

Non-supersymmetric Extremal RN-AdS Black Holes
in $\mathcal{N} = 2$ Gauged Supergravity



arXiv:1005.4607 [hep-th]

木村 哲士 (KEK理論センター)

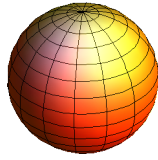
INTRODUCTION

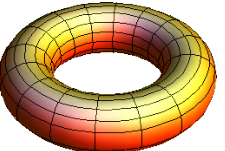
「4次元」「漸近(非)平坦」「荷電」「静的」「球対称」ブラックホールを考える：

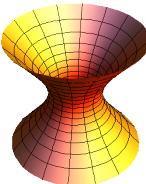
$$ds^2 = -V(r)dt^2 + \frac{1}{V(r)}dr^2 + r^2 d\sigma_{X_2}^2$$

$$V(r) = \kappa - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3}, \quad Q^2 = \underbrace{q^2}_{\text{(電荷)}} + \underbrace{p^2}_{\text{(磁荷)}}, \quad \Lambda = \text{(宇宙項)}$$

2次元空間 X_2 (計量 $d\sigma_{X_2}^2$) のトポロジーは3通り：

$$X_2 = S^2 : \quad \kappa = 1, \quad d\sigma_{S^2}^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$$


$$X_2 = \text{flat} : \quad \kappa = 0 \quad (\text{例：トーラス計量 } d\sigma_{X_2}^2 = dx^2 + 2\text{Re}\tau dx dy + |\tau|^2 dy^2; x, y \in [0, 1])$$


$$X_2 = H^2 : \quad \kappa = -1, \quad d\sigma_{H^2}^2 = d\theta^2 + \sinh^2 \theta d\phi^2$$


以後 $\kappa = 1$ の場合のみを考える

「4次元」「漸近(非)平坦」「荷電」「静的」「球対称」ブラックホールを考える：

$$ds^2 = -V(r)dt^2 + \frac{1}{V(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

$$V(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3}, \quad Q^2 = \underbrace{q^2}_{(\text{電荷})} + \underbrace{p^2}_{(\text{磁荷})}, \quad \Lambda = (\text{宇宙項})$$

いろいろなブラックホール：

$$\text{“平坦”} : M = Q = \Lambda = 0$$

$$\text{Schwarzschild} : M \neq 0, Q = \Lambda = 0$$

$$\text{Schwarzschild-AdS} : M \neq 0, Q = 0, \Lambda = -\frac{3}{\ell^2} < 0$$

$$\text{Reissner-Nordström (RN)} : M \neq 0, Q \neq 0, \Lambda = 0$$

$$\text{RN-AdS} : M \neq 0, Q \neq 0, \Lambda = -\frac{3}{\ell^2} < 0$$

「静的」条件を外す → 回転系：Kerr-(Newman)-(AdS) ブラックホール etc.

様々なブラックホールを $\mathcal{N} = 2$ Gauged 超重力理論の解として実現したい



何故、 $\mathcal{N} = 2$ (8個の超対称生成子) を扱うか?

- 極限ブラックホール ($M^2 = q^2 + p^2$ でゼロ温度) を探究する
スカラー場が対称性の高い空間に住む
超弦理論や M 理論の (フラックス) コンパクト化



何故、ゲージ化するか?

- 非自明なポテンシャルが登場する (期待値が宇宙項になる)



何故、ブラックホールを探すのか?

- 4次元 $\mathcal{N} = 2$ 超重力理論の研究対象として魅力的
 $\text{AdS}_4/\text{CFT}_3$ に用いるための準備段階

Ungauged SUGRA では漸近平坦なブラックホール解が実現されている

Gauged SUGRA でも漸近(非)平坦な解が作られている

(注) 超対称解では (RN-AdS では) 裸の特異点が登場する

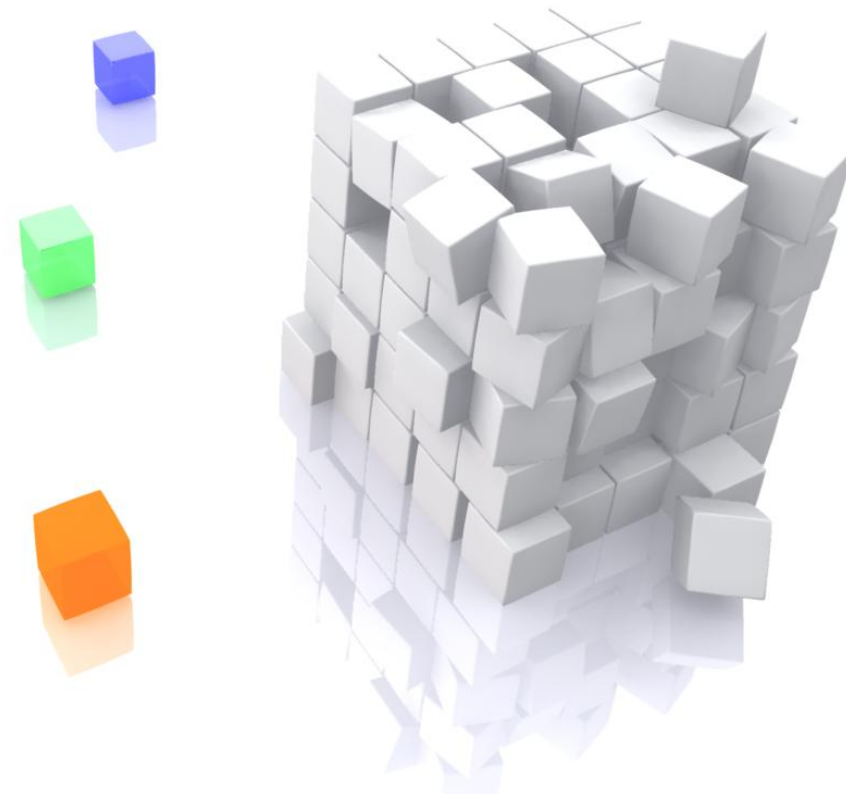
疑問

漸近**非**平坦の場合の非超対称解は具体的にどのように与えられるか？

(荷電)ハイパー多重項が導入されるとどうなるか？

Contents

- Introduction
- $\mathcal{N} = 2$ Gauged SUGRA
 - Effective Black Hole Potential
 - Attractor Equation
- Solutions
- Hypermultiplets (work in progress)
- Discussions



Contents

● Introduction

● $\mathcal{N} = 2$ Gauged SUGRA

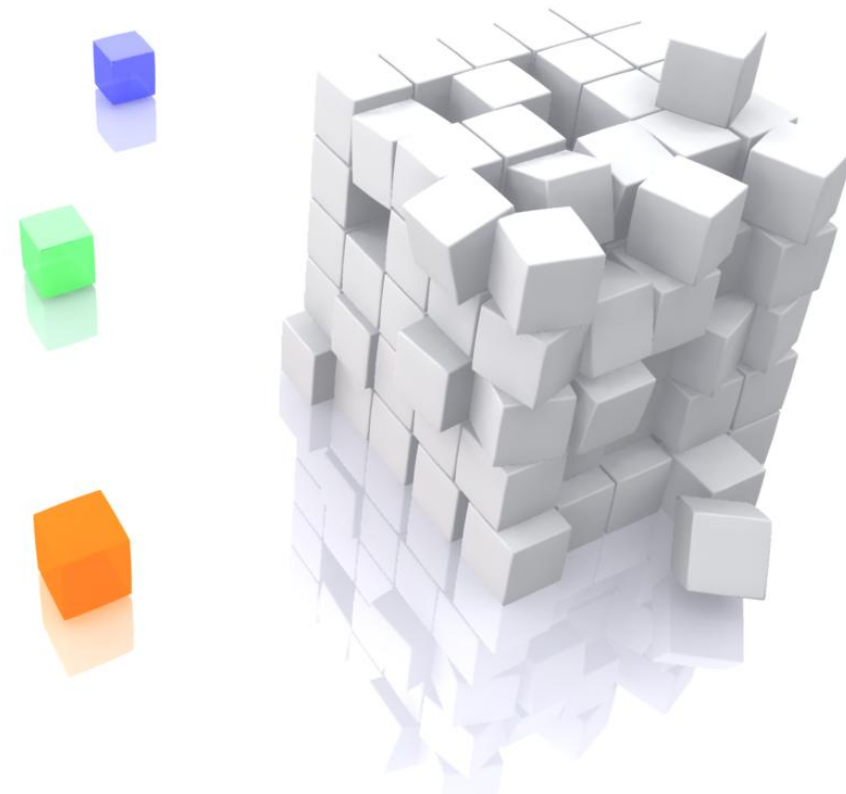
● Effective Black Hole Potential

● Attractor Equation

● Solutions

● Hypermultiplets (work in progress)

