Ricci 平坦な超対称シグマ模型の解析 I

場の量子論 2001 (July 17th, 2001)

木村 哲士

大阪大学 理学研究科 素粒子論研究室

(新田 宗土氏, 東島 清氏との共同研究)

hep-th/0104184, to appear in Phys.Lett.B

and

hep-th/0107100

Contents

Introduction

$D=2$ **NLSMs** $\Longleftrightarrow$ $D=4$ **QCD**

(漸近自由性, **mass gap, confinement etc.**)

$\Downarrow$

$D=2$, $\mathcal{N}=2$ **SNLSMs** $\Longleftrightarrow$ $D=4$, $\mathcal{N}=1$ **SQCD**

(+ **compact Kähler etc.**)

但し、**compact Kähler** 多様体の **dynamics** としては

CP^{N-1}, $G_{N,M}$, Q^{N-2} くらいしか知られていない

(**K. Higashijima, T.K., M. Nitta and M. Tsuzuki, Prog. Theor. Phys. 105 (2001) 261.**)

$\boxed{\text{Non-compact で Ricci-flat な Kähler 多様体とはどんなものだろうか?}}$

共形不変な **NLSMs** の新たな解の探求

Supergravity with non-compact symmetries

曲がった **D-branes, M-brane** 上の **Yang-Mills** の記述

Deformation

(**K. Higashijima, T.K. and M. Nitta,** `hep-th/0104184`)

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta\, \mathcal{K}(X) + \left(\int d^2\theta\, \phi_0(\vec{\phi}^2 - a^2) + \text{c.c.} \right)$$

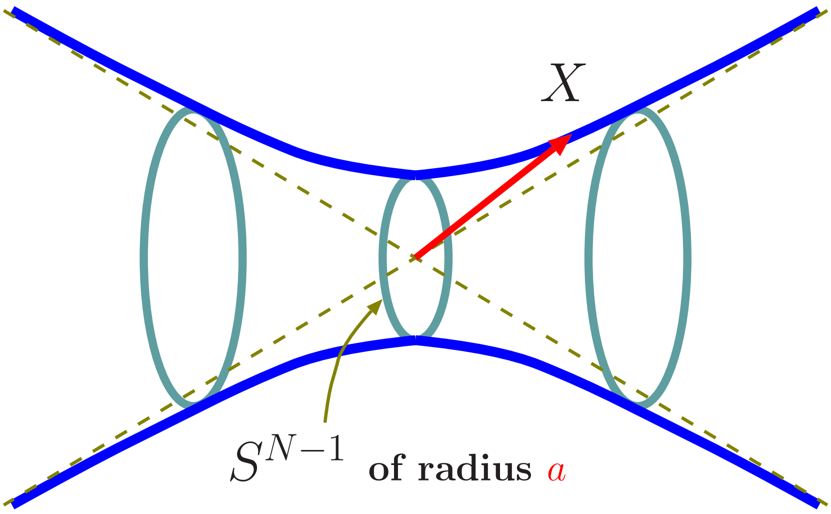
$$\to \int d^4\theta\, \mathcal{K}(X)\Big|_{\vec{\phi}^2 = a^2}$$

isometry: $G = O(N)$

isotropy: $H = O(N-2)$ ($O(N-1)$ **at** $X = a^2$)

$\vec{\phi}$ **: chiral superfield (**$O(N)$ **vector representation)**

$X \equiv \vec{\phi}^\dagger \vec{\phi}$ **:** $O(N)$ **invariant**



$$\vec{\phi}\Big|_{\vec{\phi}^2 = a^2} = (\phi^1, \phi^2, \cdots, \phi^{N-1}, \phi^N)\Big|_{\vec{\phi}^2 = a^2}$$
$$= \left(\varphi^1, \varphi^2, \cdots, \varphi^{N-1}, \sqrt{a^2 - (\varphi^a)^2}\right)$$

scalar field components φ^a = **coordinates**

a**: Deformation Parameter**

Kähler metric ($(N-1)\times(N-1)$ 成分):

$$g_{ab^*} \equiv \partial_a\partial_{b^*}\mathcal{K} = \frac{d^2\mathcal{K}}{dX^2}\frac{\partial X}{\partial\varphi^a}\frac{\partial X}{\partial\varphi^{*b}} + \frac{d\mathcal{K}}{dX}\frac{\partial^2 X}{\partial\varphi^a\partial\varphi^{*b}}$$

