は,

$$H^2 = \frac{\kappa_4^2}{3} \rho \left(1 + \frac{\rho}{2\lambda}\right), \quad (\text{B.49})$$

となる。

B.4 ブレイン上のエネルギー保存則

エネルギー運動量テンソルは、式 (6.67) より、

$$T^A_B = S^A_B \delta(y) = \text{diag}(-\rho_b, p_b, p_b, p_b, 0) \delta(y). \quad (\text{B.50})$$

エネルギー保存則は $\nabla_A T^A_B = 0$ であるから、

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_A T^A_B = T^A_{B,A} + \Gamma^A_{AC} T^C_B - \Gamma^C_{AB} T^A_C \\ &= (\delta(y) S^A_B)_{,A} + (\Gamma^A_{AC} S^C_B - \Gamma^C_{AB} S^A_C) \delta(y), \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

いまの場合、 $B = 0$ のみに意味があつて、

$$\nabla_A T^A_0 = -\delta(y) \dot{\rho}_b - \delta(y) \left(3 \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{n}}{n} \right) \rho_b - \delta(y) \left(3 \frac{\dot{a}}{a} p_b - \frac{\dot{n}}{n} \rho_b \right) = 0, \quad (\text{B.52})$$

となる。これは $y = 0$ でしか値を持たないので、結局、

$$\dot{\rho}_b + 3 \frac{\dot{a}_0}{a_0} (\rho_b + p_b) = 0, \quad (\text{B.53})$$

となる。

B.5 波動方程式

計量を、

$$ds^2 = \tilde{g}_{AB} dx^A dx^B, \quad (\text{B.54})$$

$$\tilde{g}_{AB} = g_{AB} + E_{AB}, \quad (\text{B.55})$$

$$g_{AB} = \text{diag}(-n^2, a^2, a^2, a^2, 1), \quad g^{AB} = \text{diag}\left(-\frac{1}{n^2}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^2}, 1\right). \quad (\text{B.56})$$

とにおいて波動方程式を書き下し、後で $E_{AB} \rightarrow a^2 E_{AB}$ という変換を行えば、6.5.1 節で求めたい波動方程式が得られる。

波動方程式は、式 (2.56) より、

$$E_{ij}{}^{|A}{}_{|A} + 2R_{iAjB}^{(0)} E^{AB} = 0 \quad (\text{B.57})$$

である。ここで、 $|$ は背景時空の計量 g_{AB} による共変微分を表しており、TT ゲージを採用することで \bar{E}_{ij} は E_{ij} に置き換わる。また、いまは E の 1 次までしかとらないので、 $E_{AB|C} = E_{AB,C}$ であることを覚えておく。

まずは E の 2 階微分を計算する。

$$S_{ABC} \equiv E_{AB|C} = E_{AB,C} - \Gamma^M_{AC} E_{MB} - \Gamma^M_{BC} E_{MA}, \quad (\text{B.58})$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
E_{ij|A}{}^{|A} &= g^{AB} S_{ijA|B} \\
&= -\frac{1}{n^2} \left\{ S_{ij0,0} - \left(\frac{2\dot{a}}{a} + \frac{\dot{n}}{n} \right) S_{ij0} - nn' S_{ij5} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{a^2} \left\{ \delta^{kl} S_{ijk,\ell} - \frac{a\dot{a}}{n^2} (S_{0ji} + S_{0ij} + 3S_{ij0}) + aa' (S_{5ji} + S_{5ij} + 3S_{ij5}) \right\} \\
&\quad + \left(S_{ij5,5} - \frac{2a'}{a} S_{ij5} \right)
\end{aligned} \tag{B.59}$$

となる。ただし、定義から $S_{ABC} = S_{BAC}$ となることを用いた。ここで必要なのは,

$$S_{ij0}, \quad S_{0ij}, \quad S_{ij5}, \quad S_{5ij}, \quad S_{ijk} \tag{B.60}$$

の5種類である。これらは定義から直接計算することで,

$$S_{ij0} = E_{ij,0} - \frac{2\dot{a}}{a} E_{ij}, \quad S_{0ij} = -\frac{\dot{a}}{a} E_{ij}, \tag{B.61}$$

$$S_{ij5} = E_{ij,5} - \frac{2a'}{a} E_{ij}, \quad S_{5ij} = -\frac{a'}{a} E_{ij}, \tag{B.62}$$

$$S_{ijk} = E_{ij,k}, \tag{B.63}$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned}
E_{ij|A}{}^{|A} &= -\frac{1}{n^2} \ddot{E}_{ij} + \frac{1}{n^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{n}}{n} \right) \dot{E}_{ij} + \left(\frac{n'}{n} - \frac{a'}{a} \right) E'_{ij} + E''_{ij} \\
&\quad + \frac{2}{n^2} \left\{ \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{n}}{n} \right) - \frac{n^2 a'}{a} \left(\frac{a'}{a} + \frac{n'}{n} \right) - \frac{n^2 a''}{a} \right\} E_{ij} + \frac{1}{a^2} \delta^{kl} E_{ij,kl},
\end{aligned} \tag{B.64}$$