● Discussions



4次元 $\mathcal{N} = 2$ 超重力理論は次の多重項を持つ

1つの重力多重項： $\{g_{\mu\nu}, A_\mu^0, \psi_{A\mu}\}$ $\mu = 0, 1, 2, 3$ (4D 時空)
 $A = 1, 2$ ($SU(2)$ R-対称性)

n_V 個のベクトル多重項： $\{A_\mu^a, z^a, \lambda^{aA}\}$ $a = 1, \dots, n_V$
 z^a は special Kähler geometry $\mathcal{SM}$ に住む

$n_H + 1$ 個のハイパー多重項： $\{q^u, \zeta^\alpha\}$ $u = 1, \dots, 4n_H + 4$
 $\alpha = 1, \dots, 2n_H + 2$
 q^u は quaternionic geometry $\mathcal{HM}$ に住む

ゲージ化： $\mathcal{SM}$ と $\mathcal{HM}$ のアイソメトリ一群による大域的変換(の一部)を
 局所変換に格上げする

Reference: [hep-th/9605032](#)

作用積分 (重力定数 κ ; ゲージ結合定数 g ; 添字 $\Lambda = 0, 1, \dots, n_V$) :

$$\begin{aligned}
 S = \int d^4x \sqrt{-g} \Big\{ & \frac{1}{2\kappa^2} R - G_{a\bar{b}}(z, \bar{z}) \nabla_\mu z^a \nabla^\mu \bar{z}^{\bar{b}} - h_{uv}(q) \nabla_\mu q^u \nabla^\mu q^v \\
 & + \frac{1}{4} \mu_{\Lambda\Sigma}(z, \bar{z}) F_{\mu\nu}^\Lambda F^{\Sigma\mu\nu} + \frac{1}{4} \nu_{\Lambda\Sigma}(z, \bar{z}) F_{\mu\nu}^\Lambda (*F^\Sigma)^{\mu\nu} \\
 & - g^2 V(z, \bar{z}, q) \\
 & + \text{fermionic terms} \Big\}
 \end{aligned}$$

$$\mu_{\Lambda\Sigma} = \text{Im} \mathcal{N}_{\Lambda\Sigma} \quad (\text{係数 } 1/g^2 \text{ の一般化}) , \quad \nu_{\Lambda\Sigma} = \text{Re} \mathcal{N}_{\Lambda\Sigma} \quad (\text{係数 } \theta\text{-angle の一般化})$$

$$\text{電荷 } q_\Lambda \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} G_\Lambda , \quad \text{磁荷 } p^\Lambda \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} F^\Lambda$$

作用積分 (重力定数 κ ; ゲージ結合定数 g ; 添字 $\Lambda = 0, 1, \dots, n_V$) :

$$\begin{aligned}
 S = \int d^4x \sqrt{-g} \Big\{ & \frac{1}{2\kappa^2} R - G_{a\bar{b}}(z, \bar{z}) \partial_\mu z^a \partial^\mu \bar{z}^{\bar{b}} - h_{uv}(q) \nabla_\mu q^u \nabla^\mu q^v \\
 & + \frac{1}{4} \mu_{\Lambda\Sigma}(z, \bar{z}) F_{\mu\nu}^\Lambda F^{\Sigma\mu\nu} + \frac{1}{4} \nu_{\Lambda\Sigma}(z, \bar{z}) F_{\mu\nu}^\Lambda (*F^\Sigma)^{\mu\nu} \\
 & - g^2 V(z, \bar{z}, q) \\
 & + \text{fermionic terms} \Big\}
 \end{aligned}$$

$$\mu_{\Lambda\Sigma} = \text{Im} \mathcal{N}_{\Lambda\Sigma} \quad (\text{係数 } 1/g^2 \text{ の一般化}) , \quad \nu_{\Lambda\Sigma} = \text{Re} \mathcal{N}_{\Lambda\Sigma} \quad (\text{係数 } \theta\text{-angle の一般化})$$

$$\text{電荷 } q_\Lambda \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} G_\Lambda , \quad \text{磁荷 } p^\Lambda \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} F^\Lambda$$

ひとまずハイパー多重項の寄与を考慮しない

ゲージ対称性も可換群に制限する

運動方程式 (重力定数 κ ; ゲージ結合定数 g を省略 ; fermionic 背景場はゼロ) :

$$g_{\mu\nu} : \quad \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) - 2G_{a\bar{b}} \partial_{(\mu} z^a \partial_{\nu)} \bar{z}^{\bar{b}} + G_{a\bar{b}} \partial_{\rho} z^a \partial^{\rho} \bar{z}^{\bar{b}} g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - V g_{\mu\nu}$$

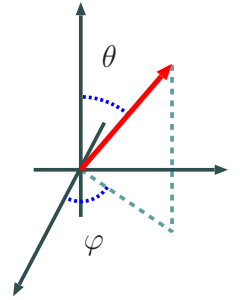
$$T_{\mu\nu} = -\mu_{\Lambda\Sigma} F_{\mu\rho}^{\Lambda} F_{\nu\sigma}^{\Sigma} g^{\rho\sigma} + \frac{1}{4} \mu_{\Lambda\Sigma} F_{\rho\sigma}^{\Lambda} F^{\Sigma\rho\sigma} g_{\mu\nu} \quad (\text{エネルギー運動量テンソル})$$

$$\begin{aligned} z^a : \quad & -\frac{G_{a\bar{b}}}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_{\nu} \bar{z}^{\bar{b}} \right) - \frac{\partial G_{a\bar{b}}}{\partial \bar{z}^{\bar{c}}} \partial_{\rho} \bar{z}^{\bar{b}} \partial^{\rho} \bar{z}^{\bar{c}} \\ & = \frac{1}{4} \frac{\partial \mu_{\Lambda\Sigma}}{\partial z^a} F_{\mu\nu}^{\Lambda} F^{\Sigma\mu\nu} + \frac{1}{4} \frac{\partial \nu_{\Lambda\Sigma}}{\partial z^a} F_{\mu\nu}^{\Lambda} (*F^{\Sigma})^{\mu\nu} - \frac{\partial V}{\partial z^a} \end{aligned}$$

$$A_{\mu}^{\Lambda} : \quad \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_{\nu} G_{\Lambda\rho\sigma} = 0, \quad G_{\Lambda\rho\sigma} = \nu_{\Lambda\Sigma} F_{\rho\sigma}^{\Sigma} - \mu_{\Lambda\Sigma} (*F^{\Sigma})_{\rho\sigma}$$

「荷電」「静的」「球対称」な RN(-AdS) ブラックホールにつながる計量を考える

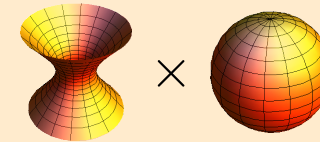
$$ds^2 = -e^{2A(r)} dt^2 + e^{2B(r)} dr^2 + e^{2C(r)} r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$



地平面近傍で $\text{AdS}_2 \times S^2$ (それぞれの半径は r_A, r_H) に振る舞う $A(r), B(r), C(r)$:

$$A(r) = \log \frac{r - r_H}{r_A}, \quad B(r) = -A(r), \quad C(r) = \log \frac{r_H}{r}$$

$$R(\text{AdS}_2 \times S^2) = 2 \left(-\frac{1}{r_A^2} + \frac{1}{r_H^2} \right)$$



$$\begin{aligned} \rightarrow ds^2(\text{地平面近傍}) &= - \left(\frac{r - r_H}{r_A} \right)^2 dt^2 + \left(\frac{r_A}{r - r_H} \right)^2 dr^2 + r_H^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ &= -\frac{e^{2\tau}}{r_A^2} dt^2 + r_A^2 d\tau^2 + r_H^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (\tau = \log(r - r_H)) \end{aligned}$$

