

TK-NOTE/14-18
since: October 23, 2014
last update: 2015-09-03 15:05

Defect Five-branes

— a summary of works in 2013–2014 —

Tetsuji KIMURA

Department of Physics, Tokyo Institute of Technology
Tokyo 152-8551, JAPAN
`tetsuji_at_th.phys.titech.ac.jp`

Abstract

$\mathcal{N} = (4, 4)$ GLSM における D-term (charged hypermultiplets の運動項) と F-terms の間には、 $SU(2)_R$ symmetry のために関係が付き、符号が決定される。しかしながら、初期の仕事 [1, 2, 3] や、これを執筆するために作成した個人ノート [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14] についてはこれが考慮されていないか、不完全な形式でしか反映されていない。この不完全性を取り除くため、[13] に完全な形式を反映させ、新しく書き直したのがこのノートである。

さらに、共変微分の符号を conventional なものに揃えるため、ベクトル超場に内蔵されるゲージ場 $A_{m,a}$ と補助場 D_V 、そして C_a に入るベクトル場 $A_{c=}, B_{c\neq}$ と補助場 D_c の符号も反転させる。charged chiral 超場のゲージ変換も符号を反転させる。この操作は [7] で定義した超場からの成分場の符号の変更を伴う。

Contents

1	Introduction	5
1.1	Caution!	5
1.2	Conventions of GLSM for five-branes	5
2	Background geometries of five-branes	6
2.1	Five-branes of codimension three	6
2.2	Defect five-branes: five-branes of codimension two	6
2.3	T-duality matrices	9
3	Analysis of $SL(2, \mathbb{Z})_\tau \times SL(2, \mathbb{Z})_\rho$ monodromy	10
3.1	Monodromy matrix of defect NS5-brane	10
3.2	Monodromy matrix of defect KK5-brane	11
3.3	Monodromy matrix of another defect KK5-brane	11
3.4	Monodromy matrix of exotic 5_2^2 -brane	12
4	Conjugate monodromy matrices	13
4.1	Conjugate monodromy matrix of defect NS5-brane	13
4.2	Conjugate monodromy matrix of defect KK5-brane	13
4.3	Conjugate monodromy matrix of another defect KK5-brane	13
4.4	Conjugate monodromy matrix of exotic 5_2^2 -brane	14
5	Conjugate configurations	15
5.1	Conjugate configuration of defect NS5-brane	15
5.2	Conjugate configuration of defect KK5-brane	18
5.3	Conjugate configuration of another defect KK5-brane	21
5.4	Conjugate configuration of exotic 5_2^2 -brane	24
6	Hyper-Kähler with torsion	28
6.1	Geometry of codimension three	28
6.2	Geometry of codimension two: defect hyper-Kähler with torsion	28
6.3	Moduli matrix and monodromy matrix	29

6.4	T-duality of defect hyper-Kähler with torsion	29
6.5	Monodromy matrix of defect HKT	30
6.6	Monodromy matrix of T-dualized defect HKT	31
6.7	Conjugate monodromy matrix of defect HKT	32
6.8	Conjugate monodromy matrix of T-dualized defect HKT	32
6.9	Conjugate configuration of defect HKT	33
6.10	Conjugate configuration of T-dualized defect HKT	35
6.11	Supersymmetry analyses	37
7	GLSM for defect five-branes with single gauged isometry	38
7.1	Lagrangians	38
7.2	Genuine GLSM for exotic five-brane	41
7.3	Relations among component fields	45
7.4	GLSM for defect NS5-brane	48
7.5	GLSM for defect KK5-brane	51
7.6	GLSM for exotic five-brane	54
A	10D supergravity theories	61
A.1	IIA supergravity	61
A.2	IIB supergravity	62
A.3	Buscher rule in type II supergravities	63
A.4	String worldsheet sigma model	63
B	Differential forms	64
B.1	Volume-form, invariant tensor, and Hodge-dual on Lorentzian space	64
B.2	Volume-form, invariant tensor, and Hodge-dual on Euclidean space	66
C	$\mathcal{N} = (2, 2)$ supersymmetry in 2D Lorentzian spacetime	68
C.1	Clifford algebra	68
C.2	Spinors in this notes	68
C.3	Dirac spinors	70
C.4	Explicit forms	71

C.5	Supersymmetry transformations	75
C.6	Chiral superfields	75
C.7	Twisted chiral superfields	76
C.8	Abelian vector superfields	78
C.9	Chiral superfields in a covariant form	81
C.10	Stückelberg-type chiral superfield in a covariant form	83
C.11	Unconstrained complex superfield	85
C.12	Expansions of abelian GLSM	90
D	$\mathcal{N} = (4, 4)$ Lagrangian of charged hypermultiplets	94
E	R-symmetry charges	95
F	Covariant derivative of charged scalar fields	99
G	Smearing procedure	101
H	Einstein frame in D dimensions	102
I	GLSM for A-type ALE and ALF	103
I.1	D1-brane description	103
I.2	Brane-web description	105
I.3	GLSM for A_2 -type ALE space	106
I.4	Deformation to A_2 -type ALF space	107

1 Introduction

1.1 Caution!

Appendix D の考察により、 $\mathcal{N} = (4, 4)$ GLSM における D-term (charged hypermultiplets の運動項) と F-terms の間には、 $SU(2)_R$ symmetry のために関係が付き、符号が決定される。しかしながら、初期の仕事 [1, 2, 3] や、これを執筆するために作成した個人ノート [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14] についてはこれが考慮されていないか、不完全な形式でしか反映されていない。この不完全性を取り除くため、[13] に完全な形式を反映させ、新しく書き直したのがこのノートである [2014 10/23]。さらに、共変微分の符号を conventional なものに揃えるため、ベクトル超場に内蔵されるゲージ場 $A_{m,a}$ と補助場 D_V 、そして C_a に入るベクトル場 $A_{c=}, B_{c++}$ と補助場 D_c の符号も反転させる。charged chiral 超場のゲージ変換も符号を反転させる。この操作は [7] で定義した超場からの成分場の符号の変更を伴う [2014 11/16]。ここに変更点をまとめておく：

[1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]	here
$\overline{Q} e^{\mp 2V} Q, \quad \widetilde{\overline{Q}} e^{\pm 2V} \widetilde{Q}$ $+ \widetilde{Q} \Phi Q$	$\overline{Q} e^{+2V} Q, \quad \widetilde{\overline{Q}} e^{-2V} \widetilde{Q}$ $- \widetilde{Q} \Phi Q$
$D_m q = \partial_m q + i A_m q, \quad D_m \tilde{q} = \partial_m \tilde{q} - i A_m \tilde{q}$ $(A_{m,a}, D_{V,a}) \in V_a, \quad (D_{V,a}, F_{01,a}) \in \Sigma_a$ $(A_{c=,a}, B_{c++,a}, D_{c,a}) \in C_a$	$D_m q = \partial_m q - i A_m q, \quad D_m \tilde{q} = \partial_m \tilde{q} + i A_m \tilde{q}$ $(-A_{m,a}, -D_{V,a}) \in V_a, \quad (-D_{V,a}, -F_{01,a}) \in \Sigma_a$ $(-A_{c=,a}, -B_{c++,a}, -D_{c,a}) \in C_a$
$Q \rightarrow Q' = e^{-2i\Lambda} Q, \quad q \rightarrow q' = e^{-i\lambda} q, \quad q = -\frac{i}{2^{1/4}} e^{-i\alpha} \dots$ $\tilde{Q} \rightarrow \tilde{Q}' = e^{+2i\Lambda} \tilde{Q}, \quad \tilde{q} \rightarrow \tilde{q}' = e^{+i\lambda} \tilde{q}, \quad \tilde{q} = +\frac{i}{2^{1/4}} e^{+i\alpha} \dots$ $2V \rightarrow 2V' = 2V + 2i(\Lambda - \bar{\Lambda})$ $\tilde{\chi}_- \in \Theta, \quad \xi_- \in \Xi$	$Q \rightarrow Q' = e^{+2i\Lambda} Q, \quad q \rightarrow q' = e^{+i\lambda} q, \quad q = +\frac{i}{2^{1/4}} e^{+i\alpha} \dots$ $\tilde{Q} \rightarrow \tilde{Q}' = e^{-2i\Lambda} \tilde{Q}, \quad \tilde{q} \rightarrow \tilde{q}' = e^{-i\lambda} \tilde{q}, \quad \tilde{q} = +\frac{i}{2^{1/4}} e^{-i\alpha} \dots$ $2V \rightarrow 2V' = 2V - 2i(\Lambda - \bar{\Lambda})$ $-\tilde{\chi}_- \in \Theta, \quad -\xi_- \in \Xi$

