カイラル相転移とシグマ中間子

国広 悌二 (京大基研)

1　はじめに; 量子色力学と原子核

原子は電子と原子核とが電磁的相互作用で結合して構成されている。化学変化としての原子の変化においては電子の自由度のみが活躍し原子核の自由度は不活性である。これは、原子核を変化させるためには「強い相互作用」が必要で、その典型的エネルギースケールは MeV であり、化学反応に関わる電磁相互作用の典型的エネルギー ($\sim$)eV に比べまさに桁違いに大きいからである。一方、原子核は核子が「強い相互作用」の一形態である核力により結合してできているフェルミオンの多体系である。核子はデルタ粒子など他の重粒子や中間子などと同様「強い相互作用」をする粒子、ハドロンである。ハドロンはクォーク (と反クォーク) の結合状態である。「強い相互作用」の基本理論は QCD と呼ばれるゲージ理論である。ゲージ場を量子化した粒子はグルオンと呼ばれる。QCD のラグランジアンはクォーク場とグルオン場で書かれている。

さて、原子核の典型的なエネルギーとしてそのフェルミエネルギーを取ると $\epsilon_{_F} \sim 40$ MeV, そして QCD のエネルギースケールは $\Lambda_{QCD} \sim 200$ MeV である。これはパイ中間子の質量 $m_\pi = 140$ MeV$/c^2$ と同程度である[1]。これらのエネルギーはほぼ同じオーダーであり、原子核では、核子、中間子とともにクォークが生きた自由度として見えてよいはずである。しかし実際には、不思議なことに、クォークの自由度が必要であることを示す確定的な証拠というのはまだ見つかっていない。軽粒子による深非弾性散乱で見出されている原子核中での核子の構造関数の変化 (いわゆる EMC 効果) や高エネルギー衝突反応での「color transparency」と呼ばれる現象は有望な候補であるが、未だ候補以上のものではないと言うべきであろう。この理由は QCD の「閉じ込め問題」が本質的に関わっている。

QCD はハドロンの世界の基本理論である原子核を舞台にした現象にクォークの自由度の直接的な証拠を見出すことを試みる前に、ハドロンの世界における原子核という物質の存在形態のユニークさを確認しておくことは有意義である。原子核はハドロン系の唯一の安定な結合状態にある多体系である。この安定性の根拠は結合エネルギーと密度の飽和性にある。すなわち、核物質は比較的ゆるく結合した低密度 $0.17\mathrm{fm}^{-3} \equiv \rho_0$ の液体 (フェルミ液体) と見なすことができる。核力のように短距離で強い特異性を持つ多体系の結合エネルギーを求める枠組みである反応行列理論[2]によれば、これはパイ中間子交換力に含まれるスピンダイポール-ダイポール相互作用 (通常、テンソル力と呼ばれる) の 2 次効果により生まれる実効的中心力ポテンシャルの特異な密度依存性のためである。1 パイオン交換ポテンシャル $V_{\mathrm{OPEP}}(1,2)$ は次のように与えられる：

$$V_{\mathrm{OPEP}}(r) = f^2 m_\pi \frac{\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2}{3} \Big[(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 Y(m_\pi r) + S_{12} Z(m_\pi r) \Big], \tag{1}$$

[1] 以下では、特に断らないかぎり $\hbar = c = 1$ とする自然単位系を取る。

[2] この理論は 1950 年代にブリュックナーにより開発され、その後、ゴールドストーンやベーテにより整備された。カダノフ-ベイムの T 近似の簡略版である。

ただし、$Y(x) = \exp(-x)/x$, $Z(x) = (1 + 3/x + 3/x^2)Y(x)$, そして $S_{12} = 3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{r}})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{r}}) - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$ $(\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/r)$. ただし、デルタ関数に比例する部分を除いた。ここで、S_{12} はスピンと空間座標それぞれについての 2 階のテンソルから作ったスカラー演算子に比例しているのでこの項に比例するポテンシャルをテンソル力と呼んでいる。パイ中間子交換力がスピンダイポール-ダイポール相互作用を生むのはパイ中間子が擬スカラー粒子のためである。パイ中間子の質量が他のハドロンに比較して格段に小さいことを反映して原子核物質が飽和する密度は ρ_0 と低くなる。パイ中間子が軽い擬スカラー粒子であるのは QCD の持つカイラル対称性の自発的破れに伴う南部-ゴールドストーンボソンだからである。

このことは原子核の存在 (すなわち、われわれの存在) およびその性質が QCD の基本的性質の一つであるカイラル対称性の反映であることを示唆している。その他の QCD の基本的性質はどのように原子核レベルの物質の階層の性質や現象に結びついているだろうか？自由空間で検証されるハドロンの特性は原子核のようなハドロン多体系の中でいくらかは変更されないであろうか？さらに敷衍して、密度 (バリオン密度、ストレンジネス密度)、温度そして磁場のような外場等で特徴づけられる様々な環境下で、ハドロンの性質は変化しないであろうか？現代の場の理論によれば、粒子描像は真空と相互規定的に定まり、環境の変化により真空の性質が変化し得る。そのことは QCD も例外ではない。環境の変化に伴う QCD 真空の変化およびそれに伴うその変更された真空上での素励起としてのハドロンの性質の変化を探る問題は現在多くの研究者の興味の的になっている。

2 QCD の基本的性質

2.1 ラグランジアンと漸近自由性

QCD の (古典的) ラグランジアンは次のように書ける；

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{cl} &= \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - \boldsymbol{m})q - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F_a^{\mu\nu}, \\ D_\mu &= \partial_\mu - igt^a A^a_\mu, \\ F^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f_{abc} A^b_\mu A^c \nu, \end{aligned} \tag{2}$$

ここで、$q =^t (u, d, d, c, b, s)$ はクォーク場, $\boldsymbol{m} = \mathrm{diag}(m_u, m_d, m_s, ...)$ はクォークの質量[3]、γ^μ はディラックのガンマ行列 $(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = g^{\mu\nu},\ g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1. - 1, -1, -1))$, f_{abc} は $[t^a, t^b] = if_{abc}t^c$ で定義される $SU(3)$ の構造定数である。g は無次元の結合定数である。このラグランジアンは古典場のラグランジアンである。量子化するにはゲージ固定項とファデーエフ-ポポフゴースト項を付け加えなければならない。また、量子効果の高次項に現れる発散を処理するため正則化およびくりこみをしなければならない。その過程でエネルギースケール μ (くりこみ点) が導入され、結合定数は μ に依存するようになる；$g = g(\mu)$。$g(\mu)$ の μ

[3]これは、電弱理論中のヒッグズ場の期待値で与えられる質量であり、後に出てくる QCD のカイラル対称性の力学的な破れに伴って実現する質量とは異なる。後者を組成クォーク質量 (constituent quark mass)、前者をカレントクォーク質量 (current quark mass) という。

依存性は摂動論の範囲では次のくりこみ群方程式で与えられる[4]；

$$\mu\frac{d}{d\mu}g(\mu)=\beta(g), \tag{3}$$

ここに、ベータ関数 $\beta(g)$ は $\beta(g)=-\frac{9}{16\pi^2}g^3-\frac{64}{(4\pi)^4}g^5+\cdots$ で与えられる。ただし、フレイバー (クォークの種類) の数 N_f を 3 とした。$\beta(g)<0$ のため、$\mu\to\infty$ のとき、$f(\mu)\to 0$ 、となり漸近自由性が成り立つ。

3　カイラル対称性

ここでは、クォークの種類 (フレーバー) の数を 3 またはそれ以下 ($N_f\leq 3$) に限ってカイラル変換とカイラル対称性の基本事項について説明する; $q={}^t(u,d,s)$ カイラル対称性は次のカイラル変換に対する不変性のことである；

$$\begin{aligned}
\frac{1-\gamma_5}{2}q_i &\equiv q_{iL}\to L_{ij}q_{jL}, &(4)\\
\frac{1+\gamma_5}{2}q_i &\equiv q_{iR}\to R_{ij}q_{jR}, &(5)\\
L &= \exp(i\boldsymbol{\theta}_L\cdot\boldsymbol{\lambda}/2)\equiv U(\boldsymbol{\theta}_L),\\
R &= \exp(i\boldsymbol{\theta}_R\cdot\boldsymbol{\lambda}/2)=U(\boldsymbol{\theta}_R),\\
\boldsymbol{\theta}_{L,R}\cdot\boldsymbol{\lambda} &= \sum_{a=0}^{8}\theta^a_{L,R}\lambda^a.
\end{aligned}$$