地平面の面積は $A_H = 4\pi r_H^2$ になる

アトラクター機構が働くと、地平面上で

$$z^{a'}|_{\text{horizon}} = 0, \quad z^{a''}|_{\text{horizon}} = 0$$

このとき運動方程式が著しく簡単になる：

arXiv:0802.0141

$$\begin{aligned}
 g_{tt}, g_{rr} : \quad \frac{1}{r_H^2} &= \frac{1}{r_H^4} I_1 + V \Big|_{\text{horizon}} &\Rightarrow & \quad r_H^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4I_1 V}}{2V} \Big|_{\text{horizon}} \\
 g_{\theta\theta}, g_{\phi\phi} : \quad \frac{1}{r_A^2} &= \frac{1}{r_H^4} I_1 - V \Big|_{\text{horizon}} &\Rightarrow & \quad r_A^2 = \frac{r_H^2}{\sqrt{1 - 4I_1 V}} \Big|_{\text{horizon}} \\
 z^a : \quad 0 &= \frac{1}{r_H^4} \frac{\partial I_1}{\partial z^a} - \frac{\partial V}{\partial z^a} \Big|_{\text{horizon}} &\Rightarrow & \quad 0 = \frac{1}{r_H^4} (1 - 2r_H^2 V) \frac{\partial}{\partial z^a} r_H^2 \Big|_{\text{horizon}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_1(z, \bar{z}, p, q) &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} p^\Lambda & q_\Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{\Lambda\Sigma} + \nu_{\Lambda\Gamma} (\mu^{-1})^{\Gamma\Delta} \nu_{\Delta\Sigma} & -\nu_{\Lambda\Gamma} (\mu^{-1})^{\Gamma\Sigma} \\ -(\mu^{-1})^{\Lambda\Gamma} \nu_{\Gamma\Sigma} & (\mu^{-1})^{\Lambda\Sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^\Sigma \\ q_\Sigma \end{pmatrix} \\
 &\equiv -\frac{1}{2} \Gamma^T \mathbb{M} \Gamma
 \end{aligned}$$

1st シンプレクティック不変量

漸近平坦の場合と同様に BH エントロピーは地平面の面積で与えられる

$$S_{\text{BH}}(p, q) = \frac{A_{\text{H}}}{4\pi} = r_{\text{H}}^2 \Big|_{\text{horizon}} \equiv V_{\text{eff}}(z, \bar{z}, p, q) \Big|_{\text{horizon}}$$

$$V_{\text{eff}}(z, \bar{z}, p, q) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4I_1 V}}{2V} \quad V_{\text{eff}} \rightarrow I_1 \quad (\text{if } V \rightarrow 0)$$

$$0 = \frac{1}{r_{\text{H}}^4} (1 - 2r_{\text{H}}^2 V) \frac{\partial}{\partial z^a} V_{\text{eff}} \Big|_{\text{horizon}}$$

このときスカラー曲率から「宇宙項」を読みとる：

$$R(\text{AdS}_2 \times S^2) = 2 \left(-\frac{1}{r_{\text{A}}^2} + \frac{1}{r_{\text{H}}^2} \right) = 4V$$

$$V \Big|_{\text{horizon}} \equiv \Lambda(\text{「宇宙項」})$$

負(またはゼロ)の「宇宙項」を持ち地平面が有限の面積を持つ場合に解くべき方程式は

$$0 = \frac{\partial}{\partial z^a} V_{\text{eff}}(z, \bar{z}, p, q) \Big|_{\text{horizon}}$$

負(またはゼロ)の「宇宙項」を持ち地平面が有限の面積を持つ場合に解くべき方程式は

$$\begin{aligned}
 0 &= \left. \frac{\partial}{\partial z^a} V_{\text{eff}}(z, \bar{z}, p, q) \right|_{\text{horizon}} \\
 &= \frac{1}{2V^2 \sqrt{1 - 4I_1 V}} \left\{ 2V^2 \frac{\partial I_1}{\partial z^a} - \left(\sqrt{1 - 4I_1 V} + 2I_1 V - 1 \right) \frac{\partial V}{\partial z^a} \right\} \Bigg|_{\text{horizon}}
 \end{aligned}$$

I_1 や V を評価する：セントラルチャージ Z を用いた記法

(非)超対称解を探すのに有力

Z の定義：グラビティーノの超対称変換を眺める

$$\delta\psi_{A\mu} = D_\mu \varepsilon_A + \epsilon_{AB} T_{\mu\nu}^- \gamma^\nu \varepsilon^B + ig S_{AB} \gamma_\mu \varepsilon^B + (\text{fermionic terms})$$

$$Z = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} T^- \right), \quad S_{AB} = \frac{i}{2} (\sigma_x)_{AB} \mathcal{P}^x$$

Special Kähler geometry の性質を活かす

正則な同質変数 X^Λ と $\mathcal{F}_\Lambda$ が支配する
特殊な Kähler geometry

$$\mathcal{F}_\Lambda = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X^\Lambda}, \quad z^a = \frac{X^a}{X^0}$$

$$K = -\log [i(\bar{X}^\Lambda \mathcal{F}_\Lambda - X^\Lambda \bar{\mathcal{F}}_\Lambda)], \quad G_{a\bar{b}} = \frac{\partial}{\partial z^a} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\bar{b}}} K$$

$$\Pi = e^{K/2} \begin{pmatrix} X^\Lambda \\ \mathcal{F}_\Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^\Lambda \\ M_\Lambda \end{pmatrix}, \quad D_a \Pi = \left(\frac{\partial}{\partial z^a} + \frac{1}{2} \frac{\partial K}{\partial z^a} \right) \Pi = \begin{pmatrix} f_a^\Lambda \\ h_{\Lambda a} \end{pmatrix}$$

$$M_\Lambda = \mathcal{N}_{\Lambda\Sigma} L^\Sigma, \quad h_{\Lambda a} = \bar{\mathcal{N}}_{\Lambda\Sigma} f_a^\Sigma, \quad G^{a\bar{b}} f_a^\Lambda f_{\bar{b}}^\Sigma = -\frac{1}{2} \text{Im}(\mathcal{N}^{-1})^{\Lambda\Sigma} - \bar{L}^\Lambda L^\Sigma$$

X^Λ や $\mathcal{F}_\Lambda$ を用いて Z , I_1 , V を書き下す :

$$Z = L^\Lambda q_\Lambda - M_\Lambda p^\Lambda$$

$$I_1 = |Z|^2 + G^{a\bar{b}} D_a Z \overline{D_b Z}$$

$$V = \sum_{x=1}^3 \left(-3|\mathcal{P}^x|^2 + G^{a\bar{b}} D_a \mathcal{P}^x \overline{D_b \mathcal{P}^x} \right) + 4h_{uv} k^u \bar{k}^v$$

$\mathcal{P}_\Lambda^x, \tilde{\mathcal{P}}^{x\Lambda} : \mathcal{N} = 2$ SUGRA に登場する $SU(2)$ triplet of Killing prepotentials

$$\mathcal{P}^x = \mathcal{P}_\Lambda^x L^\Lambda - \tilde{\mathcal{P}}^{x\Lambda} M_\Lambda \quad \text{in } S_{AB} \quad (x = 1, 2, 3)$$

ハイパー多重項がないので $\mathcal{P}^3 = \mathcal{P}_\Lambda^3 L^\Lambda - \tilde{\mathcal{P}}^{3\Lambda} M_\Lambda$ のみが寄与する

さらに $(\mathcal{P}_\Lambda^3, \tilde{\mathcal{P}}^{3\Lambda}) = (q_\Lambda, p^\Lambda)$ に同定できる $\rightsquigarrow \mathcal{P}^3 \equiv Z$