1.2 Conventions of GLSM for five-branes

Worldsheet sigma model のスカラー場の label と、target space coordinates の label の対応関係は次の様に統一しておく：

spacetime coord.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
NS5-brane	○	○	○	○	○	○	$r^1 = X^6$	$r^3 = X^7$	$r^2 = X^8$	$\vartheta = X^9$
KK-monopole	○	○	○	○	○	○	$r^1 = X^6$	$r^3 = X^7$	$r^2 = X^8$	$\gamma^4 \sim \tilde{\vartheta} = \tilde{X}^9$
exotic 5_2^2 -brane	○	○	○	○	○	○	$r^1 = X^6$	$r^3 = X^7$	$y^2 = \tilde{X}^8$	$\gamma^4 \sim \tilde{\vartheta} = \tilde{X}^9$

Table 1: Worldsheet fields と spacetime coordinates のラベルの対応.

また、これまでの経験 [1, 2] より、 $k \rightarrow \infty$ 極限操作をせずとも、FI parameter 積分の被積分関数が明確になったが、念のため section 7 では multi-centered five-branes ($k \rightarrow \infty$ の操作あり) の議論を展開する。

2 Background geometries of five-branes

2.1 Five-branes of codimension three

2.1.1 H-monopole

$$ds^2 = H[(dx^6)^2 + (dx^7)^2 + (dx^8)^2 + (dx^9)^2], \quad B_{i9} = V_i, \quad e^{2\phi} = H, \quad (2.1a)$$

$$H = 1 + \frac{\ell_0}{\sqrt{2}|\vec{x}|}, \quad \ell_0 = \frac{\alpha'}{R_9}, \quad (2.1b)$$

$$\nabla_i H = (\nabla \times V)_i, \quad \vec{V} \cdot d\vec{x} = \frac{\ell_0}{\sqrt{2}} \frac{-x^6 dx^8 + x^8 dx^6}{|\vec{x}|(|\vec{x}| + x^7)}. \quad (2.1c)$$

ここで R_9 は x^9 -方向の半径である。

2.1.2 KK5-brane

$$ds^2 = H[(dx^6)^2 + (dx^7)^2 + (dx^8)^2] + \frac{1}{H}[dy^9 - \vec{V} \cdot d\vec{x}]^2, \quad B_{IJ} = 0, \quad e^{2\phi} = 1, \quad (2.2a)$$

$$H = 1 + \frac{\ell_0}{\sqrt{2}|\vec{x}|}, \quad (2.2b)$$

$$\nabla_i H = (\nabla \times V)_i, \quad \vec{V} \cdot d\vec{x} = \frac{\ell_0}{\sqrt{2}} \frac{-x^6 dx^8 + x^8 dx^6}{|\vec{x}|(|\vec{x}| + x^7)}. \quad (2.2c)$$

(2.1) (with x^9) と (2.2) (with y^9) とは、9-方向への Buscher rule (appendix A.3) を通じて互いに T-dual である。

2.2 Defect five-branes: five-branes of codimension two

2.2.1 Moduli matrix and monodromy matrix

five-branes を 67-plane 上の原点に配置して、それを中心に一周したときどのような構造を見せてくれるであろうか [38, 39]。具体的には、 T^2 コンパクト化されている x^8 - y^9 方向の moduli matrix $\mathcal{M}$ が持つ monodromy matrix Ω を評価することになる¹:

$$\mathcal{M}(\varrho, \vartheta) \equiv \begin{pmatrix} G_{mn} - B_{mp} G^{pq} B_{qn} & B_{mp} G^{pn} \\ -G^{mp} B_{pn} & G^{mn} \end{pmatrix}, \quad m, n, \dots = 8, 9, \quad (2.3a)$$

$$\mathcal{M}(\varrho, 2\pi) = \Omega^T \mathcal{M}(\varrho, 0) \Omega. \quad (2.3b)$$

ここで G_{mn} , B_{mn} はそれぞれ (x^8, y^9) -方向に広がった空間の計量と B-field の成分である。 G^{mn} は G_{mn} の逆 ($G_{mn} G^{np} = \delta_m^p$) である。

¹moduli matrix という呼び名は [17] などの文献で見られる。一方、近年の double field theory (や generalized geometry) の分野ではこれを “generalized metric” と呼ぶ。

2.2.2 defect NS5-brane

$$ds^2 = H_\ell [(dx^6)^2 + (dx^7)^2 + (dx^8)^2 + (dx^9)^2], \quad B_{89} = V_\ell, \quad e^{2\phi} = H_\ell, \quad (2.4a)$$

$$H_\ell = h + \ell \log \frac{\mu}{\varrho}, \quad V_\ell = \ell \vartheta, \quad K_\ell = (H_\ell)^2 + (V_\ell)^2, \quad (2.4b)$$

$$x^6 = \varrho \cos \vartheta, \quad x^7 = \varrho \sin \vartheta, \quad \ell = \frac{\ell_0}{2\pi R_8}. \quad (2.4c)$$

ここで R_8 は x^8 -方向の半径である。 x^8 - x^9 方向の moduli matrix $\mathcal{M}$ と monodromy matrix Ω (2.3) は次の通り:

$$\mathcal{M}_\ell^{\text{NS}} = \frac{1}{H_\ell} \begin{pmatrix} K_\ell & 0 & 0 & V_\ell \\ 0 & K_\ell & -V_\ell & 0 \\ 0 & -V_\ell & 1 & 0 \\ V_\ell & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{H_\ell} \begin{pmatrix} K_\ell \mathbb{1} & V_\ell (i\sigma^2) \\ V_\ell (-i\sigma^2) & \mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (2.5a)$$

$$\Omega_\ell^{\text{NS}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\pi\ell & 1 & 0 \\ 2\pi\ell & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ C_\ell & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad (C_\ell)^T = -C_\ell = C_{-\ell}. \quad (2.5b)$$

