

Non-supersymmetric Extremal RN-AdS Black Holes in $\mathcal{N} = 2$ Gauged Supergravity



arXiv:1005.4607 [hep-th]

木村 哲士 (KEK理論センター)

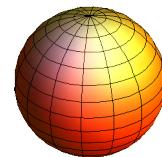
INTRODUCTION

「4次元」「漸近(非)平坦」「荷電」「静的」「球対称」ブラックホールを考える：

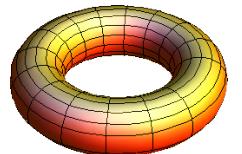
$$\begin{aligned} ds^2 &= -V(r)dt^2 + \frac{1}{V(r)}dr^2 + r^2d\sigma_{X_2}^2 \\ V(r) &= \kappa - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3}, \quad Q^2 = q^2_{\text{(電荷)}} + p^2_{\text{(磁荷)}}, \quad \Lambda = (\text{宇宙項}) \end{aligned}$$

2次元空間 X_2 (計量 $d\sigma_{X_2}^2$) のトポロジーは3通り：

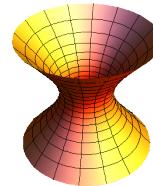
$$X_2 = S^2 : \quad \kappa = 1, \quad d\sigma_{S^2}^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$$



$$X_2 = \text{flat} : \quad \kappa = 0 \quad (\text{例：トーラス計量 } d\sigma_{X_2}^2 = dx^2 + 2\text{Re}\tau dx dy + |\tau|^2 dy^2; \quad x, y \in [0, 1])$$



$$X_2 = H^2 : \quad \kappa = -1, \quad d\sigma_{H^2}^2 = d\theta^2 + \sinh^2 \theta d\phi^2$$



以後 $\kappa = 1$ の場合のみを考える

「4次元」「漸近(非)平坦」「荷電」「静的」「球対称」ブラックホールを考える：

$$\begin{aligned} ds^2 &= -V(r)dt^2 + \frac{1}{V(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \\ V(r) &= 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3}, \quad Q^2 = \underset{\text{(電荷)}}{q^2} + \underset{\text{(磁荷)}}{p^2}, \quad \Lambda = \text{(宇宙項)} \end{aligned}$$

いろいろなブラックホール：

“平坦” : $M = Q = \Lambda = 0$

Schwarzschild : $M \neq 0, Q = \Lambda = 0$

Schwarzschild-AdS : $M \neq 0, Q = 0, \Lambda = -\frac{3}{\ell^2} < 0$

Reissner-Nordström (RN) : $M \neq 0, Q \neq 0, \Lambda = 0$

RN-AdS : $M \neq 0, Q \neq 0, \Lambda = -\frac{3}{\ell^2} < 0$

「静的」条件を外す → 回転系：Kerr-(Newman)-(AdS) ブラックホール etc.

これらのブラックホールを $\mathcal{N} = 2$ Gauged 超重力理論の解として実現したい

- ✍ 何故、 $\mathcal{N} = 2$ (8個の超対称生成子) を扱うか?
 - 極限ブラックホール ($M^2 = Q^2$ でゼロ温度) を探究する
 - スカラー場が対称性の高い空間に住む
 - 超弦理論や M 理論を (フラックス) コンパクト化 (今回は直接言及しない)
- ✍ 何故、ゲージ化するか?
 - 非自明なポテンシャルが登場する (期待値が宇宙項になる)
- ✍ 何故、ブラックホールを探すのか?
 - 4次元 $\mathcal{N} = 2$ 超重力理論の研究対象として魅力的
 - AdS₄/CFT₃ に用いるための準備段階

ブラックホールエントロピーは地平面の面積で与えられる
(Bekenstein-Hawking エントロピー)

$$S_{\text{BH}} = \frac{A_{\text{H}}}{4\pi}$$

ブラックホールの系は(スカラー)場の関数 V_{BH} で支配される
極限ブラックホールの V_{BH} は地平面上で極値を持つ
これは初期状態(無限遠方で設定された場の値)に関係しない

そして V_{BH} の極値は地平面の面積(つまりブラックホールエントロピー)を与える
その極限ブラックホールエントロピーは電荷と磁荷のみで決まってしまう

これを「アトラクター機構」と呼ぶ

漸近平坦の場合 (セントラルチャージ Z ; 温度 $T = 0$ (極限ブラックホール))

$$V_{\text{BH}}(z, \bar{z}, p, q) = |Z(z, \bar{z}, p, q)|^2 + |D_a Z(z, \bar{z}, p, q)|^2$$

$$S_{\text{BH}}(p, q) = \frac{A_{\text{H}}}{4\pi} = V_{\text{BH}}(z_*, \bar{z}_*, p, q), \quad z_* = z|_{\text{horizon}}$$

$$M(z_*, \bar{z}_*, p, q)^2 = |Z(z_*, \bar{z}_*, p, q)|^2 + |D_a Z(z_*, \bar{z}_*, p, q)|^2 + 2ST$$

極限BPS(超対称)ブラックホールの時：

$$S_{\text{BH}}(p, q) = V_{\text{BH}}(z_*, \bar{z}_*, p, q) = M^2 = |Z|^2$$

極限non-BPS(非超対称)ブラックホールの時：

$$S_{\text{BH}}(p, q) = V_{\text{BH}}(z_*, \bar{z}_*, p, q) = M^2 = |Z|^2 + |D_a Z|^2$$