が得られる。

次に、背景時空のリーマンテンソルを計算する。

$$2R_{iAjB}^{(0)} E^{AB} = \frac{2}{a^2} R^{(0)p}{}_{mjn} E_{kl} \delta^{mk} \delta^{nl} \delta_{pi}, \tag{B.65}$$

と変形できるので、 $R^{(0)p}{}_{mjn}$ を計算すればよい。

$$\begin{aligned}
R^{(0)p}{}_{mjn} &= \Gamma^{(0)p}{}_{Aj} \Gamma^{(0)A}{}_{mn} - \Gamma^{(0)p}{}_{An} \Gamma^{(0)A}{}_{mj} \\
&= \left(\frac{\dot{a}^2}{n^2} - a'^2 \right) (\delta^p{}_j \delta_{mn} - \delta^p{}_n \delta_{mj}),
\end{aligned} \tag{B.66}$$

となるから、結局,

$$2R_{iAjB}^{(0)} E^{AB} = -\frac{2}{a^2} \left(\frac{\dot{a}^2}{n^2} - a'^2 \right) E_{ij}, \tag{B.67}$$

となる。ここで、 E_{ij} がトレースレス ($E^i_i = 0$) であることを使った。以上より、式 (B.57) は、

$$\begin{aligned} E_{ij|A}{}^A + 2R^{(0)}{}_{iAjB}E^{AB} \\ = -\frac{1}{n^2}\ddot{E}_{ij} + \frac{1}{n^2}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{n}}{n}\right)\dot{E}_{ij} + \left(\frac{n'}{n} - \frac{a'}{a}\right)E'_{ij} + E''_{ij} \\ + \frac{2}{n^2}\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}\dot{n}}{an} - \frac{nn'a'}{a} - \frac{n^2a''}{a}\right)E_{ij} + \frac{1}{a^2}\delta^{k\ell}E_{ij,k\ell}, \end{aligned} \quad (\text{B.68})$$

となる。ここで、 $E_{ij} \rightarrow a^2(t, y)E_{ij}$ という変換を行うと、

$$\ddot{E}_{ij} + \left(\frac{3\dot{a}}{a} - \frac{\dot{n}}{n}\right)\dot{E}_{ij} - \frac{n^2}{a^2}\delta^{k\ell}E_{ij,k\ell} - E''_{ij} - \left(\frac{3a'}{a} + \frac{n'}{n}\right)E'_{ij} = 0, \quad (\text{B.69})$$

が得られる。

最後にフリーエ変換 (6.92) を施すと、求めたい波動方程式 (6.93) が得られる。

B.6 Gradient Expansion

波動方程式 (6.93) :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \left(\frac{3\dot{a}}{a} - \frac{\dot{n}}{n}\right)\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{n^2}{a^2}k^2 E - n^2\left(\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \left(\frac{3a'}{a} + \frac{n'}{n}\right)\frac{\partial E}{\partial y}\right) = 0, \quad (\text{B.70})$$

の Gradient Expansion を考える。境界条件は、

$$\left.\frac{\partial E}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial E}{\partial y}\right|_{y=y_0} = 0, \quad (\text{B.71})$$

とする。ワーpfactor とラプス関数は、

$$a(t, y) = a_0(t) \left\{ \cosh(\mu y) - \left(1 + \frac{\rho(t)}{\lambda}\right) \sinh(\mu|y|) \right\}, \quad (\text{B.72})$$

$$n(t, y) = \cosh(\mu y) + \left(\frac{2\rho(t) + 3p(t)}{\lambda} - 1\right) \sinh(\mu|y|), \quad (\text{B.73})$$