[arXiv:0911.2708](https://arxiv.org/abs/0911.2708)

$$V = -3|Z|^2 + G^{a\bar{b}} D_a Z \overline{D_b Z}$$

$I_1(z, \bar{z}, p, q)$ と $V(z, \bar{z}, p, q)$ の「関数形」とその微分はよく知られている

- I_1 : $\mathcal{N} = 2$ SUGRA での漸近平坦な極限ブラックホールの探索

$$I_1 = |Z|^2 + G^{a\bar{b}} D_a Z \overline{D_b Z}, \quad \partial_a I_1 = 2\bar{Z} D_a Z + i C_{abc} G^{b\bar{b}} G^{c\bar{c}} \overline{D_b Z} \overline{D_c Z}$$

- V : $\mathcal{N} = 1$ SUGRA における真空解の探索(と同じ関数形)

$$V = -3|Z|^2 + G^{a\bar{b}} D_a Z \overline{D_b Z}, \quad \partial_a V = -2\bar{Z} D_a Z + i C_{abc} G^{b\bar{b}} G^{c\bar{c}} \overline{D_b Z} \overline{D_c Z}$$

$\mathcal{N} = 1$ SUGRA の時は Z はセントラルチャージではなく超ポテンシャル

$$C_{abc} = \partial_a X^\Lambda \partial_b X^\Sigma \partial_c X^\Gamma \mathcal{F}_{\Lambda\Sigma\Gamma}$$

セントラルチャージを用いて書き直す：

$$\begin{aligned}
 0 &= \left. \frac{\partial}{\partial z^a} V_{\text{eff}}(z, \bar{z}, p, q) \right|_{\text{horizon}} \\
 &= \frac{1}{2V^2 \sqrt{1 - 4I_1 V}} \left\{ 2V^2 \frac{\partial I_1}{\partial z^a} - \left(\sqrt{1 - 4I_1 V} + 2I_1 V - 1 \right) \frac{\partial V}{\partial z^a} \right\} \Big|_{\text{horizon}} \\
 &= \frac{1 + V_{\text{eff}}^2}{\sqrt{1 - 4I_1 V}} \left\{ 2G_V \bar{Z} D_a Z + i C_{abc} G^{b\bar{b}} G^{c\bar{c}} \overline{D_b Z} \overline{D_c Z} \right\} \Big|_{\text{horizon}}
 \end{aligned}$$

非自明な factor $G_V = \frac{1 - V_{\text{eff}}^2}{1 + V_{\text{eff}}^2}$ が入っている

- (注1) $V|_{\text{horizon}} = \Lambda < 0$ の時は $G_V \neq \pm 1 \rightarrow \partial_a I_1 = 0$ にも $\partial_a V = 0$ にも帰着しない
- (注2) $G_V = 0$ は特殊な場合 $\rightarrow S_{\text{BH}} = 1$ という定数になる
- (注3) $\Lambda < 0$ で超対称解 $D_a Z = 0$ の場合は裸の特異点が登場 $\rightarrow$ 非超対称解 $D_a Z \neq 0$ を探す

[hep-th/9203018](https://arxiv.org/abs/hep-th/9203018), [0003213](https://arxiv.org/abs/hep-th/0003213), etc.

セントラルチャージを用いて書き直す：

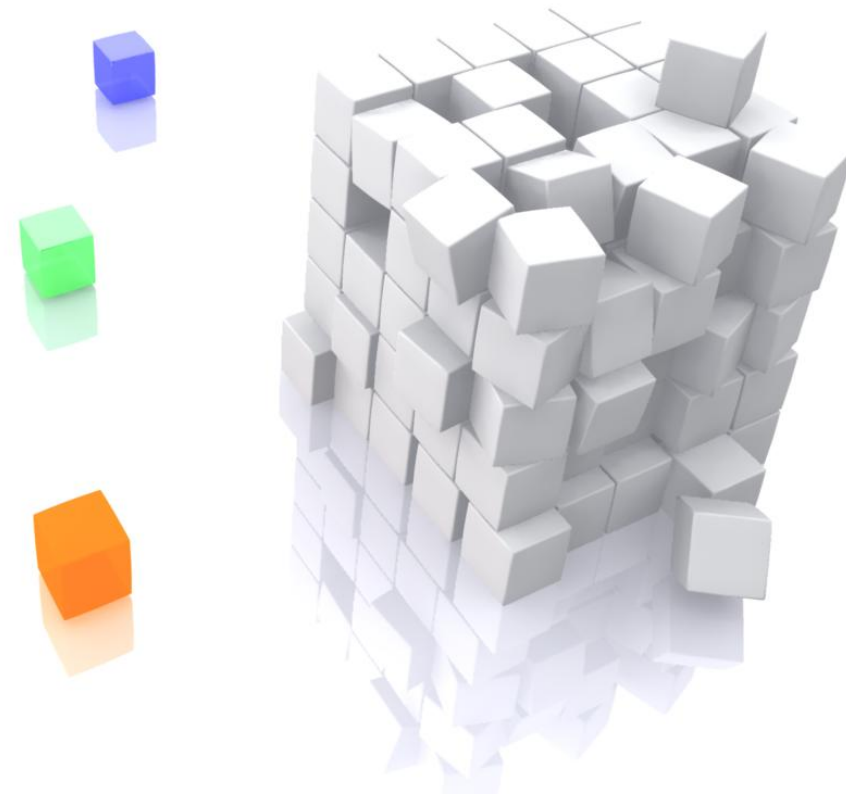
$$\begin{aligned}
 0 &= \left. \frac{\partial}{\partial z^a} V_{\text{eff}}(z, \bar{z}, p, q) \right|_{\text{horizon}} \\
 &= \frac{1}{2V^2 \sqrt{1 - 4I_1 V}} \left\{ 2V^2 \frac{\partial I_1}{\partial z^a} - \left(\sqrt{1 - 4I_1 V} + 2I_1 V - 1 \right) \frac{\partial V}{\partial z^a} \right\} \Big|_{\text{horizon}} \\
 &= \frac{1 + V_{\text{eff}}^2}{\sqrt{1 - 4I_1 V}} \left\{ 2G_V \bar{Z} D_a Z + iC_{abc} G^{b\bar{b}} G^{c\bar{c}} \overline{D_b Z} \overline{D_c Z} \right\} \Big|_{\text{horizon}}
 \end{aligned}$$

$V < 0$, $1 - 4I_1 V > 0$, $\partial_a I_1 \neq 0$, $\partial_a V \neq 0$, $D_a Z \neq 0$ の条件下で

$$0 = 2G_V \bar{Z} D_a Z + iC_{abc} G^{b\bar{b}} G^{c\bar{c}} \overline{D_b Z} \overline{D_c Z} \Big|_{\text{horizon}} \quad \text{を解け！}$$

Contents

- Introduction
- $\mathcal{N} = 2$ Gauged SUGRA
 - Effective Black Hole Potential
 - Attractor Equation
- **Solutions**
- Hypermultiplets (work in progress)
- Discussions



● チャージの配位 $\Gamma = (0, p, 0, q_0)$ (D0-D4 系と呼ばれる) を考える

正則関数 $W = e^{-K/2}Z$ とその判別式は

$$W = q_0 - 3pt^2, \quad \Delta(W) = 12pq_0$$

アトラクター方程式 ($t = 0 + iy, y < 0$) とその解：

$$p(y^2)^3 + (q_0 - 18p^3q_0^2)(y^2)^2 - 12p^2q_0^3(y^2) - 2pq_0^4 = 0$$

$$y^2 = A + B \quad \text{or} \quad A + \omega^\pm B \quad (\omega^3 = 1)$$

$$A = \frac{q_0}{3p}(18p^3q_0 - 1), \quad B = \frac{1}{3p} \left(C^{1/3} + \frac{q_0^2}{4} \frac{1 + (18p^3q_0)^2}{C^{1/3}} \right)$$

$$C = -q_0^3 \left[1 - 27p^3q_0 - (18p^3q_0)^3 - 3\sqrt{3} \sqrt{-2p^3q_0 - 9(p^3q_0)^2 - 432(p^3q_0)^3} \right]$$

with $pq_0 < 0$

セントラルチャージとその微分、 I_1 , Λ , S_{BH} は

$$Z\Big|_{\text{horizon}} = \frac{q_0 + 3p y^2}{2} \sqrt{-\frac{1}{2y^3}} \neq 0, \quad D_t Z\Big|_{\text{horizon}} = \frac{3i(q_0 - p y^2)}{4y} \sqrt{-\frac{1}{2y^3}} \neq 0$$

$$I_1 = \frac{q_0^2 + 3p^2 y^4}{-2y^3} > 0$$

$$\Lambda = \frac{6(pq_0)^2(q_0 + 3p y^2)^2}{y^5} < 0$$

$$S_{\text{BH}} = \frac{-y}{12(pq_0)^2(q_0 + 3p y^2)^2} \left\{ -y^4 + \sqrt{y^8 + 12(pq_0)^2(q_0 + 3p y^2)^2(q_0^2 + 3p^2 y^4)} \right\} > 0$$