疑問

漸近**非**平坦の場合は具体的にどのように与えられるか？

Contents

- Introduction
- $\mathcal{N} = 2$ Gauged SUGRA
 - Effective Black Hole Potential
 - Attractor Equation
- Solutions
- Discussions

$\mathcal{N} = 2$ GAUGED SUGRA

Potentials

Special Kähler geometry

Attractor equations

4次元 $\mathcal{N} = 2$ 超重力理論は次の多重項を持つ

1つの重力多重項 : $\{g_{\mu\nu}, A_\mu^0, \psi_{A\mu}\}$ $\begin{array}{l} \mu = 0, 1, 2, 3 \text{ (4D 時空)} \\ A = 1, 2 \text{ (} SU(2) \text{ R-対称性)} \end{array}$

n_V 個のベクトル多重項 : $\{A_\mu^a, z^a, \lambda^{aA}\}$ $a = 1, \dots, n_V$
 z^a は special Kähler geometry \mathcal{SM} に住む

$n_H(+1)$ 個のハイパー多重項 : $\{q^u, \zeta^\alpha\}$ $\begin{array}{l} u = 1, \dots, 4n_H(+4) \\ \alpha = 1, \dots, 2n_H(+2) \end{array}$
 q^u は quaternionic geometry \mathcal{HM} に住む

ゲージ化 : \mathcal{SM} と \mathcal{HM} のアイソメトリー群による大域的変換(の一部)を
局所変換に格上げする

Reference: [hep-th/9605032](#)

4次元 $\mathcal{N} = 2$ 超重力理論は次の多重項を持つ

1つの重力多重項 : $\{g_{\mu\nu}, A_\mu^0, \psi_{A\mu}\}$ $\begin{array}{l} \mu = 0, 1, 2, 3 \text{ (4D 時空)} \\ A = 1, 2 \text{ (} SU(2) \text{ R-対称性)} \end{array}$

n_V 個のベクトル多重項 : $\{A_\mu^a, z^a, \lambda^{aA}\}$ $a = 1, \dots, n_V$
 z^a は special Kähler geometry \mathcal{SM} に住む

$n_H(+1)$ 個のハイパー多重項 : $\{q^u, \zeta^\alpha\}$ $\begin{array}{l} u = 1, \dots, 4n_H(+4) \\ \alpha = 1, \dots, 2n_H(+2) \end{array}$
 q^u は quaternionic geometry \mathcal{HM} に住む

今回はハイパー多重項の寄与を考慮しない
ゲージ対称性もアーベリアンにする

作用積分 (重力定数 κ ; ゲージ結合定数 g ; 添字 $\Lambda = 0, 1, \dots, n_V$) :

$$\begin{aligned}
S = & \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2\kappa^2} R - G_{a\bar{b}}(z, \bar{z}) \partial_\mu z^a \partial^\mu \bar{z}^b \right. \\
& + \frac{1}{4} \mu_{\Lambda\Sigma}(z, \bar{z}) F_{\mu\nu}^\Lambda F^{\Sigma\mu\nu} + \frac{1}{4} \nu_{\Lambda\Sigma}(z, \bar{z}) F_{\mu\nu}^\Lambda (*F^\Sigma)^{\mu\nu} \\
& - g^2 V(z, \bar{z}) \\
& \left. + \text{fermionic terms} \right\}
\end{aligned}$$

$$G_{a\bar{b}} = \frac{\partial}{\partial z^a} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^b} K(z, \bar{z}) \quad (\text{Kähler ポテンシャル})$$

$$\mu_{\Lambda\Sigma} = \text{Im}\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma}, \quad \nu_{\Lambda\Sigma} = \text{Re}\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma} \quad (\theta\text{-angle の一般化})$$

Special Kähler geometry が支配する世界 :

$K(z, \bar{z})$ も $\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma}(z, \bar{z})$ も $V(z, \bar{z})$ も一つの関数 (プレポテンシャル) で記述できる

運動方程式 (重力定数 κ ; ゲージ結合定数 g を省略 ; fermionic 背景場はゼロ) :

$$g_{\mu\nu} : \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) - 2G_{a\bar{b}} \partial_{(\mu} z^a \partial_{\nu)} \bar{z}^{\bar{b}} + G_{a\bar{b}} \partial_\rho z^a \partial^\rho \bar{z}^{\bar{b}} g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - V g_{\mu\nu}$$

$$T_{\mu\nu} = -\mu_{\Lambda\Sigma} F_{\mu\rho}^\Lambda F_{\nu\sigma}^\Sigma g^{\rho\sigma} + \frac{1}{4} \mu_{\Lambda\Sigma} F_{\rho\sigma}^\Lambda F^{\Sigma\rho\sigma} g_{\mu\nu} \quad (\text{エネルギー運動量テンソル})$$

$$\begin{aligned} z^a : \quad & -\frac{G_{a\bar{b}}}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \bar{z}^{\bar{b}} \right) - \frac{\partial G_{a\bar{b}}}{\partial \bar{z}^{\bar{c}}} \partial_\rho \bar{z}^{\bar{b}} \partial^\rho \bar{z}^{\bar{c}} \\ & = \frac{1}{4} \frac{\partial \mu_{\Lambda\Sigma}}{\partial z^a} F_{\mu\nu}^\Lambda F^{\Sigma\mu\nu} + \frac{1}{4} \frac{\partial \nu_{\Lambda\Sigma}}{\partial z^a} F_{\mu\nu}^\Lambda (*F^\Sigma)^{\mu\nu} - \frac{\partial V}{\partial z^a} \end{aligned}$$

$$A_\mu^\Lambda : \quad \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu G_{\Lambda\rho\sigma} = 0, \quad G_{\Lambda\rho\sigma} = \nu_{\Lambda\Sigma} F_{\rho\sigma}^\Sigma - \mu_{\Lambda\Sigma} (*F^\Sigma)_{\rho\sigma}$$