Ricci テンソル, Ricci 平坦条件:

$$(Ric)_{ab^*} = -\partial_a\partial_{b^*}\log\det(g_{cd^*}) \equiv 0$$

$$\Downarrow$$

$$\det(g_{ab^*}) \equiv c\times|F|^2$$

c : **constant** $\quad F$: **holomorphic function**

(常)微分方程式として **Ricci** 平坦条件が記述される.

$$\det g_{ab^*} = |\varphi^N|^{-2}\left[\frac{X^2-a^4}{N-1}\frac{d}{dX}\left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{N-1} + X\left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{N-1}\right]$$

$$\frac{X^2-a^4}{N-1}\frac{d}{dX}\left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{N-1} + X\left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{N-1} = c$$

$X=a^2$ で $\dfrac{d\mathcal{K}}{dX}$ が有限であれ: (積分定数の決定条件)

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{N-1} = c(N-1)\left(\frac{1}{X^2-a^4}\right)^{\frac{N-1}{2}}\int_{a^2}^{X} dt(t^2-a^4)^{\frac{N-3}{2}}$$

$N = 2$ 解：Flat metric

$$\mathcal{K}_{N=2} = \frac{c}{2}\left[\log\left(\frac{X+\sqrt{X^2-a^2}}{a^2}\right)\right]^2$$

座標変換：$\varphi^1 \equiv a\cos\varphi$, $\varphi^2 \equiv a\sin\varphi$ $(\varphi \in \mathbb{C})$

$$X = |\varphi^1|^2 + |\varphi^2|^2 = a^2\cos(\varphi^* - \varphi)$$

$$\mathcal{K}_{N=2} = c\varphi^*\varphi \quad \underbrace{+F(\varphi) + F^*(\varphi^*)}_{\text{Kähler 変換で消去可能}}$$

$N = 3$ 解：Eguchi-Hanson gravitational instanton

Holonomy: $SU(2) \simeq Sp(1)$ $\leftarrow$ **Hyper-Kähler**

Real four dimensions

$N = 4$ 解 : Deformed conifold

$$\left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^3 = \frac{3c}{2}\frac{1}{(X^2 - a^4)^{3/2}}\left[X\sqrt{X^2 - a^4} - a^4 \log\left(\frac{X + \sqrt{X^2 - a^4}}{a^2}\right)\right]$$

座標変換 : $X = \frac{1}{2}\rho^2 = a^2 \cosh 2\tau$

$$\frac{d\mathcal{K}}{dX} = \left(\frac{3c}{2a^2}\right)^{1/3} \frac{(\sinh 2\tau - 2\tau)^{1/3}}{2^{1/3}\sinh\tau}$$

これは Deformed Conifold を与える Kähler potential !

(**P. Candelas and X. C. de la Ossa, Nucl. Phys. B342 (1990) 246,**

K. Ohta and T. Yokono, JHEP 0002 (2000) 023.)

一般解は超幾何関数を用いて表示できる

$$\left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{N-1} = (\text{超幾何関数}) \quad (\text{長すぎるので省略})$$

$a \to 0$ 極限解: Conifold limit

$$\mathcal{K} = \frac{1}{c}\left(c\frac{N-1}{N-2}\right)^{\frac{N}{N-1}} \cdot X^{\frac{N-2}{N-1}} \xrightarrow{N\to\infty} X$$