ここで、q_L、q_R はそれぞれ左手系、および右手系のクォーク場と呼ばれ, γ_5 の固有値 -1, $+1$ に属する固有状態である；

$$\gamma_5 q_L=-q_L,\quad \gamma_5 q_R=q_R. \tag{6}$$

この固有値 (± 1) はカイラリティと呼ばれる。$\lambda^a\ (a=0,1,2,3)$ は 3 次元ユニタリー群の生成子 ($\lambda^0=\sqrt{2/3}\cdot\mathbf{1};\ \mathbf{1}$ は N_f 次の単位行列。) $\boldsymbol{\theta}_L$ と $\boldsymbol{\theta}_R$ は互いに独立なパラメタ。q_L および q_R に対するユニタリ変換を区別するためそれぞれ下付き添え字をつけて $U_L(3)\,U_R(3)$ と書くと、(4) は直積群 $U_L(3)\otimes U_R(3)\simeq(U_L(1)\otimes U_R(1))\otimes SU_L(3)\otimes SU_R(3)$ に対する変換を定義している。カレントクォーク質量 $\boldsymbol{m}$ が無視できるとき、(2) はこの変換に対して不変である。すなわち、質量の無い古典的 QCD ラグランジアン $\mathcal{L}_0^{cl}$ は $U_L(3)\otimes U_R(3)$ カイラル不変性を持つ。それは次の簡単な事実による。$\bar{q}_R\gamma^\mu q_L=1/4\cdot\bar{q}(1-\gamma_5)\gamma^\mu(1-\gamma_5)q=0$, および $\bar{q}_L\gamma^\mu q_R=0$ より、ベクターカレントは

$$\bar{q}\gamma^\mu q=\bar{q}_L\gamma^\mu q_L+\bar{q}_R\gamma^\mu q_R, \tag{7}$$

と書ける。したがって、任意のカイラル変換に対してベクターカレントは不変である；

$$\begin{aligned}
\bar{q}\gamma^\mu q\to\quad & \bar{q}_L L^\dagger\gamma^\mu L q_L+\bar{q}_R R^\dagger\gamma^\mu R q_R\\
= \quad & \bar{q}_L\gamma^\mu q_L+\bar{q}_R\gamma^\mu q_R. &(8)
\end{aligned}$$

[4] くりこみの過程で破れたスケール不変性が (3) により回復されると解釈できる。

質量の無い古典的 QCD ラグランジアン $\mathcal{L}_0^{cl}$ でカイラル変換で変化を受けるクォーク場を含むのは運動項 $\bar{q}i\gamma^\mu D_\mu q$ のみであることから $\mathcal{L}_0^{cl}$ が不変であることが分かる。

もう少しカイラル変換の内容を見てみよう。$\boldsymbol{\theta}_L = \boldsymbol{\theta}_R \equiv \boldsymbol{\alpha}$ と特殊化したときの変換は次のゲージ変換に他ならない；

$$q \to U(\boldsymbol{\alpha})q, \quad \bar{q} \to \bar{q}U^\dagger(\boldsymbol{\alpha}). \tag{9}$$

このユニタリー変換は上記カイラル変換群の部分群であり、$U_V(N_f)$ と書かれる。この変換の生成子は

$$Q^a = \int d\mathbf{x} q^\dagger(x)\lambda^a/2 q(x), \tag{10}$$

である。　特に、$a = 0$ のとき Q^0 はクォーク数に比例し常に保存する。m_i が有限でもフレーバーによらず一定であればチャージ Q^a, $(a = 1, 2, 3)$ もすべて保存される。これは、池田-大貫-小川-ゲルマンの $\mathrm{SU}_f(3)$ である。$N_f = 2$ のときはアイソスピン保存則に対応する。

一方、$\boldsymbol{\theta}_L = -\boldsymbol{\theta}_R \equiv -\boldsymbol{\beta}$ とパラメータが制限されたときの変換は

$$q \to U(\boldsymbol{\beta}\gamma_5)q, \quad \bar{q} \to \bar{q}U^\dagger(\boldsymbol{\beta}\gamma_5), \tag{11}$$

と γ^5 を含むので、$U_A(3)$-変換と書かれる。この変換の生成子は次の軸性荷電である；

$$Q_5^a = \int d\mathbf{x} q^\dagger(x)\lambda^a\gamma_5 q(x). \tag{12}$$

自発的対称性の破れが起こっているときには質量無しのボソン (南部-ゴールドストーンボソン；NG ボソン) が存在するために Q_5^a は数学的に定義できなくなる。

カレントクォーク質量が無視できるとき、古典的にはこれらの荷電はすべて保存される。量子場の場合、Q_5^a $(a \neq 0)$ に対する保存則はそのまま成り立つが、Q_5^0 に対する保存則はいわゆる量子異常のために成立たなくなる。(下記参照。)

カイラル変換 $U_L(N_f) \otimes U_R(N_f) \simeq (U_L(1) \otimes U_R(1)) \otimes SU_L(N_f) \otimes SU_R(N_f)$ に対応するカレントの保存則は次のようである：

$$\begin{aligned}
\partial_\mu(\bar{q}\gamma^\mu\lambda^a q) &= i\sum_{i,j}(m_i - m_j)\bar{q}_i\lambda^a q_j, \\
(a = 0, 1, 2, &\ \ldots\ , N_f^2 - 1), \qquad (13) \\
\partial_\mu(\bar{q}\gamma^\mu\gamma^5\lambda^a q) &= i\sum_{i,j}(m_i + m_j)\bar{q}_i\lambda^a q_j, \\
(a = 1, 2, &\ \ldots\ , N_f^2 - 1), \qquad (14) \\
\partial_\mu(\bar{q}\gamma^\mu\gamma^5 q) &= i\sum_i 2m_i\bar{q}_i\gamma^5 q_i. \qquad (15)
\end{aligned}$$

このうち最初の等式は量子場に対してもそのまま成立するが、最後の式は量子場に対しては変更を受け、次のようになる；

$$\begin{aligned}
\partial_\mu(\bar{q}\gamma^\mu\gamma^5 q) &= i\sum_i 2m_i\bar{q}_i\gamma^5 q_i \\
&\quad +2N_f\frac{g^2}{32\pi^2}F^a_{\mu\nu}\tilde{F}_a^{\mu\nu}, \qquad (16)
\end{aligned}$$

ただし、$\tilde{F}_a^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\lambda\rho\mu\nu}F_{a\mu\nu}$。この付け加わった項は、古典論で成り立っていた保存則が量子効果により破れることを意味する。これを量子異常 (アノマリー) という。軸性カレントに対する量子異常なので、軸性 (カイラル) 異常と言う。この効果はたとえば擬スカラーの η' 粒子の質量がおよそ $1\mathrm{GeV}$ と重いことを説明する。カイラル異常はいわゆる $U_A(1)$ 問題の解決を与える。(後述)

3.1 不変な双 2 次形式;$N_f = 2$ の場合

まず、簡単のために、ストレンジネスの自由度を無視してフレーバーの数が 2 $(N_f = 2)$ の場合を考える。$SU_L(2) \otimes SU_R(2)$ の変換は、

$$L = \exp(i\boldsymbol{\theta}_L \cdot \boldsymbol{\tau}), \quad R = \exp(i\boldsymbol{\theta}_R \cdot \boldsymbol{\tau}), \tag{17}$$

で与えられる。ただし、$\boldsymbol{\tau}$ はパウリ行列であり、$\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\tau} \equiv \sum_{a=1}^{3}\theta_a\tau^a$。$\boldsymbol{\theta}_L = \boldsymbol{\theta}_R \equiv \boldsymbol{\alpha}$ と制限した変換は $\mathrm{SU}_V(2)$ と呼ばれる。一方、$-\boldsymbol{\theta}_L = \boldsymbol{\theta}_R \equiv \boldsymbol{\beta}$ と制限した変換は $\mathrm{SU}_A(2)$ と呼ばれる。ここで、

$$\sigma = \bar{q}q, \quad \boldsymbol{\pi} = \bar{q}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}q, \tag{18}$$