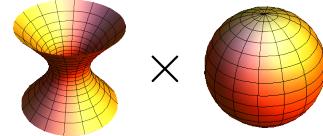
$$\text{電荷 } q_\Lambda = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} G_\Lambda, \quad \text{磁荷 } p^\Lambda = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} F^\Lambda$$

「荷電」「静的」「球対称」な RN(-AdS) ブラックホールにつながる計量を考える

$$\text{Ansatz: } ds^2 = -e^{2A(\textcolor{red}{r})} dt^2 + e^{2B(\textcolor{red}{r})} dr^2 + e^{2C(\textcolor{red}{r})} r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

地平面近傍で $\text{AdS}_2 \times S^2$ (それぞれの半径は r_A, r_H) に振る舞う $A(r), B(r), C(r)$:

$$A(r) = \log \frac{r - r_H}{r_A}, \quad B(r) = -A(r), \quad C(r) = \log \frac{r_H}{r}$$

$$R(\text{AdS}_2 \times S^2) = 2 \left(-\frac{1}{r_A^2} + \frac{1}{r_H^2} \right)$$


$$\begin{aligned} \rightarrow ds^2(\text{地平面近傍}) &= - \left(\frac{r - r_H}{r_A} \right)^2 dt^2 + \left(\frac{r_A}{r - r_H} \right)^2 dr^2 + r_H^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ &= -\frac{e^{2\tau}}{r_A^2} dt^2 + r_A^2 d\tau^2 + \textcolor{red}{r}_H^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (\tau = \log(r - r_H)) \end{aligned}$$

地平面の面積は $A_H = 4\pi r_H^2$ になる

電荷・磁荷を用いてエネルギー運動量テンソルが記述できる

$$T_t^t = T_r^r = -T_\theta^\theta = -T_\phi^\phi = \frac{e^{-4C}}{r^4} I_1$$

$$\begin{aligned} I_1(z, \bar{z}, p, q) &= -\frac{1}{2} \left(p^\Lambda \ q_\Lambda \right) \begin{pmatrix} \mu_{\Lambda\Sigma} + \nu_{\Lambda\Gamma}(\mu^{-1})^{\Gamma\Delta}\nu_{\Delta\Sigma} & -\nu_{\Lambda\Gamma}(\mu^{-1})^{\Gamma\Sigma} \\ -(\mu^{-1})^{\Lambda\Gamma}\nu_{\Gamma\Sigma} & (\mu^{-1})^{\Lambda\Sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^\Sigma \\ q_\Sigma \end{pmatrix} \\ &\equiv -\frac{1}{2} \Gamma^T \mathcal{M} \Gamma \end{aligned}$$

I_1 : 1st シンプレクティック不变量

アトラクター機構が働くと、地平面上で

$$z^{a\prime}|_{\text{horizon}} = 0, \quad z^{a\prime\prime}|_{\text{horizon}} = 0$$

このとき運動方程式が著しく簡単になる：

$$\begin{aligned} g_{tt}, g_{rr} : \quad \frac{1}{r_H^2} &= \frac{1}{r_H^4} I_1 + V|_{\text{horizon}} &\Rightarrow r_H^2 &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4I_1V}}{2V}|_{\text{horizon}} \\ g_{\theta\theta}, g_{\phi\phi} : \quad \frac{1}{r_A^2} &= \frac{1}{r_H^4} I_1 - V|_{\text{horizon}} &\Rightarrow r_A^2 &= \frac{r_H^2}{\sqrt{1 - 4I_1V}}|_{\text{horizon}} \\ z^a : \quad 0 &= \frac{1}{r_H^4} \frac{\partial I_1}{\partial z^a} - \frac{\partial V}{\partial z^a}|_{\text{horizon}} &\Rightarrow 0 &= \frac{1}{r_H^4} (1 - 2r_H^2 V) \frac{\partial}{\partial z^a} r_H^2|_{\text{horizon}} \end{aligned}$$

漸近平坦の場合と同様に BH エントロピーは地平面の面積で与えられる

$$\begin{aligned} S_{\text{BH}}(p, q) &= \frac{A_{\text{H}}}{4\pi} = r_{\text{H}}^2 \Big|_{\text{horizon}} \equiv V_{\text{eff}}(z, \bar{z}, p, q) \Big|_{\text{horizon}} \\ V_{\text{eff}}(z, \bar{z}, p, q) &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4I_1 V}}{2V} \quad V_{\text{eff}} \rightarrow I_1 \quad (\text{if } V \rightarrow 0) \\ 0 &= \frac{1}{r_{\text{H}}^4} (1 - 2r_{\text{H}}^2 V) \frac{\partial}{\partial z^a} V_{\text{eff}} \Big|_{\text{horizon}} \end{aligned}$$

このときスカラー曲率から宇宙項を読みとる：

$$\begin{aligned} R(\text{AdS}_2 \times S^2) &= 2 \left(-\frac{1}{r_{\text{A}}^2} + \frac{1}{r_{\text{H}}^2} \right) = 4V \\ V \Big|_{\text{horizon}} &= \Lambda(\text{宇宙項}) \end{aligned}$$

