

# 補助場を用いた非線形模型の解析<sup>1</sup> — Non-SUSY and SUSY Models —

関西地域合宿 (2000 6/25)

木村 哲士 (大阪大学 M2)

## contents

1. Introduction
2. Non-Supersymmetric Model
3. Supersymmetric Model
4. Discussion

---

<sup>1</sup>supported by Prof. Higashijima, Dr. Nitta, and Dr. Tsuzuki.

# 1 Introduction

- 道具  
2次元時空、Large  $N$  展開法<sup>2</sup>、超場<sup>3</sup>、etc。
- 重要だけど見ない現象  
漸近的自由性、インスタントン、etc。

## 1.1 What is Sigma Model ?

Minkowski 空間から何か他の空間 (target space) への写像。場はある変換に対して線形に振舞う。これに拘束条件を加えた物を **Nonlinear Sigma Model** と呼ぶ。

## 1.2 How to use Sigma Model

PCAC 仮説、低エネルギー現象論、(超) 弦理論、etc。

## 1.3 調べたい事柄

摂動解以外に非摂動的な解があるか、それはどんな解か。摂動解が2次元では許されない場合がある。(Goldstone boson が存在できない。) したがって、(存在するなら) 対称性を破らない解の存在を探したい。

---

<sup>2</sup>see “Aspects of Symmetry”, Cambridge.

<sup>3</sup>see “Supersymmetry and Supergravity”, Princeton.

## 2 Non-Supersymmetric Models

### 2.1 $O(N)$ Model

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i \quad : \text{Sigma Model} \quad (i = 1, \dots, N),$$
$$+ \phi_i(x) \phi_i(x) = \frac{1}{g^2} \quad : \text{constraint}, \quad g^2 N : \text{fixed}.$$

$$\Downarrow$$
$$\phi_k = \pi_k, \quad \phi_N = \left[ \frac{1}{g^2} - \sum_{k=1}^{N-1} (\pi_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$
$$\mathcal{L} = g_{k\ell}(\pi) \partial_\mu \pi^k \partial^\mu \pi^\ell.$$

#### $O(N)$ Nonlinear sigma model

- target space :  $O(N)/O(N-1) = S^{N-1}$
- 非線形なので解析方法が難解。

補助場を導入して線形化したい

とにかく、まず生成汎関数を定義しよう。

## partition function, effective action :

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\phi_i \left( \prod_x (\phi_i^2 - \frac{1}{g^2}) \right) \exp \left( i \int d^2x \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_i)^2 \right) \\ &= \int \mathcal{D}\phi_i \mathcal{D}\lambda \exp \left( \frac{i}{2} \int d^2x \left\{ (\partial_\mu \phi_i)^2 - \lambda \left[ \phi_i^2 - \frac{1}{g^2} \right] \right\} \right). \end{aligned}$$

$\lambda(x)$  : 補助場  $\rightarrow$  線形化された!

$\phi_i(x)$  を、定数部分 (古典解)  $\varphi_i$  と量子的揺らぎ  $\phi'_i$  に分ける。

$$\phi_i(x) = \varphi_i + \phi'_i(x),$$

$$\langle \phi_i(x) \rangle \equiv \varphi_i, \quad \int d^2x \phi'_i(x) = 0,$$

$\phi'_i$  を integrate out  $\Rightarrow$  **effective action** の導出

( $\mathcal{D}\phi_i = \mathcal{D}\phi'_i$ ,  $\phi'_i$  について Gauss 積分を実行)

$$Z = \int \mathcal{D}\lambda \exp(iS_{\text{eff}}),$$

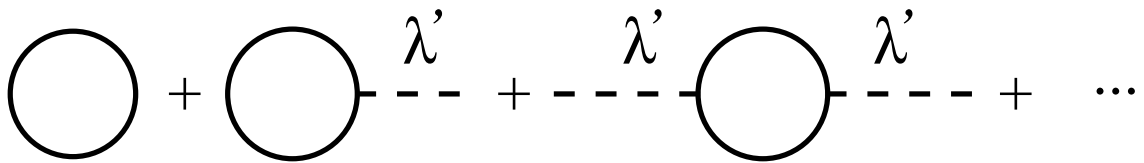
$$S_{\text{eff}} = -\frac{1}{2} \left[ \varphi_i^2 - \frac{1}{g^2} \right] \int d^2x \lambda + \frac{iN}{2} \text{Tr} \log(\partial^2 + \lambda).$$