と書くと、無限小の $\mathrm{SU}_V(2)$ 変換に対して、

$$\sigma \rightarrow \sigma, \tag{19}$$

$$\boldsymbol{\pi} \rightarrow \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\pi}, \tag{20}$$

無限小の $\mathrm{SU}_A(2)$ 変換に対して、

$$\sigma \rightarrow \sigma - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\pi}, \tag{21}$$

$$\boldsymbol{\pi} \rightarrow \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\beta}\sigma, \tag{22}$$

と変換される。

したがって、$\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2$ の任意の関数 $V(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)$ は $SU_L(2) \otimes SU_R(2)$ の変換に対して不変であることがわかる。

ここで、σ と $\boldsymbol{\pi}$ を (19) および (21) と変換されるスカラー場と見なすと、次の線形シグマ模型のラグランジアン

$$\mathcal{L} = 1/2\cdot[(\partial_\mu\sigma)^2 + (\partial_\mu\boldsymbol{\pi})^2] - V(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) \tag{23}$$

は $SU_L(2) \otimes SU_R(2)-$ 不変であることがわかる。

同様に、クォーク場だけで書かれた次の $\mathrm{Nambu\text{-}Jona\text{-}Lasinio(NJL)}$ 模型も $SU_L(2)\otimes SU_R(2)-$ 不変である：

$$\mathcal{L} = \bar{q}i\gamma\cdot\partial q + g/2[(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}q)^2]. \tag{24}$$

3.2 不変な双 2 次形式;$N_f = 3$ の場合

$SU_L(3) \otimes SU_R(3)$ の変換のもとで双 2 次形式

$$\Phi_{ij} \equiv \bar{q}_j(1-\gamma_5)q_i = 2\bar{q}_{jR}q_{iL} = 1/2(\bar{q}q + i\bar{q}i\gamma_5 q), \tag{25}$$

と

$$(\Phi^\dagger)_{ij} \equiv \bar{q}_j(1+\gamma_5)q_i = 2\bar{q}_{jL}q_{iR}, \tag{26}$$

はそれぞれ次のように変換される；

$$\Phi_{ij} \rightarrow L_{ik}\Phi_{kl}R^\dagger_{lj}, \tag{27}$$
$$(\Phi^\dagger)_{ij} \rightarrow R_{ik}(\Phi^\dagger)_{kl}L^\dagger_{lj}. \tag{28}$$

すなわち、それぞれ $(3,\bar{3})$ および $(\bar{3},3)$ の表現として変換される。

$U_L(1) \otimes U_R(1) \simeq U_V(1) \otimes U_A(1)$ のもとでは、

$$\Phi_{ij} \rightarrow \mathrm{e}^{i(\theta_{0L}-\theta_{0R})/2}\Phi_{ij}, \tag{29}$$
$$(\Phi^\dagger)_{ij} \rightarrow \mathrm{e}^{-i(\theta_{0L}-\theta_{0R})/2}(\Phi^\dagger)_{ij}, \tag{30}$$

と変換される。

したがって、

$$I_n = \mathrm{tr}(\Phi\Phi\dagger)^n, \qquad (n = 1,2,3,...) \tag{31}$$

は $\mathrm{U}_L(3)\otimes\mathrm{U}_R(3)$ の変換に対して不変である。

他の表現方法もある。次の量を定義する；

$$\Phi_a = \mathrm{tr}\Phi\lambda_a = \bar{q}(1-\gamma_5)\tau_a q/2, \quad (a = 0,1,2,...8). \tag{32}$$

直交性

$$\mathrm{tr}\lambda_a\lambda_b = \delta_{ab}, \tag{33}$$

より、

$$\Phi = \sum_{a=0}^{8}\Phi_a\Lambda_a, \tag{34}$$

である。したがって、たとえば、

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{a,b=0}^{8}\Phi_a\Phi^\dagger_b\mathrm{tr}\lambda^a\lambda^b = \sum_{a=0}^{8}\Phi_a\Phi^\dagger_a, \\ &= 1/4\cdot\sum_{a=0}^{8}[\hat{\sigma}^2_a + \hat{p}^2_a], \end{aligned} \tag{35}$$

と書ける。ただし、

$$\hat{\sigma}_a = \bar{q}\lambda_a q, \quad \hat{p}_a = \bar{q}i\gamma_5\lambda_a q, \tag{36}$$

と書いた。

カイラルアノマリーのために、$\mathrm{U}_V(1)\otimes\mathrm{SU}_L(3)\otimes\mathrm{SU}_R(3)$ に対しては不変であるが $\mathrm{U}_A(1)$ に対して不変でない量が現れる。そのような量でもっとも次元の低いものは

$$\mathrm{det}\Phi, \quad \mathrm{det}\Phi^\dagger, \tag{37}$$

である。そのエルミートなく見合わせ

$$I_D = \mathrm{det}\Phi + \mathrm{det}\Phi^\dagger, \tag{38}$$

は、したがって、カイラルアノマリーを表現するクォーク間の有効相互作用である。カイラルアノマリーの問題に関連してこのバーテックスを最初に書き下したのは小林-益川である。

質量項は, それがたとえフレーバー $SU_f(3)$ の 1 重項 ($\sum_i \bar{q}_i q_i = \sum_i (\Phi_{ii} + (\Phi^\dagger)_{ii})/2$) であっても, 一般のカイラル変換 ($\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta}$) に対しては不変ではない。

ディラック質量項として現れるスカラー密度 $\bar{q}q$ と擬スカラー密度 $\bar{q}i\gamma_5 q$ は軸性変換に対して不変ではなく、$U(1) \simeq O(2)$ の 2 重項のように変換される：

$$\begin{aligned} \bar{q}q = \bar{q}_R q_L + \bar{q}_L q_R \quad &\rightarrow \quad \cos\beta\bar{q}q + \sin\beta\bar{q}i\gamma_5 q, \\ \bar{q}i\gamma_5 q = -i(\bar{q}_R q_L - \bar{q}_L q_R) \quad &\rightarrow \quad -\sin\beta\bar{q}q + \cos\beta\bar{q}i\gamma_5 q. \end{aligned} \tag{39}$$

4 有効模型 I: $\mathbf{SU}_L(3)\otimes\mathbf{SU}_R(3)$-$\sigma$ 模型

$\Phi(x)$ をスカラー場として、場について 4 次までの項で構成される $\mathrm{SU}_L(3)\otimes\mathrm{SU}_R(3)$-不変なラグランジアンは

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\sigma^{(0)} \quad &= \quad 1/2\cdot(\mathrm{tr}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi) - 1/2\cdot\mu^2 I_1 - \lambda I_1^2 - \gamma I_2, \\ &\quad\ \tau I_D, \end{aligned} \tag{40}$$

である。ただし、あらわなカイラル対称性を破る項は無視できるとした。係数 τ がカイラルアノマリーの強さを表していることに注意する。

古典的なレベルでの真空 $|0\rangle$ はポテンシャルエネルギーの期待値が最小値を取る条件から決められる：

$$\langle\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\Phi^\dagger}\rangle = 0. \tag{41}$$

この解はフレーバーに対する対称性を仮定して、

$$\langle\Phi\rangle = \varphi_0\mathbf{1}, \quad \mathbf{1} = \mathrm{diag}(1,1,1) \tag{42}$$

と書ける。少々面倒な計算をすると、この停留条件は

$$2(3\lambda+\gamma)\varphi_0^2 - \tau\varphi_0 + \mu^2/2 = 0, \tag{43}$$

となる。この方程式は $\mu^2 < 0$ のときに実解を持ち、

$$\varphi_0 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\mu^2(3\lambda+\gamma)}}{4(3\lambda+\gamma)}, \tag{44}$$