負(またはゼロ)の宇宙項を持ち地平面が有限の面積を持つ場合に解くべき方程式は

$$0 = \frac{\partial}{\partial z^a} V_{\text{eff}}(z, \bar{z}, p, q) \Big|_{\text{horizon}}$$

負(またはゼロ)の宇宙項を持ち地平面が有限の面積を持つ場合に解くべき方程式は

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial z^a} V_{\text{eff}}(z, \bar{z}, p, q) \Big|_{\text{horizon}} \\ &= \frac{1}{2V^2\sqrt{1-4I_1V}} \left\{ 2V^2 \frac{\partial I_1}{\partial z^a} - (\sqrt{1-4I_1V} + 2I_1V - 1) \frac{\partial V}{\partial z^a} \right\} \Big|_{\text{horizon}} \end{aligned}$$

I_1 (や V) を評価する : セントラルチャージ Z を用いた記法
(非)超対称解を探すのに有力

Z の定義 : グラビティーノの超対称変換を眺める

$$\begin{aligned} \delta\psi_{A\mu} &= D_\mu \varepsilon_A + \epsilon_{AB} T_{\mu\nu}^- \gamma^\nu \varepsilon^B + ig S_{AB} \gamma_\mu \varepsilon^B + (\text{fermionic terms}) \\ Z &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} T^- \right), \quad S_{AB} = \frac{i}{2} (\sigma_x)_{AB} \mathcal{P}^x \end{aligned}$$

Special Kähler geometry の性質を活かす

正則な同質変数 X^Λ と

正則なプレポテンシャル $\mathcal{F}(X)$ が支配する特殊な Kähler geometry

$$\mathcal{F}_\Lambda = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X^\Lambda}, \quad z^a = \frac{X^a}{X^0}$$

$$K = -\log [i(\bar{X}^\Lambda \mathcal{F}_\Lambda - X^\Lambda \bar{\mathcal{F}}_\Lambda)], \quad G_{a\bar{b}} = \frac{\partial}{\partial z^a} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^b} K$$

$$\Pi = e^{K/2} \begin{pmatrix} X^\Lambda \\ \mathcal{F}_\Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^\Lambda \\ M_\Lambda \end{pmatrix}, \quad D_a \Pi = \left(\frac{\partial}{\partial z^a} + \frac{1}{2} \frac{\partial K}{\partial z^a} \right) \Pi = \begin{pmatrix} f_a^\Lambda \\ h_{\Lambda a} \end{pmatrix}$$

$$M_\Lambda = \mathcal{N}_{\Lambda\Sigma} L^\Sigma, \quad h_{\Lambda a} = \bar{\mathcal{N}}_{\Lambda\Sigma} f_a^\Sigma, \quad G^{a\bar{b}} f_a^\Lambda f_{\bar{b}}^\Sigma = -\frac{1}{2} \text{Im}(\mathcal{N}^{-1})^{\Lambda\Sigma} - \bar{L}^\Lambda L^\Sigma$$

X^Λ や $\mathcal{F}(X)$ を用いて $T_{\mu\nu}^-$, Z , I_1 , V を書き下す：

$$T_{\mu\nu}^- = 2M_\Lambda F_{\mu\nu}^\Lambda - 2L^\Lambda G_{\Lambda\mu\nu}$$

$$Z = L^\Lambda q_\Lambda - M_\Lambda p^\Lambda = e^{K/2} (X^\Lambda q_\Lambda - \mathcal{F}_\Lambda p^\Lambda)$$

$$I_1 = |Z|^2 + G^{a\bar{b}} D_a Z \overline{D_b Z}$$

$$\begin{aligned} V &= \left(G^{a\bar{b}} f_a^\Lambda f_{\bar{b}}^\Sigma - 3\overline{L}^\Lambda L^\Sigma \right) \mathcal{P}_\Lambda^x \mathcal{P}_\Sigma^x + \left(G^{a\bar{b}} h_{\Lambda a} h_{\Sigma \bar{b}} - 3\overline{M}_\Lambda M_\Sigma \right) \tilde{\mathcal{P}}^{x\Lambda} \tilde{\mathcal{P}}^{x\Sigma} \\ &\quad + \left\{ G^{a\bar{b}} (f_a^\Lambda h_{\Sigma \bar{b}} + f_{\bar{b}}^\Lambda h_{\Sigma a}) - 3(\overline{M}_\Lambda L^\Sigma + M_\Lambda \overline{L}^\Sigma) \right\} \mathcal{P}_\Sigma^x \tilde{\mathcal{P}}^{x\Lambda} \\ &= G^{a\bar{b}} D_a \mathcal{P}^3 \overline{D_b \mathcal{P}^3} - 3|\mathcal{P}^3|^2 \end{aligned}$$

\mathcal{P}_Λ^x , $\tilde{\mathcal{P}}^{x\Lambda}$: $\mathcal{N}=2$ SUGRA に登場する $SU(2)$ triplet of Killing prepotentials

$$\mathcal{P}^x = \mathcal{P}_\Lambda^x L^\Lambda - \tilde{\mathcal{P}}^{x\Lambda} M_\Lambda \quad \text{in } S_{AB} \quad (x = 1, 2, 3)$$

ハイパー多重項がない時は $\mathcal{P}^3 = \mathcal{P}_\Lambda^3 L^\Lambda - \tilde{\mathcal{P}}^{3\Lambda} M_\Lambda$ のみが効く