2.2.3 defect KK5-brane

(2.4) に対して 9-方向に T-dual (Buscher rule, appendix A.3) を実行する:

$$ds^2 = H_\ell [(dx^6)^2 + (dx^7)^2 + (dx^8)^2] + \frac{1}{H_\ell} [dy^9 - V_\ell dx^8]^2, \quad B_{IJ} = 0, \quad e^{2\phi} = 1, \quad (2.6a)$$

$$H_\ell = h + \ell \log \frac{\mu}{\varrho}, \quad V_\ell = \ell \vartheta, \quad K_\ell = (H_\ell)^2 + (V_\ell)^2. \quad (2.6b)$$

(2.4) (with x^9) と (2.6) (with y^9) とは、9-方向への Buscher rule を通じて互いに T-dual である。

x^8 - y^9 方向の moduli matrix $\mathcal{M}$ と monodromy matrix Ω (2.3) は次の通り:

$$\mathcal{M}_\ell^{\text{KK}} = \frac{1}{H_\ell} \begin{pmatrix} K_\ell & -V_\ell & 0 & 0 \\ -V_\ell & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & V_\ell \\ 0 & 0 & V_\ell & K_\ell \end{pmatrix}, \quad (2.7a)$$

$$\Omega_\ell^{\text{KK}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2\pi\ell & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2\pi\ell \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A_\ell & 0 \\ 0 & B_\ell \end{pmatrix}, \quad (A_\ell)^T = B_{-\ell}. \quad (2.7b)$$

2.2.4 another defect KK5-brane

(2.4) に対して 8-方向に T-dual (Buscher rule, appendix A.3) を実行する:

$$ds^2 = H_\ell [(dx^6)^2 + (dx^7)^2 + (dx^9)^2] + \frac{1}{H_\ell} [dy^8 + V_\ell dx^9]^2, \quad B_{IJ} = 0, \quad e^{2\phi} = 1, \quad (2.8a)$$

$$H_\ell = h + \ell \log \frac{\mu}{\varrho}, \quad V_\ell = \ell \vartheta, \quad K_\ell = (H_\ell)^2 + (V_\ell)^2. \quad (2.8b)$$

(2.4) (with x^8) と (2.8) (with y^8) とは、8-方向への Buscher rule を通じて互いに T-dual である。

y^8 - x^9 方向の moduli matrix $\mathcal{M}$ と monodromy matrix Ω (2.3) は次の通り:

$$\mathcal{M}_\ell^{\text{AK}} = \frac{1}{H_\ell} \begin{pmatrix} 1 & V_\ell & 0 & 0 \\ V_\ell & K_\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_\ell & -V_\ell \\ 0 & 0 & -V_\ell & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.9a)$$

$$\Omega_\ell^{\text{AK}} = \begin{pmatrix} 1 & 2\pi\ell & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\pi\ell & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} B_\ell & 0 \\ 0 & A_\ell \end{pmatrix}. \quad (2.9b)$$

なお、 $(A_{-\ell})^T = B_\ell$ であるので、 $(\Omega_{-\ell}^{\text{AK}})^T = \Omega_\ell^{\text{KK}}$ である。

2.2.5 exotic 5_2^2 -brane

(2.6) に対して 8-方向に T-dual (Buscher rule, appendix A.3) を実行する:

$$ds^2 = H_\ell [(dx^6)^2 + (dx^7)^2] + \frac{H_\ell}{K_\ell} [(dy^8)^2 + (dy^9)^2], \quad B_{89} = -\frac{V_\ell}{K_\ell}, \quad e^{2\phi} = \frac{H_\ell}{K_\ell}, \quad (2.10a)$$

$$H_\ell = h + \ell \log \frac{\mu}{\varrho}, \quad V_\ell = \ell \vartheta, \quad K_\ell = (H_\ell)^2 + (V_\ell)^2. \quad (2.10b)$$

(2.6) (with x^8) と (2.10) (with y^8) とは、8-方向への Buscher rule を通じて互いに T-dual である。

y^8 - y^9 方向の moduli matrix $\mathcal{M}$ と monodromy matrix Ω (2.3) は次の通り:

$$\mathcal{M}_\ell^{\text{E}} = \frac{1}{H_\ell} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -V_\ell \\ 0 & 1 & V_\ell & 0 \\ 0 & V_\ell & K_\ell & 0 \\ -V_\ell & 0 & 0 & K_\ell \end{pmatrix} = \frac{1}{H_\ell} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & V_\ell(-i\sigma^2) \\ V_\ell(i\sigma^2) & K\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad (2.11a)$$

$$\Omega_\ell^{\text{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2\pi\ell \\ 0 & 1 & 2\pi\ell & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathbb{1} & C_\ell \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad (C_\ell)^T = -C_\ell = C_{-\ell}. \quad (2.11b)$$

なお、 $(C_\ell)^T = -C_\ell$ なので $(\Omega_{-\ell}^{\text{E}})^T = \Omega_\ell^{\text{NS}}$ である。

2.3 T-duality matrices

Ω_ℓ^{NS} と Ω_ℓ^{KK} を繋ぐ T-duality matrix U_9 は次の通り:

$$\Omega_\ell^{\text{KK}} = U_9^{\text{T}} \Omega_\ell^{\text{NS}} U_9, \quad (2.12a)$$

$$U_9 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} - T_9 & -T_9 \\ -T_9 & \mathbb{1} - T_9 \end{pmatrix}, \quad T_9 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.12b)$$

Ω_ℓ^{NS} と Ω_ℓ^{AK} を繋ぐ T-duality matrix U_8 は次の通り:

$$\Omega_\ell^{\text{AK}} = U_8^{\text{T}} \Omega_\ell^{\text{NS}} U_8, \quad (2.13a)$$

$$U_8 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} - T_8 & -T_8 \\ -T_8 & \mathbb{1} - T_8 \end{pmatrix}, \quad T_8 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.13b)$$

Ω_ℓ^{KK} と Ω_ℓ^{E} は T-duality matrix U_8 で繋がる:

$$\Omega_\ell^{\text{E}} = U_8^{\text{T}} \Omega_\ell^{\text{KK}} U_8, \quad (2.14a)$$

$$U_8 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} - T_8 & -T_8 \\ -T_8 & \mathbb{1} - T_8 \end{pmatrix}, \quad T_8 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.14b)$$

Ω_ℓ^{AK} と Ω_ℓ^{E} は T-duality matrix U_9 で繋がる:

$$\Omega_\ell^{\text{E}} = U_9^{\text{T}} \Omega_\ell^{\text{AK}} U_9, \quad (2.15a)$$

$$U_9 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} - T_9 & -T_9 \\ -T_9 & \mathbb{1} - T_9 \end{pmatrix}, \quad T_9 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.15b)$$

Ω_ℓ^{NS} と Ω_ℓ^{E} は T-duality matrix $U_{89} = U_9 U_8 = U_8 U_9$ で繋がる:

$$\Omega_\ell^{\text{E}} = U_{89}^{\text{T}} \Omega_\ell^{\text{NS}} U_{89}, \quad (2.16a)$$

$$U_{89} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} - T_8 - T_9 & -T_8 - T_9 \\ -T_8 - T_9 & \mathbb{1} - T_8 - T_9 \end{pmatrix}. \quad (2.16b)$$