となる。

この真空上での中間子励起は場 Φ の真空期待値からの揺らぎとして記述できる : すなわち、

$$\Phi = \varphi_0 \mathbf{1} + \Phi', \quad \Phi' = \frac{1}{\sqrt{2}}(S + iP), \tag{45}$$

$$S = \sum_a S_a \Lambda_a, \quad P = \sum_a P_a \lambda \tag{46}$$

と書き、$\mathcal{L}_0$ に代入して、$-1/2 \cdot P_a^2$ などの係数を読み取ると、フレーバー 8 重項の擬スカラー中間子 $(\pi,\, \mathrm{K},\, \eta)$ の質量は

$$\begin{aligned} {m^{(8)}}^2_{\mathrm{ps}} &= \mu^2 + 4\varphi_0^2(3\lambda+\gamma) - 2\varphi_0\tau, \\ &= 0, \end{aligned} \tag{47}$$

となる。ただし、ここで停留値条件 (43) を使った。すなわち、8 重項の NG ボソンが存在することになる。同様にして、フレーバー 1 重項の擬スカラー中間子 (η') の質量は、

$${m^{(0)}}^2_{\mathrm{ps}} = 6\tau\varphi_0 \neq 0, \tag{48}$$

となり、η' は確かにカイラルアノマリーのために質量を持つ事になる。

ちなみに、スカラー中間子の質量は

$$\begin{aligned} {m^{(8)}}^2_{\mathrm{s}} &= \mu^2 + 12\varphi_0^2(\lambda+\gamma) + 2\varphi_0\tau, \\ &= 0, \end{aligned} \tag{49}$$

$${m^{(0)}}^2_{\mathrm{s}} = 2(\mu^2 - \varphi_0\tau), \tag{50}$$

となる。

以上はクォークの質量が無視できるカイラル極限での話である。小さいが有限のクォーク質量の効果をこの線形シグマ模型にミニマルに取り入れるには $\mathcal{L}_0$ に次の対称性を破る項

$$\mathcal{L}_{\mathrm{SB}} = -\mathrm{tr}(\epsilon_0\lambda_0 + \epsilon_8\lambda_8)(\Phi + h.c.)/2\sqrt{2}, \tag{51}$$

を加える。対称性の破れの度合いを表すパラメータは単位行列 $\mathbf{1}$ と第 3 成分へのプロジェクション $P_3 = \mathrm{diag}(0,0,1)$ を用いて、

$$(\epsilon_0\lambda_0 + \epsilon_8\lambda_8)/2\sqrt{2} = c\mathbf{1} + dP_S, \tag{52}$$

と書くと、

$$c = (\sqrt{2}\epsilon_0 + \epsilon_8)/2\sqrt{6}, \quad d = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}, \tag{53}$$

となる。

場の真空期待値を $\langle\Phi\rangle = \mathrm{diag}(\varphi_0, \varphi_0, \varphi_0 + \varphi_1)$ と書くと、$\varphi_{0,1}$ は前と同様真空エネルギーの停留条件から定まる。新しい真空の上の擬スカラー中間子の質量はもはやフレーバー間の縮退が解けて、

$$m_\pi^2 = -\frac{2c}{\varphi_0}, \quad m_K^2 = -\frac{2(2c+d)}{2\varphi_0 + \varphi_1}, \tag{54}$$

となる。さらに、シングレット-オクテットの混合が起こり η と η' はそれぞれ純粋なオクテットあるいはシングレットの状態ではなくなる。ここで、c と d はラグランジアンに含まれていた対称性のあらわな破れの度合を表現していたことに注意。

さらに、軸性カレントは保存カレントではなくなりそのダイバージェンスはやはり c, d に比例した項の分 0 からずれる。たとえば、パイおよび K 中間子のチャンネルに対しては次のようになる：

$$\partial^\mu j_{5\mu}^\pi = -2\sqrt{2}c\phi_\pi \equiv m_\pi^2 f_\pi \phi_\pi, \tag{55}$$

$$\partial^\mu j_{5\mu}^K = -2\sqrt{2}(c + d/2)\phi_K \equiv m_K^2 f_K \phi_K. \tag{56}$$

ここで、最後の等式で各中間子の崩壊定数 $f_{\pi,K}$ を定義した。各中間子の質量を代入して、

$$f_\pi = \sqrt{2}\varphi_0, \quad f_K = \sqrt{2}(\varphi_0 + \frac{1}{2}\varphi_1), \tag{57}$$

を得る。したがって、その比は

$$f_K/f_\pi = 1 + \frac{\varphi_1}{2\varphi_0} \tag{58}$$

となる。この実験的には f_K の方が f_π より 20 パーセント程大きい。これは、$\langle\bar{s}s\rangle/\langle\bar{u}u\rangle > 1$ であることに対応する。この比が QCD 和則から導かれたものと逆になっていることに注意。この逆転は、ここでの値はたとえば格子 QCD などで計られるものと同様クォーク凝縮体の絶対値であり、QCD 和則から導かれるものは、ノーマルオーダーを取ったオペレーターの期待値であることとから理解可能である。

4.1 対称性の自発的破れ：物質と真空の相互規定性

物質とは何かという問いは古来問われ続けてきたが、２０世紀の物理学の成果である場の量子論はこの問いに対し明確な答えを与えた。すなわち、「物質とは量子場の励起状態のことである。」そこで重大な事は、物質と真空は相互規定的であり、現代の物質の理論は必然的に真空の理論にもなっていることである。何が物質かということは真空を決めることと等価である。そして、このことは「対称性の自発的破れ」の現象において最も明示的である。「対称性の自発的破れ」のアイデアはハイゼンベルグによって端緒的に提示されたが、物理学で実際にその概念が明確に認識されたのは超伝導の問題を通してであった。超伝導をはじめて説明したのはバーディーン、クーパー、シュリーファー (BCS) 理論であるが、これはある特定のゲージを用いた計算であった。しかも、その本質は基底状態が電荷のよい固有状態に

なっていることである。はじめて超伝導の理論のゲージによらない定式化を行い、「対称性の自発的破れ」という概念を抽出し、かつ、そのとき対称性を回復する集団運動がゼロモードとして出現することをはっきりと示したのは南部であった。さらに、その概念を場の理論において定式化し、カイラル対称性の自発的破れに伴なうボソンとしてパイ中間子を理解する枠組みを与えた。この概念はその後のさまざまの統一理論において欠くべからざる要素になっている。

見易くするために、フレーバーの数が 1 の場合を考える。ディラック質量項 $\bar{q}q$ と擬スカラー密度 $\bar{q}i\gamma_5 q$ はカイラル変換 $q \to \exp(i\beta\gamma_5/2)q$ に対して、次のように変換される：

$$\begin{aligned} \bar{q}q &= \bar{q}_R q_L + \bar{q}_L q_R \\ &\to \cos\beta\bar{q}q + \sin\beta\bar{q}i\gamma_5 q, \\ \bar{q}i\gamma_5 q &= -i(\bar{q}_R q_L - \bar{q}_L q_R) \\ &\to -\sin\beta\bar{q}q + \cos\beta\bar{q}i\gamma_5 q. \end{aligned} \tag{59}$$

このため、$|\,\rangle$ が真空を表すとすると

$$\begin{aligned} \langle[iQ_5, \bar{q}i\gamma_5 q(x)]\rangle &\equiv \langle \int d\boldsymbol{y}[iq^\dagger\gamma_5 q(y), \bar{q}i\gamma_5 q(x)]\rangle, \\ &= -\langle\bar{q}q\rangle, \end{aligned} \tag{60}$$

となる。したがって、スカラー密度の真空期待値が消えないとき

$$\langle\bar{q}q\rangle \neq 0\ , \tag{61}$$

$Q_5|0\rangle = 0$ とならず，カイラル対称性が自発的に破れている。

5 $U_A(1)$ 問題

$U_A(1)$ 問題とは以下のように説明される。フレーバーの数を 3 とする。古典的 QCD ラグランジアンはクォークの質量のない場合、$U_L(3) \otimes U_R(3)$ 不変である。この変換の生成子の数は $2 \times (1+8) = 18$ 個である。現実の QCD の真空はカイラル対称性が自発的に破れて $U_V(1) \otimes SU_f(3)$ の対称性のみを有している。ここで、破れた対称性の生成子の数は $1+8=9$ 個である。したがって、この生成子による「回転」の自由度に対応した 9 個の NG ボソンが存在するはずである。その「回転」は γ_5 を伴なうのでそのボソンはすべて擬スカラーである。現実の世界の擬スカラーの軽いボソンの数を数えてみよう。

$$\begin{aligned} \pi\text{中間子}\ (140); \pi^\pm, \pi^0 &\quad \cdots \quad 3\ \text{個} \\ K\ \text{中間子}\ (500); K^\pm, K^0, \bar{K^0} &\quad \cdots \quad 4\ \text{個} \\ \eta \quad \text{中間子}\ (550); \eta &\quad \cdots \quad 1\ \text{個}, \end{aligned} \tag{62}$$