さらに $(\mathcal{P}_\Lambda^3, \tilde{\mathcal{P}}^{3\Lambda}) = (q_\Lambda, p^\Lambda)$ に同定できる $\rightsquigarrow \mathcal{P}^3 \equiv Z$ arXiv:0911.2708

$$V = G^{a\bar{b}} D_a Z \overline{D_b Z} - 3|Z|^2$$

$I_1(z, \bar{z}, p, q)$, $V(z, \bar{z}, p, q)$ の「関数形」とその微分はよく知られている

- I_1 : $\mathcal{N} = 2$ SUGRA での漸近平坦な極限ブラックホールの探索

$$I_1 = |Z|^2 + G^{a\bar{b}} D_a Z \overline{D_b Z}, \quad \partial_a I_1 = 2 \overline{Z} D_a Z + i C_{abc} G^{b\bar{b}} G^{c\bar{c}} \overline{D_b Z} \overline{D_c Z}$$

- V : $\mathcal{N} = 1$ SUGRA における真空解の探索(と同じ関数形)

$$V = -3|Z|^2 + G^{a\bar{b}} D_a Z \overline{D_b Z}, \quad \partial_a V = -2 \overline{Z} D_a Z + i C_{abc} G^{b\bar{b}} G^{c\bar{c}} \overline{D_b Z} \overline{D_c Z}$$

$\mathcal{N} = 1$ SUGRA の時は Z はセントラルチャージではなく超ポテンシャル

$$C_{abc} = \partial_a X^\Lambda \partial_b X^\Sigma \partial_c X^\Gamma \mathcal{F}_{\Lambda\Sigma\Gamma}$$

セントラルチャージを用いて書き直す：

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial}{\partial z^a} V_{\text{eff}}(z, \bar{z}, p, q) \Big|_{\text{horizon}} \\
 &= \frac{1}{2V^2\sqrt{1-4I_1V}} \left\{ 2V^2 \frac{\partial I_1}{\partial z^a} - (\sqrt{1-4I_1V} + 2I_1V - 1) \frac{\partial V}{\partial z^a} \right\} \Big|_{\text{horizon}} \\
 &= \frac{1+V_{\text{eff}}^2}{\sqrt{1-4I_1V}} \left\{ 2G_V \bar{Z} D_a Z + i C_{abc} G^{b\bar{b}} G^{c\bar{c}} \overline{D_b Z} \overline{D_c Z} \right\} \Big|_{\text{horizon}}
 \end{aligned}$$

非自明な factor $G_V = \frac{1-V_{\text{eff}}^2}{1+V_{\text{eff}}^2}$ が入っている

- (注1) $V|_{\text{horizon}} = \Lambda < 0$ の時は $G_V \neq \pm 1 \rightarrow \partial_a I_1 = 0$ にも $\partial_a V = 0$ にも帰着しない
- (注2) $G_V = 0$ は特殊な場合 $\rightarrow S_{\text{BH}} = 1$ という定数になる
- (注3) $\Lambda < 0$ で超対称解 $D_a Z = 0$ の場合は裸の特異点が登場 \rightarrow 非超対称解 $D_a Z \neq 0$ を探す

[hep-th/9203018, 0003213, etc.](#)

セントラルチャージを用いて書き直す：

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial}{\partial z^a} V_{\text{eff}}(z, \bar{z}, p, q) \Big|_{\text{horizon}} \\
 &= \frac{1}{2V^2\sqrt{1-4I_1V}} \left\{ 2V^2 \frac{\partial I_1}{\partial z^a} - (\sqrt{1-4I_1V} + 2I_1V - 1) \frac{\partial V}{\partial z^a} \right\} \Big|_{\text{horizon}} \\
 &= \frac{1+V_{\text{eff}}^2}{\sqrt{1-4I_1V}} \left\{ 2G_V \bar{Z} D_a Z + i C_{abc} G^{b\bar{b}} G^{c\bar{c}} \overline{D_b Z} \overline{D_c Z} \right\} \Big|_{\text{horizon}}
 \end{aligned}$$

$V < 0, \ 1 - 4I_1V > 0, \ D_a Z \neq 0, \ \partial_a I_1 \neq 0, \ \partial_a V \neq 0$ の条件下で

$$0 = 2G_V \bar{Z} D_a Z + i C_{abc} G^{b\bar{b}} G^{c\bar{c}} \overline{D_b Z} \overline{D_c Z} \Big|_{\text{horizon}} \quad \text{を解け !}$$

電荷・磁荷 $\Gamma = (p^\Lambda, q_\Lambda)^T$ と $I_1(z, \bar{z}, p, q)$ の間には強力な恒等式が存在する

$$\Gamma^T + i \frac{\partial I_1}{\partial \tilde{\Gamma}} = 2i \bar{Z} \Pi^T + 2i G^{a\bar{b}} D_a Z \bar{D}_b \Pi^T$$

$$\tilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Gamma, \quad \Pi = \begin{pmatrix} L^\Lambda \\ M_\Lambda \end{pmatrix}, \quad Z = L^\Lambda q_\Lambda - M_\Lambda p^\Lambda = \tilde{\Gamma}^T \Pi \quad \text{hep-th/0606263}$$