もちろんながら次の関係が成立する:

$$U_8^{\text{T}} = U_8^{-1} = U_8, \quad U_9^{\text{T}} = U_9^{-1} = U_9, \quad (2.17a)$$

$$(U_8)^2 = (U_9)^2 = \mathbb{1}. \quad (2.17b)$$

3 Analysis of $SL(2, \mathbb{Z})_\tau \times SL(2, \mathbb{Z})_\rho$ monodromy

[16] に従って、 $SO(2, 2; \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z})_\tau \times SL(2, \mathbb{Z})_\rho$ に分離し、これについてのモノドロミーを評価しよう [38, 39]。ここで τ と ρ はそれぞれ2種の複素構造である：

$$\begin{cases} \tau: & \text{torus } T^{89} \text{ の複素構造} \\ \rho: & B_{89} \text{ と } T^{89} \text{ の体積で定義される複素構造} \end{cases} \quad (3.1)$$

これを数式で表示する：

$$\tau \equiv \tau_1 + i\tau_2, \quad (3.2a)$$

$$\rho \equiv \rho_1 + i\rho_2 = B_{89} + i\sqrt{\det G_{mn}}, \quad m, n = 8, 9. \quad (3.2b)$$

余談であるが、[16] (3.17) での 89-方向の計量を

$$G_{ab} = \frac{\rho_2}{\tau_2} \begin{pmatrix} 1 & \tau_1 \\ \tau_1 & |\tau|^2 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

と書いているが、これは τ を用いずとも通常の G_{mn} そのものと一致する。これは有益なので後ほど用いる。さらに dilaton についても、[16] にあるように

$$e^{2\phi} = \rho_2 = \sqrt{\det G_{mn}}, \quad (3.4)$$

である。これは defect NS5-brane (2.4), defect KK5-brane (2.6), exotic 5_2^2 -brane (2.10) すべてで成立する。

3.1 Monodromy matrix of defect NS5-brane

(2.4) から、 τ と ρ はそれぞれ次で与えられる：

$$\tau = i, \quad (3.5a)$$

$$\rho = V_\ell + iH_\ell = ih + i\ell \log(\mu/z). \quad (3.5b)$$

モノドロミーは、67-方向の座標 $z = \rho e^{i\vartheta}$ の変換 $z \rightarrow z e^{2\pi i}$ で受ける τ と ρ の変換である：

$$\tau \rightarrow \tau, \quad (3.6a)$$

$$\rho \rightarrow \rho + 2\pi\ell. \quad (3.6b)$$

これによりそれぞれのモノドロミーは次で与えられる：

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_\tau \equiv \Omega_\tau^{\text{NS}}, \quad (3.7a)$$

$$\rho \rightarrow \frac{a\rho + b}{c\rho + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_\rho = \begin{pmatrix} 1 & +2\pi\ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_\rho \equiv \Omega_\rho^{\text{NS}}. \quad (3.7b)$$

3.2 Monodromy matrix of defect KK5-brane

(2.6) から、 τ と ρ はそれぞれ次で与えられる:

$$\tau = \frac{-V_\ell + iH_\ell}{K_\ell} = \frac{i}{-iV_\ell + H_\ell} = \frac{i}{h + \ell \log(\mu/z)}, \quad (3.8a)$$

$$\rho = 0 + i \sqrt{\det \begin{pmatrix} K_\ell/H_\ell & -V_\ell/H_\ell \\ -V_\ell/H_\ell & 1/H_\ell \end{pmatrix}} = i. \quad (3.8b)$$

τ は次の様にして定まる。これは T^{89} の複素構造であり、大きさは関係ないことに注意:

$$\begin{aligned} ds_{89}^2 &= H_\ell (dx^8)^2 + \frac{1}{H_\ell} [dy^9 - V_\ell dx^8]^2 \\ &= \frac{K_\ell}{H_\ell} \left(dx^8 + \frac{-V_\ell + iH_\ell}{K_\ell} dy^9 \right) \left(dx^8 + \frac{-V_\ell - iH_\ell}{K_\ell} dy^9 \right) \\ &\equiv \frac{K_\ell}{H_\ell} (dx^8 + \tau dy^9) (dx^8 + \bar{\tau} dy^9), \end{aligned} \quad (3.9a)$$

$$\therefore \tau = \frac{-V_\ell + iH_\ell}{K_\ell}. \quad (3.9b)$$

モノドロミーは、67-方向の座標 $z = \varrho e^{i\vartheta}$ の変換 $z \rightarrow z e^{2\pi i}$ で受ける τ と ρ の変換である:

$$\lambda \rightarrow \lambda + 2\pi\ell \quad \text{with} \quad \lambda \equiv -1/\tau, \quad (3.10a)$$

$$\rho \rightarrow \rho. \quad (3.10b)$$

これによりそれぞれのモノドロミーは次で与えられる:

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\pi\ell & 1 \end{pmatrix}_\tau \equiv \Omega_\tau^{\text{KK}}, \quad (3.11a)$$

$$\rho \rightarrow \frac{a\rho + b}{c\rho + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_\rho \equiv \Omega_\rho^{\text{KK}}. \quad (3.11b)$$

3.3 Monodromy matrix of another defect KK5-brane

(2.8) から、 τ と ρ はそれぞれ次で与えられる:

$$\tau = V_\ell + iH_\ell = ih + i\ell \log(\mu/z), \quad (3.12a)$$

$$\rho = 0 + i \sqrt{\det \begin{pmatrix} 1/H_\ell & V_\ell/H_\ell \\ V_\ell/H_\ell & K_\ell/H_\ell \end{pmatrix}} = i. \quad (3.12b)$$

τ は次の様にして定まる。これは T^{89} の複素構造であり、大きさは関係ないことに注意:

$$ds_{89}^2 = H_\ell (dx^9)^2 + \frac{1}{H_\ell} [dy^8 + V_\ell dx^9]^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{H_\ell} \left(dy^8 + (V_\ell + iH_\ell) dx^9 \right) \left(dy^8 + (V_\ell - iH_\ell) dx^9 \right) \\
&\equiv \frac{1}{H_\ell} (dy^8 + \tau dx^9) (dy^8 + \bar{\tau} dx^9), \tag{3.13a}
\end{aligned}$$

$$\therefore \tau = V_\ell + iH_\ell. \tag{3.13b}$$

モノドロミーは、67-方向の座標 $z = \varrho e^{i\theta}$ の変換 $z \rightarrow z e^{2\pi i}$ で受ける τ と ρ の変換である:

$$\tau \rightarrow \tau + 2\pi\ell, \tag{3.14a}$$

$$\rho \rightarrow \rho. \tag{3.14b}$$

これによりそれぞれのモノドロミーは次で与えられる:

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_\tau = \begin{pmatrix} 1 & +2\pi\ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_\tau \equiv \Omega_\tau^{\text{AK}}, \tag{3.15a}$$

$$\rho \rightarrow \frac{a\rho + b}{c\rho + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_\rho \equiv \Omega_\rho^{\text{AK}}. \tag{3.15b}$$

3.4 Monodromy matrix of exotic 5₂-brane

(2.10) から、 τ と ρ はそれぞれ次で与えられる:

$$\tau = i, \tag{3.16a}$$

$$\rho = -\frac{V_\ell}{K_\ell} + i\sqrt{\det G_{mn}} = \frac{-V_\ell + iH_\ell}{K_\ell} = \frac{i}{h + \ell \log(\mu/z)}. \tag{3.16b}$$

モノドロミーは、67-方向の座標 $z = \varrho e^{i\theta}$ の変換 $z \rightarrow z e^{2\pi i}$ で受ける τ と ρ の変換である:

$$\tau \rightarrow \tau, \tag{3.17a}$$

$$\omega \rightarrow \omega + 2\pi\ell \quad \text{with} \quad \omega \equiv -1/\rho. \tag{3.17b}$$