計 8 個である。1 個足りない! 9 番目の擬スカラーの粒子が $\eta'(960)$ である。ここで、括弧の中の数字は MeV 単位での質量である。質量 960MeV の粒子を NG ボソンを小さなクォーク質量のために有限の質量を有した粒子と見なすことができるだろうか？答えは否である。と

いうのは、Weinberg の分析によると、あらわなカイラル対称性のかめに η' が獲得し得る質量には

$$m_{\eta'} \leq \sqrt{3} m_\pi, \tag{63}$$

という制限が得られるからである。そこで、次の問題が生まれる；
なぜ η' はこんなに重いのか?
あるいは、9 番目の NG ボソンはどこに行ったのか？

既存の 8 個の NG ボソンは $SU_L(3) \otimes SU_R(3)$ 対称性の自発的破れに対する NG ボソンであり、残った 9 番目の NG ボソンは 1 次元のアキシャル変換に対応するのでこの問題を $U_A(1)$ 問題という。

この問題の解決は問題設定が間違っている!と宣言することで得られる。つまり、古典的ラグランジアンの持つ対称性から議論を出発させたのがそもそもの間違いである。量子場の理論としては QCD はカイラル異常のために $U_A(1)$ 対称性を持っていない。したがって、もとの対称性は $U_V(1) \otimes SU_L(3) \times SU_R(3)$ である。したがって、カイラル対称性の自発的破れによって出現する NG ボソンは 8 個であり、実際そうなっている。

6 ハドロンの世界：QCD の非摂動的効果

これは、クォークやグルオンが見えるような高分解能での QCD の性質である。そこは基本的に摂動論の世界である。ところが、低い分解能で見ると、クォークやグルオンの代りにその結合状態、すなわち、ハドロンが「素粒子」として立ち現れ、その世界は摂動論では記述できない様々の特徴を持っている。QCD に基づいてその物理的機構を説明することは、ハドロン物理学の基本的課題である。それらの特徴をいくつか列挙すると次のようになる：

1. クォークとグルオンの閉じ込め。クォークとグルオンは単体では取り出せない。また、実現しているハドロンはすべてカラー $SU(3)$ の 1 重項である。

2. 軽いクォークに対しては近似的だがよく成立しているカイラル対称性が力学的に破れている。軽い擬スカラーの中間子 $\pi^{\pm,0}(140)$, $K^{\pm}(500)$, $K^0(500)$, $\bar{K}^0(500)$, $\eta(550)$ が近似的 8 重項をなしている。ここで括弧の中の数字は MeV 単位での質量。また、低エネルギーでのその相互作用はいわゆる「低エネルギー定理」によりよく支配されている。

3. カレントクォーク質量の比は $m_d/m_u \sim 2$, $m_s/m_u \sim 25$ と 1 から大きくかけ離れているにも拘わらず、ハドロンの世界ではアイソスピン保存則はよく成立しており、また、フレーバー $SU(3)$ 対称性の破れは存在するが摂動で取り扱える範囲である。(ゲルマン-大久保理論) また、u, d および s クォークの質量をそれぞれおよそ 300 MeV, および 500 MeV とするいわゆる組成的 (constituent) クォーク模型が現象論的には磁気モーメントなどのハドロンの性質をよく説明する。

4. 軽粒子の関与しないハドロンの弱崩壊においてアイソスピンが $1/2$ だけ変化する過程が他の場合に比べて桁違いに頻繁に起こる。すなわち、$\Delta I = 1/2$ 則が成立つ。ハドロ

ンの電磁場との相互作用は、ガンマ粒子から変換されたベクトル中間子を通してであるという描像 (ベクタードミナンス) がよく成立している。

5. 安定なハドロン多体系としての原子核の存在。

6. 軸性異常の存在。9 番目の擬スカラー中間子 $\eta'(950)$ は古典的 QCD ラグランジアンの性質からは π, K, η と共に縮退した 9 重項を成していてもいいはずだが、実際は他の粒子と比べて格段に重い、

等々。

実は、上記のうち 3 から 6 はすべて 2 のカイラル対称性の動的破れの帰結として理解可能である。たとえば、アイソスピン保存則の成立は m_u, m_d の値自身が $10\mathrm{MeV}$ 以下程度と小さいため、カイラル $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ 対称性が非常によい近似で成立ためであると理解できる。　フレーバー $SU(3)$ についても同様である。組成的クォーク模型の大きい質量の大部分はカイラル対称性の力学的破れのために獲得されたものであると理解できる。また、ベクタードミナンスを説明する一つのアイデアである「隠された局所対称性」のアプローチでは、カイラル対称性の動的な破れが前提とされる。さらに、$\Delta I = 1/2$ 則の成立においても、カイラル対称性との関連が議論されている。　6 については §1 で説明した。このように見てみると原子核を含むハドロンの世界の特性に対して QCD の持つカイラル対称性とその動的な破れが支配的役割を果たしていることを示唆している。

7　南部-ヨナラシニオ模型による考察

カイラル対称性の自発的破れを理解するにはその概念を最初に導入した南部による模型で考察するのが最も分かりやすく且つ教育的である。

7.1　Lagrangian

次のラグランジアンを考える；

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{q}(i\gamma\cdot\partial - \boldsymbol{m})q \\ &\quad + g[(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)^2], \qquad (7.1) \\ &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1, \qquad (7.2) \end{aligned}$$

ここに、$(\bar{q}q)^2 \equiv (\sum_{a=1}^{N_C} \bar{q}^a q^a)^2$。ただし、$N_C$ はカラーの自由度の数である。結合定数 g は正 $g > 0$ であり、クォークと反クォークの間には引力が働いている。この理論はエネルギースケール $1\mathrm{GeV}$ あたりでの有効理論であり、くりこみ可能である必要はなく、また、結合定数 g は $[mass]^{-2}$ の次元を持っていて、実際くりこみ可能ではない。この理論には有効理論としてのカットオフ Λ が存在する。これは、発散を避けるために仕方なく導入されたものと考えるべきものではなく、理論が有効理論であるために持つ物理的に意味のあるエネルギース

ケールである。$\boldsymbol{m} = \mathrm{diag}(m_u, m_d)$ はカレントクォーク質量であり、質量項 $-\bar{q}\boldsymbol{m}q$ のためにカイラル対称性が少しだがあらわに破れている。 $\tau^i \ \ (i = 1, 2, 3)$ はパウリ行列である。

クォークが u, d だけの 2 種類 $N_f = 2$ の場合、カイラル変換は次のように定義される；

$$q_L \to e^{i\theta_L \cdot \tau/2} q_L, \quad q_R \to e^{i\theta_R \cdot \tau/2} q_R, \tag{7.3}$$

ただし、$\theta_{L(R)} \cdot \tau = \sum_{a=0\sim 3} \theta^a_{L(R)} \tau_a$、そして、 $\tau^0 = \mathbf{1}$。これは、$U_L(2) \otimes U_R(2)$ 変換である。

カレントクォーク質量が無視できるとき、(7.1) は $SU_L(2) \otimes SU_R(2)$-対称性を有する[5]

以下では、カレントクォークレベルでのアイソスピン対称性 $m_u = m_d$ を仮定する；$\hat{m} = (m_u + m_d)/2$ と書く.[6]

