Non-compact Ricci-flat Kähler Manifolds

原子核三者若手夏の学校 (長野県木島平)
August 4th, 2001

木村 哲士

大阪大学大学院 理学研究科 素粒子論研究室

(新田 宗土氏, 東島 清氏との共同研究)

hep-th/0104184, **to appear in Phys.Lett.B**

hep-th/0107100

and

hep-th/0108084

Contents

Introduction

$$\left.\begin{array}{l}\text{Superstring} = 10 \\ \text{Standard Model} = 4\end{array}\right\} \Rightarrow$$ 時空のコンパクト化 ??

まだ誰もその証拠を見付けていない

$$\Downarrow$$

$\mathcal{M}_{10} \longrightarrow \mathcal{M}_4 \times \mathcal{M}_6$ と (とりあえず) 仮定

$\mathcal{M}_4$: flat Minkowski 時空 $(D = 4)$

$\mathcal{M}_6$: (compact) extra dimensions $(D = 6)$

Supergravity 極限 ($\alpha' \to 0$ limit) で

$\mathcal{M}_4$ に $\mathcal{N} = 1$ SUSY が残ることを要請

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_6 &= \{\text{Kähler manifold with first Chern class} = 0\} \\ &= \text{Calabi-Yau 多様体}\end{aligned}$$

ゲージ群が $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ を含んでいる

世代数が 3 にも「できる」 $\Leftarrow$ 機構が唯一ではない

(P. Candelas, G. Horowitz, A. Strominger and E. Witten, Nucl. Phys. B258 (1985) 46.)

量子論的にも world-sheet は共形不変であれ!

「Ricci 平坦 なら α' 展開の全てのオーダーで共形不変」

(L. Alvarez-Gaumé and P. Ginsparg, Comm. Math. Phys. 102 (1985) 311.)

$\Downarrow$

「four-loop 以上では発散がでるから共形不変でない!」

(M. Grisaru, A. van de Ven and D. Zanon, Nucl. Phys. B277 (1986) 388.)

$\Downarrow$

「Kähler 計量を再定義すれば共形不変にできる」

(D. Nemeschansky and A. Sen, Phys. Lett. 178B (1986) 365.)

しかし,繰り込み群を用いて実際に確かめた人間はいない
(cf. Mirror Symmetry)

Standard model などを導出する他の試み:
Brane World Scenario
Heterotic M-theory compactification
(B.S. Acharya, Atiyah-Witten ??)

Coset Spaces

$D=2$ NLSMs $\Longleftrightarrow$ $D=4$ QCD

(漸近自由性, mass gap, 閉じ込め etc.)

$\Downarrow$

$D=2, \mathcal{N}=2$ SNLSMs $\Longleftrightarrow$ $D=4, \mathcal{N}=1$ SQCD

(+ compact Kähler etc.)

但し、compact Kähler 多様体のダイナミクスとしては $\mathbb{C}P^{N-1}$, Q^{N-2} くらいしか知られていない

(K. Higashijima, T.K., M. Nitta and M. Tsuzuki, Prog. Theor. Phys. 105 (2001) 261.)

対称性により Ricci 平坦条件は解ける

しかし Kähler 多様体は Non-compact になる

Non-compact で Ricci 平坦な
Kähler 多様体とはどんなものだろうか?

共形不変な NLSMs の新たな解の探求

Supergravity with non-compact symmetries

曲がった D-branes 上の Yang-Mills の記述

NLSMs = Non-Linear Sigma Model

対称性の破れを記述

Riemann 多様体, coset space ($M = G/H$)

$$\mathcal{L} \;=\; g_{ab}(\varphi)\partial_\mu\varphi^a(x)\partial^\mu\varphi^b(x)$$

μ : 時空の添字

φ^a : Nambu-Goldstone 場, Riemann 多様体の座標

$g_{ab}(\varphi)$: Riemann 多様体の計量

SNLSMs and Kähler Potential

SNLSM = Supersymmetric NLSM

Kähler 多様体 ($D = 4$, $\mathcal{N} = 1$)