SUGRA のポテンシャル項 $-g^2 V$ の存在とは無関係に成立する

地平面近傍以外でも成立する

$$G^{a\bar{b}} D_a \Pi \otimes \bar{D}_b \Pi^T = -\bar{\Pi} \otimes \Pi^T - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \widetilde{\mathcal{M}}$$

$$\widetilde{\mathcal{M}} \equiv \begin{pmatrix} (\mu^{-1})^{\Lambda\Sigma} & (\mu^{-1})^{\Lambda\Gamma} \nu_{\Gamma\Sigma} \\ \nu_{\Lambda\Gamma} (\mu^{-1})^{\Gamma\Sigma} & \mu_{\Lambda\Sigma} + \nu_{\Lambda\Gamma} (\mu^{-1})^{\Gamma\Delta} \nu_{\Delta\Sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{M} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_1 = -\frac{1}{2} \Gamma^T \mathcal{M} \Gamma = -\frac{1}{2} \tilde{\Gamma}^T \widetilde{\mathcal{M}} \tilde{\Gamma}, \quad \frac{\partial I_1}{\partial \tilde{\Gamma}} = -\tilde{\Gamma}^T \widetilde{\mathcal{M}}$$

SOLUTIONS

in T^3 -model and in STU-model

- Single modulus model ($a = 1$) を考える : $\mathcal{F} = (X^1)^3/X^0$

$$Z = e^{K/2} \left(q_0 + q t - 3p t^2 + p^0 t^3 \right), \quad t = \frac{X^1}{X^0}$$

$$e^K = \frac{i}{(t - \bar{t})^3}, \quad G_{t\bar{t}} = -\frac{3}{(t - \bar{t})^2} \equiv e_t{}^{\hat{1}} e_{\bar{t}}{}^{\hat{\bar{1}}} \delta_{\hat{1}\hat{\bar{1}}}, \quad C_{ttt} = \frac{6i}{(t - \bar{t})^3}$$

$$V = -3|Z|^2 + |D_{\hat{1}}Z|^2 < 0 \text{ 解を探すので } Z \neq 0$$

非超対称解を探すので $D_{\hat{1}}Z \neq 0$



$$\text{解の一般形が予想できる : } Z \equiv -i\rho e^{i(\alpha-3\phi)}, \quad D_{\hat{1}}Z \equiv \sigma e^{-i\phi} \quad (\rho, \sigma > 0)$$

[hep-th/0606263](#) のやり方を模倣

$$\text{解の一般形: } Z \equiv -i\rho e^{i(\alpha-3\phi)}, \quad D_1 Z \equiv \sigma e^{-i\phi} \quad (\rho, \sigma > 0)$$

ρ と σ の関係はアトラクター方程式で決まる

$$\sigma = -\frac{\rho}{3} e^{-i\alpha} G_V \quad (G_V \neq 0)$$

恒等式に代入すると次の2種類が得られる ($\Gamma = (p^0, p, q, q_0)^T$) :

$$p + \frac{\partial I_1}{\partial q} = -\frac{2\rho}{3\sqrt{3}} e^{-i\alpha} e^{K/2} \left[(3\sqrt{3} - 2G_V) t - G_V \bar{t} \right]$$

$$p^0 + \frac{\partial I_1}{\partial q_0} = -\frac{2\rho}{3\sqrt{3}} e^{-i\alpha} e^{K/2} (3\sqrt{3} - G_V)$$

$$\rightarrow t = \frac{3\sqrt{3} - 2G_V}{3\sqrt{3} - G_V} \left[\frac{p + i\frac{\partial I_1}{\partial q}}{p^0 + i\frac{\partial I_1}{\partial q_0}} \right] + \frac{G_V}{3\sqrt{3} - G_V} \left[\frac{p - i\frac{\partial I_1}{\partial q}}{p^0 - i\frac{\partial I_1}{\partial q_0}} \right]$$

“一般解”

しかしここから BH エントロピーの一般解を評価するのは非常に難しい
具体的な charge の配位で評価する

- チャージの配位 $\Gamma = (0, p, 0, q_0)$ (D0-D4 系と呼ばれる) を考える

正則関数 $W_{04} = e^{-K/2} Z$ とその判別式は

$$W_{04} = q_0 - 3pt^2, \quad \Delta(W_{04}) = 12pq_0$$

アトラクタ一方程式 ($t = 0 + iy, y < 0$) は次の方程式に帰着される

$$f_{04}(y^2) = p(y^2)^3 + (q_0 - 18p^3q_0^2)(y^2)^2 - 12p^2q_0^3(y^2) - 2pq_0^4 = 0$$

$$g_{04}(y^2) = \frac{\partial f_{04}}{\partial y^2} = 3p(y^2)^2 + 2(q_0 - 18p^3q_0^2)(y^2) - 12p^2q_0^3$$

$$\Delta(f_{04}) = \frac{(pq_0)q_0^2}{2} \left[(4q_0^2 + 9(pq_0)^3)^2 + 3375(pq_0)^6 \right]$$

$$\Delta(g_{04}) = 4 \left[q_0^2 + 324p^2(pq_0)^4 \right]$$

セントラルチャージとその微分、 I_1 , Λ , S_{BH} は

$$\begin{aligned} Z|_{\text{horizon}} &= \frac{q_0 + 3p y^2}{2} \sqrt{-\frac{1}{2y^3}} \neq 0, \quad D_t Z|_{\text{horizon}} = \frac{3i(q_0 - p y^2)}{4y} \sqrt{-\frac{1}{2y^3}} \neq 0 \\ I_1 &= \frac{q_0^2 + 3p^2 y^4}{-2y^3} > 0 \\ \Lambda &= \frac{6(pq_0)^2(q_0 + 3p y^2)^2}{y^5} < 0 \\ S_{\text{BH}} &= \frac{-y}{12(pq_0)^2(q_0 + 3p y^2)^2} \left\{ -y^4 + \sqrt{y^8 + 12(pq_0)^2(q_0 + 3p y^2)^2(q_0^2 + 3p^2 y^4)} \right\} > 0 \end{aligned}$$