7.2 超伝導との類似性: ボゴリューボフ変換

QCD 真空におけるカイラル対称性の動的な破れと金属の超伝導体への相転移の間には強い類似性がある。後者においては、スピン 1 重項に組んだ電子対が凝縮体 $\langle \psi^{(e)}_\uparrow \psi^{(e)}_\downarrow \rangle$ (およびその複素共役) を形成し、それが電子のエネルギースペクトルにギャップを作る。一方、カイラル相転移においては、同じカイラリティを持ったクォークと反クォークの対が凝縮体 $\langle \bar{q}_{\mathrm{R}} q_{\mathrm{L}} \rangle$ $(\langle \bar{q}_{\mathrm{L}} q_{\mathrm{R}} \rangle)$, [7] を形成し、その平均場 $\langle \bar{q}q \rangle = \langle \bar{q}_{\mathrm{R}} q_{\mathrm{L}} + \bar{q}_{\mathrm{L}} q_{\mathrm{R}} \rangle \sim \sigma$ が実効的にクォークの質量 $M \sim \langle \bar{q}q \rangle$ を与えることになる。

超伝導の BCS 理論にならって、自己無撞着平均場近似で (7.1) の真空 (基底状態) を決定しよう。$|\ \rangle$ をこの理論の真空状態とし、この状態について平均場近似をする；

$$\begin{aligned} & \mathcal{L} \\ \to \ & \mathcal{L}_{\mathrm{MFA}} = \bar{q} i\gamma \cdot \partial q \ - \ M\bar{q}q - m_0^2/2 \cdot \sigma_0^2. \end{aligned} \tag{7.4}$$

ここで、$M = -2g\langle \bar{q}q \rangle = G\sigma_0$, とおいた。($2g = (G/m_0)^2$.)

$\mathcal{L}_{\mathrm{MFA}}$ に対応するハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{MFA}} \ = \ & \int d\mathbf{x} \{ \bar{q}(x)(-i\gamma \cdot \nabla + \ M) q(x) \\ & + m_0^2 \sigma_0^2/2 \} \end{aligned} \tag{7.5}$$

である。 $\mathcal{L}_{\mathrm{MFA}}$ から導かれる運動方程式は通常のディラック方程式に他ならない；

$$(i\gamma \cdot \partial - M) q(x) = 0. \tag{7.6}$$

---

[5] $U_L(2) \otimes U_R(2)$-対称性ではないことに注意。相互作用 $\mathcal{L}_1$ は $U_L(2) \otimes U_R(2)$-対称な相互作用 $\mathcal{L}_S \equiv g_{_S}/2 \sum_{a=0\sim 3} \{(\bar{q}\tau^a q)^2 + (\bar{q}\tau^a i\gamma_5 q)^2\}$ と $U_A(1)$-対称性を破る相互作用 (異常項) $\mathcal{L}_D \equiv g_{_D} \det[\bar{q}(1+\gamma_5)q] + \mathrm{h.c.} = g_{_D}/2[(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 \vec{\tau} q)^2 - (\bar{q}\vec{\tau}q)^2 - (\bar{q}i\gamma_5 q)^2]$, との和で書ける：$\mathcal{L}_s + \mathcal{L}_D = \mathcal{L}_1$；ただし、 $g_{_S} = g_{_D} = g$. 後者は $SU_L(2) \otimes SU_R(2)$-不変であるが、軸性変換 $U_A(1)$ に対しては不変ではない。

[6] 実際には、$m_d/m_u \sim 2$ でありカレントクォークレベルでのアイソスピン対称性はひど く破れている。原子核やハドロンのレベルの現象でアイソスピンが良い量子数として機能している理由はその値自体が $m_u \sim 5$ MeV, $m_{\sim}$10 MeV と Λ_{QCD} と比べて小さく、カイラル SU(2)⊗SU(2) 対称性がよいからであると考えられる。

[7] If the vacuum has a definite parity, the condensate $\langle \bar{q}_R q_L \rangle = 1/2 \cdot \langle \bar{q}q + i\bar{q}i\gamma_5 q \rangle$ is a real number, hence $\langle \bar{q}_R q_L \rangle = \langle \bar{q}_L q_R \rangle$.

この解は

$$
\begin{aligned}
q(x) &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\mathbf{p},r=\pm} \sqrt{\frac{M}{E_p}} \{ a_{_M}(\mathbf{p},r) u_{_M}(\mathbf{p},r) \mathrm{e}^{-ip\cdot x} \\
&+ \quad b^\dagger_{_M}(\mathbf{p},r) v_{_M}(\mathbf{p},r) \mathrm{e}^{ip\cdot x} \}, \qquad (7.7)
\end{aligned}
$$

である。ここに、r はヘリシティそしてクォークのエネルギーは $E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}$ と与えられる。ディラック質量 $M = -g\langle \bar{q} q \rangle$ が超伝導におけるギャップエネルギーに対応することは明らかであろう。

$q(x)$ に対するディラック方程式を初期条件 $q(x) = q_0(x)$, at $x_0 = 0$ のもとで解くと超伝導との類似性がよりあらわになる。ただし、$q_0(x)$ は質量 0 のときのディラック場。$q(x)$ を質量 0 のスピノルで展開すると、

$$
\begin{aligned}
q(x) &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\mathbf{p},s=R,L} \{ a^{(s)}_{\mathbf{p}}(t) u_0(\mathbf{p},s) \mathrm{e}^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \\
&+ \quad b^{(s)\dagger}_{\mathbf{p}}(t) v_0(\mathbf{p},s) \mathrm{e}^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \}, \qquad (7.8)
\end{aligned}
$$

となる。ただし、s はヘリシティ、R, L は手系を表す。次の事実はカイラル対称性の自発的破れの理解において基本的である：質量がない場合、正 (負) のヘリシティの状態は同じく正の (負の) カイラリティを持っている、すなわち、カイラリティ＝ヘリシティ.

ハミルトニアン H_{MFA} は質量無しの演算子 $a_0(p,s)$, $b_0(p,s)$ または、質量有りの演算子 $a_M(p,s)$, $b_M(p,s)$ を用いて次のように表すことができる:

$$
\begin{aligned}
H_{\mathrm{MFA}} &= \sum_{\mathbf{p},s} \{ |\mathbf{p}| (a^{(s)\dagger}_{\mathbf{p}}(t) a^{(s)}_{\mathbf{p}}(t) - b^{(s)}_{-\mathbf{p}}(t) b^{(s)\dagger}_{-\mathbf{p}}(t) \\
&+ \quad M (a^{(s)}_{\mathbf{p}}(t) b^{(s)\dagger}_{-\mathbf{p}}(t) + \mathrm{h.c.}) \} \\
&\quad + \Omega m_0^2 \sigma_0^2 / 2, \qquad (7.9) \\
&= \sum_{\mathbf{p},r} E_p (a^\dagger_{_M}(\mathbf{p},r) a_{_M}(\mathbf{p},r) - b_{_M}(\mathbf{p},r) b^\dagger_{_M}(\mathbf{p},r)) \\
&+ \quad \Omega m_0^2 \sigma_0^2 / 2. \qquad (7.10)
\end{aligned}
$$

これより、質量有りの演算子はハミルトニアンを対角化するが、質量無しの演算子は対角化しないことがわかる。ハイゼンベルグ方程式は質量無し演算子を用いてつぎのように書ける；

$$
i \begin{pmatrix} \dot{a}^{(s)}_{\mathbf{p}}(t) \\ \dot{b}^{(s)\dagger}_{-\mathbf{p}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\mathbf{p}| & M \\ M & -|\mathbf{p}| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{(s)}_{\mathbf{p}}(t) \\ b^{(s)\dagger}_{-\mathbf{p}}(t) \end{pmatrix}. \qquad (7.11)
$$

ただし、初期条件は $a^{(s)}_{\mathbf{p}}(t=0) = a_{M=0}(\mathbf{p},s)$.