となる。振幅 $E(t, y)$ 、ブレイン上のスケールファクター $a_0(t)$ 、ハッブルパラメーター $H(t)$ は、それぞれ、

$$E(t, y) = E_0(t) + E_1(t, y) + E_2(t, y) + \dots, \quad (\text{B.74})$$

$$a_0(t) = e^{\alpha(t)} = e^{\alpha_0(t)}(1 + \alpha_1(t) + \dots), \quad (\text{B.75})$$

$$H(t) = H_0(t) + H_1(t) + \dots, \quad (\text{B.76})$$

と展開する。ここで、 $E_k(t, y)$, $\alpha_k(t)$, $H_k(t)$ はそれぞれ $\mathcal{O}(\epsilon^k)$ の量であることを表してる。さらに、時間微分 $\partial/\partial t$ はハッブルパラメーター H_0 、空間微分 $\partial/\partial y$ はバルクのスケール μ のオーダーになっているので、微分の間にも、

$$\frac{\partial/\partial t}{\partial/\partial y} \sim \frac{H}{\mu} \sim \mathcal{O}(\epsilon^{1/2}), \quad (\text{B.77})$$

という階層性がある [120][121]。

ϵ の 1 次のオーダーでは, 式 (B.70) は,

$$E_1'' - 4\mu E_1' = e^{2\mu y} \left\{ \ddot{E}_0 + 3H\dot{E}_0 + \left(\frac{k}{e^{\alpha_0}} \right)^2 E_0 \right\}, \quad (\text{B.78})$$

となる。これを y で積分して,

$$E_1' = \mu (X(t)e^{2\mu y} + Y(t)e^{4\mu y}), \quad (\text{B.79})$$

を得る。ここで, $X(t)$ は,

$$X(t) = \frac{1}{2\mu^2} \square_4 E_0 \equiv -\frac{1}{2\mu^2} \left(\ddot{E}_0 + 3H\dot{E}_0 + \left(\frac{k}{e^{\alpha_0}} \right)^2 E_0 \right), \quad (\text{B.80})$$

である。 $Y(t) = 0$ と仮定し, 境界条件 (B.71) を満す E_1 を求めると,

$$E_1 = \frac{1}{2} X(t) (e^{2\mu y} - 1), \quad (\text{B.81})$$

となる。

次に, 2 次のオーダーでは,

$$\begin{aligned} E_2'' - 4\mu E_2' = e^{2\mu y} & \left\{ \ddot{E}_1 + 3H\dot{E}_1 + \left(\frac{k}{e^{\alpha_0}} \right)^2 E_1 \right. \\ & + \left(3\frac{H_1}{H_0} + 3(5+3w)(1+w)\epsilon e^{\mu y} \sinh(\mu y) \right) H_0 \dot{E}_0 \\ & - (2\alpha_1 - 6(1+w)\epsilon e^{\mu y} \sinh(\mu y)) \left(\frac{k}{e^{\alpha_0}} \right)^2 E_0 \\ & - 2(2+3w)\epsilon e^{-\mu y} \sinh(\mu y) E_1'' \\ & \left. - \mu \left((3w-1) - 8(2+3w)e^{-\mu y} \sinh(\mu y) \right) \epsilon E_1' \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.82})$$

となる。ここで 1 次のオーダーの解 (B.81) を使うと,

$$E_2'' - 4\mu E_2' = \mu^2 Z(t)e^{4\mu y} - 2\mu^2 W(t)e^{2\mu y}, \quad (\text{B.83})$$

$$Z(t) \equiv \frac{1}{\mu^2} \left\{ -\frac{1}{2} \square_4 X + \frac{3}{2} (5+3w)(1+w)\epsilon H_0 \dot{E}_0 + 3(1+w)\epsilon \left(\frac{k}{e^{\alpha_0}} \right) E_0 \right. \quad (\text{B.84})$$

$$\left. + (3w+5)\epsilon \mu^2 X \right\}, \quad (\text{B.85})$$

$$W(t) \equiv \frac{1}{2\mu^2} \left[\frac{1}{2} \square_4 X + \left\{ 3\frac{H_1}{H_0} - \frac{3}{2} (5+3w)(1+w)\epsilon \right\} H_0 \dot{E}_0 \right. \quad (\text{B.86})$$

$$\left. - \{ 2\alpha_1 + 3(1+w)\epsilon \} \left(\frac{k}{e^{\alpha_0}} \right)^2 E_0 - 2(2+3w)\epsilon \mu^2 X \right], \quad (\text{B.87})$$

となる。これを解くと、まず、

$$E_2' = \mu (Z(t)\mu y e^{4\mu y} + W(t)e^{2\mu y} + F(t)e^{4\mu y}), \quad (\text{B.88})$$

が得られる。今度は、 $E_1 + E_2$ に境界条件 (B.71) を課すと、

$$\left. \frac{\partial}{\partial y} (E_1 + E_2) \right|_{y=0} = 0 \implies X(t) + W(t) + F(t) = 0, \quad (\text{B.89})$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial y} (E_1 + E_2) \right|_{y=y_0} = 0 \implies X(t) + W(t) + Z(t)\mu y_0 e^{2\mu y_0} + F(t)e^{2\mu y_0} = 0, \quad (\text{B.90})$$

