Non-compact Ricci-flat Kähler Manifolds with Various Symmetries

2001 年度関西地域合宿 (July 1st, 2001)

木村 哲士

新田 宗土氏, 東島 清氏との共同研究

大阪大学 理学研究科 素粒子論研究室

Contents

String Theory Side

$$\left.\begin{array}{l}\text{Superstring} = 10 \\ \text{Standard Model} = 4\end{array}\right\} \Rightarrow$$ 時空のコンパクト化 ??

まだ誰もその証拠を見付けていない

$$\Downarrow$$

$\mathcal{M}_{10} \longrightarrow \mathcal{M}_4 \times \mathcal{M}_6$ と (とりあえず) 仮定

$\mathcal{M}_4$: flat Minkowski space-time $(D = 4)$

$\mathcal{M}_6$: (compact) extra dimensions $(D = 6)$

Supergravity 極限 ($\alpha' \to 0$ limit) で

$\mathcal{M}_4$ に $\mathcal{N} = 1$ SUSY が残ることを要請

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_6 &= \{\text{Kähler manifold with first Chern class} = 0\} \\ &= \text{Calabi-Yau Manifold}\end{aligned}$$

ゲージ群が $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ を含んでいる

世代数が 3 にも「できる」 $\Leftarrow$ 機構が唯一ではない

(P. Candelas, G. Horowitz, A. Strominger and E. Witten, Nucl. Phys. B258 (1985) 46.)

量子論的にも world-sheet は共形不変であれ!

「Ricci-flat なら α' 展開の全てのオーダーで共形不変」

(L. Alvarez-Gaumé and P. Ginsparg, Comm. Math. Phys. 102 (1985) 311.)

$\Downarrow$

「four-loop 以上では発散がでるから共形不変でない!」

(M. Grisaru, A. van de Ven and D. Zanon, Nucl. Phys. B277 (1986) 388.)

$\Downarrow$

「Kähler 計量を再定義すれば共形不変にできる」

(D. Nemeschansky and A. Sen, Phys. Lett. 178B (1986) 365.)

しかし,繰り込み群を用いて実際に確かめた人間はいない
(P. Candelas は Mirror Symmetry などを用いて議論)

Standard model などを導出する他の試み:
Brane World Scenario
Heterotic M-theory compactification
などなど

Field Theory Side

$D = 2$ NLSMs $\Longleftrightarrow$ $D = 4$ QCD

(漸近自由性, mass gap, confinement etc.)

$\Downarrow$

$D = 2, \mathcal{N} = 2$ SNLSMs $\Longleftrightarrow$ $D = 4, \mathcal{N} = 2$ SQCD

(+ compact Kähler etc.)

但し、compact Kähler 多様体の dynamics としては

CP^{N-1}, $G_{N,M}(\mathrm{C})$, $Q^{N-2}(\mathrm{C})$ しか知られていない

(K. Higashijima, T.K., M. Nitta and M. Tsuzuki, Prog. Theor. Phys. 105 (2001) 261.)

Non-compact で Ricci-flat な
Kähler 多様体はどんなものだろうか?

共形不変な NLSMs の新たな解の探求

Supergravity with non-compact symmetries

曲がった D-branes, M-brane 上の Yang-Mills の記述

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int_{\mathcal{M}} d^2\xi \sqrt{-\gamma}\,\gamma^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X)$$

STRING THEORY	FIELD THEORY
$d = 2$ world-sheet	$d = 2$ space-time
$\mathcal{N} = 2$ world-sheet SUSY	$\mathcal{N} = 2$ space-time SUSY
conformal invariance	conformal invariance
$D = 10$ space-time	$D = 10$ target space
Poincaré invariance	target isometry
coordinate dynamics	nonlinear sigma model
1st quantized theory	2nd quantized theory

Ricci-flat Kähler Manifolds

(K. Higashijima, T.K. and M. Nitta, `hep-th/0104184`)