これによりそれぞれのモノドロミーは次で与えられる:

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_\tau \equiv \Omega_\tau^{\text{E}}, \tag{3.18a}$$

$$\rho \rightarrow \frac{a\rho + b}{c\rho + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\pi\ell & 1 \end{pmatrix}_\rho \equiv \Omega_\rho^{\text{E}}. \tag{3.18b}$$

4 Conjugate monodromy matrices

4.1 Conjugate monodromy matrix of defect NS5-brane

defect NS5-brane についての $SO(2, 2; \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z})_\tau \times SL(2, \mathbb{Z})_\rho$ モノドロミーは (3.7) で与えられた。 $\Omega_\tau^{\text{NS}}, \Omega_\rho^{\text{NS}}$ それぞれに対して conjugate monodromy matrix を評価する [16, 38, 39]:

$$U_\tau \equiv \begin{pmatrix} s' & r' \\ q' & p' \end{pmatrix}, \quad U_\rho \equiv \begin{pmatrix} s & r \\ q & p \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} s'p' - r'q' &= 1 \\ sp - rq &= 1 \end{aligned}, \quad (4.1a)$$

$$\tilde{\Omega}_\tau^{\text{NS}} = U_\tau^{-1} \Omega_\tau^{\text{NS}} U_\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_\tau, \quad (4.1b)$$

$$\tilde{\Omega}_\rho^{\text{NS}} = U_\rho^{-1} \Omega_\rho^{\text{NS}} U_\rho = \begin{pmatrix} 1 + (2\pi\ell)pq & (2\pi\ell)p^2 \\ -(2\pi\ell)q^2 & 1 - (2\pi\ell)pq \end{pmatrix}_\rho. \quad (4.1c)$$

このため、任意の U_τ で $\tilde{\Omega}_\tau = \Omega_\tau$ である。

4.2 Conjugate monodromy matrix of defect KK5-brane

defect KK5-brane についての $SO(2, 2; \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z})_\tau \times SL(2, \mathbb{Z})_\rho$ モノドロミーは (3.11) で与えられた。 $\Omega_\tau^{\text{KK}}, \Omega_\rho^{\text{KK}}$ それぞれに対して conjugate monodromy matrix を評価する [16]:

$$U_\tau \equiv \begin{pmatrix} s' & r' \\ q' & p' \end{pmatrix}, \quad U_\rho \equiv \begin{pmatrix} s & r \\ q & p \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} s'p' - r'q' &= 1 \\ sp - rq &= 1 \end{aligned}, \quad (4.2a)$$

$$\tilde{\Omega}_\tau^{\text{KK}} = U_\tau^{-1} \Omega_\tau^{\text{KK}} U_\tau = \begin{pmatrix} 1 + (2\pi\ell)r's' & (2\pi\ell)r'^2 \\ -(2\pi\ell)s'^2 & 1 - (2\pi\ell)r's' \end{pmatrix}_\tau, \quad (4.2b)$$

$$\tilde{\Omega}_\rho^{\text{KK}} = U_\rho^{-1} \Omega_\rho^{\text{KK}} U_\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_\rho. \quad (4.2c)$$

このため、任意の U_ρ で $\tilde{\Omega}_\rho = \Omega_\rho$ である。

4.3 Conjugate monodromy matrix of another defect KK5-brane

another defect KK5-brane についての $SO(2, 2; \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z})_\tau \times SL(2, \mathbb{Z})_\rho$ モノドロミーは (3.15) で与えられた。 $\Omega_\tau^{\text{AK}}, \Omega_\rho^{\text{AK}}$ それぞれに対して conjugate monodromy matrix を評価する [16]:

$$U_\tau \equiv \begin{pmatrix} s' & r' \\ q' & p' \end{pmatrix}, \quad U_\rho \equiv \begin{pmatrix} s & r \\ q & p \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} s'p' - r'q' &= 1 \\ sp - rq &= 1 \end{aligned}, \quad (4.3a)$$

$$\tilde{\Omega}_\tau^{\text{AK}} = U_\tau^{-1} \Omega_\tau^{\text{AK}} U_\tau = \begin{pmatrix} 1 + (2\pi\ell)p'q' & (2\pi\ell)p'^2 \\ -(2\pi\ell)q'^2 & 1 - (2\pi\ell)p'q' \end{pmatrix}_\tau, \quad (4.3b)$$

$$\tilde{\Omega}_\rho^{\text{AK}} = U_\rho^{-1} \Omega_\rho^{\text{AK}} U_\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_\rho. \quad (4.3c)$$

このため、任意の U_ρ で $\tilde{\Omega}_\rho = \Omega_\rho$ である。

4.4 Conjugate monodromy matrix of exotic 5_2^2 -brane

exotic 5_2^2 -brane についての $SO(2, 2; \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z})_\tau \times SL(2, \mathbb{Z})_\rho$ モノドロミーは (3.18) で与えられた。 $\Omega_\tau^{\text{E}}, \Omega_\rho^{\text{E}}$ それぞれに対して conjugate monodromy matrix を評価する [16]:

$$U_\tau \equiv \begin{pmatrix} s' & r' \\ q' & p' \end{pmatrix}, \quad U_\rho \equiv \begin{pmatrix} s & r \\ q & p \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} s'p' - r'q' &= 1 \\ sp - rq &= 1 \end{aligned}, \quad (4.4a)$$

$$\tilde{\Omega}_\tau^{\text{E}} = U_\tau^{-1} \Omega_\tau^{\text{E}} U_\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_\tau, \quad (4.4b)$$

$$\tilde{\Omega}_\rho^{\text{E}} = U_\rho^{-1} \Omega_\rho^{\text{E}} U_\rho = \begin{pmatrix} 1 + (2\pi\ell)rs & (2\pi\ell)r^2 \\ -(2\pi\ell)s^2 & 1 - (2\pi\ell)rs \end{pmatrix}_\rho. \quad (4.4c)$$

このため、任意の U_τ で $\tilde{\Omega}_\tau = \Omega_\tau$ である。

5 Conjugate configurations

5.1 Conjugate configuration of defect NS5-brane

defect NS5-brane (2.4) の $SL(2, \mathbb{Z})_\tau \times SL(2, \mathbb{Z})_\rho$ monodromy matrix (3.7) の conjugate matrix (4.1) は (p, q) five-branes、つまり p defect NS5-branes と q exotic 5_2^2 -branes の束縛状態を与えている。では、この conjugate configuration の具体的な計量、B-field、dilaton はどうなっているか [38, 39]?

defect NS5-brane の complex structure ρ に注目する (τ は自明なので気にしない)。この ρ を、変換行列(の逆) U_ρ^{-1} (4.1a) で $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換しよう:

$$U_\rho^{-1} = \begin{pmatrix} p & -r \\ -q & s \end{pmatrix}, \quad \rho \rightarrow \rho_U \equiv \frac{p\rho - r}{-q\rho + s}, \quad \rho = \frac{s\rho_U + r}{q\rho_U + p}. \quad (5.1)$$