となる。これらの式から $F(t)$ を求めると、

$$F(t) = -Z(t)B(y_0) \equiv -Z(t) \frac{\mu y_0}{1 - e^{-2\mu y_0}}, \quad (\text{B.91})$$

となる。これで、 $X(t)$, $W(t)$, $F(t)$ がすべて E_0 で書き下すことができるようになった。近似方程式を書き下す前に、 H_1 , α_1 などを具体的に導いておく。 ϵ と a_0 は式 (6.121)(6.122) より、

$$\epsilon(\tau) = \epsilon_*(\tau^2 + 2c\tau - 2c)^{-1} \approx \frac{\epsilon_*}{\tau^2} \quad (\text{B.92})$$

$$a_0(\tau) = a_*(\tau^2 + 2c\tau - 2c)^{\frac{1}{3(1+w)}} \quad (\text{B.93})$$

$$\approx \underbrace{a_* \tau^{2/3(1+w)}}_{a_0^{(0)}} - \underbrace{\frac{a_* \epsilon_*}{6(1+w)} \tau^{-(4+6w)/(3+3w)} (1-\tau)}_{a_0^{(1)}}, \quad (\text{B.94})$$

$a_0^{(1)}$ を α_1 に書き直すと、

$$\alpha_1 = \frac{a_0^{(1)}}{a_0^{(0)}} = -\frac{\epsilon_*}{6(1+w)} \tau^{-2} (1-\tau), \quad (\text{B.95})$$

となる。次に、 H_0 と H_1 は、フリードマン方程式 (B.49) より、

$$H \approx \underbrace{\frac{2}{3(1+w)t_*\tau}}_{H_0} + \underbrace{\frac{\epsilon_*}{6(1+w)t_*} \tau^{-3} (2-\tau)}_{H_1}, \quad (\text{B.96})$$

となる。

以上より、求めたい方程式は式 (B.89) より、

$$\begin{aligned} & X(t) + W(t) + F(t) = 0 \quad (\text{B.97}) \\ \iff & \square_\tau E_0 = \frac{9(1+w)^2 \epsilon_*}{8} (1 - 2B(y_0)) \square_\tau^2 E_0 \\ & - \epsilon \{ (2 + 3w) - (3w + 5)B(y_0) \} \square_\tau E_0 \\ & + \left\{ 3 \frac{H_1}{H_0} - \frac{3}{2} (5 + 3w)(1+w)\epsilon (1 - 2B(y_0)) \right\} H_0 \dot{E}_0 \\ & + \{ -2\alpha_1 - 3(1+w)\epsilon (1 - 2B(y_0)) \} \left(\frac{k}{e^{\alpha_0}} \right)^2 E_0. \end{aligned} \quad (\text{B.98})$$

となる。式 (6.137) は、 $w = 1/3$ としたものである。

リファレンス

- [1] A. Einstein. Die grundlauge det algemeiner relativistät theorie. *Ann. der Phys.*, **49** 769, (1916).
- [2] L. Landau and E. Lifschitz. 「場の古典論」第6版. 東京図書, 1978.
- [3] R. A. Isaacson. Gravitational radiation in the limit of high frequency i. *Phys. Rev.*, **166** 1263, (1968).
- [4] R. A. Isaacson. Gravitational radiation in the limit of high frequency ii. *Phys. Rev.*, **166** 1272, (1968).
- [5] S. DeWitt and R. W. Brehme. Radiative damping in a gravitational field. *Ann. Phys.*, **9** 220, (1960). not read yet.
- [6] 佐々木節. 「一般相対論」. 産業図書, (1996).
- [7] P. C. Peters. Gravitational radiation and the motion of two point masses. *Phys. Rev.*, **B136** 1224, (1964).
- [8] K. S. Thorne. Multipole expansions of gravitational radiation. *Rev. Mod. Phys.*, **52** 299, (1980).
- [9] P. C. Peters and J. Mathews. Gravitational radiation from point mass in a keplerian orbit. *Phys. Rev.*, **131** 435, (1963).
- [10] 中村卓史, 三尾典克, 大橋正健. 重力波をとらえる. 京都大学学術出版会, (1998).
- [11] R. A. Hulse and J. H. Taylor. Discovery of a pulsar in a binary system. *Astrophys. J. Lett.*, **195** 51, (1975).
- [12] S. M. Merkowitz and W. W. Johnson. Spherical gravitational wave antennas and the truncated icosahedral arrangement. *Phys. Rev.*, **D51** 2546, (1995).
- [13] AURIGA[<http://www.auriga.inl.infn.it/>], ALLEGRO[<http://gravity.phys.lsu.edu/>], EXPLORER[<http://www.roma1.infn.it/rog/rogmain.html>], NAUTILUS[<http://www.roma1.infn.it/rog/rogmain.html>], NIOBE[<http://www.gravity.pd.uwa.edu.au>], MiniGRAIL[<http://www.minigrail.nl/>],.