Q^{N-2} Resolution

(K. Higashijima, T.K. and M. Nitta, `hep-th/0107100`)

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta\, \mathcal{K}(X) + \left(\int d^2\theta\, \phi_0 \vec{\phi}^T J \vec{\phi} + \textbf{c.c.}\right)$$

$$\rightarrow \int d^4\theta\, \mathcal{K}(X)\big|_{\vec{\phi}^T J \vec{\phi}=0}\,, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1}_{N-2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

isometry: $G = O(N) \times U(1)$

isotropy: $H = O(N-2) \times U(1)$

$$\vec{\phi}^T\big|_{\vec{\phi}^T J \vec{\phi}=0} = \sigma\left(1, z^i, -\tfrac{1}{2}(z^i)^2\right), \; i = 1, 2, \cdots, N-2$$

$$X \equiv \vec{\phi}^\dagger \vec{\phi} = |\sigma|^2 \underbrace{\left(1 + |z^i|^2 + \frac{1}{4}(z^i)^2 (z^{*j})^2\right)}_{\equiv Z}$$

σ, z^i: **chiral superfields (coordinates)**

対称性が自発的に破れる: $G/H \simeq SO(N)/SO(N-2)$

多様体としては, 少なくとも局所的には

$$\mathbb{R} \times SO(N)/SO(N-2) \simeq \mathbb{R} \times S^{N-2} \times S^{N-1}$$

Ricci テンソル, Ricci 平坦条件: ($\varphi^a = (\sigma, z^i)$):

$$\det(g_{ab^*}) = |\sigma|^{2N-6}\left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{N-2}\left(X^2\frac{d^2\mathcal{K}}{dX^2} + X\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)$$

$$\frac{X^2}{N-1}\frac{d}{dX}\left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{N-1} + X\left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{N-1} = c \quad [\text{常微分方程式}]$$

微分方程式の解:

$$\frac{d\mathcal{K}}{dX} = \frac{1}{X}(\lambda X^{N-2} + b)^{\frac{1}{N-1}}$$

$\lambda > 0$: c などに関連する定数

$b \geq 0$: 積分定数

Kähler potential そのものも求められる！

$$\mathcal{K}(X) = \frac{N-1}{N-2}\Big[(\lambda X^{N-2} + b)^{\frac{1}{N-1}} + b^{\frac{1}{N-1}} \cdot I\Big(b^{\frac{1}{1-N}}\,(\lambda X^{N-2} + b)^{\frac{1}{N-1}}; N-1\Big)\Big]$$

$$I(y; n) \equiv \int^y \frac{dt}{t^n - 1}$$

$b \to 0$ 極限: $\qquad \mathcal{K} \propto X^{\frac{N-2}{N-1}}$

$\Longrightarrow$ **Deformed Conifold の $a \to 0$ 極限と一致する！**

この座標では metric が $\sigma = 0$ では regular ではない

$$
\begin{aligned}
g_{\sigma\sigma^*} &= \lambda\Big(\frac{N-2}{N-1}\Big)\big(\lambda X^{N-2} + b\big)^{\frac{2-N}{N-1}} Z^{N-2} |\sigma|^{2N-6} \\
&\xrightarrow{\sigma=0} 0
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\textbf{identification} : \rho = \frac{\sigma^{N-2}}{N-2}}
$$

この座標変換による metric の各成分:

$$
\begin{aligned}
g_{\rho\rho^*} &= \lambda\Big(\frac{N-2}{N-1}\Big)\big(\lambda X^{N-2} + b\big)^{\frac{2-N}{N-1}} Z^{N-2} \\
g_{\rho j^*} &= \lambda\frac{(N-2)^2}{N-1}\big(\lambda X^{N-2} + b\big)^{\frac{2-N}{N-1}} \rho^* Z^{N-3} \partial_{j^*} Z \\
g_{ij^*} &= \lambda\frac{(N-2)^3}{N-1}\big(\lambda X^{N-2} + b\big)^{\frac{2-N}{N-1}} |\rho|^2 Z^{N-4} \partial_i Z \partial_{j^*} Z \\
&\quad + \big(\lambda X^{N-2} + b\big)^{\frac{1}{N-1}} (Z^{-1}\partial_i\partial_{j^*} Z - Z^{-2}\partial_i Z \partial_{j^*} Z)
\end{aligned}
$$