原理的にはBHエントロピーも宇宙項も $\Gamma = (0, p, 0, q_0)$ のみで記述できている

Large q_0 で展開した漸近形を調べる

Modulus $t = 0 + iy$ ($y < 0$) は

$$y \sim pq_0 + (\text{sub-leading orders})$$

セントラルチャージとその微分、 I_1 , Λ , S_{BH} は

$$Z \Big|_{\text{horizon}} \sim \sqrt{-p^3 q_0} \neq 0, \quad D_t Z \Big|_{\text{horizon}} \sim \frac{-i}{pq_0} \sqrt{-p^3 q_0} \neq 0$$

$$I_1 \sim -p^3 q_0 > 0$$

$$\Lambda \sim p^3 q_0 < 0 \quad (\text{注：係数は気にしない})$$

$$S_{\text{BH}} \sim \mathcal{O}(1) > 0 \quad ?$$

エントロピーの振る舞いが随分不思議：摂動展開として正しいのか？

Small q_0 で展開した漸近形を調べる

Modulus $t = 0 + iy$ ($y < 0$) は

$$y \sim -\sqrt{-\frac{q_0}{p}} + (\text{sub-leading orders})$$

セントラルチャージとその微分、 I_1 , Λ , S_{BH} は

$$Z\Big|_{\text{horizon}} \sim q_0 \left(-\frac{p^3}{q_0^3}\right)^{1/4} \neq 0, \quad D_t Z\Big|_{\text{horizon}} \sim ip \left(-\frac{p}{q_0}\right)^{1/4} \neq 0$$

$$I_1 \sim \sqrt{-p^3 q_0} > 0$$

$$\Lambda \sim -\sqrt{(-p^3 q_0)^3} < 0 \quad (\text{注：係数は気にしない})$$

$$S_{\text{BH}} \sim \sqrt{-p^3 q_0} > 0$$

「宇宙項」が負で非常に小さく、エントロピーその他の振る舞いが漸近平坦な BH に近い

漸近平坦 ($\Lambda = 0$) な極限ブラックホールと比較しておく

● 非超対称解の場合

$$t = 0 + iy, \quad y = -\sqrt{-\frac{q_0}{p}}$$

$$Z|_{\text{horizon}} = -\frac{q_0}{\sqrt{2}} \left(-\frac{p^3}{q_0^3} \right)^{1/4} \neq 0, \quad D_t Z|_{\text{horizon}} = -3ip \left(-\frac{p}{q_0} \right)^{1/4} \neq 0$$

$$S_{\text{BH}} = I_1 = |Z|^2 + G^{t\bar{t}} D_t Z \overline{D_t Z} = 4|Z|^2 = \sqrt{-4p^3 q_0} > 0, \quad \Lambda = 0$$

● 超対称解の場合

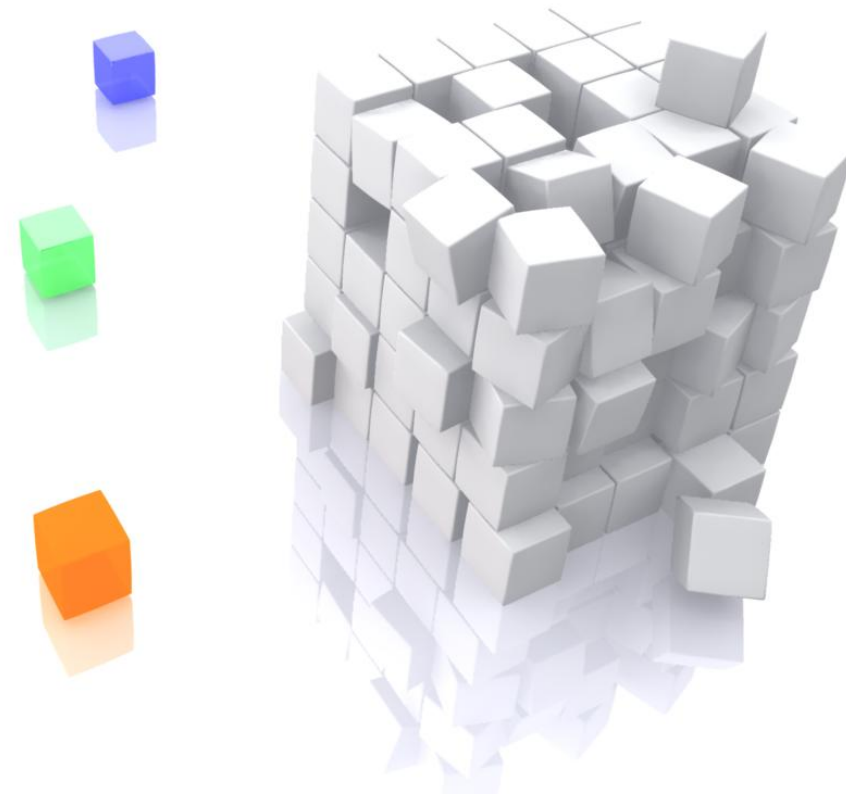
$$t = 0 + iy, \quad y = -\sqrt{\frac{q_0}{p}}$$

$$Z|_{\text{horizon}} = \sqrt{2} q_0 \left(\frac{p^3}{q_0^3} \right)^{1/4} \neq 0, \quad D_t Z|_{\text{horizon}} = 0$$

$$S_{\text{BH}} = I_1 = |Z|^2 = \sqrt{4p^3 q_0} > 0, \quad \Lambda = 0$$

Contents

- Introduction
- $\mathcal{N} = 2$ Gauged SUGRA
 - Effective Black Hole Potential
 - Attractor Equation
- Solutions
- Hypermultiplets (work in progress)
- Discussions



Hypermultiplets まで導入された作用積分：

$$\begin{aligned}
 S = \int d^4x \sqrt{-g} \Big\{ & \frac{1}{2\kappa^2} R - G_{a\bar{b}}(z, \bar{z}) \partial_\mu z^a \partial^\mu \bar{z}^{\bar{b}} - h_{uv}(q) \nabla_\mu q^u \nabla^\mu q^v \\
 & + \frac{1}{4} \mu_{\Lambda\Sigma}(z, \bar{z}) F_{\mu\nu}^\Lambda F^{\Sigma\mu\nu} + \frac{1}{4} \nu_{\Lambda\Sigma}(z, \bar{z}) F_{\mu\nu}^\Lambda (*F^\Sigma)^{\mu\nu} \\
 & - g^2 V(z, \bar{z}, q) \\
 & + \text{fermionic terms} \Big\}
 \end{aligned}$$

Hypermultiplets が住む空間 = quaternionic geometry の性質を理解する必要あり

(Non)geometric flux compactifications で議論される記述を用いる

[arXiv:0911.2708](https://arxiv.org/abs/0911.2708) etc.

$$\begin{aligned}
 \{q^u\}_{4n_H + 4} &= \{z^i, \bar{z}^{\bar{j}}\}_{2n_H(\text{SKG})} + \{\xi^i, \tilde{\xi}_i\}_{2n_H} + \{\varphi, a, \xi^0, \tilde{\xi}_0\}_{4(\text{universal})} \\
 &\quad (\text{special quaternionic geometry})
 \end{aligned}$$