-
- [14] L. Ju, D. G. Blair, and C. Zhao. Detection of gravitational waves. *Rep. Prog. Phys.*, **63** 1317, (2000).
- [15] W. Winkler. A Michelson interferometer using delay line. In *The Detection of Gravitational Waves*. Cambridge, 1991.
- [16] R. W. P. Drever, et al., (1983). Proc. 9th Int. Conf. on General Relativity and Gravitation.
- [17] B. Abbott, et al. Setting upper limits on the strength of periodic gravitational waves using the first science data from the GEO600 and LIGO detectors. (2003). [gr-qc/0308050].
- [18] B. Abbott, et al. Detector description and performance for the first coincidence observations between LIGO and GEO. (2003). [gr-qc/0308043].
- [19] N. Seto, S. Kawamura, and T. Nakamura. Possibility of direct measurement of the acceleration of the universe using 0.1hz band laser interferometer gravitational wave antenna in space. *Phys. Rev. Lett.*, **87** 221103, (2001).
- [20] K. Kuroda, et al. Large-scale cryogenic gravitational wave telescope. *Int. J. Mod. Phys.*, **D8** 557, (1999).
- [21] A. Lazzarini. Strain sensitivity for the llo 4km interferometer. G030014-00-E, <http://www.ligo.caltech.edu/>.
- [22] D. Sigg. Gravitational waves. P980007-00-D, <http://www.ligo.caltech.edu/>.
- [23] N. Cornish and S. L. Larson. Space missions to detect the cosmic gravitational-wave background. *Class. Quant. Grav.*, **18** 3473, (2001).
- [24] P. R. Saulson. *Fundamentals of Interferometric Gravitational Wave Detectors*. World Scientific, (1994).
- [25] K. Tsubono and TAMA collaborators. TAMA プロジェクト研究報告書 2002. (2002).
- [26] A. Freise and GEO600 term. Dual recycling for GEO600. (2003). [gr-qc/0306053].
- [27] H. J. Kimble, et al. Conversion of conventional gravitational-wave interferometers into quantum nondemolition interferometers by modifying their input and/or output optics. *Phys. Rev.*, **65** 022002, (2001).
- [28] LISA system and technology study report, (2000).
- [29] N. Cornish and L. J. Rubbo. LISA response function. *Phys. Rev.*, **D67** 022001, (2003).

- [30] K. S. Thorne. Gravitational waves. In *300 Years of Gravitation*. Cambridge, 1987.
- [31] L. P. Grishchuk, V. M. Lipunov, K. A. Postnov, M. E. Prokhorov, and B. S. Sathyaprakash. Gravitational wave astronomy: in anticipation of first sources to be detected. *Phys. Usp.*, **44** 1, (2001).
- [32] B. Allen and J. D. Romano. Detecting a stochastic background of gravitational radiation: Signal processing strategies and sensitivities. *Phys. Rev.*, **D59** 102001, (1999).
- [33] N. Wiener. *The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications*. Wiley, (1949).
- [34] B. J. Owen. Search templates for gravitational waves from inspiraling binaries: Choice of template spacing. *Phys. Rev.*, **D53** 6759, (1996).
- [35] C. Cutler and K. S. Thorne. An overview of gravitational-wave sources. (2002). [gr-qc/0204090].
- [36] M. Maggiore. Gravitational wave experiments and early universe cosmology. *Phys. Rep.*, **331** 283, (2000).
- [37] P. F. Michelson. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **227** 933, (1987).
- [38] É. É. Flanagan. Sensitivity of the laser interferometer gravitational wave observatory to a stochastic background, and its dependence on the detector orientations. *Phys. Rev.*, **D48** 2389, (1993).
- [39] N. Christensen. Measuring the stochastic gravitational-radiation background with laser-interferometric antennas. *Phys. Rev.*, **D46** 5250, (1992).
- [40] B. Allen. The stochastic gravity-wave background: sources and detection. (1996). [gr-qc/9604033].
- [41] B. Allen and A. C. Ottewill. Detection of anisotropies in the gravitational-wave stochastic background. *Phys. Rev.*, **D56** 545, (1997).
- [42] C. Ungarelli and A. Vecchio. Studying the anisotropy of the gravitational wave stochastic background with LISA. *Phys. Rev.*, **D64** 121501(R), (2001).
- [43] S. Drasco and É. É. Flanagan. Detection methods for non-gaussian gravitational wave stochastic backgrounds. *Phys. Rev.*, **D67** 082003, (2003).
- [44] B. Allen, J. D. E. Creighton, É. É. Flanagan, and J. D. Romano. Robust statistics for deterministic and stochastic gravitational waves in non-gaussian noise: Frequentist analyses. *Phys. Rev.*, **D65** 122002, (2002).

