日本物理学会 第 57 回年次大会 (2002 年 3 月 24 日)
立命館大学草津

Gauge Theoretical Construction of Non-compact Calabi-Yau Manifolds

木村 哲士

大阪大学大学院 理学研究科 素粒子論研究室

hep-th/0110216 (to appear in Ann.of Phys.)
hep-th/0202064

in collaboration with K. Higashijima and M. Nitta

Introduction

1-loop 繰り込みで有限な SUSY Nonlinear Sigma Model の探求

Ricci-flat Kähler 多様体 (coset construction)

Non-compact Calabi-Yau 多様体を構成

SNLSM as Gauge Theories (compact Kähler) を応用

$\Downarrow$

Complex Line Bundle の出現, 特に

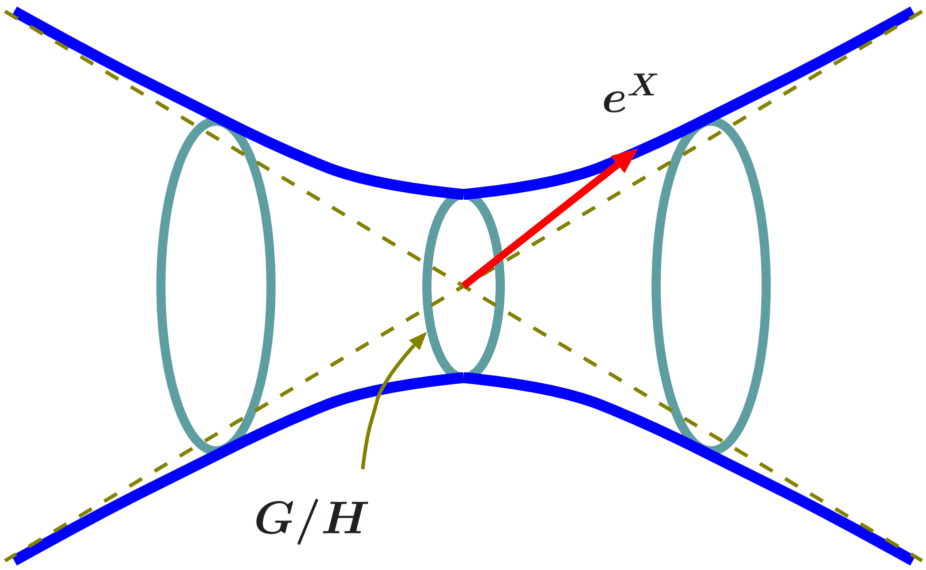
Hermitian Symmetric Spaces

$+$

complex line

total 空間は

特異点が回避されている多様体とみなされる



Compact Kähler Manifolds

$$\text{Projective space: } \mathbb{C}P^{N-1} = \frac{SU(N)}{SU(N-1) \times U(1)}$$

$$\mathbb{C}^N \ni \vec{\phi}^T = (\phi^1, \phi^2, \cdots, \phi^N) = \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{gauged}}}{\phi^1}(1, \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{C}P^{N-1}}}{\varphi^2, \cdots, \varphi^N})$$

$$(\phi^1 \neq 0\,,\ \phi^{k+1}/\phi^1 = \varphi^k)$$

$$\text{(Kähler potential) } K = \phi^\dagger \phi\, e^V - cV \longrightarrow c \log\{1 + \varphi^\dagger \varphi\}$$

$$V\ :\ U(1)^{\mathbb{C}} \text{ vector superfield}$$

$$\text{Grassmannian: } G_{N,M} = \frac{U(N)}{U(N-M) \times U(M)}$$

$$\Phi = (\Phi_{Ab}) = \underset{\substack{\uparrow \\ G_{N,M}}}{\begin{pmatrix} 1_M \\ \varphi_{Aa} \end{pmatrix}} \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{gauged}}}{(\Phi_{ab})}$$

$$K = \mathrm{tr}(\Phi^\dagger \Phi e^V) - c\, \mathrm{tr} V \longrightarrow c \log\det\left\{1_M + \varphi^\dagger \varphi\right\}$$