Hypermultiplets の運動項や scalar potential への寄与を知るための情報：

$$h_{uv} dq^u dq^v = \underbrace{G_{i\bar{j}} dz^i d\bar{z}^{\bar{j}}}_{\text{SKG}_H} + \underbrace{(d\varphi)^2}_{\text{4D dilaton}} + \frac{1}{4} e^{4\varphi} \underbrace{\left(da - \xi^T \mathbb{C}_H d\xi \right)^2}_{\text{axion}} - \frac{1}{2} e^{2\varphi} d\xi^T \underbrace{\mathbb{M}_H d\xi}_{\text{scalars from RR}}$$

$$\nabla_\mu q^u = \partial_\mu q^u + g k_\Lambda^u A_\mu^\Lambda, \quad k_\Lambda = -[2q_\Lambda + e_\Lambda^{\mathbb{I}} (\mathbb{C}_H \xi)_{\mathbb{I}}] \frac{\partial}{\partial a} - e_\Lambda^{\mathbb{I}} \frac{\partial}{\partial \xi^{\mathbb{I}}}$$

$$\mathcal{P}^+ \equiv \mathcal{P}^1 + i\mathcal{P}^2 = 2e^\varphi \Pi_V^T Q \mathbb{C}_H \Pi_H$$

$$\mathcal{P}^- \equiv \mathcal{P}^1 - i\mathcal{P}^2 = 2e^\varphi \Pi_V^T Q \mathbb{C}_H \bar{\Pi}_H$$

$$\mathcal{P}^3 = e^{2\varphi} \Pi_V^T \mathbb{C}_V (c + \tilde{Q} \xi)$$

$$\mathbb{M}_{V,H} = \begin{pmatrix} \mu + \nu \mu^{-1} \nu & -\nu \mu^{-1} \\ -\mu^{-1} \nu & \mu^{-1} \end{pmatrix}_{V,H}, \quad Q_{\Lambda}^{\mathbb{I}} = \begin{pmatrix} e_{\Lambda}^I & e_{\Lambda I} \\ m^{\Lambda I} & m^{\Lambda}_I \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C}_{V,H} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mu_{V,H} = \text{Im} \mathcal{N}_{V,H}, \quad \nu_{V,H} = \text{Re} \mathcal{N}_{V,H}, \quad \tilde{Q}_{\mathbb{I}}^{\Lambda} = \mathbb{C}_V^T Q \mathbb{C}_H$$

$\Pi_H = e^{\mathcal{K}_H/2} (Z^I, \mathcal{G}_I)^T, \mathbf{z}^i = Z^i/Z^0$: SKG variables in hypermoduli

$\Pi_V = e^{\mathcal{K}_V/2} (X^\Lambda, \mathcal{F}_\Lambda)^T$: SKG variables in vector moduli

$c = (p^\Lambda, q_\Lambda)^T$ can also be regarded as the BH charges

Hypermultiplets の運動項や scalar potential への寄与を知るための情報：

$$h_{uv} dq^u dq^v = \underbrace{G_{i\bar{j}} dz^i d\bar{z}^{\bar{j}}}_{\text{SKG}_H} + \underbrace{(d\varphi)^2}_{\text{4D dilaton}} + \frac{1}{4} e^{4\varphi} \underbrace{\left(da - \xi^T \mathbb{C}_H d\xi \right)^2}_{\text{axion}} - \frac{1}{2} e^{2\varphi} d\xi^T \mathbb{M}_H d\xi \quad \text{scalars from RR}$$

$$\nabla_\mu q^u = \partial_\mu q^u + g k_\Lambda^u A_\mu^\Lambda, \quad k_\Lambda = -[2q_\Lambda + e_\Lambda^{\mathbb{I}} (\mathbb{C}_H \xi)_{\mathbb{I}}] \frac{\partial}{\partial a} - e_\Lambda^{\mathbb{I}} \frac{\partial}{\partial \xi^{\mathbb{I}}}$$

$$\mathcal{P}^+ \equiv \mathcal{P}^1 + i\mathcal{P}^2 = 2e^\varphi \Pi_V^T Q \mathbb{C}_H \Pi_H$$

$$\mathcal{P}^- \equiv \mathcal{P}^1 - i\mathcal{P}^2 = 2e^\varphi \Pi_V^T Q \mathbb{C}_H \bar{\Pi}_H$$

$$\mathcal{P}^3 = e^{2\varphi} \Pi_V^T \mathbb{C}_V (c + \tilde{Q} \xi)$$

Universal hypermultiplet $\{\varphi, a, \xi^0, \tilde{\xi}_0\}$ のみに議論を限定すれば議論は「幾分」簡単になる

$$\Pi_1 = 0 = \xi^i = \tilde{\xi}_i \text{ とする} \quad \text{i.e., no SKG}_H \text{ DOF}$$

$$\Pi_H = e^{\mathcal{K}_H/2} (Z^I, \mathcal{G}_I)^T, \quad z^i = Z^i/Z^0 : \text{SKG variables in hypermoduli}$$

$$\Pi_V = e^{\mathcal{K}_V/2} (X^\Lambda, \mathcal{F}_\Lambda)^T : \text{SKG variables in vector moduli}$$

$$c = (p^\Lambda, q_\Lambda)^T \text{ can also be regarded as the BH charges}$$

$$\begin{aligned}
h_{uv} \nabla_\mu q^u \nabla^\mu q^v &= (\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{1}{4} e^{4\varphi} (\nabla_\mu a - \xi^0 \nabla_\mu \tilde{\xi}_0 + \tilde{\xi}^0 \nabla_\mu \xi^0)^2 \\
\nabla_\mu a &= \partial_\mu a - g(2q_\Lambda + e_\Lambda{}^0 \tilde{\xi}_0 - e_{\Lambda 0} \xi^0) A_\mu^\Lambda \\
\nabla_\mu \xi^0 &= \partial_\mu \xi^0 - g(e_\Lambda{}^0) A_\mu^\Lambda, \quad \nabla_\mu \tilde{\xi}_0 = \partial_\mu \tilde{\xi}_0 - g(e_{\Lambda 0}) A_\mu^\Lambda \\
V(z, \bar{z}, q) &= G^{a\bar{b}} D_a \mathcal{P}^3 \overline{D_b \mathcal{P}^3} - 3|\mathcal{P}^3|^2, \quad \mathcal{P}^3 = e^{2\varphi} (Z + Z_\xi) \\
Z &\equiv L^\Lambda q_\Lambda - M_\Lambda p^\Lambda, \quad Z_\xi \equiv L^\Lambda (e_\Lambda{}^0 \tilde{\xi}_0 - e_{\Lambda 0} \xi^0) - M_\Lambda (m^\Lambda{}_0 \xi^0 - m^{\Lambda 0} \tilde{\xi}_0)
\end{aligned}$$

Universal hypermultiplet だけでも

vector multiplets のみのときに比べて格段に複雑になる

$$\begin{aligned}
h_{uv} \nabla_\mu q^u \nabla^\mu q^v &= (\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{1}{4} e^{4\varphi} (\nabla_\mu a - \xi^0 \nabla_\mu \tilde{\xi}_0 + \tilde{\xi}^0 \nabla_\mu \xi^0)^2 \\
\nabla_\mu a &= \partial_\mu a - g(2q_\Lambda + e_\Lambda{}^0 \tilde{\xi}_0 - e_{\Lambda 0} \xi^0) A_\mu^\Lambda \\
\nabla_\mu \xi^0 &= \partial_\mu \xi^0 - g(e_\Lambda{}^0) A_\mu^\Lambda, \quad \nabla_\mu \tilde{\xi}_0 = \partial_\mu \tilde{\xi}_0 - g(e_{\Lambda 0}) A_\mu^\Lambda \\
V(z, \bar{z}, q) &= G^{a\bar{b}} D_a \mathcal{P}^3 \overline{D_b \mathcal{P}^3} - 3|\mathcal{P}^3|^2, \quad \mathcal{P}^3 = e^{2\varphi} (Z + Z_\xi) \\
Z &\equiv L^\Lambda q_\Lambda - M_\Lambda p^\Lambda, \quad Z_\xi \equiv L^\Lambda (e_\Lambda{}^0 \tilde{\xi}_0 - e_{\Lambda 0} \xi^0) - M_\Lambda (m^\Lambda{}_0 \xi^0 - m^{\Lambda 0} \tilde{\xi}_0)
\end{aligned}$$