-
- [45] J. W. Armstrong, F. B. Estabrook, and M. Tinto. Time-delay interferometry for space-based gravitational wave searches. *Astrophys. J.*, **527** 814, (1999).
- [46] F. B. Estabrook, M. Tinto, and J. W. Armstrong. Time-delay analysis of LISA gravitational wave data: Elimination of spacecraft motion effects. *Phys. Rev.*, **D62** 042002, (2000).
- [47] E. Cappellaro, M. Turatto, D. Yu. Tsvetkov, O. S. Bartunov, C. Pollas, R. Evans, and M. Hamuy. A new determination of supernova rates and a comparison with indicators for galactic star formation. *Astron. Astrophys.*, **351** 459, (1999).
- [48] L. Yungelson and M. Livio. Type ia supernovae: An examination of potential progenitors and the redshift distribution. *Astrophys. J.*, **497** 168, (1998).
- [49] T. Zwerger and E. Müller. Dynamics and gravitational wave signature of axisymmetric rotational core collapse. *Astron. Astrophys.*, **320** 209, (1997).
- [50] H. Dimmelmeier, J. A. Font, and E. Müller. Relativistic simulations of rotational core collapse. ii. collapse dynamics and gravitational radiation. *Astron. Astrophys.*, **393** 523, (2002). [astro-ph/0204289].
- [51] J. Toman, J. N. Imamura, B. K. Pickett, and R. H. Durisen. Nonaxisymmetric dynamic instabilities of rotating polytropes.i. the kelvin modes. *Astrophys. J.*, **497** 370, (1998).
- [52] M. Shibata, S. Karino, and Y. Eriguchi. Dynamical instability of differentially rotating stars. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **334** L27, (2002). [gr-qc/0206002].
- [53] J. M. Centrella, K. C. B. New, L. Lowe, and J. D. Brown. Dynamical rotational instability at low t/w . *Astrophys. J. Lett.*, **550** L193, (2001).
- [54] K. D. Kokkotas. High frequency sources of gravitational waves. (2003). [gr-qc/0312039].
- [55] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky. *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars*. Wiley, (1983).
- [56] S. Chandrasekhar. Solutions of two problems in the theory of gravitational radiation. *Phys. Rev. Lett.*, **24** 611, (1970).
- [57] J. L. Friedman and B. F. Schutz. Secular instability of rotating newtonian stars. *Astrophys. J.*, **222** 281, (1978).
- [58] L. Lindblom. Neutron star pulsations and instabilities. (2001). [astro-ph/0101136].

- [59] N. Andersson and K. D. Kokkotas. The r-mode instability in rotating neutron stars. *Int. J. Mod. Phys. D*, **10-4** 381, (2001).
- [60] N. Andersson. Gravitational waves from instabilities in relativistic stars. (2002). [astro-ph/0211057].
- [61] N. Stergioulas. Rotating stars in relativity. *Liv. Rev. Rel.*, **1** 8, (1998). [gr-qc/9805012].
- [62] J. R. Ipser and L. Lindblom. The oscillations of rapidly rotating newtonian stellar models. ii. dissipative effects. *Astrophys. J.*, **373** 213, (1991).
- [63] R. F. Sawyer. Bulk viscosity of hot neutron-star matter and the maximum rotation stars of neutron stars. *Phys. Rev.*, **D39** 3804(R), (1989).
- [64] Bulk viscosity in supertfluid neutron star cores. Ii. modified urca processes in $npe\mu$ matter. *Astron. Astrophys.*, **372** 130, (2001).
- [65] E. Flowers and N. Itoh. Transport properties of dense matter. *Astrophys. J.*, **206** 218, (1976).
- [66] L. Lindblom, J. E. Tohline, and M. Vallisneri. Nonlinear evolution of the r-modes in neutron stars. *Phys. Rev. Lett.*, **86** 1152, (2001).
- [67] N. Stergioulas and J. A. Font. Nonlinear r-modes in rapidly rotating relativistic stars. *Phys. Rev. Lett.*, **86** 1148, (2001).
- [68] K. C. B. New. Gravitational waves from gravitational collapse. *Liv. Rev. Rel.*, **2** 1, (2003).
- [69] L. Lindblom and B. J. Owen. Effect of hyperon bulk viscosity on neutron-star r-modes. *Phys. Rev.*, **D65** 063006, (2002).
- [70] M. Burgay, et al. An increased estimate of the merger rate of double neutron stars from observations of a highly relativistic system. *Nature*, **426** 531, (2003).
- [71] V. Kalogera, et al. The cosmic coalescence rates for double neutron star binaries. (2003). [astro-ph/0312101].
- [72] M. Maggiore. Stochastic backgrounds of gravitational waves. (2000). [gr-qc/0008027].
- [73] D. Hils, P. L. Bender, and R. F. Webbink. Gravitational radiation from the galaxy. *Astrophys. J.*, **360** 75, (1990).
- [74] G. E. Miller and J. M. Scalo. *Astrophys. J. Suppl.*, **41** 513, (1979).