Modulus $t = 0 + iy$ ($y < 0$) は

$$\begin{aligned} y^2 &= A + B \quad \text{or} \quad A + \omega^\pm B, \quad \omega^3 = 1 \\ A &= \frac{18(pq_0)^3 - q_0^2}{3pq_0}, \quad B = \frac{1}{3pq_0} \left(C^{1/3} + \frac{q_0^2 \Delta(g_{04})}{4} \right) \\ C &= -q_0^6 + 27(pq_0)^3 q_0^4 + 5832(pq_0)^9 + \frac{3\sqrt{3}}{2} q_0^3 \sqrt{-p^2 \Delta(f_{04})}, \quad \text{with } pq_0 < 0 \end{aligned}$$

原理的には BH エントロピーも宇宙項も $\Gamma = (0, p, 0, q_0)$ のみで記述できている

漸近平坦 ($\Lambda = 0$) な極限ブラックホールと比較しておく

● 超対称解の場合

$$\begin{aligned} t &= 0 + iy, \quad y = -\sqrt{\frac{q_0}{p}} \\ Z\Big|_{\text{horizon}} &= \sqrt{2}q_0\left(\frac{p^3}{q_0^3}\right)^{1/4} \neq 0, \quad D_t Z\Big|_{\text{horizon}} = 0 \\ S_{\text{BH}} &= I_1 = |Z|^2 = \sqrt{4p^3 q_0} > 0, \quad \Lambda = 0 \end{aligned}$$

● 非超対称解の場合

$$\begin{aligned} t &= 0 + iy, \quad y = -\sqrt{-\frac{q_0}{p}} \\ Z\Big|_{\text{horizon}} &= -\frac{q_0}{\sqrt{2}}\left(-\frac{p^3}{q_0^3}\right)^{1/4} \neq 0, \quad D_t Z\Big|_{\text{horizon}} = -3ip\left(-\frac{p}{q_0}\right)^{1/4} \neq 0 \\ S_{\text{BH}} &= I_1 = |Z|^2 + G^{t\bar{t}} D_t Z \overline{D_t Z} = 4|Z|^2 = \sqrt{-4p^3 q_0} > 0, \quad \Lambda = 0 \end{aligned}$$

- チャージの配位 $\Gamma = (p^0, 0, q, 0)$ (D2-D6 系と呼ばれる) を考える

正則関数 $W_{26} = e^{-K/2} Z$ とその判別式は

$$W_{26} = q t + p^0 t^3, \quad \Delta(W_{26}) = -4p^0 q^3$$

アトラクタ一方程式 ($t = 0 + iy, y < 0$) は次の方程式に帰着される

$$f_{26}(y^2) = 2(p^0)^4 q (y^2)^3 - 4(p^0)^3 q^2 (y^2)^2 + p^0 (3 + 2p^0 q^3) (y^2) - q = 0$$

$$g_{26}(y^2) = \frac{\partial f_{26}}{\partial y^2} = 6(p^0)^4 (y^2)^2 - 8(p^0)^3 q^2 (y^2) + p^0 (3 + 2p^0 q^3)$$

$$\Delta(f_{26}) = -\frac{(p^0 q^3)^4}{q^{10}} \left[\left(8(p^0 q^3)^2 - \frac{9}{4} \right)^2 + 3375 \right]$$

$$\Delta(g_{26}) = 8(p^0)^5 q \left[-9 + 2p^0 q^3 \right]$$

セントラルチャージとその微分、 I_1 , Λ , S_{BH} は

$$\begin{aligned} Z \Big|_{\text{horizon}} &= -i(q - p^0 y^2) \sqrt{-\frac{1}{8y}} \neq 0, \quad D_t Z \Big|_{\text{horizon}} = -(q + 3p^0 y^2) \sqrt{-\frac{1}{32y^3}} \neq 0 \\ I_1 &= \frac{q^2 + 3(p^0)^2 y^4}{-6y} > 0 \\ \Lambda &= \frac{2q^2 y}{3} ((p^0)^2 y^2 - q)^2 < 0 \\ S_{\text{BH}} &= \frac{-9 + \sqrt{9 + 4q^2 (q - (p^0)^2 y^2)^2 (q^2 + 3(p^0)^2 y^4)}}{-4q^2 (q - (p^0)^2 y^2)^2 y} > 0 \end{aligned}$$

Modulus $t = 0 + iy$ ($y < 0$) は

$$\begin{aligned} y^2 &= A + B \quad \text{or} \quad A + \omega^\pm B, \quad \omega^3 = 1 \\ A &= \frac{2q}{3p^0}, \quad B = \frac{1}{6(p^0)^3 q} \left(C^{1/3} + \frac{1}{4(p^0)^2} \frac{\Delta(g_{26})}{C^{1/3}} \right) \\ C &= -54(p^0)^5 q^3 - 8(p^0)^6 q^6 + 3\sqrt{3}p^0 \sqrt{-q^2 \Delta(f_{26})}, \quad \text{with} \quad p^0 q^3 > 0 \end{aligned}$$

原理的には BH エントロピーも宇宙項も $\Gamma = (p^0, 0, q, 0)$ のみで記述できている

漸近平坦 ($\Lambda = 0$) な極限ブラックホールと比較しておく

● 超対称解の場合

$$\begin{aligned} t &= 0 + iy, \quad y = -\sqrt{-\frac{q}{3p^0}} \\ Z\Big|_{\text{horizon}} &= \frac{-i\sqrt{2}q}{3} \left(-\frac{3p^0}{q}\right)^{1/4} \neq 0, \quad D_t Z\Big|_{\text{horizon}} = 0 \\ S_{\text{BH}} = I_1 = |Z|^2 &= \frac{2}{3} \sqrt{-\frac{p^0 q^3}{3}} > 0, \quad \Lambda = 0 \end{aligned}$$