$$V\ :\ U(M)^{\mathbb{C}} \text{ vector superfield}$$

Non-compact Manifolds

$U(1)^{\mathbb{C}}$ 群を ungauged して non-compact 多様体にする

line bundle over $G_{N,M}$:

general $U(M)$ gauge symmetric Lagrangian:

$$\mathcal{K}_0(\Phi, \Phi^\dagger, V) = f(\mathrm{tr}(\Phi^\dagger \Phi e^V)) - c\,\mathrm{tr}V$$

f : $\mathrm{tr}(\Phi^\dagger \Phi e^V)$ の任意関数, $V = V^a T_a$, $T_a \in U(M)$

c : FI constant $\longrightarrow$ real superfield C に格上げ

$$\Downarrow$$

$$「\partial\mathcal{L}/\partial C = -\mathrm{tr}V = 0」 \;\Rightarrow\; 「U(M)^{\mathbb{C}} \to SU(M)^{\mathbb{C}}」$$

$$\mathcal{K}_0 \equiv \mathcal{K}(X)\,, \quad X = \log\det\Phi^\dagger\Phi$$

C を導入 $=$ $U(1)^{\mathbb{C}}$ 部分を ungauged

$$\Phi = \sigma \begin{pmatrix} 1_M \\ \varphi_{Aa} \end{pmatrix}, \quad \sigma \in \mathbb{C}^1 \quad \Longrightarrow \quad X = M^2 \log|\sigma|^2 + K$$

Ricci-flatness Condition

$$(\text{constant}) = e^{-NX} \frac{d}{dX} \left(\frac{d\mathcal{K}}{dX} \right)^{M(N-M)+1}$$

SOLUTION

$$\frac{d\mathcal{K}}{dX} = \left(\lambda e^{NX} + b \right)^{\frac{1}{D}}$$

λ : positive real parameter

b : integration constant, 非常に重要な parameter

$$D = M(N-M)+1$$

特徴

$b \neq 0$ での metric: $\sigma = 0$ で潰れるが curvature は有限

$z^\mu = (\sigma, \varphi^i)$ は座標特異点 $(\sigma = 0)$ を持つ

$$\Downarrow$$

座標変換：$\rho \equiv \dfrac{\sigma^{MN}}{MN}$

$\rho = 0$ $(d\rho = 0)$ 部分多様体:

$$g_{ij^*}\Big|_{\rho=0} = b^{\frac{1}{D}} \partial_i \partial_{j^*} \Psi \qquad \Longleftarrow \qquad G_{N,M} \text{ の metric そのもの}$$

任意の $\rho \neq 0$ $(d\rho = 0)$ 部分多様体も $G_{N,M}$ で構成される

canonical line bundle over $G_{N,M}$

$\mathcal{O}(-MN)$ bundle over $G_{N,M}$

$b = 0$: 原点に特異点

$$\Downarrow$$

$b =$ 特異点回避の parameter

Hermitian Symmetric Spaces:

† 拘束を課す: $G_{2N,N}$ + Superpotential

$$G_{2N,N} + \{\varphi^T = \varphi\} \Longrightarrow \frac{Sp(N)}{U(N)}$$

$$G_{2N,N} + \{\varphi^T = -\varphi\} \Longrightarrow \frac{SO(2N)}{U(N)}$$

† non-Abelian gauge group を $U(1)$ のみにする $(M = 1)$

$$G_{N,1} \;\Rightarrow\; \mathbb{C}P^{N-1}$$

† $\mathbb{C}P^{N-1}$ に拘束を課す: $\mathbb{C}P^{N-1}$ + Superpotential

$$\mathbb{C}P^{N-1} + \{\vec{\phi}^2 = 0\} \;\Rightarrow\; \frac{SO(N)}{SO(N-2)\times U(1)} \equiv Q^{N-2}$$

$$\mathbb{C}P^{26} + \{\Gamma_{ijk}\phi^i\phi^j\phi^k = 0\} \;\Rightarrow\; \frac{E_6}{SO(10)\times U(1)}$$

$$\mathbb{C}P^{55} + \{d_{\alpha\beta\gamma\delta}\phi^\alpha\phi^\beta\phi^\gamma\phi^\delta = 0\} \;\Rightarrow\; \frac{E_7}{E_6\times U(1)}$$