-
- [75] R. F. Webbink. Double white dwarfs as progenitors of R Coronae Borealis stars and type I supernovae. *Astrophys. J.*, **277** 355, (1984).
- [76] D. H. Douglas and V. G. Braginsky. In *General Relativity* (ed. S. W. Hawking and W. Israel). Cambridge, 1979.
- [77] M. Kamionkowski, A. Kosowsky, and M. S. Turner. Gravitational radiation from first-order phase transitions. *Phys. Rev.*, **D49** 2837, (1994).
- [78] A. Kosowsky, M. S. Turner, and R. Watkins. Gravitational radiation from colliding vacuum bubbles. *Phys. Rev.*, **D45** 4514, (1992).
- [79] A. Kosowsky and M. S. Turner. Gravitational radiation from colliding vacuum bubbles: Envelope approximation to many-bubble collisions. *Phys. Rev.*, **D47** 4372, (1993).
- [80] T. Vachaspati and A. Vilenkin. Gravitational radiation from cosmic strings. *Phys. Rev.*, **D31** 3052, (1985).
- [81] A. Vilenkin. Cosmic strings and domain walls. *Phys. Rep.*, **121** 263, (1985).
- [82] P. J. Steinhardt and N. Turok. Cosmic evolution in a cyclic universe. *Phys. Rev.*, **D65** 126003, (2002).
- [83] L. A. Boyle, P. J. Steinhardt, and N. Turok. The cosmic gravitational-wave background in a cyclic universe. (2003). [hep-th/0307170].
- [84] G. Veneziano. Scale factor duality for classical and quantum strings. *Phys. Lett.*, **B265** 287, (1991).
- [85] M. Gasperini and G. Veneziano. Inflation, deflation, and frame-independence in string cosmology. *Mod. Phys. Lett.*, **A8** 3701, (1993).
- [86] C. J. Copi, D. N. Schramm, and M. S. Turner. Big-bang nucleosynthesis limit to the number of neutrino species. *Phys. Rev.*, **D55** 3389, (1997).
- [87] S. Thorsett and R. Dewey. Pulsar timing limits on very low frequency stochastic gravitational radiation. *Phys. Rev.*, **D53** 3468, (1996).
- [88] B. Allen and S. Koranda. CBR anisotropy from primordial gravitational waves in inflationary cosmologies. *Phys. Rev.*, **D50** 3713, (1994).
- [89] J. Chiaverini, et al. New experimental constraints on non-newtonian forces below $100\mu\text{m}$. *Phys. Rev. Lett.*, **90** 151101, (2003). [hep-ph/0209325].

- [90] J. C. Long, et al. Upper limits to submillimetre-range forces from extra space-time dimensions. *Nature*, **421** 922, (2003).
- [91] T. Hiramatsu, K. Koyama, and A. Taruya. Evolution of gravitational waves from inflationary brane-world: numerical study of high energy effects. *Phys. Lett.*, **B578** 269, (2004). [hep-th/0308072].
- [92] D. N. Spergel, et al. First-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Determination of cosmological parameters. *Astrophys. J. Suppl.*, **148** 175, (2003). [astro-ph/0302209].
- [93] A. H. Guth. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Phys. Rev.*, **D23** 347, (1981).
- [94] K. Sato. Cosmological baryon-number domain structure and the first order phase transition of a vacuum,. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **195** 467, (1981). *Phys. Lett.* **B99**, 66 (1981).
- [95] A. R. Liddle and D. H. Lyth. *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*. Cambridge, (2000).
- [96] B. Allen. Stochastic gravity-wave background in inflationary-universe models. *Phys. Rev.*, **D37** 2078, (1988).
- [97] T. Kobayashi, H. Kudoh, and T. Tanaka. Primordial gravitational waves in inflationary braneworld. *Phys. Rev.*, **68** 044025, (2003). [gr-qc/0305006].
- [98] E. W. Kolb and M. S. Turner. *The Early Universe*. Westview Press, (1994).
- [99] N. D. Birrell and P. C. W. Davies. *Quantum fields in curved space*. Cambridge, (1982).
- [100] L. Krauss and M. White. Grand unification, gravitational waves, and the cosmic microwave background anisotropy. *Phys. Rev. Lett.*, **69** 869, (1992).
- [101] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. *Phys. Lett.*, **B429** 263, (1998). [hep-ph/9803315].
- [102] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali. Phenomenology, astrophysics and cosmology of theories with sub-millimeter dimensions and tev scale quantum gravity. *Phys. Rev.*, **D59** 086004, (1999). [hep-ph/9807344].
- [103] L. Randall and R. Sundrum. A large mass hierarchy from a small extra dimension. *Phys. Rev. Lett.*, **83** 3370, (1999). [hep-ph/9905221].