● 非超対称解の場合

$$\begin{aligned} t &= 0 + iy, \quad y = -\sqrt{\frac{q}{3p^0}} \\ Z\Big|_{\text{horizon}} &= \frac{iq}{3\sqrt{2}} \left(\frac{3p^0}{q}\right)^{1/4} \neq 0, \quad D_t Z\Big|_{\text{horizon}} = -\frac{q}{2\sqrt{2}} \left(\frac{3p^0}{q}\right)^{3/4} \neq 0 \\ S_{\text{BH}} = I_1 = |Z|^2 + G^{t\bar{t}} D_t Z \overline{D_t Z} &= 4|Z|^2 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{p^0 q^3}{3}} > 0, \quad \Lambda = 0 \end{aligned}$$

Moduli が 3つある STU-model : $\mathcal{F} = \frac{X^1 X^2 X^3}{X^0}$

(4D $\mathcal{N} = 8$ $SO(8)$ gauged SUGRA のカルタン部分 \leftarrow IIA/IIB/Heterotic string triality)

$$Z = e^{K/2} \left(q_0 + q_a z^a - p^1 z^2 z^3 - p^2 z^3 z^1 - p^3 z^1 z^2 + p^0 z^1 z^2 z^3 \right), \quad z^a = \frac{X^a}{X^0}$$

$$K = -\log \left[-i(z^1 - \bar{z}^1)(z^2 - \bar{z}^2)(z^3 - \bar{z}^3) \right]$$

$$G_{a\bar{b}} = -\frac{\delta_{ab}}{(z^a - \bar{z}^a)^2} = e_a{}^{\hat{a}} e_{\bar{b}}{}^{\hat{\bar{b}}} \delta_{\hat{a}\hat{\bar{b}}}, \quad C_{\hat{1}\hat{2}\hat{3}} = 1$$

$$V = -3|Z|^2 + |D_{\hat{a}}Z|^2 < 0 \text{ 解を探すので } Z \neq 0$$

非超対称解を探すので $D_{\hat{a}}Z \neq 0$



解の一般形が予想できる : $Z \equiv -i\rho e^{i(\alpha-3\phi)}, \quad D_{\hat{a}}Z \equiv \sigma e^{-i\phi} \quad (\rho, \sigma > 0)$

[hep-th/0606263](#)

$$\text{解の一般形: } Z \equiv -i\rho e^{i(\alpha-3\phi)}, \quad D_{\hat{a}}Z \equiv \sigma e^{-i\phi} \quad (\rho, \sigma > 0)$$

ρ と σ の関係はアトラクター方程式で決まる

$$\sigma = -\rho e^{-i\alpha} G_V \quad (G_V \neq 0)$$

恒等式に代入すると次の2種類が得られる ($\Gamma = (p^0, p^a, q_a, q_0)^T$) :

$$p^a + \frac{\partial I_1}{\partial q_a} = -2\rho e^{-i\alpha} e^{K/2} \left[(1 - G_V) t - 2G_V \bar{t} \right]$$

$$p^0 + \frac{\partial I_1}{\partial q_0} = -2\rho e^{-i\alpha} e^{K/2} (1 - 3G_V)$$

$$\rightarrow z^a = V_{\text{eff}}^2 \left[\frac{p^a + i \frac{\partial I_1}{\partial q_a}}{p^0 + i \frac{\partial I_1}{\partial q_0}} \right] + (1 - V_{\text{eff}}^2) \left[\frac{p^a - i \frac{\partial I_1}{\partial q_a}}{p^0 - i \frac{\partial I_1}{\partial q_0}} \right]$$
“一般解”

$V_{\text{eff}} = 1$ にも $V_{\text{eff}} = 0$ にもならない (それぞれ漸近平坦の超対称解、非超対称解に類似)

現時点ではこれから BH エントロピーの一般解を評価するのは難しい



DISCUSSIONS

- ☑ ベクトル多重項を持つ abelian gauged SUGRA についての漸近非平坦ブラックホール
- ☑ 漸近平坦の場合とは異なるアトラクター方程式とその「一般解」を記述
(T^3 -model, STU-model)
- ☑ T^3 -model において D0-D4 系と D2-D6 系での具体的な解の記述
- ➡ T^3 -model では漸近平坦の場合と漸近非平坦の解がまったく異なる
- ➡ T^3 -model も STU-model も漸近非平坦の「一般解」は漸近平坦のそれに帰着しない
- 👉 (荷電)ハイパー多重項の導入によってどう変わるか?
arXiv:1005.3650 (予想 → 「universal hyper : BH hair」「charged hyper : BH instability」)
- ☕ (フラックス)コンパクト化を通じて超重力理論とその解の弦理論起源を理解する
arXiv:0911.2708 (string duality → (荷電)スカラー場同士の混合)

The background features a complex, abstract design composed of numerous thin, glowing lines in shades of red, orange, yellow, and white. These lines form intricate, swirling patterns that resemble light rays emanating from a central point or a lens flare effect. A prominent, bright blue circular lens flare is located in the lower right quadrant, with a distinct light trail extending towards the center. The overall effect is one of motion, energy, and digital art.

THANK YOU