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta K(\vec{\phi}, \vec{\phi}^\dagger) + \left(\int d^2\theta \phi_0 (\vec{\phi}^2 - a^2) + \text{c.c.} \right)$$

$$\to \int d^4\theta \mathcal{K}(\vec{\phi}, \vec{\phi}^\dagger) \quad [\text{path integral で } \phi_0 \text{ 消去}]$$

$$O(N) \text{ 不変量: } x = \vec{\phi}^\dagger \vec{\phi}$$

$$\text{Kähler 計量: } g_{\mu\bar{\nu}}(\vec{\phi}, \vec{\phi}^\dagger) = \frac{\partial}{\partial \phi^\mu} \frac{\partial}{\partial \phi^{\nu *}} \mathcal{K}(\vec{\phi}, \vec{\phi}^\dagger)$$

$$\text{Ricci テンソル: } R_{\mu\bar{\nu}} = -\frac{\partial}{\partial \phi^\mu} \frac{\partial}{\partial \phi^{\nu *}} \log \det g$$

$$\text{Ricci 平坦条件}: R_{\mu\bar{\nu}} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{d\mathcal{K}}{dx} \right)^{N-1} = c(N-1) \left(\frac{1}{x^2 - a^4} \right)^{\frac{N-1}{2}} \int_{a^2}^{x} dt (t^2 - a^4)^{\frac{N-3}{2}}$$

$N = 2$: Flat metric

$N = 3$: Eguchi-Hanson instanton

$N = 4$: Deformed conifold

a: 多様体の特異点を除くパラメータ

Other Symmetries (in preparation)

Hermitian Symmetric Spaces に Line Bundle を付加

Ricci 平坦な Kähler potential:

$$\mathrm{L}[\mathbf{C}P^{N-1}] \ : \ \left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{N} = \alpha e^{NX} + b$$

$$\mathrm{L}[G_{N,M}(\mathbf{C})] \ : \ \left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{M(N-M)+1} = \alpha e^{NX} + b$$

$$\mathrm{L}[Q^{N-2}(\mathbf{C})] \ : \ \left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{N-1} = \alpha e^{(N-2)X} + b$$

$$\mathrm{L}[\frac{SO(2N)}{U(N)}] \ : \ \left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{\frac{N}{2}(N-1)+1} = \alpha e^{(N-1)X} + b$$

$$\mathrm{L}[\frac{Sp(N)}{U(N)}] \ : \ \left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{\frac{N}{2}(N+1)+1} = \alpha e^{(N+1)X} + b$$

$$\mathrm{L}[\frac{E_6}{SO(10)\times U(1)}] \ : \ \left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{17} = \alpha e^{16X} + b$$

$$\mathrm{L}[\frac{E_7}{E_6\times U(1)}] \ : \ ???$$

N が低いものはほとんど Eguchi-Hanson になる!

b: blow up paramater (と思われる)

Conclusion

様々な対称性を持つ **Kähler** 多様体を構成

特に低次元数では **Eguchi-Hanson instanton** などを内蔵

Supergravity への応用が可能

ストリング理論への応用が可能

Problems

特異点が解消されているのか未解決

完備であるのかまだ分かっていない

SUSY NLSMs としての **Wilson** 的繰り込み群が未完成

共形場理論としての構成が成されていない

Eratta

$$\mathrm{L}\left[\frac{E_6}{SO(10)\times U(1)}\right] \quad : \quad \left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{17} \quad = \quad \alpha e^{12X} + b$$

$$\mathrm{L}\left[\frac{E_7}{E_6\times U(1)}\right] \quad : \quad \left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{28} \quad = \quad \alpha e^{18X} + b$$

b: blow up parameter $\longrightarrow$ resolution parameter

References

K. Higashijima, T.K. and M. Nitta, Phys. Lett. B515 (2001) 421, hep-th/0104184.

K. Higashijima, T.K. and M. Nitta, hep-th/0107100, to appear in Phys. Lett. B.

K. Higashijima, T.K. and M. Nitta, hep-th/0108084.