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= g_{ab^*}\partial_\mu\varphi^a\partial^\mu\varphi^{*b} + i g_{ab^*}\bar{\psi}^b(\not{D}\psi)^a + \frac{1}{4}R_{ab^*cd^*}\psi^a\psi^c\bar{\psi}^b\bar{\psi}^d \\ &= \int d^4\theta\, \mathcal{K}(\Phi, \Phi^\dagger)\end{aligned}$$

$\Phi^a = \varphi^a + \sqrt{2}\theta\psi^a + \theta\theta F^a$: chiral superfield

$\mathcal{K}(\Phi, \Phi^\dagger)$: Kähler potential

計量, 曲率は Kähler potential で表現される

$$g_{ab^*} \;=\; \partial_a\partial_{b^*}\mathcal{K}\,, \quad (\partial_a \;\equiv\; \partial/\partial\varphi^a)$$

Deformation

(K. Higashijima, T.K. and M. Nitta, hep-th/0104184)

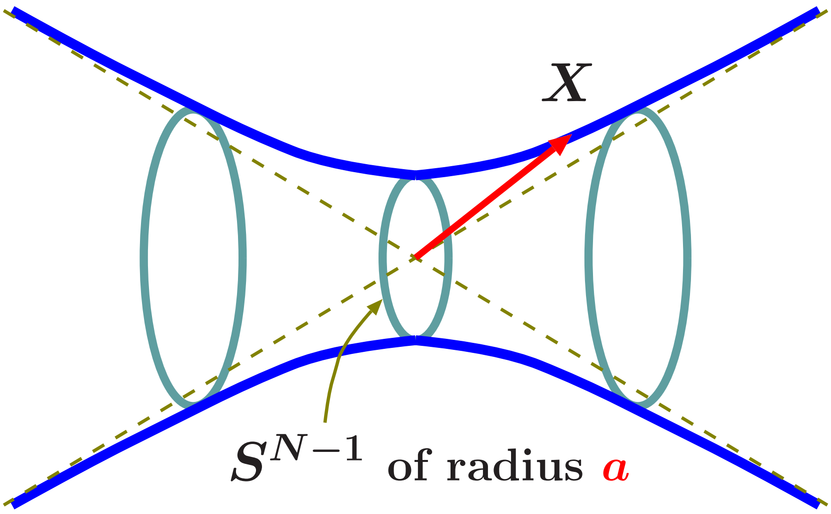
$$\mathcal{L} = \int d^4\theta\, \mathcal{K}(X) + \left(\int d^2\theta\, \phi_0(\vec{\phi}^2 - a^2) + \text{c.c.} \right)$$
$$\to \int d^4\theta\, \mathcal{K}(X)\Big|_{\vec{\phi}^2 = a^2}$$

isometry: $G = O(N)$

isotropy: $H = O(N-2)$ ($O(N-1)$ at $X = a^2$)

$\vec{\phi}$: カイラル超場 ($O(N)$ ベクトル表現)

$X \equiv \vec{\phi}^\dagger \vec{\phi}$: $O(N)$ 不変



$$\vec{\phi}\big|_{\vec{\phi}^2 = a^2} = (\phi^1, \phi^2, \cdots, \phi^{N-1}, \phi^N)\big|_{\vec{\phi}^2 = a^2}$$
$$= \left(\varphi^1, \varphi^2, \cdots, \varphi^{N-1}, \sqrt{a^2 - (\varphi^a)^2}\right)$$

スカラー場成分 φ^a : Kähler 多様体の座標

a: Deformation Parameter

Kähler 計量 ($(N-1)\times(N-1)$ 成分):

$$g_{ab^*} \equiv \partial_a\partial_{b^*}\mathcal{K} = \frac{d^2\mathcal{K}}{dX^2}\frac{\partial X}{\partial\varphi^a}\frac{\partial X}{\partial\varphi^{*b}} + \frac{d\mathcal{K}}{dX}\frac{\partial^2 X}{\partial\varphi^a\partial\varphi^{*b}}$$