Universal hypermultiplet だけでも

vector multiplets のみのときに比べて格段に複雑になる

[arXiv:1005.3650](https://arxiv.org/abs/1005.3650)

stationary, axisymmetric で漸近平坦な超対称解では

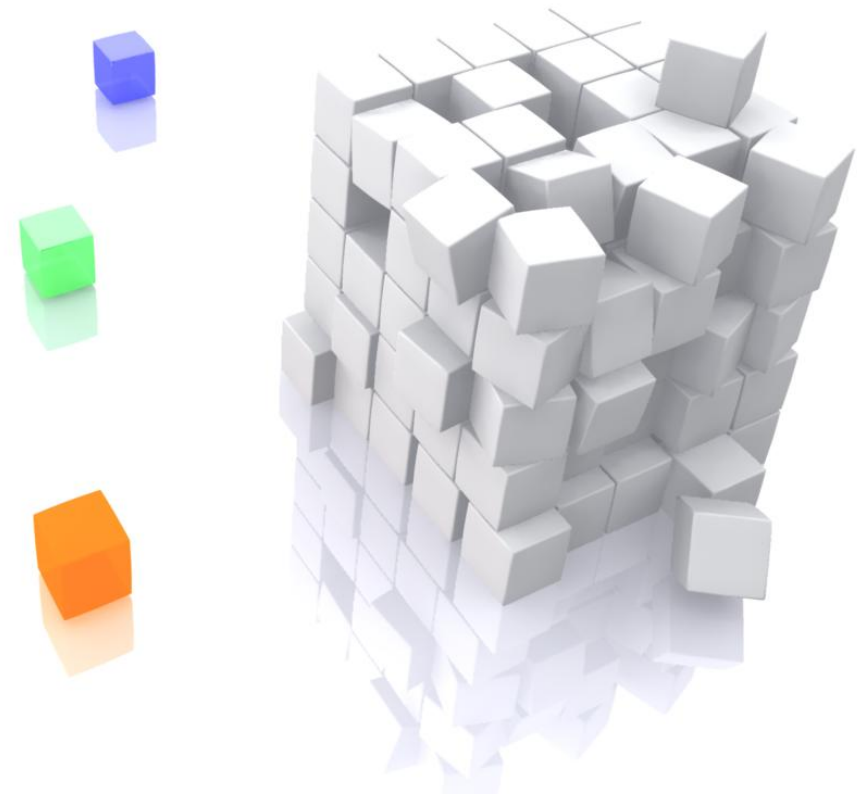
universal hypermoduli は定数になり

vector multiplets は通常の ungauged SUGRA でのアトラクター機構に従う

Universal hypermoduli のみの場合でも他の解が構成可能か？ $\longrightarrow$ work in progress

Contents

- Introduction
- $\mathcal{N} = 2$ Gauged SUGRA
 - Effective Black Hole Potential
 - Attractor Equation
- Solutions
- Hypermultiplets (work in progress)
- Discussions



- ☑ Abelian gauged SUGRA についての極限ブラックホール
- ☑ 漸近平坦の場合とは異なるアトラクター方程式とその「一般解」を記述
(T^3 -model と STU-model を付録に記載)
- ☑ T^3 -model において D0-D4 系での具体的な解の記述 (D2-D6 系を付録に記載)

➡ 漸近平坦の場合と漸近非平坦の解が異なる
 漸近平坦からのずれの評価 (物が落ちればどんどん漸近平坦な BH からずれていく?)

☞ 地平面近傍の外 (つまり全領域) での記述は？

☞ (荷電) ハイパー多重項の導入によって結局どう変わるのか？

[arXiv:1005.3650](https://arxiv.org/abs/1005.3650) (universal hypermultiplet: a constant solution of Behrndt-Lüst-Sabra-type, etc.)

[arXiv:0911.2708](https://arxiv.org/abs/0911.2708) (nongeometric flux compactifications)

Fin

APPENDIX

電荷・磁荷 $\Gamma = (p^\Lambda, q_\Lambda)^T$ と $I_1(z, \bar{z}, p, q)$ の間には強力な恒等式が存在する

$$\Gamma^T + i \frac{\partial I_1}{\partial \tilde{\Gamma}} = 2i \bar{Z} \Pi^T + 2i G^{a\bar{b}} D_a Z \overline{D_b \Pi}^T$$

$$\tilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \Gamma, \quad \Pi = \begin{pmatrix} L^\Lambda \\ M_\Lambda \end{pmatrix}, \quad Z = L^\Lambda q_\Lambda - M_\Lambda p^\Lambda = \tilde{\Gamma}^T \Pi \quad \text{hep-th/0606263}$$

SUGRA のポテンシャル項 $-g^2 V$ の存在とは無関係に成立する

地平面近傍以外でも成立する

$$G^{a\bar{b}} D_a \Pi \otimes \overline{D_b \Pi}^T = -\bar{\Pi} \otimes \Pi^T - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \tilde{\mathbb{M}}_V$$

$$\tilde{\mathbb{M}}_V \equiv \begin{pmatrix} (\mu^{-1})^{\Lambda\Sigma} & (\mu^{-1})^{\Lambda\Gamma} \nu_{\Gamma\Sigma} \\ \nu_{\Lambda\Gamma} (\mu^{-1})^{\Gamma\Sigma} & \mu_{\Lambda\Sigma} + \nu_{\Lambda\Gamma} (\mu^{-1})^{\Gamma\Delta} \nu_{\Delta\Sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \mathbb{M}_V \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_1 = -\frac{1}{2} \Gamma^T \mathbb{M}_V \Gamma = -\frac{1}{2} \tilde{\Gamma}^T \tilde{\mathbb{M}}_V \tilde{\Gamma}, \quad \frac{\partial I_1}{\partial \tilde{\Gamma}} = -\tilde{\Gamma}^T \tilde{\mathbb{M}}_V$$

● Single modulus model ($a = 1$) を考える : $\mathcal{F} = (X^1)^3/X^0$

$$Z = e^{K/2} \left(q_0 + q t - 3p t^2 + p^0 t^3 \right), \quad t = \frac{X^1}{X^0}$$

$$e^K = \frac{i}{(t - \bar{t})^3}, \quad G_{t\bar{t}} = -\frac{3}{(t - \bar{t})^2} \equiv e_t^{\hat{1}} e_{\bar{t}}^{\bar{\hat{1}}} \delta_{\hat{1}\bar{\hat{1}}}, \quad C_{ttt} = \frac{6i}{(t - \bar{t})^3}$$

$$V = -3|Z|^2 + |D_{\hat{1}}Z|^2 < 0 \text{ 解を探すので } Z \neq 0$$

$$\text{非超対称解を探すので } D_{\hat{1}}Z \neq 0$$



$$\text{解の一般形が予想できる : } Z \equiv -i\rho e^{i(\alpha-3\phi)}, \quad D_{\hat{1}}Z \equiv \sigma e^{-i\phi} \quad (\rho, \sigma > 0)$$

hep-th/0606263 のやり方を模倣

解の一般形： $Z \equiv -i\rho e^{i(\alpha-3\phi)}$, $D_{\hat{1}}Z \equiv \sigma e^{-i\phi}$ ($\rho, \sigma > 0$)

