京都大学 基礎物理学研究所
「場の量子論の基礎的諸問題と応用」
(2001 年 12 月 21 日)

Gauge Theoretical Construction of Non-compact Calabi-Yau Manifolds

木村 哲士

大阪大学大学院 理学研究科 素粒子論研究室

based on Phys. Lett. B518 (2001) 301, hep-th/0107100
hep-th/0108084 (to appear in Nucl. Phys. B)
and hep-th/0110216
in collaboration with K. Higashijima and M. Nitta

Introduction

1-loop 繰り込みで有限な SUSY Nonlinear Sigma Model の探求

Ricci-flat Kähler 多様体 (coset construction)

Non-compact Calabi-Yau 多様体を構成

具体的には · · ·

SNLSM as Gauge Theories (compact Kähler) を応用

$\Downarrow$

Complex Line Bundle の出現, 特に

Hermitian Symmetric Spaces $+$ complex line

target 空間は

特異点が回避されている多様体とみなされる

Gauge Theoretical Construction

SUSY Nonlinear Sigma Models as Gauge Theory を応用

Grassmann $G_{N,M}$:

$$\Phi : N \times M \text{ matrix-valued chiral superfield}$$

Lagrangian ($U(M)^{\mathbb{C}}$ gauge group):

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta \left\{ \mathrm{tr}(\Phi^\dagger \Phi e^V) - c\, \mathrm{tr} V \right\}.$$

V : vector superfield (non-compact 方向の自由度を gauged away)

$\Longrightarrow$ 積分すると非線形模型, target 空間が Grassmann $G_{N,M}$

gauge-fixing: $\Phi = \begin{pmatrix} 1_M \\ \varphi_{Aa} \end{pmatrix}$,

φ_{Aa} : $(N-M) \times M$ matrix-valued chiral superfield

$$\mathcal{K} = c \log \det \left(1_M + \varphi^\dagger \varphi\right) \equiv c \cdot \Psi$$

$$G_{N,M} = \frac{U(N)}{U(N-M) \times U(M)}$$

多様体としては compact かつ $(Ric) > 0$

Ricci-flat 多様体を構成したい

$\Downarrow$

$U(1)$ 群を ungauged して non-compact 多様体にする

line bundle over $G_{N,M}$:

general $U(M)$ gauge symmetric Lagrangian:

$$\mathcal{K}_0(\Phi,\Phi^\dagger,V)=f(\mathrm{tr}(\Phi^\dagger\Phi e^V))-c\,\mathrm{tr}V$$

f : $\mathrm{tr}(\Phi^\dagger\Phi e^V)$ の任意関数, $V=V^aT_a$, $T_a\in U(M)$

c : FI constant $\longrightarrow$ real superfield C に格上げ

$$\Downarrow$$

$$「\partial\mathcal{L}/\partial C=-\mathrm{tr}V=0」\;\Rightarrow\;「U(M)^{\mathbb{C}}\to SU(M)^{\mathbb{C}}」$$

$$\mathcal{K}_0\equiv\mathcal{K}(X)\,,\quad X=\log\det\Phi^\dagger\Phi$$

C を導入 $=U(1)^{\mathbb{C}}$ 部分を ungauged

ungauged した分

多様体として複素 1 次元が non-compact 方向に伸びる

最も簡単な複素 1 次元の追加方法:

$$\Phi=\sigma\begin{pmatrix}1_M\\ \varphi_{Aa}\end{pmatrix},\quad\sigma\in\mathbb{C}^1\quad\Longrightarrow\quad X=M^2\log|\sigma|^2+\Psi$$

Ricci tensor:

$$(Ric)_{\mu\nu^*}=-\partial_\mu\partial_{\nu^*}\log\det g_{\kappa\lambda^*},\quad g_{\mu\nu^*}=\partial_\mu\partial_{\nu^*}\mathcal{K}(X)$$