Ricci テンソル, Ricci 平坦条件:

$$\boxed{\begin{array}{c} (Ric)_{ab^*} = -\partial_a\partial_{b^*}\log\det(g_{cd^*}) \equiv 0 \\ \Downarrow \\ \det(g_{ab^*}) \equiv c\times|F|^2 \end{array}}$$

c : 定数　F : 正則関数

(常)微分方程式として Ricci 平坦条件が記述される.

$$\det g_{ab^*} = |\varphi^N|^{-2}\left[\frac{X^2-a^4}{N-1}\frac{d}{dX}\left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{N-1} + X\left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{N-1}\right]$$

$$\underline{\frac{X^2-a^4}{N-1}\frac{d}{dX}\left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{N-1} + X\left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{N-1} = c}$$

$X = a^2$ で $\dfrac{d\mathcal{K}}{dX}$ が有限であれ: (積分定数の決定条件)

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{N-1} = c(N-1)\left(\frac{1}{X^2-a^4}\right)^{\frac{N-1}{2}}\int_{a^2}^{X} dt(t^2-a^4)^{\frac{N-3}{2}}$$

$N=2$ 解：Flat metric

$$\mathcal{K}_{N=2} = \frac{c}{2}\left[\log\left(\frac{X+\sqrt{X^2-a^2}}{a^2}\right)\right]^2$$

座標変換：$\varphi^1 \equiv a\cos\varphi,\ \varphi^2 \equiv a\sin\varphi\ \ (\varphi \in \mathbb{C})$

$$X = |\varphi^1|^2 + |\varphi^2|^2 = a^2\cos(\varphi^* - \varphi)$$

$$\mathcal{K}_{N=2} = c\varphi^*\varphi\ \underbrace{+F(\varphi) + F^*(\varphi^*)}_{\text{Kähler 変換で消去可能}}$$

$N=3$ 解：Eguchi-Hanson gravitational instanton

Holonomy: $SU(2) \simeq Sp(1)\ \leftarrow$ Hyper-Kähler

Real four dimensions

$N = 4$ 解： Deformed conifold

$$\left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^3 = \frac{3c}{2}\frac{1}{(X^2 - a^4)^{3/2}}\left[X\sqrt{X^2 - a^4} - a^4 \log\left(\frac{X + \sqrt{X^2 - a^4}}{a^2}\right)\right]$$

座標変換： $X = \frac{1}{2}\rho^2 = a^2 \cosh 2\tau$

$$\frac{d\mathcal{K}}{dX} = \left(\frac{3c}{2a^2}\right)^{1/3}\frac{(\sinh 2\tau - 2\tau)^{1/3}}{2^{1/3}\sinh\tau}$$

これは Deformed Conifold を与える Kähler potential！

(P. Candelas and X. C. de la Ossa, Nucl. Phys. B342 (1990) 246,
K. Ohta and T. Yokono, JHEP 0002 (2000) 023.)

一般解は超幾何関数を用いて表示できる

$$\left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{N-1} = (\text{超幾何関数}) \quad (\text{長すぎるので省略})$$

$a \longrightarrow 0$ 極限解: Conifold limit

$$\mathcal{K} = \frac{1}{c}\left(c\frac{N-1}{N-2}\right)^{\frac{N}{N-1}} \cdot X^{\frac{N-2}{N-1}} \xrightarrow{N\to\infty} X$$

Q^{N-2} Resolution

(K. Higashijima, T.K. and M. Nitta, `hep-th/0107100`)

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta\, \mathcal{K}(X) + \left(\int d^2\theta\, \phi_0 \vec{\phi}^T J \vec{\phi} + \text{c.c.} \right)$$

$$\to \int d^4\theta\, \mathcal{K}(X)\Big|_{\vec{\phi}^T J \vec{\phi}=0}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1_{N-2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

isometry: $G = O(N) \times U(1)$

isotropy: $H = O(N-2) \times U(1)$

$$\vec{\phi}^T\Big|_{\vec{\phi}^T J \vec{\phi}=0} = \sigma\left(1, z^i, -\tfrac{1}{2}(z^i)^2\right),\ i = 1, 2, \cdots, N-2$$

$$X \equiv \vec{\phi}^\dagger \vec{\phi} = |\sigma|^2 \underbrace{\left(1 + |z^i|^2 + \frac{1}{4}(z^i)^2 (z^{*j})^2\right)}_{\equiv Z}$$