この方程式を解くことにより、質量有りと無しの演算子はボゴリュウボフ変換で結び付けられることが示される；

$$
\begin{aligned}
a_{_M}(\mathbf{p},r) &= \cos\frac{\theta_{\mathbf{p}}}{2} \cdot a_0(\mathbf{p},r) \ + \ \sin\frac{\theta_{\mathbf{p}}}{2} \cdot b^\dagger_0(-\mathbf{p},r), \qquad (7.12) \\
b^\dagger_{_M}(-\mathbf{p},r) &= -\sin\frac{\theta_{\mathbf{p}}}{2} \cdot a_0(\mathbf{p},r) \ + \ \cos\frac{\theta_{\mathbf{p}}}{2} \cdot b^\dagger_0(-\mathbf{p},r).
\end{aligned}
$$

ただし、$\cos\theta_{\mathbf{p}} = |\mathbf{p}|/E_p$, $\sin\theta_{\mathbf{p}} = M/E_p$. ボゴリュウボフ変換はユニタリー演算子$\mathcal{U}(p,r)$を用いて次のように表すことができる;

$$\begin{pmatrix} a_{_M}(\mathbf{p},r) \\ b^\dagger_{_M}(-\mathbf{p},r) \end{pmatrix} = \mathcal{U}(\mathbf{p},r) \begin{pmatrix} a_0(\mathbf{p},r) \\ b^\dagger_0(-\mathbf{p},r) \end{pmatrix} \mathcal{U}^\dagger(\mathbf{p},r), \tag{7.13}$$

ここに、

$$\mathcal{U}(\mathbf{p},r) = \exp\{-\frac{\theta_{\mathbf{p}}}{2}(a^\dagger_0(\mathbf{p},r)b^\dagger_0(-\mathbf{p},r) - \text{h.c.})\}. \tag{7.14}$$

質量有りと質量無しの演算子の真空をそれぞれ$|\sigma_0\rangle$および$|0\rangle$と書くことにしよう：

$$a_{_M}(\mathbf{p},r)|\sigma_0\rangle \;=\; b_{_M}(\mathbf{p},r)|\sigma_0\rangle = 0, \tag{7.15}$$

$$a_0(\mathbf{p},r)|0\rangle \;=\; b_0(\mathbf{p},r)|0\rangle = 0. \tag{7.16}$$

さて、質量有り演算子$a^\dagger_{_M}(\mathbf{p},+1)$中の質量無し演算子$a^\dagger_0(\mathbf{p},R)$ $(b_0(-\mathbf{p},R))$はカイラリティを$+1$だけ生成 (消滅) させる。一方、$a^\dagger_0(\mathbf{p},R)$と$b_0(-\mathbf{p},R)$は両方ともヘリシティを$1$だけ生成する。したがって、$a^\dagger_{_M}(\mathbf{p},+1)$により生成された状態はヘリシティの固有状態であるが、カイラリティの固有状態ではない。同様に、1だけヘリシティを消す演算子$b^\dagger_{_M}(-\mathbf{p},+1)$は定まったカイラリティを持っていない。こうして、$\prod_{\mathbf{p},r} U(\mathbf{p},r)$を$|0\rangle$に作用させると定まったヘリシティーを持つがカイラリティの固有状態ではない状態が作られる；すなわち、$|\sigma_0\rangle$においてはカイラル対称性が自発的に破れている。

8　有限核でのカイラル対称性の部分的回復についての研究

核物質中でカイラル対称性が部分的に回復することが、QCD の低エネルギー定理やいくつかの模型計算で示唆されている。有限核でのカイラル対称性の可能な部分的回復およびシグマ中間子の検証を目的として、有限核にシグマ中間子を創生する実験を提案した。[6, 7] 自由空間でシグマ中間子を同定することは簡単なことではないが [9]、カイラル対称性が部分的に回復している可能性のある原子核中ではよりきれいにこの同定が行われ得る。

しかしながら、一般に有限密度系にハドロンを作ったとき、そのハドロンがその同一性を保持するとは限らない。 まわりの粒子と強く相互作用し「分解」し得るからである。そもそも、シグマ中間子の場合、自由空間でも$\sigma \leftrightarrow 2\pi$の過程を含めなければ、その記述は現実的ではないことにも注意しよう。このような場合、物理的に意味のある観測量はスペクトル関数$\rho(\omega,q)$である。これは、そのハドロンと同じ量子数およびエネルギーωと運動量qを系に与えたときに、系の応答を与える応答関数$R(\omega,q)$の虚部に等しい。 最近、$2\,\pi$との結合の効果を含めた、有限温度系でのスカラー-アイソスカラーチャンネル (以後、シグマチャンネルと呼ぶ) のスペクトル関数の計算が知久と初田によりなされた。[8] 彼らは、カイラル対称性が回復していくとき、シグマ中間子の質量の減少に対応するスペクトル関数のソフト化に伴い、$2m_\pi$の閾値付近でスペクトル関数が顕著に増大することを発見した。興味深いことは、この増大がカイラル対称性の比較的わずかな回復によっても見られることである。

カイラル対称性の回復に伴う、このようなスペクトル関数の増大は有限密度でも当然、予想できることである。実際、そうなることを簡単な線形シグマ模型で示し、また、そのよう

な増大がすでに実験で見つかっている可能性を指摘し、さらにこの事を検証するための有限核を用いたいくつかの実験を提案した。[10] この内容について、以下に少し詳しく報告する。

核物質中でカイラル対称性が部分的に回復することが、QCD の低エネルギー定理やいくつかの模型計算で示唆されている。有限核でのカイラル対称性の可能な部分的回復およびシグマ中間子の検証を目的として、有限核にシグマ中間子を創生する実験を提案した。[6, 7] 自由空間でシグマ中間子を同定することは簡単なことではないが [9]、カイラル対称性が部分的に回復している可能性のある原子核中ではよりきれいにこの同定が行われ得る。

しかしながら、一般に有限密度系にハドロンを作ったとき、そのハドロンがその同一性を保持するとは限らない。 まわりの粒子と強く相互作用し「分解」し得るからである。そもそも、シグマ中間子の場合、自由空間でも $\sigma \leftrightarrow 2\pi$ の過程を含めなければ、その記述は現実的ではないことにも注意しよう。このような場合、物理的に意味のある観測量はスペクトル関数 $\rho(\omega, q)$ である。これは、そのハドロンと同じ量子数およびエネルギー ω と運動量 q を系に与えたときに、系の応答を与える応答関数 $R(\omega, q)$ の虚部に等しい。 最近、$2\ \pi$ との結合の効果を含めた、有限温度系でのスカラー-アイソスカラーチャンネル (以後、シグマチャンネルと呼ぶ) のスペクトル関数の計算が知久と初田によりなされた。[8] 彼らは、カイラル対称性が回復していくとき、シグマ中間子の質量の減少に対応するスペクトル関数のソフト化に伴い、$2m_\pi$ の閾値付近でスペクトル関数が顕著に増大することを発見した。興味深いことは、この増大がカイラル対称性の比較的わずかな回復によっても見られることである。

カイラル対称性の回復に伴う、このようなスペクトル関数の増大は有限密度でも当然、予想できることである。実際、そうなることを簡単な線形シグマ模型で示し、また、そのような増大がすでに実験で見つかっている可能性を指摘し、さらにこの事を検証するための有限核を用いたいくつかの実験を提案した。[10] この内容について、以下に少し詳しく報告する。

9 有限密度媒質中でのカイラル対称性の回復に対する前駆現象

模型を用いた計算に入る前に、$2m_\pi$ 付近でのスペクトル関数の増大の一般性を概説しておこう。核媒質中でのシグマ中間子の伝播関数を構 $D_\sigma(\omega, q=0) = \omega^2 - m_\sigma^2 - \Sigma_\sigma(\omega;\rho)$ としよう。ここで、 m_σ は σ のトゥリーレベルの質量、そして $\Sigma_\sigma(\omega;\rho)$ はループ補正である。対応するスペクトル関数は

$$\rho_\sigma(\omega) = -\pi^{-1}\mathrm{Im}D_\sigma(\omega), \tag{9.17}$$

である。 1 -ループのオーダーでは、2 m_π の閾値付近で、$\mathrm{Im}\Sigma_\sigma \propto \theta(\omega - 2m_\pi)\sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{\omega^2}}$ となる。m_σ^* を $\mathrm{Re}D_\sigma^{-1}(\omega = m_\sigma^*) = 0$ で定義される媒質中の σ の有効質量としよう。カイラル対称性が回復していくとき、m_σ は m_π に近づいていく。したがって、 σ-π の縮退が起こり完全にカイラル対称性が完全に回復するよりも前に、$\mathrm{Re}D_\sigma^{-1}(\omega = 2m_\pi) = 0$ となる。このときの密度を ρ_c としよう。この密度では、スペクトル関数は自己エネルギーの虚数部のみで表される；

$$\rho_\sigma(\omega \simeq 2m_\pi) = -\frac{1}{\pi\ \mathrm{Im}\Sigma_\sigma} \propto \frac{\theta(\omega - 2m_\pi)}{\sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{\omega^2}}}. \tag{9.18}$$