Ricci-flat condition:

$$(Ric)_{\mu\nu^*}=0\quad\longrightarrow\quad\begin{cases}\det g_{\mu\nu^*}=(\text{constant})\times|F|^2\\ F=\text{holomorphic function}\end{cases}$$

determinant:

$$\det g_{\mu\nu^*} = \frac{1}{|\sigma|^2}\frac{d^2\mathcal{K}}{dX^2}\left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{M(N-M)} \cdot \det \widetilde{g}_{ij^*} \quad \left(\partial_i\partial_{j^*}X = \partial_i\partial_{j^*}\Psi \equiv \widetilde{g}_{ij^*}\right)$$

Ricci-flat condition は偏微分方程式

一般には解析不能

しかし，

Grassmann $G_{N,M}$ は Einstein-Kähler:

$$-\partial_i\partial_{j^*}\log\det\widetilde{g}_{kl^*} = (\widetilde{Ric})_{ij^*} = \mathcal{C}\,\widetilde{g}_{ij^*} = \mathcal{C}\,\partial_i\partial_{j^*}\Psi$$

$$\longrightarrow \det\widetilde{g}_{ij^*} = \exp(-\mathcal{C}\Psi)$$

$\mathcal{C}$: cosmological constant {群 G から決まる $(= N)$}

Ricci-flat condition:

$$(\text{constant}) = e^{-NX}\frac{d}{dX}\left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{M(N-M)+1}$$

$$\frac{d\mathcal{K}}{dX} = \left(\lambda e^{NX} + b\right)^{\frac{1}{D}}$$

λ : positive real parameter

b : integration constant, 非常に重要な parameter

$$D = M(N-M)+1$$

特徴

$b \neq 0$ での metric: $\sigma = 0$ で潰れるが curvature は有限

$z^\mu = (\sigma, \varphi^i)$ は座標特異点 $(\sigma = 0)$ を持つ

$\Downarrow$

座標変換：$\rho \equiv \dfrac{\sigma^{MN}}{MN}$

$\rho = 0$ $(d\rho = 0)$ 部分多様体:

$$g_{ij^*}\Big|_{\rho=0} = b^{\frac{1}{D}} \partial_i \partial_{j^*} \Psi \qquad \Longleftarrow \qquad G_{N,M} \text{ の metric そのもの}$$

任意の $\rho \neq 0$ $(d\rho = 0)$ 部分多様体も $G_{N,M}$ で構成される

complex line bundle over $G_{N,M}$

$b = 0$: 原点に特異点

$\Downarrow$

$b =$ 特異点回避の parameter

Hermitian Symmetric Spaces:

† 拘束を課す: $G_{2N,N}$ + Superpotential

$$G_{2N,N} + \{\varphi^T = \varphi\} \Longrightarrow \frac{Sp(N)}{U(N)}$$

$$G_{2N,N} + \{\varphi^T = -\varphi\} \Longrightarrow \frac{SO(2N)}{U(N)}$$

† non-Abelian gauge group を $U(1)$ のみにする $(M = 1)$

$$G_{N,1} \ \Rightarrow \ \mathbb{C}P^{N-1}$$

† $\mathbb{C}P^{N-1}$ に拘束を課す: $\mathbb{C}P^{N-1}$ + Superpotential

$$\mathbb{C}P^{N-1} + \{\vec{\phi}^2 = 0\} \ \Rightarrow \ \frac{SO(N)}{SO(N-2) \times U(1)} \equiv Q^{N-2}$$

$$\mathbb{C}P^{26} + \{\Gamma_{ijk}\phi^i\phi^j\phi^k = 0\} \ \Rightarrow \ \frac{E_6}{SO(10) \times U(1)}$$

$$\mathbb{C}P^{55} + \{d_{\alpha\beta\gamma\delta}\phi^\alpha\phi^\beta\phi^\gamma\phi^\delta = 0\} \ \Rightarrow \ \frac{E_7}{E_6 \times U(1)}$$

これらの complex line bundle も同様に構成できる

Summary and Discussions

Gauge theory を用いた compact な Kähler 多様体

$\Downarrow$

$U(1)$ ungauged $\Rightarrow$ non-compact Kähler 多様体の導出

Einstein-Kähler $\Rightarrow$ 「Ricci-flat 条件 $=$ 常微分方程式」

座標変換 $\rho \sim \sigma^n$ $\Rightarrow$ 座標特異点消失

積分定数 $b \neq 0$ $\Rightarrow$ 特異点消失

$\rho = 0$ 部分多様体 $=$ 「compact Kähler 多様体」

$\Downarrow$

Complex line bundle over compact Kähler manifolds

$\Downarrow$

Non-compact Calabi-Yau manifolds

課題:

多様体の大域的な構造/無限遠の構造

他の Kähler 多様体への応用

超共形場理論の構成

Supergravity/Superstring, D-branes への応用

Compact Kähler manifolds

projective space: $\mathbb{C}P^{N-1} = SU(N)/[SU(N-1)\times U(1)]$

$\vec{\phi}\in\mathbb{C}^N$: $\vec{\phi}\sim\lambda\vec{\phi}$, $\lambda\in\mathbb{C}^1$ で同一視

$\vec{\phi}^T = \left(1,\varphi^i\right)$, $(i=1,2,\cdots,N-1)$ 座標系を選択

同一視の下で不変な Kähler potential Ψ:

$$\Psi = c\log\vec{\phi}^\dagger\vec{\phi} = c\log\left\{1+|\varphi^i|^2\right\}, \quad c = \text{constant}$$

quadric surface: $Q^{N-2} = SO(N)/[SO(N-2)\times U(1)]$

$\mathbb{C}P^{N-1}+[\vec{\phi}^2=0]$:

$\vec{\phi}^T = \left(1,\varphi^i,-\frac{1}{2}(\varphi^i)^2\right)$, $(i=1,2,\cdots,N-2)$ 座標系を選択

$$\Psi = c\log\vec{\phi}^\dagger\vec{\phi} = c\log\left\{1+|\varphi^i|^2+\frac{1}{4}(\varphi^i)^2(\varphi^{*j})^2\right\}$$

例外群: $E_6/[SO(10)\times U(1)]$, $E_7/[E_6\times U(1)]$

$\mathbb{C}P^{26}+[\Gamma_{ijk}\phi^j\phi^k=0]$, $\mathbb{C}P^{55}+[d_{\alpha\beta\gamma\delta}\phi^\beta\phi^\gamma\phi^\delta=0]$:

Γ_{ijk}: rank-3 symmetric tensor invariant under E_6

$d_{\alpha\beta\gamma\delta}$: rank-4 symmetric tensor invariant under E_7

$[E_6]$: $\vec{\phi}^T = \left(1,\varphi_\alpha,-\frac{1}{2\sqrt{2}}\varphi C\sigma_A^\dagger\varphi\right)$, $(\alpha=1,2,\cdots,16;\ A=1,2,\cdots,10)$

$$\Psi = c\log\left\{1+|\varphi_\alpha|^2+\frac{1}{8}|\varphi C\sigma_A^\dagger\varphi|^2\right\}$$

$[E_7]$: $\vec{\phi}^T = \left(1,\varphi^i,\frac{1}{2}\Gamma_{ijk}\varphi^j\varphi^k,\frac{1}{6}\Gamma_{ijk}\varphi^i\varphi^j\varphi^k\right)$, $(i=1,2,\cdots,27)$

$$\Psi = c\log\left\{1+|\varphi^i|^2+\frac{1}{4}|\Gamma_{ijk}\varphi^j\varphi^k|^2+\frac{1}{36}|\Gamma_{ijk}\varphi^i\varphi^j\varphi^k|^2\right\}$$

Ricci-flat solution and coordinate transformation:

$$\frac{d\mathcal{K}}{dX} = \left(\lambda e^{\mathcal{C}X} + b\right)^{\frac{1}{D}} , \quad \rho = \sigma^n/n .$$