Large  $N$  展開により、量子効果がどこまでかを検討しよう。

$$\lambda(x) \equiv \lambda_c + \lambda'(x), \quad \int d^2x \lambda'(x) = 0,$$

として  $S_{\text{eff}}$  がどこまで  $\lambda'(x)$  で展開できるか、つまり何次の量子補正まで有効か、をみる。

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \log(\partial^2 + \lambda) \\ &= \text{Tr} \log(\partial^2 + \lambda_c) \\ &+ \text{Tr} \left[ \frac{1}{\partial^2 + \lambda_c} \lambda' \right] - \frac{1}{2!} \text{Tr} \left[ \frac{1}{\partial^2 + \lambda_c} \lambda' \frac{1}{\partial^2 + \lambda_c} \lambda' \right] + \dots . \end{aligned}$$



生成汎関数の指数部分は order  $N$  であり、Large  $N$  limit をとるとこれ以上の補正は **大きく dump !!**

effective potential :

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}[\varphi_i, \lambda(x) = \lambda_c] &= -V_{\text{eff}}(\varphi_i, \lambda_c) \int d^2x , \\ V_{\text{eff}}(\varphi_i, \lambda_c) &= \frac{1}{2} \lambda_c \left[ \varphi_i^2 - \frac{1}{g^2} \right] \\ &+ \frac{N}{2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \log(-k^2 + \lambda_c) \\ &- \frac{N}{2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \log(-k^2 + \epsilon) , \end{aligned}$$

$0 < \epsilon \ll 1$  : infrared cut-off parameter .

系の真空 : effective potential の停留点。

真空期待値 : その停留点での constant fields の値。

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varphi_i} V_{\text{eff}}(\varphi_i) \right|_{\varphi_i = \varphi_i^*} = 0, \quad \varphi_i^* : \text{真空期待値},$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda_c} V_{\text{eff}}(\lambda_c) \right|_{\lambda_c = \lambda_c^*} = 0, \quad \lambda_c^* : \text{真空期待値}.$$

$$0 = \lambda_c^* \varphi_i^*, \quad \frac{1}{g^2 N} = \frac{\varphi_i^{*2}}{N} + \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{1}{\lambda_c^* - k^2}.$$

- $\lambda_c^* = \varphi_i^* = 0 :$

$\Rightarrow (g^2 N \rightarrow -0) :$ 不適!

- $\lambda_c^* = 0, \varphi_i^* \neq 0 :$

$\Rightarrow O(N)$  symmetry breaking !!

**Coleman's theorem により許されない!!**

- $\varphi_i^* = 0, \lambda_c^* \neq 0 :$ non-zero mass を獲得! 安定な真空!

真空期待値がゼロ  $\Rightarrow O(N)$  symmetry を持っている!

つまり、

**Large  $N$  展開を用いて非摂動的振舞いを見ると、  
摂動展開では自発的に破れる対称性が回復している!  
また、赤外発散を抑える形で質量も獲得する!!**

### 3 Supersymmetric Models

#### 3.1 Supersymmetric $O(N)$ Models ( $\mathcal{N} = 2$ )

1. 4次元超場形式で  $O(N)$  model を与える。
2. 2次元に dimensional reduction する。



**2D super  $O(N)$  model ( $\mathcal{N} = 2$ )**

superfield, Lagrangian, constraints in 4D :

$$\begin{aligned}\phi_i(x, \theta) &= A_i(y) + \sqrt{2}\theta\psi_i(y) + \theta\theta F_i(y) , \\ y^m &= x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta} , \quad m = 0, 1, 2, 3 , \\ \mathcal{L} &= \int d^4\theta\phi_i^\dagger\phi_i + \left\{ \int d^2\theta\phi_0(\phi_i^2 - a^2) + (\text{c.c.}) \right\} .\end{aligned}$$

解析するために component fields で書き直す !