$z \rightarrow ze^{2\pi i}$ を与える monodromy において、 $\rho \rightarrow \rho' = \rho + 2\pi\ell$ と変換された。このとき ρ_U は次の様に変換され、monodromy matrix $\Omega_{\rho, U}^{\text{NS}}$ を与える:

$$\rho_U \rightarrow \rho'_U = \frac{p\rho' - r}{-q\rho' + s} = \frac{p(\rho + 2\pi\ell) - r}{-q(\rho + 2\pi\ell) + s}, \quad (5.2a)$$

$$\begin{aligned} (\text{分子}) &= p\left(\frac{s\rho_U + r}{q\rho_U + p} + 2\pi\ell\right) - r = \frac{(ps - rq)\rho_U + pr - pr + 2\pi\ell p^2}{q\rho_U + p} \\ &= \frac{(1 + 2\pi\ell pq)\rho_U + 2\pi\ell p^2}{q\rho_U + p}, \end{aligned} \quad (5.2b)$$

$$\begin{aligned} (\text{分母}) &= -q\left(\frac{s\rho_U + r}{q\rho_U + p} + 2\pi\ell\right) + s = \frac{(-qs + qs - 2\pi\ell q^2)\rho_U + ps - qr - 2\pi\ell pq}{q\rho_U + p} \\ &= \frac{-2\pi\ell q^2\rho_U + (1 - 2\pi\ell pq)}{q\rho_U + p}, \end{aligned} \quad (5.2c)$$

$$\therefore \rho'_U = \frac{(1 + 2\pi\ell pq)\rho_U + 2\pi\ell p^2}{-2\pi\ell q^2\rho_U + (1 - 2\pi\ell pq)}, \quad (5.2d)$$

$$\therefore \Omega_{\rho, U}^{\text{NS}} = \begin{pmatrix} 1 + 2\pi\ell pq & 2\pi\ell p^2 \\ -2\pi\ell q^2 & 1 - 2\pi\ell pq \end{pmatrix} = \tilde{\Omega}_\rho^{\text{NS}}. \quad (5.2e)$$

つまり conjugate monodromy $\tilde{\Omega}_\rho^{\text{NS}}$ (4.1) を与える complex structure $\tilde{\rho}$ は ρ_U であることが (ad hoc であるが) 示された。すなわち、 ρ_U (5.1) が、 (p, q) five-branes configuration を与える complex structure $\tilde{\rho}$ である (以下、 $\rho_U = \tilde{\rho}$)。

defect NS5-brane の τ と ρ の定義により次が言える:

$$\tau = \tilde{\tau} = i, \quad (5.3a)$$

$$\rho = B_{89} + i\sqrt{\det G_{mn}} = V_\ell + iH_\ell, \quad (5.3b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \frac{p\rho - r}{-q\rho + s} = \frac{p(V_\ell + iH_\ell) - r}{-q(V_\ell + iH_\ell) + s} = \frac{[(-r + pV_\ell) + ipH_\ell][(s - qV_\ell) + iqH_\ell]}{(s - qV_\ell)^2 + q^2H_\ell^2} \\ &= \frac{[-rs + (ps + qr)V_\ell - pqH_\ell] + iH_\ell}{s^2 - 2qsV_\ell + q^2K_\ell} \end{aligned}$$

$$\equiv \tilde{B}_{89} + i\sqrt{\det \tilde{G}_{mn}}. \quad (5.3c)$$

これより、conjugate system での B-field $\tilde{B}_{89}$ と metric $\tilde{G}_{mn}$ が次で与えられる:

$$\tilde{B}_{89} = \frac{-rs + (ps + qr)V_\ell - pqK_\ell}{s^2 - 2qsV_\ell + q^2K_\ell}, \quad (5.4a)$$

$$\sqrt{\det \tilde{G}_{mn}} = \frac{H_\ell}{s^2 - 2qsV_\ell + q^2K_\ell}, \quad (5.4b)$$

$$\therefore \tilde{G}_{mn} = \frac{H_\ell}{s^2 - 2qsV_\ell + q^2K_\ell} \delta_{mn}, \quad m, n = 8, 9. \quad (5.4c)$$

ただし、defect NS5-brane や exotic 5_2^2 -brane 解の様に、計量は対角的である。それは torus T^{89} の complex structure τ が自明であること、conjugate monodromy $\tilde{\Omega}_\tau^{\text{NS}}$ も (4.1) のように自明であることによって保証されている。さらに dilaton は (3.4) により

$$e^{2\tilde{\phi}} = \tilde{\rho}_2 = \frac{H_\ell}{s^2 - 2qsV_\ell + q^2K_\ell}, \quad (5.4d)$$

である。(5.4) が supergravity solution であることが示されたら、それは新しい解である [2014 10/23]。

[コメント]

- 整数 p, q はそれぞれ defect NS5-brane と exotic 5_2^2 -brane の枚数を指定している。一方で s は $SL(2, \mathbb{Z})$ モノドロミー変換を満たすための適切な整数である。
- 特解として、conjugate configuration が $(1, 0)$ five-brane (つまり $(p, q) = (1, 0)$) のとき、(5.4) は monodromy matrix Ω_ρ^{NS} (3.7) を持つ 1 defect NS5-brane configuration (2.4) に帰着されるべきである。そのためには $(s, r) = (1, 0)$ とすればよい。
- 特解として、conjugate configuration が $(0, 1)$ five-brane (つまり $(p, q) = (0, 1)$) のとき、(5.4) は monodromy matrix Ω_ρ^{E} (3.18) を持つ 1 exotic 5_2^2 -brane configuration (2.10) に帰着されるべきである。そのためには $(s, r) = (0, -1)$ とすればよい。

[$pq \neq 0$ を満たす一般の (p, q) five-branes での簡略化]

$(p, 0)$ five-branes もしくは $(0, q)$ five-branes 系では、 $\tilde{\Omega}_\rho^{\text{NS}}$ は Ω_ρ^{NS} (3.7) もしくは Ω_ρ^{E} (3.18) に帰着される。一般の $pq \neq 0$ である (p, q) five-branes 系では、パラメータ (s, r) が余分で邪魔である。そのため $\tilde{\rho}$ を次の様に変形しよう:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \frac{p(V_\ell + iH_\ell) - r}{-q(V_\ell + iH_\ell) + s} = \frac{pq(V_\ell + iH_\ell) - qr}{-q^2(V_\ell + iH_\ell) + qs} = \frac{pq(V_\ell + iH_\ell) + 1 - ps}{-q[q(V_\ell + iH_\ell) - s]} \\ &= -\frac{p}{q} - \frac{1}{q[(-s + qV_\ell) + iqH_\ell]}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

ここで座標変換 (ϑ のシフト)

$$-s + qV_\ell = -s + q\ell\vartheta \equiv +q\ell\vartheta', \quad (5.6)$$

を実行すると、

$$\hat{\rho} \equiv -\frac{p}{q} - \frac{1}{q^2(V_\ell + iH_\ell)}, \quad (5.7)$$

となる。さらに $\hat{\omega} \equiv -1/(\hat{\rho} + \frac{p}{q})$ と書き換えて、 $z \rightarrow ze^{2\pi i}$ とモノドロミー変換を実行する:

$$\hat{\omega} = -\frac{1}{\hat{\rho} + \frac{p}{q}} = q^2(V_\ell + iH_\ell), \quad (5.8a)$$

$$\hat{\omega} \rightarrow \hat{\omega}' = \hat{\omega} + 2\pi\ell q^2 \rightarrow -\frac{1}{\hat{\rho}' + \frac{p}{q}} = -\frac{1}{\hat{\rho} + \frac{p}{q}} + 2\pi\ell q^2, \quad (5.8b)$$

$$\therefore \hat{\rho}' + \frac{p}{q} = \frac{\hat{\rho} + \frac{p}{q}}{-2\pi\ell q^2 \hat{\rho} + 1 - 2\pi\ell pq}, \quad \hat{\rho}' = \frac{(1 + 2\pi\ell pq)\hat{\rho} + 2\pi\ell p^2}{-2\pi\ell q^2 \hat{\rho} + (1 - 2\pi\ell pq)}. \quad (5.8c)$$