これらは全て $\rho = 0$ でも regular である

(σ, z^i) では $\sigma = 0$ は coordinate singularity を持つ

(ρ, z^i) では全領域で regular である！

もちろん $\rho = 0$ でも Riemann tensor が定義でき，

$(Ric)_{ab^*} = 0$ は保たれる

$\rho = 0$ での sub-manifold を見よう

$$g_{ij^*}(z, z^*)\Big|_{\rho=0} \;=\; b^{\frac{1}{N-1}}(Z^{-1}\partial_i\partial_{j^*}Z - Z^{-2}\partial_i Z\partial_{j^*}Z)$$

これを満たす Kähler potential:

$$\mathcal{K}(z, z^*) \;=\; b^{\frac{1}{N-1}} \log\left[1 + |z^i|^2 + \frac{1}{4}(z^i)^2(z^{*j})^2\right] \;=\; b^{\frac{1}{N-1}} \log Z$$

$\boxed{Q^{N-2} \text{ の Kähler potential !!}}$

$$(Q^{N-2} = SO(N)/SO(N-2) \times U(1))$$

つまり $\rho = 0$ sub-manifold は

半径 $b^{\frac{1}{2(N-1)}}$ の Q^{N-2} で構成される

$b \to 0$ 極限でこの sub-manifold は 1 点に潰れる

$$\Downarrow$$

Conifold が登場する

これより b は

$\boxed{Q^{N-2} \text{ で特異点を回避する parameter !!}}$

この機構は

deformation でも small resolution でもない !!

$$\mathbb{R} \times \frac{SO(N)}{SO(N-2)} \simeq (\mathbb{R} \times U(1)) \times \frac{SO(N)}{SO(N-2)\times U(1)} = \mathbb{C} \times Q^{N-2}$$

$N=3$ 解：Eguchi-Hanson gravitational instanton

$$\mathcal{K}(X) = 2\sqrt{\lambda X + b} + \sqrt{b}\log\left(\frac{\sqrt{\lambda X + b} - \sqrt{b}}{\sqrt{\lambda X + b} + \sqrt{b}}\right)$$

$\varrho^4 \equiv 4(\lambda X + b)$, $a^4 \equiv 4b$ の再定義

$$\mathcal{K} \;=\; \varrho^2 + \frac{a^2}{2}\log\left(\frac{\varrho^2 - a^2}{\varrho^2 + a^2}\right)$$

Eguchi-Hanson の Kähler potential そのもの！

特異点 (原点) は $Q^1 \simeq S^2$ で回避されている

isometry $SO(3) \times U(1) \simeq U(2)$ がよく見える構成

$N=4$ 解：Q^2 Resolved Conifold

$$\mathcal{K} = \frac{3}{2}(\lambda X^2 + b)^{1/3} + \frac{b^{1/3}}{4}\log\left[\frac{\{(\lambda X^2 + b)^{1/3} - b^{1/3}\}^3}{\lambda X^2}\right] - \frac{\sqrt{3}b^{1/3}}{2}\arctan\left[\frac{2(\lambda X^2 + b)^{1/3} + b^{1/3}}{\sqrt{3}b^{1/3}}\right]$$