これらの canonical line bundle も同様に構成できる

The Solutions of Ricci-flatness Condition:

$$\frac{d\mathcal{K}}{dX} = \left(\lambda e^{\mathcal{C}X} + b\right)^{\frac{1}{D}} \ , \quad \rho = \sigma^n / n \ .$$

Hermitian symmetric spaces:

type	$\mathbb{C} \ltimes G/H$	$\mathcal{C}$	D	n
AIII_1	$\mathbb{C} \ltimes \mathbb{C}P^{N-1}$	N	$1 + (N-1)$	N
AIII_2	$\mathbb{C} \ltimes G_{N,M}$	N	$1 + M(N-M)$	MN
BDI	$\mathbb{C} \ltimes Q^{N-2}$	$N-2$	$1 + (N-2)$	$N-2$
CI	$\mathbb{C} \ltimes Sp(N)/U(N)$	$N+1$	$1 + \frac{1}{2}N(N+1)$	$N(N+1)$
DIII	$\mathbb{C} \ltimes SO(2N)/U(N)$	$N-1$	$1 + \frac{1}{2}N(N-1)$	$N(N-1)$
EIII	$\mathbb{C} \ltimes E_6/[SO(10) \times U(1)]$	12	$1 + 16$	12
EVII	$\mathbb{C} \ltimes E_7/[E_6 \times U(1)]$	18	$1 + 27$	18

$$D = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \ltimes G/H) \ , \quad \mathcal{C} = \frac{1}{2} C_2(G)$$

$$Q^1 \simeq \mathbb{C}P^1 \simeq SO(4)/U(2) \simeq Sp(1)/U(1)$$

$$Q^2 \simeq \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$$

$$Q^3 \simeq Sp(2)/U(2)$$

$$\mathbb{C}P^3 \simeq SO(6)/U(3)$$

$$Q^4 \simeq G_{4,2}$$

$$G_{N,M} \simeq G_{N,N-M}$$

Generalizations

$\boxed{\text{Kähler coset } G/H \text{ には Einstein 計量が入れられる}}$

$$\Downarrow$$

Kähler G/H を base にした line bundle が作られる

Non-symmetric Spaces

$$\text{(ex.)} \qquad \mathbb{C} \ltimes \frac{SU(\ell+m+n)}{S[U(\ell)\times U(m)\times U(n)]}$$

† 複素構造が 2 種類存在する

Direct Product

$$\text{(ex.)} \qquad \mathbb{C} \ltimes \{\mathbb{C}P^{N-1} \times \mathbb{C}P^{M-1}\}$$

† それぞれの半径は任意ではない $(N:M)$

Summary and Discussions

Gauge theory を用いた compact な Kähler 多様体

$$\Downarrow$$

$U(1)^{\mathbb{C}}$ ungauged $\Rightarrow$ non-compact Kähler 多様体の導出

Einstein-Kähler $\Rightarrow$ 「Ricci-flat 条件 $=$ 常微分方程式」

座標変換 $\rho \sim \sigma^n$ $\Rightarrow$ 座標特異点消失

積分定数 $b \neq 0$ $\Rightarrow$ 特異点消失

$\rho = 0$ 部分多様体 $=$ 「compact Kähler 多様体」

$$\Downarrow$$

Canonical line bundle over compact Kähler manifolds

$$\Downarrow$$

Non-compact Calabi-Yau manifolds

$$\mathbb{C} \ltimes G/H$$

その他:

G/H が Einstein-Kähler なら全て同様に構成可能

$\mathbb{C} \ltimes Q^2$: 実 6 次元模型

- 特異点が存在 $\longrightarrow$ singular conifold
- 特異点回避が $Q^2 \simeq S^2 \times S^2$
- deformation (S^3), resolution (S^2) と異なる
  - 幾何として何を変形したのか不明
  - 弦理論の立場で何に相当するか不明

$\Longrightarrow$ 今後の課題