よって $\hat{\rho}$ は $\tilde{\rho} = \rho_U$ (5.1) と同じ monodromy を持ち、余分なパラメータが存在しない。したがって、 $\hat{\rho}$ を用いて configuration を読み取る方が便利である:

$$\hat{\tau} = \tau = i, \quad \hat{\rho} = -\frac{p}{q} - \frac{1}{q^2(V_\ell + iH_\ell)} \equiv \hat{B}_{89} + i\sqrt{\det \hat{G}_{mn}}, \quad e^{2\hat{\phi}} \equiv \hat{\rho}_2, \quad (5.9a)$$

$$ds^2 = ds_{012345}^2 + H_\ell \left\{ (d\varrho)^2 + \varrho^2 (d\vartheta)^2 \right\} + \frac{H_\ell}{q^2 K_\ell} \left\{ (dx^8)^2 + (dx^9)^2 \right\}, \quad (5.9b)$$

$$\hat{B}_{89} = -\frac{p}{q} - \frac{V_\ell}{q^2 K_\ell}, \quad e^{2\hat{\phi}} = \frac{H_\ell}{q^2 K_\ell}. \quad (5.9c)$$

(5.4) よりも (5.9) の方が扱いやすい。

[コメント]

- (5.9) こそこ、[3] で導出できなかった悲願の配位である。
- B-field のゲージ変換で $-\frac{p}{q}$ を消去すると monodromy 行列 $\tilde{\Omega}_\rho^{\text{NS}}$ が変わってしまうので、そのゲージ変換はすべきではない。
- $\tilde{\rho}$ (5.5) では $sp - qr = 1$ を用いて r を追い出した。そのため (5.5) の s にはもはや拘束はなく任意の整数であると考えてよい。そしてさらに $\hat{\rho}$ (5.7) に移行するというのは、座標変換 (5.6) というよりも単に $s = 0$ と設定したと考えても良い。実際、(5.6) は、結果的に B-field のゲージ変換も伴っており、単に座標変換だけの操作と見るのは適切ではないかもしれない。
- defect (p, q) five-branes (5.9) についての量子補正を考えるとしよう。dNS5-branes 側で、9-th 方向についての補正が string worldsheet instanton corrections によって入ると、それは 9-th 方向の KK-momentum としての補正になる。これは H-monopoles から localized NS5-branes になる補正であった [20]。しかるに、同じ worldsheet instanton corrections が exotic 5_2^2 -branes の 9-th 方向に寄与するときは、KK5-branes の場合 [20, 21, 22] と同様、winding modes としての寄与であった [2]。さて、defect (p, q) five-branes のとき、worldsheet instanton corrections は、一体どのように解釈すべきか [2014 10/30] [38]?

5.2 Conjugate configuration of defect KK5-brane

defect KK5-brane (2.6) の $SL(2, \mathbb{Z})_\tau \times SL(2, \mathbb{Z})_\rho$ monodromy matrix (3.11) の conjugate matrix (4.2) は $(-s', r')$ five-branes、つまり $-s'$ defect KK5-branes と r' another KK5-branes の束縛状態を与えている。では、この conjugate configuration の具体的な計量、B-field、dilaton はどうなっているか？

defect KK5-brane の complex structure τ に注目する (ρ は自明なので気にしない)。ここで $\lambda = -1/\tau$ を次の U_τ^T で変換する:

$$U_\tau^T = \begin{pmatrix} s' & q' \\ r' & p' \end{pmatrix}, \quad \lambda \rightarrow \lambda_U \equiv \frac{s'\lambda + q'}{r'\lambda + p'} \equiv -\frac{1}{\tau_U}, \quad \lambda = \frac{p'\lambda_U - q'}{-r'\lambda_U + s'}. \quad (5.10)$$

$z \rightarrow ze^{2\pi i}$ を与える monodromy において、 $\lambda \rightarrow \lambda' = \lambda + 2\pi\ell$ と変換された。このとき λ_U は次の様に変換され、結果として τ_U の monodromy matrix $\Omega_{\tau,U}^{\text{KK}}$ を与える:

$$\lambda_U \rightarrow \lambda'_U = \frac{s'\lambda' + q'}{r'\lambda' + p'} = \frac{s'(\lambda + 2\pi\ell) + q'}{r'(\lambda + 2\pi\ell) + p'}, \quad (5.11a)$$

$$(\text{分子}) = s' \left(\frac{p'\lambda_U - q'}{-r'\lambda_U + s'} + 2\pi\ell \right) + q' = \frac{(1 - 2\pi\ell r's')\lambda_U + 2\pi\ell s'^2}{-r'\lambda_U + s'}, \quad (5.11b)$$

$$(\text{分母}) = r' \left(\frac{p'\lambda_U - q'}{-r'\lambda_U + s'} + 2\pi\ell \right) + p' = \frac{-2\pi\ell r'^2\lambda_U + (1 + 2\pi\ell r's')}{-r'\lambda_U + s'}, \quad (5.11c)$$

$$\begin{aligned} \therefore \lambda'_U &= \frac{(1 - 2\pi\ell r's')\lambda_U + 2\pi\ell s'^2}{-2\pi\ell r'^2\lambda_U + (1 + 2\pi\ell r's')} \\ &= \frac{-(1 - 2\pi\ell r's')/\tau_U + 2\pi\ell s'^2}{2\pi\ell r'^2/\tau_U + (1 + 2\pi\ell r's')} = \frac{2\pi\ell s'^2\tau_U - (1 - 2\pi\ell r's')}{(1 + 2\pi\ell r's')\tau_U + 2\pi\ell r'^2} \equiv -\frac{1}{\tau'_U}, \end{aligned} \quad (5.11d)$$

$$\therefore \tau'_U = \frac{(1 + 2\pi\ell r's')\tau_U + 2\pi\ell r'^2}{-2\pi\ell s'^2\tau_U + (1 - 2\pi\ell r's')}, \quad (5.11e)$$

$$\therefore \Omega_{\tau,U}^{\text{KK}} = \begin{pmatrix} 1 + 2\pi\ell r's' & 2\pi\ell r'^2 \\ -2\pi\ell s'^2 & 1 - 2\pi\ell r's' \end{pmatrix} = \tilde{\Omega}_\tau^{\text{KK}}. \quad (5.11f)$$

つまり conjugate monodromy $\tilde{\Omega}_\tau^{\text{KK}}$ (4.2) を与える complex structure $\tilde{\tau}$ は τ_U であることが (ad hoc であるが) 示された。すなわち、 τ_U (5.10) が、 $(-s', r')$ five-branes configuration を与える complex structure $\tilde{\tau}$ である (以下、 $\tau_U = \tilde{\tau}$)。

defect KK5-brane の τ は torus T^{89} の complex structure であった。一方 $\rho = B_{89} + i\sqrt{\det G_{mn}}$ は自明であった。そのため、conjugate configuration においても $\tilde{B}_{89}$ は自明である:

$$\tilde{B}_{89} = 0, \quad \det \tilde{G}_{mn} = 1. \quad (5.12a)$$

そして $\tilde{\tau}$ が conjugate configuration における torus T^{89} の complex structure である (τ については (3.9) 参照):