特異点回避は $Q^2 \simeq S^2 \times S^2$ で行われる

$\Longrightarrow$ **deformation** でも **small resolution** でもない！

Conclusion

$O(N)$ 対称性を持つ **Ricci** 平坦な **Kähler** 多様体を構成

特に低次元では **Eguchi-Hanson instanton** などを内蔵

Q^{N-2} **resolution** 以外に

$$\boxed{CP^{N-1},\ G_{N,M},\ SO(2N)/U(N),\ Sp(N)/U(N)}$$

による **resolution** が可能

新田宗土：「**Ricci** 平坦な超対称シグマ模型の解析 **II**」

(July 19th, 2001)

Supergravity への応用が可能

ストリング理論への応用が可能

Discussions

deformation + **resolution** 解は構成可能か？

SUSY NLSMs としての **Wilson** 的繰り込み群を構成中

共形場理論としての構成はどうなるか？

付録

超幾何関数解

$$
\left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{N-1} = \frac{c(N-1)}{2\Gamma(N/2)} \frac{(-a^4)^{\frac{N-3}{2}}}{(X^2-a^4)^{\frac{N-1}{2}}}
$$

$$
\times \left[2X\Gamma\left(\frac{N}{2}\right) F\left(\frac{1}{2}, -\frac{N-3}{2}, \frac{3}{2}; \frac{X^2}{a^4}\right) - a^2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)\right]
$$

特に奇数偶数に分けておくと $(\theta_X = \arccos(a^2/X))$

$$
\left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{2m} = 2c\sum_{n=0}^{m-1} {}_{m-1}C_n \frac{m}{2n+1}(-a^4)^{m-n-1}\left[\frac{X^{2n+1}-(a^2)^{2n+1}}{(X^2-a^4)^m}\right]
$$

$$
\left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{2m+1} = \frac{c(2m+1)}{a^2(\tan\theta_X)^{2m+1}} \sum_{n=0}^{m} {}_mC_n(-1)^{m-n}
$$

$$
\times \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left\{\frac{\sin\theta_X}{(\cos\theta_X)^{2n}}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(2n-2r-2)!!}{(2n-2r-1)!!}(\cos\theta_X)^{2r}\right.
$$

$$
\left. + \log\left|\tan\left(\frac{\theta_X}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right\}
$$

積分因子

$$
I(y;n) \equiv \int^y \frac{dt}{t^n-1} = \frac{1}{n}\left[\log(y-1) - \frac{1+(-1)^n}{2}\log(y+1)\right]
$$

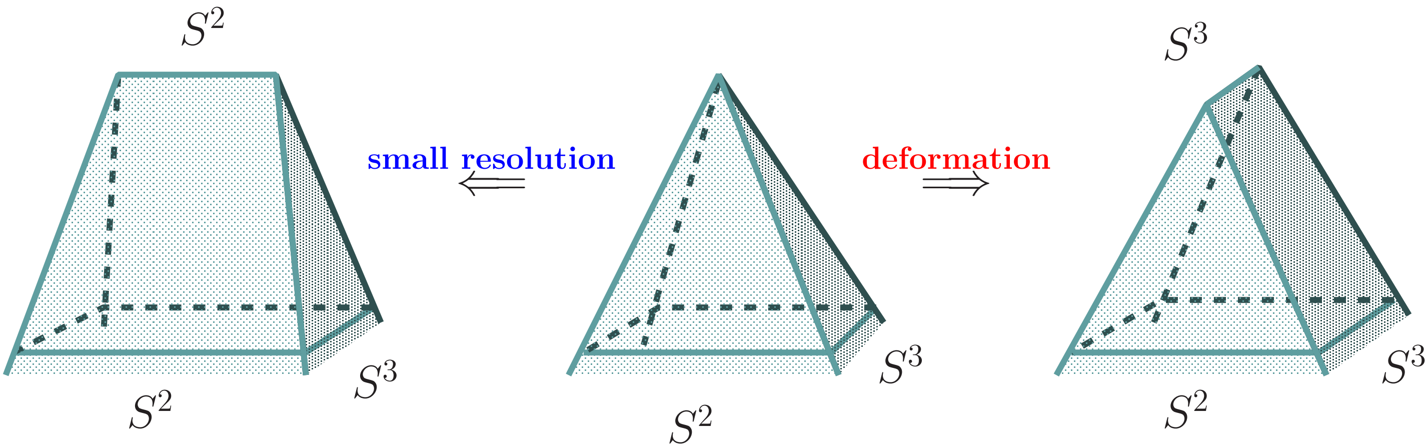
$$
+ \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{[\frac{n-1}{2}]} \cos\frac{2r\pi}{n} \log\left(y^2 - 2y\cos\frac{2r\pi}{n} + 1\right)
$$