σ, z^i: カイラル超場 (多様体の座標)

対称性が自発的に破れる: $G/H \simeq SO(N)/SO(N-2)$

多様体としては, 少なくとも局所的には

$$\mathbb{R}^+ \times SO(N)/SO(N-2) \simeq \mathbb{R}^+ \times S^{N-2} \times S^{N-1}$$

Ricci テンソル, Ricci 平坦条件: $(\varphi^a = (\sigma, z^i)\ )$:

$$\det(g_{ab^*}) = |\sigma|^{2N-6}\Big(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\Big)^{N-2}\Big(X^2\frac{d^2\mathcal{K}}{dX^2} + X\frac{d\mathcal{K}}{dX}\Big)$$

$$\frac{X^2}{N-1}\frac{d}{dX}\Big(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\Big)^{N-1} + X\Big(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\Big)^{N-1} = c \quad [\text{常微分方程式}]$$

微分方程式の解:

$$\frac{d\mathcal{K}}{dX} = \frac{1}{X}(\lambda X^{N-2} + b)^{\frac{1}{N-1}}$$

$\lambda > 0$: c などに関連する定数

$b \geq 0$: 積分定数

Kähler potential そのものも求められる!

$$\mathcal{K}(X) = \frac{N-1}{N-2}\Big[(\lambda X^{N-2} + b)^{\frac{1}{N-1}} + b^{\frac{1}{N-1}} \cdot I\Big(b^{\frac{1}{1-N}}(\lambda X^{N-2} + b)^{\frac{1}{N-1}}; N-1\Big)\Big]$$

$$I(y; n) \equiv \int^y \frac{dt}{t^n - 1}$$

$b \longrightarrow 0$ 極限: $\quad \mathcal{K} \propto X^{\frac{N-2}{N-1}}$

$\Longrightarrow$ Deformed Conifold の $a \longrightarrow 0$ 極限と一致する!

この座標系では, 計量が $\sigma = 0$ で regular ではない

$$g_{\sigma\sigma^*} = \lambda\Big(\frac{N-2}{N-1}\Big)\big(\lambda X^{N-2}+b\big)^{\frac{2-N}{N-1}} Z^{N-2}|\sigma|^{2N-6} \xrightarrow{\sigma=0} 0$$

同一視：$\rho = \dfrac{\sigma^{N-2}}{N-2}$

この座標変換による, 計量の各成分:

$$\begin{aligned}
g_{\rho\rho^*} &= \lambda\Big(\frac{N-2}{N-1}\Big)\big(\lambda X^{N-2}+b\big)^{\frac{2-N}{N-1}} Z^{N-2} \\
g_{\rho j^*} &= \lambda\frac{(N-2)^2}{N-1}\big(\lambda X^{N-2}+b\big)^{\frac{2-N}{N-1}} \rho^* Z^{N-3}\partial_{j^*}Z \\
g_{ij^*} &= \lambda\frac{(N-2)^3}{N-1}\big(\lambda X^{N-2}+b\big)^{\frac{2-N}{N-1}} |\rho|^2 Z^{N-4}\partial_i Z\partial_{j^*}Z \\
&\quad + \big(\lambda X^{N-2}+b\big)^{\frac{1}{N-1}}\big(Z^{-1}\partial_i\partial_{j^*}Z - Z^{-2}\partial_i Z\partial_{j^*}Z\big)
\end{aligned}$$

これらは全て $\rho = 0$ でも regular である

$(\sigma,\, z^i)$ では $\sigma = 0$ は座標特異点となる

$(\rho,\, z^i)$ では全領域で regular である！

もちろん $\rho = 0$ でも Riemann テンソルが定義でき,

$(Ric)_{ab^*} = 0$ は保たれる

$\rho = 0$ での部分多様体を見よう

$$g_{ij^*}(z, z^*)\Big|_{\rho=0} = b^{\frac{1}{N-1}}(Z^{-1}\partial_i\partial_{j^*}Z - Z^{-2}\partial_i Z\partial_{j^*}Z)$$