## Lagrangian, auxiliary fields in 2D :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu X_i)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu Y_i)^2 + i\bar{\psi}_i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_i + \frac{1}{2}(G_i^2 + H_i^2) \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}}G_0 [(X_i^2 - Y_i^2) - 2a^2] - \sqrt{2}H_0 X_i Y_i \\
& + \sqrt{2}G_i [X_i X_0 - Y_i Y_0] - \sqrt{2}H_i [X_i Y_0 + X_0 Y_i] \\
& + \sqrt{2}X_i (\bar{\psi}_i \psi_0 + \bar{\psi}_0 \psi_i) + \sqrt{2}Y_i (\bar{\psi}_i i\gamma_5 \psi_0 + \bar{\psi}_0 i\gamma_5 \psi_i) \\
& + \sqrt{2}X_0 (\bar{\psi}_i \psi_i) + \sqrt{2}Y_0 (\bar{\psi}_i i\gamma_5 \psi_i) .
\end{aligned}$$

$X_i, Y_i, G_i, H_i, X_0, Y_0, G_0, H_0$  : **real fields** ,

$\psi_i, \psi_0$  , : **Dirac spinors in 2D** .

念のため、補助場を消して、元の Lagrangian を見てみよう。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu X_i)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu Y_i)^2 + i\bar{\psi}_i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_i \\
& + \frac{1}{2}(X_i^2 + Y_i^2)^{-1} \left\{ (\bar{\psi}_i \psi_i)^2 + (\bar{\psi}_i i\gamma_5 \psi_i)^2 \right\} , \\
& X_i^2 - Y_i^2 = 2a^2 , \quad X_i Y_i = 0 , \\
& \bar{\psi}_i (X_i + i\gamma_5 Y_i) = 0 , \quad (X_i + i\gamma_5 Y_i) \psi_i = 0 .
\end{aligned}$$

↑

**$O(N)$  model 2 つと chiral Gross-Neveu model の組み合わせ**



**partition function, effective action :**

$$\begin{aligned}
Z &= \int \mathcal{D}\phi_i \mathcal{D}\phi_0 \exp \left( i \int d^2 x \mathcal{L} \right) = \int \mathcal{D}\phi_0 \exp (iS_{\text{eff}}) , \\
S_{\text{eff}} &= \int d^2 x \Gamma' \\
&\quad + \frac{iN}{2} \text{Tr} \log \det [D^{-1}] - iN \text{Tr} \log \det [S^{-1}] , \\
D^{-1} &= \begin{pmatrix} \Delta_X^{-1} & \Delta_{XY}^{-1} \\ \Delta_{XY}^{-1} & \Delta_Y^{-1} \end{pmatrix} , \\
S^{-1} &= i\gamma^\mu \partial_\mu + \sqrt{2}(X_0 + i\gamma_5 Y_0) ,
\end{aligned}$$

**effective potential :**

$$\begin{aligned}
X_0 &= X_c, Y_0 = Y_c, G_0 = G_c, H_0 = H_c, \psi_0 = \bar{\psi}_0 = 0 , \\
V_{\text{eff}} &= -N \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2 i} \log [-k^2 + 2M^2] \\
&\quad + \frac{N}{2} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2 i} \log [-k^2 + 2M^2 - \sqrt{2}(G_c^2 + H_c^2)^{\frac{1}{2}}] \\
&\quad + \frac{N}{2} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2 i} \log [-k^2 + 2M^2 + \sqrt{2}(G_c^2 + H_c^2)^{\frac{1}{2}}] \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} X_i^{c2} [G_c - \sqrt{2}M^2] + \frac{1}{\sqrt{2}} Y_i^{c2} [G_c + \sqrt{2}M^2] \\
&\quad + \sqrt{2}a^2 G_c - \sqrt{2}H_c X_i^c Y_i^c , \\
M^2 &\equiv (X_c^2 + Y_c^2) .
\end{aligned}$$