これは、スペクトル関数が $2m_\pi$ の閾値で顕著な増大を示している。この増大はカイラル対称性の回復に伴うものであることを強調しておく。

9.1 線形シグマ模型を用いた計算

以上の議論をより定量的に示すために、$\rho_\sigma(\omega)$ を以下の線形 $\mathrm{SU}(2)\sigma$-模型で計算してみよう;

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\mathrm{tr}[\partial M \partial M^\dagger - \mu^2 M M^\dagger - \frac{2\lambda}{4!}(MM^\dagger)^2 - h(M + M^\dagger)]. \tag{9.19}$$

ここで、tr はフレーバーについて取る。また、 $M = \sigma + i\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}$. この模型は低エネルギーでのＱＣＤの精確な表現ではないが、１ GeV までのエネルギーの π-π 散乱の位相差をよく再現することが、Chan と Haymaker[15] によって示されている。結合定数等、μ^2, λ、 h は１-ループオーダーで、自由空間での $f_\pi = 93$ MeV, $m_\pi = 140$ MeV および s-波の π-π 散乱の位相差を再現するように決定された。

核子のパートと核子-中間子相互作用は

$$\mathcal{L}_I(N, M) = -g\chi\bar{N}U_5 N - m_0\bar{N}U_5 N, \tag{9.20}$$

で与えられる。ここで、極表示 $\sigma + i\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}\gamma_5 \equiv \chi U_5$ を取った。(9.20) の g に比例する項は標準的なカイラル不変な結合である。m_0 を含む第二項は通常は取り入れらていないが、この項もカイラル不変であり、排除する理由はないことに注意しておく。

カイラル対称性が破れているとき ($\langle\sigma\rangle_{\mathrm{vac}} \equiv \sigma_0 \neq 0$), eq.(9.20) を σ/σ_0 と $\vec{\pi}/\sigma_0$ で展開する: 注目すべきことは m_0 項のため、通常の関係 $g_s = g_p$ が緩和されることである。

以下では, 中間子のループによる量子補正と密度の効果を摂動で扱う。したがって、ここでの取り扱いは低密度でのみ妥当である。

核物質中のカイラル凝縮体 $\langle\sigma\rangle$ を、$\langle\sigma\rangle \equiv \sigma_0\,\Phi(\rho)$ と表そう。線形(低密度)近似で、$\Phi(\rho) = 1 - C\rho/\rho_0$ と書ける。ここに、$C = (g_{\mathrm{s}}/\sigma_0 m_\sigma^2)\rho_0$。$g_{\mathrm{s}}$ の代わりに Φ をカイラル対称性の回復の度合いを表すパラメターとして用いることにする。$\Phi(\rho = \rho_0)$ での Φ の値は $0.7 \sim 0.9$ であると考えられる [11]。

図にはスペクトル関数を $\mathrm{Re}D_\sigma^{-1}(\omega)$ と共に示している。丁度 $2m_\pi$ あたりにスペクトル関数の特徴的な増大が見て取れる。前にも書いたように、この増大が m_σ^* と m_π の縮退が起こる臨界点以前ですでに見られることは注目に値する。

最近、CHAOS グループは質量数 A が 2 から２０８わたる原子核を標的とする反応 $M^A_{\pi^+\pi^\pm}$ から得られる $\pi^+\pi^\pm$ の不変質量のスペクトルを計測し、次のような興味深い結果を得ている [12]：$A = 2$ のとき、 $M^A_{\pi^+\pi^-}$ が $2m_\pi$ 閾値付近ではスペクトル関数はほとんど 0 に等しいが、A の増大に伴い、$I = J = 0$ チャンネルでは劇的に増大する。このような増大は $\pi^+\pi^+$ 対にたいしては見られない。この実験の結果は我々の結果と非常によく似ている。すなわち、この実験は有限密度でカイラル対称性の回復の証拠をすでに与えている可能性がある。[8]

このことを、実験的に確証するために、ハドロンやフォトンを入射粒子とする反応による $2\pi^0$[13] や 2γ[14] の計測が有効である。また、有限の運動量移行を伴う反応の場合、有限密度で起こる scalar-vector 混合による軽粒子対を計測することも意味がある [?]。

[8] ＣＨＡＯＳのデータの他の立場からの理論的研究については、[16] を参照。

(d, ^{3}He) は入射束が大きいので、このスペクトルの増大の探求に有用である。$2m_\pi < \omega <$ 750 MeV の範囲のエネルギーに対応するスペクトル関数を得る為には、重陽子の入射運動エネルギー E は実験室系で $1.1\text{GeV} < E < 10$ GeV であればよい。

今後の課題としては、2 ループ以上の効果を取り入れること、更には有限密度系のカイラル対称な系統的な取り扱いをすることがある。しかし、これらの効果を取り入れても、2 m_π 閾値付近のスペクトル関数の増大という定性的結果は変更されないと考えられる。

詳しい内容は初田哲男、清水肇両氏との共著の論文 [10] を参照願います。両氏の共同に感謝します。

参考文献

[1] T. Kunihiro, Prog. Theor. Phys. **97**,179 (1997).

[2] T. Kunihiro and J. Matsukidaira, Phys. Rev. **E**4817,(1998).

[3] T. Kunihiro, Phys. Rev. **D57**, R2035 (1998); Prog. Theor. Phys. Supple. **131**, 459 (1998).

[4] T. Hatsuda, T. Kunihiro and T. Tanaka, Phys. Rev. Lett. **78**, 3229 (1997).

[5] T. Kunihiro, Prog. Theor. Phys. Supple. **127**, 219 (1997).

[6] T. Kunihiro, Proceedings of XV RCNP Osaka Int. Symp. *FRONTIER 96*, (World Scientific 1996).

[7] T. Kunihiro, Prog. Theor. Phys. Supplement **120**, 75 (1995).

[8] S. Chiku and T. Hatsuda, Phys. Rev. **D57**, R6 (1998), ibid. **D58**, 076001 (1998).

[9] Particle Data Group, Eur. Phys. J. **C** 363, 390 (1998). See also the recent analyses of σ: N. A. Törnqvist and M. Roos, Phys. Rev. Lett. **76**, 1575 (1996); M. Harada, F. Sannino and J. Schechter, Phys. Rev. **D54**, 1991 (1996); S. Ishida et al., Prog. Theor. Phys. **98**, 1005 (1997); J. A. Oller, E. Oset and J. R. Peláez, Phys. Rev. Lett. **80**, 3452 (1998); K. Igi and K. Hikasa, `hep-ph/9807326`.

[10] T. Hatsuda, T. Kunihiro and H. Shimizu, `nucl-th/9810022`

[11] G. E. Brown and M. Rho, Phys. Rep. **269**, 333 (1996).

[12] F. Bonutti et al. (CHAOS Collaboration), Phys. Rev. Lett. **77**, 603 (1996).

[13] H. Shimizu, in Proceedings of *XV RCNP Osaka International Symposium, Nuclear Physics Frontiers with Electro-weak Probes (FRONTIER 96)*, (Osaka, March 7-8, 1996), p.161.

[14] T. Hatsuda and T. Kunihiro, Phys. Rep. **247**, 221 (1994).

[15] L. H. Chan and R. W. Haymaker, Phys. Rev. **D7**, 402 (1973); ibid. **D10**, 4170 (1974).

[16] Z. Aouissat, R. Rapp, G. Chanfray, P. Schuck and J. Wambach, Nucl. Phys. **A581**, 471 (1995). R. Rapp, J. W. Durso and J. Wambach, Nucl. Phys. **A596**, 436 (1996) and references therein.; H. C. Chiang, E. Oset, and M. J. Vicente-Vacas, Nucl. Phys. **A644**, 77 (1998).