これを満たす Kähler potential:

$$\mathcal{K}(z, z^*) = b^{\frac{1}{N-1}} \log\left[1 + |z^i|^2 + \frac{1}{4}(z^i)^2(z^{*j})^2\right] = b^{\frac{1}{N-1}} \log Z$$

$\boxed{Q^{N-2} \text{ の Kähler potential !!}}$

$$(Q^{N-2} = SO(N)/SO(N-2) \times U(1))$$

つまり $\rho = 0$ 部分多様体は

半径 $b^{\frac{1}{2(N-1)}}$ の Q^{N-2} で構成される

$b \longrightarrow 0$ 極限でこの部分多様体は 1 点に潰れる

$$\Downarrow$$

Conifold が登場する

これより b は

$\boxed{Q^{N-2} \text{ で特異点を回避する parameter !!}}$

この機構は

deformation でも small resolution でもない !!

$$\mathbb{R}^+ \times \frac{SO(N)}{SO(N-2)} \simeq (\mathbb{R}^+ \times U(1)) \times \frac{SO(N)}{SO(N-2) \times U(1)} = \mathbb{C}^* \times Q^{N-2}$$

$N=3$ 解：Eguchi-Hanson gravitational instanton

$$\mathcal{K}(X) = 2\sqrt{\lambda X + b} + \sqrt{b}\log\left(\frac{\sqrt{\lambda X + b} - \sqrt{b}}{\sqrt{\lambda X + b} + \sqrt{b}}\right)$$

$\varrho^4 \equiv 4(\lambda X + b)$, $a^4 \equiv 4b$ の再定義

$$\mathcal{K} \;=\; \varrho^2 + \frac{a^2}{2}\log\left(\frac{\varrho^2 - a^2}{\varrho^2 + a^2}\right)$$

Eguchi-Hanson の Kähler potential そのもの！

特異点 (原点) は $Q^1 \simeq S^2$ で回避されている

isometry $SO(3)\times U(1) \simeq U(2)$ がよく見える構成

$N=4$ 解：Q^2 Resolved Conifold

$$\mathcal{K} = \frac{3}{2}(\lambda X^2 + b)^{1/3} + \frac{b^{1/3}}{4}\log\left[\frac{\{(\lambda X^2 + b)^{1/3} - b^{1/3}\}^3}{\lambda X^2}\right] - \frac{\sqrt{3}b^{1/3}}{2}\arctan\left[\frac{2(\lambda X^2 + b)^{1/3} + b^{1/3}}{\sqrt{3}b^{1/3}}\right]$$

特異点回避は $Q^2 \simeq S^2 \times S^2$ で行われる

$\Longrightarrow$ deformation でも small resolution でもない！

Conclusion

$O(N)$ 対称性を持つ Ricci-flat 多様体を構成

Deformation, Resolution で 特異点回避

$SU(N)$, $SO(N)$, $Sp(N)$, E_6, E_7 群でも構成

($\Longrightarrow$ Hermitian Symmetric Spaces)

Supergravity への応用が可能

ストリング理論への応用が可能

Discussions

deformation + resolution 解は構成可能か ?

ALE, Taub-NUT, Taub-BOLT との関係は ??

SUSY NLSMs としての Wilson 的繰り込み群 ??

共形場理論としての構成はどうなるか ?

付録

超幾何関数解

$$\left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{N-1} = \frac{c(N-1)}{2\Gamma(N/2)} \frac{(-a^4)^{\frac{N-3}{2}}}{(X^2-a^4)^{\frac{N-1}{2}}} \times \left[2X\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)F\left(\frac{1}{2}, -\frac{N-3}{2}, \frac{3}{2}; \frac{X^2}{a^4}\right) - a^2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)\right]$$