vacuum, vacuum expectation values :

$$\left. \frac{\partial}{\partial X_i^c} V_{\text{eff}} \right|_{X_i^c = X_i^*} = 0 ,$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial Y_i^c} V_{\text{eff}} \right|_{Y_i^c = Y_i^*} = 0 ,$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial M} V_{\text{eff}} \right|_{M = M^*} = 0 ,$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial G_c} V_{\text{eff}} \right|_{G_c = G_c^*} = 0 ,$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial H_c} V_{\text{eff}} \right|_{H_c = H_c^*} = 0 ,$$

これら全てをみたます停留点を

$(X_i^*, Y_i^*, M^*, G_c^*, H_c^*)$  と表記する。

constraint の値  $a^2$  は次の 2 通り取ることができる。

$$a^2 = +\frac{1}{\sqrt{2}g^2} , 0 .$$

$a^2 = 1/(\sqrt{2}g^2)$  のとき以下の候補が挙げられる。

- $(X_i^*, 0, 0, 0, 0)$  : 不適?

supersymmetry、chiral symmetry を保つ。  $V_{\text{eff}} = 0$  が最小点。  
しかし、 $O(N)$  を破っている !!<sup>4</sup>

- $(0, Y_i^*, 0, 0, 0)$  : 不適?

supersymmetry、chiral symmetry を保つ。  $V_{\text{eff}} = 0$  が最小点。  
しかし、これも  $O(N)$  を破っている !!  
さらに、 $g^2 N < 0$  となる。

- $(X_i^*, Y_i^*, 0, 0, 0)$  : 不適?

supersymmetry、chiral symmetry を保つ。  $V_{\text{eff}} = 0$  が最小点。  
しかし、これも同じく  $O(N)$  を破っている !!

- $(0, 0, M^*, 0, 0)$  : 不適?

supersymmetry、 $O(N)$  symmetry を保つ。  $V_{\text{eff}} = 0$  が最小点。  
chiral symmetry を破る (?)。 (Dirac fermion が mass を持つ。)  
さらに、 $g^2 N \rightarrow \infty$  となる。

これら以外の解は、存在したとしても全て  $V_{\text{eff}} > 0$  となり、supersymmetry を破る。




---

<sup>4</sup>実は Coleman's theorem を回避することが可能かも知れない。

$a^2 > 0$  は不適?

要因 :

- supersymmetry が強すぎて、UV を打ち消しあってくれたが、IR も消しすぎて、coupling が finite にならない。

一方、 $a^2 = 0$  のとき、

$$(0, 0, M^*, 0, 0) ,$$

が最も最適。

- supersymmetry、 $O(N)$  symmetry を保つ。  
(continuous chiral symmetry については、まだ良く分からない<sup>5</sup>。)
- これも  $V_{\text{eff}} = 0$  が最小点。

---

<sup>5</sup>Ed. Witten, Nucl. Phys. **B 145**, 110 (1978). を参照。

## 4 Discussion

### 4.1 Various models

ここでの話の起源は、Nonlinear Sigma Model に補助場を導入して線形化し、Large  $N$  展開を用いて解析する、というもの。

しかし、

$CP^{N-1}$  model 以外、  
2D  $\mathcal{N} = 2$  model は まだ与えられていない!!

(らしい)<sup>6</sup>



先程の **Supersymmetric  $O(N)$  model** のように、

与えられている Lagrangian を表示して、  
2次元に reduction して、  
Large  $N$  展開を用いて解析すれば良い!!

---

<sup>6</sup>Grassmannian  $G_{N,M}(C)$  も既にあるらしい。

## これからすべき事

- ゲージ場の考察。
- くりこみなどを行い、漸近的自由性を考察。
- 共形不変性などを持っているか、さらに高い対称性を入れられるか。
- string や D-brane など、できればそれ以上にも応用したい。
- などなど。