-
- [104] L. Randall and R. Sundrum. An alternative to compactification. *Phys. Rev. Lett.*, **83** 4690, (1999). [hep-th/9906064].
- [105] P. Binétruy, U. Ellwanger, C. Deffayet, and D. Langlois. Brane cosmological evolution in a bulk with cosmological constant. *Phys. Lett.*, **B477** 285, (2000). [hep-th/9910219].
- [106] V. A. Rubakov. Large and infinite extra dimensions. (2001). [hep-ph/0104152].
- [107] D. Langlois. Brane cosmology: an introduction. (2002). [hep-th/0209261].
- [108] R. Maartens. Brane-world gravity. (2003). [gr-qc/0312059].
- [109] T. Shiromizu, K. Maeda, and M. Sasaki. The einstein equations on the 3-brane world. *Phys. Rev.*, **D62** 024012, (2000).
- [110] X.Montes T.Tanaka. Gravity in the brane-world for two-branes model with stabilized modulus. *Nucl. Phys.*, **B582** 259, (2000).
- [111] M. B. Wise W. D. Goldberger. Modulus stabilization with bulk fields. *Phys. Rev. Lett.*, **83** 4922, (1999). *Phys. Lett.* B475(2000)275.
- [112] J. Garriga and T. Tanaka. Gravity in the randall-sundrum brane world. *Phys. Rev. Lett.*, **84** 2778, (2000).
- [113] Y. Himemoto, T. Tanaka, and M. Sasaki. Bulk scalar field in the braneworld can mimic the 4d inflation dynamics. *Phys. Rev.*, **D65** 104020, (2002).
- [114] C. J. Hogan. Scales of the extra dimensions and their gravitational wave backgrounds. *Phys. Rev.*, **D62** 121302(R), (2000).
- [115] D. Langlois, R. Maartens, and D. Wands. Gravitational wave from inflation on the brane. *Phys. Lett.*, **B489** 259, (2000).
- [116] D. S. Gorbunov, V. A. Rubakov, and S. M. Sibiryakov. Gravity waves from inflating brane or mirrors moving in ads_5 . *J. High. Energy Phys.*, **10** 015, (2001).
- [117] R. Easther, D. Langlois, R. Maartens, and D. Wands. Cosmological tensor perturbations in the randall-sundrum model: evolution in the near brane limit. *JCAP*, **0310** 014, (2003). [hep-th/0308078].
- [118] R. A. Battye, C. Van de Bruck, and A. Mennim. Cosmological tensor perturbations in the randall-sundrum model: evolution in the near brane limit. (2003). [hep-th/0308134].

- [119] K. Ichiki and K. Nakamura. Causal structure and gravitational waves in brane world cosmology. (2003). [hep-th/0310282].
- [120] K. Koyama. Radion and large scale anisotropy on the brane. *Phys. Rev.*, **D66** 084003, (2002).
- [121] S. Kanno and J. Soda. Radion and holographic brane gravity. *Phys. Rev.*, **D66** 083506, (2002).
- [122] D. Langlois and L. Sorbo. Bulk gravitons from a cosmological brane. *Phys. Rev.*, **D68** 084006, (2003). [hep-th/0306281].
- [123] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer Verlag, (1988).
- [124] 洲之内治男, 石渡恵美子. 数値計算 (改訂版) . サイエンス社, (2002).
- [125] P. Binétruy, C. Deffayet, and D. Langlois. Non-conventional cosmology from a brane-universe. *Nucl. Phys.*, **B565** 269, (2000). [hep-th/9905012].
- [126] H. A. Chamblin and H. S. Reall. Dynamic dilatonic domain walls,. *Nucl. Phys.*, **B562** 133, (1999).