特に奇数偶数に分けておくと ($\theta_X = \arccos(a^2/X)$)

$$\left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{2m} = 2c\sum_{n=0}^{m-1} {}_{m-1}C_n \frac{m}{2n+1}(-a^4)^{m-n-1}\left[\frac{X^{2n+1}-(a^2)^{2n+1}}{(X^2-a^4)^m}\right]$$

$$\left(\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{2m+1} = \frac{c(2m+1)}{a^2(\tan\theta_X)^{2m+1}}\sum_{n=0}^{m} {}_mC_n(-1)^{m-n} \times \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left\{\frac{\sin\theta_X}{(\cos\theta_X)^{2n}}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(2n-2r-2)!!}{(2n-2r-1)!!}(\cos\theta_X)^{2r} + \log\left|\tan\left(\frac{\theta_X}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right\}$$

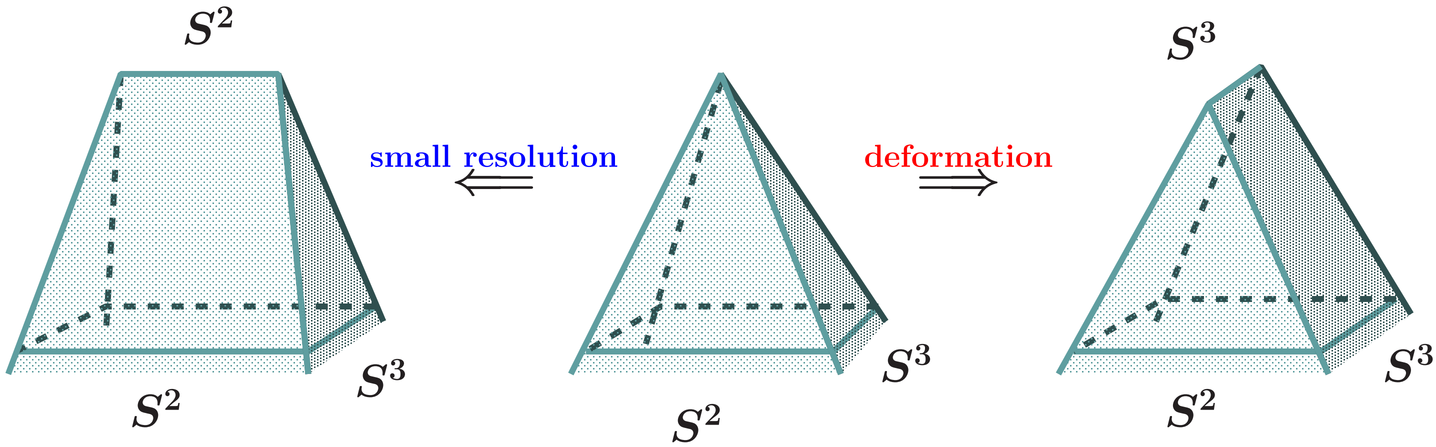
積分因子

$$I(y;n) \equiv \int^y \frac{dt}{t^n-1} = \frac{1}{n}\left[\log(y-1) - \frac{1+(-1)^n}{2}\log(y+1)\right] + \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{[\frac{n-1}{2}]}\cos\frac{2r\pi}{n}\log\left(y^2-2y\cos\frac{2r\pi}{n}+1\right) + \frac{2}{n}\sum_{r=1}^{[\frac{n-1}{2}]}\sin\frac{2r\pi}{n}\arctan\left[\frac{\cos(2r\pi/n)-y}{\sin(2r\pi/n)}\right]$$

deformation, small resolution の概念図

Six-dimensional manifold:

$$\sum_{A=1}^{4}(w^A)^2 = 0 \quad \overset{\text{topological}}{\sim} \quad \mathbb{R}^+ \times S^2 \times S^3$$



$\det(g_{ab^*})$ の詳細計算 (Q^{N-2} resolution)

$$\det g_{ab^*} = \frac{X}{|\sigma|^2}\left(X\frac{d^2\mathcal{K}}{dX^2} + \frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)\left(|\sigma|^2\frac{d\mathcal{K}}{dX}\right)^{N-2}$$
$$\times \det(\partial_i\partial_{j^*}Z - Z^{-1}\partial_i Z\partial_{j^*}Z)$$

$$(\partial_i Z = z^{*j} + \tfrac{1}{2}z^i(z^{*j})^2,\ \partial_i\partial_{j^*}Z = \delta_{ij} + z^i z^{*j})$$

複素化された isotropy 群 $H = SO(N-2,\mathbb{C})$ の変換:

X: 不変でない， g_{ab^*}: 線形変換， $\det g_{ab^*}$: 不変 !!