Hermitian symmetric spaces:

type	$\mathbb{C} \ltimes G/H$	D	$\mathcal{C}$	n
AIII_1	$\mathbb{C} \ltimes \mathbb{C}P^{N-1}$	$1+(N-1)$	N	N
AIII_2	$\mathbb{C} \ltimes G_{N,M}$	$1+M(N-M)$	N	MN
BDI	$\mathbb{C} \ltimes Q^{N-2}$	$1+(N-2)$	$N-2$	$N-2$
CI	$\mathbb{C} \ltimes Sp(N)/U(N)$	$1+\frac{1}{2}N(N+1)$	$N+1$	$N(N+1)$
DIII	$\mathbb{C} \ltimes SO(2N)/U(N)$	$1+\frac{1}{2}N(N-1)$	$N-1$	$N(N-1)$
EIII	$\mathbb{C} \ltimes E_6/[SO(10)\times U(1)]$	$1+16$	12	12
EVII	$\mathbb{C} \ltimes E_7/[E_6\times U(1)]$	$1+27$	18	18

$$D = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \ltimes G/H) , \quad \mathcal{C} = \frac{1}{2}C_2(G)$$

$$Q^1 \simeq \mathbb{C}P^1 \simeq SO(4)/U(2) \simeq Sp(1)/U(1)$$
$$Q^2 \simeq \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$$
$$Q^3 \simeq Sp(2)/U(2)$$

$$\mathbb{C}P^3 \simeq SO(6)/U(3)$$
$$Q^4 \simeq G_{4,2}$$
$$G_{N,M} \simeq G_{N,N-M}$$

Grassmann: $G_{N,M} = U(N)/[U(N-M) \times U(M)]$

$\Phi : N \times M$ matrix, $\Phi \sim \Phi V$ $[V \in U(M)]$ で同一視

$\Phi = \begin{pmatrix} 1_M \\ \varphi_{Aa} \end{pmatrix}$, $(A = 1, 2, \cdots, N-M;\ a = 1, 2, \cdots, M)$ の座標系

同一視の下で不変な Kähler potential Ψ:

$$\Psi = c \log \det \Phi^\dagger \Phi = c \log \det \left\{ 1_M + \varphi^\dagger \varphi \right\}$$

$Sp(N)/U(N)$

$G_{2N,N} + [\varphi^T - \varphi = 0]$:

$\Phi = \begin{pmatrix} 1_N \\ \varphi_{ab} \end{pmatrix}$, $(1 \le a \le b \le N)$ の座標系

$$\Psi = c \log \det \Phi^\dagger \Phi = c \log \det \left\{ 1_N + \varphi^\dagger \varphi \right\}$$

$SO(2N)/U(N)$

$G_{2N,N} + [\varphi^T + \varphi = 0]$:

$\Phi = \begin{pmatrix} 1_N \\ \varphi_{ab} \end{pmatrix}$, $(1 \le a < b \le N)$ の座標系

$$\Psi = c \log \det \Phi^\dagger \Phi = c \log \det \left\{ 1_N + \varphi^\dagger \varphi \right\}$$

Hermitian symmetric spaces

type	G/H	$\dim_{\mathbb{C}}(G/H)$	Kähler potential Ψ
$AIII_1$	$\mathbb{C}P^{N-1}$	$N-1$	$c\log\{1+\lvert\varphi^i\rvert^2\}$
$AIII_2$	$G_{N,M}$	$M(N-M)$	$c\log\det\{1_M+\varphi^\dagger\varphi\}$
BDI	Q^{N-2}	$N-2$	$c\log\{1+\lvert\varphi^i\rvert^2+\frac{1}{4}(\varphi^i)^2(\varphi^{*j})^2\}$
CI	$\dfrac{Sp(N)}{U(N)}$	$\dfrac{1}{2}N(N+1)$	$c\log\det\{1_N+\varphi^\dagger\varphi\}$
DIII	$\dfrac{SO(2N)}{U(N)}$	$\dfrac{1}{2}N(N-1)$	$c\log\det\{1_N+\varphi^\dagger\varphi\}$
EIII	$\dfrac{E_6}{SO(10)\times U(1)}$	16	$c\log\{1+\lvert\varphi_\alpha\rvert^2+\frac{1}{8}\lvert\varphi C\sigma_A^\dagger\varphi\rvert^2\}$
EVII	$\dfrac{E_7}{E_6\times U(1)}$	27	$c\log\{1+\lvert\varphi^i\rvert^2+\frac{1}{4}\lvert\Gamma_{ijk}\varphi^j\varphi^k\rvert^2+\frac{1}{36}\lvert\Gamma_{ijk}\varphi^i\varphi^j\varphi^k\rvert^2\}$