$$
+ \frac{2}{n}\sum_{r=1}^{[\frac{n-1}{2}]} \sin\frac{2r\pi}{n} \arctan\left[\frac{\cos(2r\pi/n) - y}{\sin(2r\pi/n)}\right]
$$

deformation, small resolution の概念図

Six-dimensional manifold:

$$\sum_{A=1}^{4}(w^A)^2 = 0 \quad \overset{\text{topological}}{\sim} \quad \mathbb{R}\times S^2\times S^3$$



$\det(g_{ab^*})$ の詳細計算 (Q^{N-2} resolution)

$$\det g_{ab^*} = \frac{X}{|\sigma|^2}\left(X\frac{d^2\mathcal{K}}{dX^2}+\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)\left(|\sigma|^2\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{N-2}$$
$$\times \det(\partial_i\partial_{j^*}Z - Z^{-1}\partial_i Z\partial_{j^*}Z)$$

$$(\partial_i Z = z^{*j}+\tfrac{1}{2}z^i(z^{*j})^2,\ \partial_i\partial_{j^*}Z = \delta_{ij}+z^i z^{*j})$$

複素化された isotropy 群 $H = SO(N-2,C)$ の変換:

X: 不変でない， g_{ab^*}: 線形変換， $\det g_{ab^*}$: 不変 !!

$SO(N-2,C)$ で $z^1\neq 0$, $z^m = 0$ まで変換:

$$\det(\partial_i\partial_{j^*}Z - Z^{-1}\partial_i Z\partial_{j^*}Z) = \det\delta_{ij^*} = 1$$

Q^{N-2} とは？

$\mathrm{C}P^{N-1}$ + F-term constraint ($O(N)$ symmetry)

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta \big(\phi_i^\dagger \phi_i e^{2V} - cV\big) + \Big(\int d^2\theta\ \phi_0 \phi_i^2 + \text{c.c.}\Big)$$

V : **auxiliary $U(1)$ vector superfield**

ϕ_0 : **auxiliary chiral superfield ($O(N)$ singlet)**

V, ϕ_0 を積分する → nonlinear sigma model

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta\ \mathcal{K}(\varphi, \varphi^\dagger)\ ,\quad \mathcal{K}(\varphi, \varphi^\dagger) = c \log \Big(1 + |\varphi|^2 + \frac{1}{4}\varphi^{\dagger 2}\varphi^2\Big)$$

$Q^2 \simeq S^2 \times S^2$

$S^2 \simeq \mathrm{C}P^1$ Fubini-Study metric の Kähler potential:

$$\mathcal{K} = c \log \big(1 + |\varphi|^2\big)$$

同半径 $S^2 \times S^2 \simeq \mathrm{C}P^1 \times \mathrm{C}P^1$:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_2 &= c \log \big(1 + |\varphi_1|^2\big) + c \log \big(1 + |\varphi_2|^2\big) \\ &= c \log \big(1 + |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + |\varphi_1 \varphi_2|^2\big)\end{aligned}$$

unitary 変換: $\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(w_1 + i w_2)$, $\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(w_1 - i w_2)$

$$\mathcal{K}_2 = c \log \Big(1 + |w_1|^2 + |w_2|^2 + \frac{1}{4}|(w_1)^2 + (w_2)^2|^2\Big)$$

$$\Uparrow$$

Q^2 Kähler potential !!