ρ と σ の関係はアトラクター方程式で決まる

$$\sigma = -\frac{\rho}{3} e^{-i\alpha} G_V \quad (G_V \neq 0)$$

恒等式に代入すると次の2種類が得られる ($\Gamma = (p^0, p, q, q_0)^T$) :

$$p + \frac{\partial I_1}{\partial q} = -\frac{2\rho}{3\sqrt{3}} e^{-i\alpha} e^{K/2} \left[(3\sqrt{3} - 2G_V) t - G_V \bar{t} \right]$$

$$p^0 + \frac{\partial I_1}{\partial q_0} = -\frac{2\rho}{3\sqrt{3}} e^{-i\alpha} e^{K/2} (3\sqrt{3} - G_V)$$

$$\rightarrow t = \frac{3\sqrt{3} - 2G_V}{3\sqrt{3} - G_V} \left[\frac{p + i\frac{\partial I_1}{\partial q}}{p^0 + i\frac{\partial I_1}{\partial q_0}} \right] + \frac{G_V}{3\sqrt{3} - G_V} \left[\frac{p - i\frac{\partial I_1}{\partial q}}{p^0 - i\frac{\partial I_1}{\partial q_0}} \right] \quad \text{“一般解”}$$

G_V や I_1 が z の関数なので一般解を評価するのは難しい
具体的な charge の配位で評価する

● Moduli が3つある STU-model : $\mathcal{F} = \frac{X^1 X^2 X^3}{X^0}$

(4D $\mathcal{N} = 8$ $SO(8)$ gauged SUGRA のカルタン部分 $\leftarrow$ IIA/IIB/Heterotic string triality)

$$Z = e^{K/2} \left(q_0 + q_a z^a - p^1 z^2 z^3 - p^2 z^3 z^1 - p^3 z^1 z^2 + p^0 z^1 z^2 z^3 \right), \quad z^a = \frac{X^a}{X^0}$$

$$K = -\log \left[-i(z^1 - \bar{z}^1)(z^2 - \bar{z}^2)(z^3 - \bar{z}^3) \right]$$

$$G_{a\bar{b}} = -\frac{\delta_{ab}}{(z^a - \bar{z}^{\bar{a}})^2} = e_a^{\hat{a}} e_{\bar{b}}^{\bar{\hat{b}}} \delta_{\hat{a}\bar{\hat{b}}}, \quad C_{\hat{1}\hat{2}\hat{3}} = 1$$

$$V = -3|Z|^2 + |D_{\hat{a}}Z|^2 < 0 \text{ 解を探すので } Z \neq 0$$

$$\text{非超対称解を探すので } D_{\hat{a}}Z \neq 0$$



$$\text{解の一般形が予想できる : } Z \equiv -i\rho e^{i(\alpha-3\phi)}, \quad D_{\hat{a}}Z \equiv \sigma e^{-i\phi} \quad (\rho, \sigma > 0)$$

[hep-th/0606263](https://arxiv.org/abs/hep-th/0606263)

解の一般形： $Z \equiv -i\rho e^{i(\alpha-3\phi)}$, $D_{\hat{a}}Z \equiv \sigma e^{-i\phi}$ ($\rho, \sigma > 0$)

ρ と σ の関係はアトラクター方程式で決まる

$$\sigma = -\rho e^{-i\alpha} G_V \quad (G_V \neq 0)$$

恒等式に代入すると次の2種類が得られる ($\Gamma = (p^0, p^a, q_a, q_0)^T$) :

$$p^a + \frac{\partial I_1}{\partial q_a} = -2\rho e^{-i\alpha} e^{K/2} \left[(1 - G_V) z^a - 2G_V \bar{z}^{\bar{a}} \right]$$

$$p^0 + \frac{\partial I_1}{\partial q_0} = -2\rho e^{-i\alpha} e^{K/2} (1 - 3G_V)$$

$$\rightarrow z^a = V_{\text{eff}}^2 \left[\frac{p^a + i \frac{\partial I_1}{\partial q_a}}{p^0 + i \frac{\partial I_1}{\partial q_0}} \right] + (1 - V_{\text{eff}}^2) \left[\frac{p^a - i \frac{\partial I_1}{\partial q_a}}{p^0 - i \frac{\partial I_1}{\partial q_0}} \right] \quad \text{“一般解”}$$

$V_{\text{eff}} = 1$ にも $V_{\text{eff}} = 0$ にもならない (それぞれ漸近平坦の超対称解、非超対称解に類似)

V_{eff} や I_1 が z^a の関数なので (現時点では) 一般解を評価するのは難しい

● チャージの配位 $\Gamma = (p^0, 0, q, 0)$ (D2-D6 系と呼ばれる) を考える

正則関数 $W = e^{-K/2}Z$ とその判別式は

$$W = qt + p^0 t^3, \quad \Delta(W) = -4p^0 q^3$$

アトラクター方程式 ($t = 0 + iy, y < 0$) は次の方程式に帰着される

$$f(y^2) = 2(p^0)^4 q (y^2)^3 - 4(p^0)^3 q^2 (y^2)^2 + p^0 (3 + 2p^0 q^3) (y^2) - q = 0$$

$$g(y^2) = \frac{\partial f}{\partial y^2} = 6(p^0)^4 (y^2)^2 - 8(p^0)^3 q^2 (y^2) + p^0 (3 + 2p^0 q^3)$$

$$\Delta(f) = -\frac{(p^0 q^3)^4}{q^{10}} \left[\left(8(p^0 q^3)^2 - \frac{9}{4} \right)^2 + 3375 \right]$$

$$\Delta(g) = 8(p^0)^5 q \left[-9 + 2p^0 q^3 \right]$$

セントラルチャージとその微分、 I_1 , Λ , S_{BH} は

$$\begin{aligned}
 Z|_{\text{horizon}} &= -i(q - p^0 y^2) \sqrt{-\frac{1}{8y}} \neq 0, & D_t Z|_{\text{horizon}} &= -(q + 3p^0 y^2) \sqrt{-\frac{1}{32y^3}} \neq 0 \\
 I_1 &= \frac{q^2 + 3(p^0)^2 y^4}{-6y} > 0 \\
 \Lambda &= \frac{2q^2 y}{3} ((p^0)^2 y^2 - q)^2 < 0 \\
 S_{\text{BH}} &= \frac{-3 + \sqrt{9 + 4q^2 (q - (p^0)^2 y^2)^2 (q^2 + 3(p^0)^2 y^4)}}{-4q^2 (q - (p^0)^2 y^2)^2 y} > 0
 \end{aligned}$$

Modulus $t = 0 + iy$ ($y < 0$) は

$$\begin{aligned}
 y^2 &= A + B \quad \text{or} \quad A + \omega^\pm B, \quad \omega^3 = 1 \\
 A &= \frac{2q}{3p^0}, \quad B = \frac{1}{6(p^0)^3 q} \left(C^{1/3} + \frac{1}{4(p^0)^2} \frac{\Delta(g)}{C^{1/3}} \right) \\
 C &= -54(p^0)^5 q^3 - 8(p^0)^6 q^6 + 3\sqrt{3} p^0 \sqrt{-q^2 \Delta(f)}, \quad \text{with } p^0 q^3 > 0
 \end{aligned}$$

原理的にはBHエントロピーも宇宙項も $\Gamma = (p^0, 0, q, 0)$ のみで記述できている

漸近平坦 ($\Lambda = 0$) な極限ブラックホールと比較しておく

● 超対称解の場合

$$t = 0 + iy, \quad y = -\sqrt{-\frac{q}{3p^0}}$$

$$Z|_{\text{horizon}} = \frac{-i\sqrt{2}q}{3} \left(-\frac{3p^0}{q}\right)^{1/4} \neq 0, \quad D_t Z|_{\text{horizon}} = 0$$

$$S_{\text{BH}} = I_1 = |Z|^2 = \frac{2}{3} \sqrt{-\frac{p^0 q^3}{3}} > 0, \quad \Lambda = 0$$

● 非超対称解の場合

$$t = 0 + iy, \quad y = -\sqrt{\frac{q}{3p^0}}$$

$$Z|_{\text{horizon}} = \frac{iq}{3\sqrt{2}} \left(\frac{3p^0}{q}\right)^{1/4} \neq 0, \quad D_t Z|_{\text{horizon}} = -\frac{q}{2\sqrt{2}} \left(\frac{3p^0}{q}\right)^{3/4} \neq 0$$

$$S_{\text{BH}} = I_1 = |Z|^2 + G^{t\bar{t}} D_t Z \overline{D_t Z} = 4|Z|^2 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{p^0 q^3}{3}} > 0, \quad \Lambda = 0$$