$SO(N-2,\mathbb{C})$ で $z^1 \neq 0,\ z^m = 0$ まで変換:

$$\det(\partial_i\partial_{j^*}Z - Z^{-1}\partial_i Z\partial_{j^*}Z) = \det\delta_{ij^*} = 1$$

Q^{N-2} とは？

$\mathbb{C}P^{N-1}$ + F-term constraint ($O(N)$ symmetry)

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta \left(\phi_i^\dagger \phi_i e^{2V} - cV\right) + \left(\int d^2\theta\ \phi_0 \phi_i^2 + \text{c.c.}\right)$$

V : auxiliary $U(1)$ vector superfield

ϕ_0 : auxiliary chiral superfield ($O(N)$ singlet)

V, ϕ_0 を積分する $\longrightarrow$ nonlinear sigma model

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta\ \mathcal{K}(\varphi, \varphi^\dagger)\ , \quad \mathcal{K}(\varphi, \varphi^\dagger) = c \log\left(1 + |\varphi|^2 + \frac{1}{4}\varphi^{\dagger 2}\varphi^2\right)$$

$Q^2 \simeq S^2 \times S^2$

$S^2 \simeq \mathbb{C}P^1$ Fubini-Study metric の Kähler potential:

$$\mathcal{K} = c \log\left(1 + |\varphi|^2\right)$$

同半径 $S^2 \times S^2 \simeq \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_2 &= c \log\left(1 + |\varphi_1|^2\right) + c \log\left(1 + |\varphi_2|^2\right) \\ &= c \log\left(1 + |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + |\varphi_1 \varphi_2|^2\right)\end{aligned}$$

unitary 変換: $\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(w_1 + i w_2)$, $\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(w_1 - i w_2)$

$$\mathcal{K}_2 = c \log\left(1 + |w_1|^2 + |w_2|^2 + \frac{1}{4}|(w_1)^2 + (w_2)^2|^2\right)$$

$$\Uparrow$$

Q^2 Kähler potential !!

$\mathbb{C}^* \times$ coset	dimension	identification	
$\mathbb{C}^* \times \frac{SO(N)}{SO(N-2)\times U(1)}$	$1+(N-2)$	$\rho \simeq \sigma^{N-2}$	$\frac{SO(N)}{SO(N-2)\times U(1)} \equiv Q^{N-2}$
$\mathbb{C}^* \times \frac{U(N)}{U(M)\times U(N-M)}$	$1+M(N-M)$	$\rho \simeq \sigma^{MN}$	$\frac{U(N)}{U(M)\times U(N-M)} \equiv G_{N,M}$
$\mathbb{C}^* \times \frac{SO(2N)}{U(N)}$	$1+\frac{1}{2}N(N-1)$	$\rho \simeq \sigma^{N(N-1)}$	$(G_{N,1} \equiv \mathbb{C}P^{N-1})$
$\mathbb{C}^* \times \frac{Sp(N)}{U(N)}$	$1+\frac{1}{2}N(N+1)$	$\rho \simeq \sigma^{N(N+1)}$	
$\mathbb{C}^* \times \frac{E_6}{SO(10)\times U(1)}$	$1+16$	$\rho \simeq \sigma^{12}$	
$\mathbb{C}^* \times \frac{E_7}{E_6\times U(1)}$	$1+27$	$\rho \simeq \sigma^{18}$	

$$
\begin{aligned}
Q^1 &\simeq \mathbb{C}P^1 \simeq SO(4)/U(2) \simeq Sp(1)/U(1) \\
Q^2 &\simeq \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \\
Q^3 &\simeq Sp(2)/U(2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}P^3 &\simeq SO(6)/U(3) \\
Q^4 &\simeq G_{4,2} \\
G_{N,M} &\simeq G_{N,N-M}
\end{aligned}
$$