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{-V_\ell + iH_\ell}{K_\ell} = -\frac{1}{V_\ell + iH_\ell}, \quad \rho = \tilde{\rho} = i, \\ \tilde{\tau} &= -\frac{-r'/\tau + p'}{-s'/\tau + q'} = -\frac{r'(V_\ell + iH_\ell) + p'}{s'(V_\ell + iH_\ell) + q'} \end{aligned} \quad (5.12b)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{(p' + r'V_\ell) + ir'H_\ell}{(q' + s'V_\ell) + is'H_\ell} = -\frac{[(p' + r'V_\ell) + ir'H_\ell][(q' + s'V_\ell) - is'H_\ell]}{q'^2 + 2q's'V_\ell + s'^2K_\ell} \\
&= -\frac{[p'q' + (p's' + r'q')V_\ell + r's'K_\ell] + iH_\ell}{q'^2 + 2q's'V_\ell + s'^2K_\ell}. \tag{5.12c}
\end{aligned}$$

ここで $\tilde{\tau}$ を用いて torus T^{89} 方向の計量を(スケール因子以外)定めてもよいが、(3.3) の表式を用いると直接計量が求められる:

$$\tilde{G}_{mn} = \frac{\tilde{\rho}_2}{\tilde{\tau}_2} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{\tau}_1 \\ \tilde{\tau}_1 & |\tilde{\tau}|^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\rho}_2 = 1, \tag{5.12d}$$

$$\tilde{G}_{88} = \frac{1}{\tilde{\tau}_2} = \frac{q'^2 + 2q's'V_\ell + s'^2K_\ell}{H_\ell}, \tag{5.12e}$$

$$\tilde{G}_{89} = \tilde{G}_{98} = \frac{\tilde{\tau}_1}{\tilde{\tau}_2} = -\frac{p'q' + (p's' + r'q')V_\ell + r's'K_\ell}{H_\ell}, \tag{5.12f}$$

$$\tilde{G}_{99} = \frac{|\tilde{\tau}|^2}{\tilde{\tau}_2} = \frac{p'^2 + 2p'r'V_\ell + r'^2K_\ell}{H_\ell}. \tag{5.12g}$$

five-brane 配位では、10次元計量のうち 012345-方向は完全に平坦である。そのため、6789-方向の計量の振る舞いを解析する。この 6789-方向は Ricci-flat である [34]。よってこの計量を supergravity の運動方程式に代入すると、B-field が自明であるために dilaton も自明になることがすぐに分かる。

$$e^{2\tilde{\phi}} = 1. \tag{5.12h}$$

[コメント]

- (1, 0) five-brane (つまり $(-s', r') = (1, 0)$) のとき、(5.12) は monodromy matrix Ω_τ^{KK} (3.11) を持つ 1 defect KK5-brane 単体である。(2.6) に帰着するためには $(p', q') = (-1, 0)$ となるべきである。なお、 s' の負号の意味は最後に述べる。
- (0, 1) five-brane (つまり $(-s', r') = (0, 1)$) のとき、(5.12) は monodromy matrix Ω_τ^{AK} (3.15) を持つ 1 another defect KK5-brane 単体である。(2.8) に帰着するためには $(p', q') = (0, -1)$ となるべきである。
- 任意の (p', q', s', r') において (5.12) は Ricci-flat な 6789-方向の計量を与えられている。そのため、conjugate monodromy matrix (4.2) から読み取れる defect KK5 の枚数 $-s'$ 、another defect KK5 の枚数 r' 以外のパラメータ (p', q') は計量の成分以外には登場しないようにできるはずである。

[$s'r' \neq 0$ を満たす一般の $(-s', r')$ five-branes での簡略化]

$(-s', 0)$ five-branes もしくは $(0, r')$ five-branes 系では、 $\tilde{\Omega}_\tau^{\text{KK}}$ は Ω_τ^{KK} (3.11) もしくは Ω_τ^{AK} (3.15) に帰着される。一般の $s'r' \neq 0$ である $(-s', r')$ five-branes 系では、パラメータ (p', q') が余分で邪魔である。そのため上記の $\lambda_U = -1/\tilde{\tau}$ に倣って $\tilde{\lambda} \equiv \lambda_U = -1/\tilde{\tau}$ を次の様に変形しよう:

$$\lambda = -\frac{1}{\tau} = V_\ell + iH_\ell, \tag{5.13a}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda} &= -\frac{1}{\tilde{\tau}} = \frac{s'(V_\ell + iH_\ell) + q'}{r'(V_\ell + iH_\ell) + p'} = \frac{r's'(V_\ell + iH_\ell) + r'q'}{r'[r'(V_\ell + iH_\ell) + p']} = \frac{r's'(V_\ell + iH_\ell) + s'p' - 1}{r'[r'(V_\ell + iH_\ell) + p']} \\ &= \frac{s'}{r'} - \frac{1}{r'[(r'V_\ell + p') + ir'H_\ell]}.\end{aligned}\quad (5.13b)$$

ここで座標変換 (ϑ のシフト)

$$p' + r'V_\ell = p' + r'\ell\vartheta \equiv r'\ell\vartheta', \quad (5.14)$$

を実行すると、

$$\hat{\lambda} = -\frac{1}{\hat{\tau}} \equiv \frac{s'}{r'} - \frac{1}{r'^2(V_\ell + iH_\ell)}, \quad (5.15)$$

となる。さらに $\hat{\zeta} \equiv -1/(\hat{\lambda} - \frac{s'}{r'})$ と書き換えて、 $z \rightarrow ze^{2\pi i}$ とモノドロミ変換を実行する:

$$\hat{\zeta} = -\frac{1}{\hat{\lambda} - \frac{s'}{r'}} = r'^2(V_\ell + iH_\ell), \quad (5.16a)$$

$$\hat{\zeta} \rightarrow \hat{\zeta}' = \hat{\zeta} + 2\pi\ell r'^2 \rightarrow -\frac{1}{\hat{\lambda}' - \frac{s'}{r'}} = -\frac{1}{\hat{\lambda} - \frac{s'}{r'}} + 2\pi\ell r'^2, \quad (5.16b)$$

$$\therefore \hat{\lambda}' - \frac{s'}{r'} = \frac{\hat{\lambda} - \frac{s'}{r'}}{-2\pi\ell r'^2\hat{\lambda} + (1 + 2\pi\ell r's')}, \quad \hat{\lambda}' = \frac{(1 - 2\pi\ell r's')\hat{\lambda} + 2\pi\ell s'^2}{-2\pi\ell r'^2\hat{\lambda} + (1 + 2\pi\ell r's')}, \quad (5.16c)$$

$$\begin{aligned}\therefore \hat{\tau}' &= -\frac{1}{\hat{\lambda}'} = -\frac{2\pi\ell r'^2/\hat{\tau} + (1 + 2\pi\ell r's')}{-(1 - 2\pi\ell r's')/\hat{\tau} + 2\pi\ell s'^2} \\ &= \frac{(1 + 2\pi\ell r's')\hat{\tau} + 2\pi\ell r'^2}{-2\pi\ell s'^2\hat{\tau} + (1 - 2\pi\ell r's')}.\end{aligned}\quad (5.16d)$$

したがって $\hat{\tau}$ は、 $\tilde{\tau} = \tau_U$ と同じ monodromy (4.2) を与えることが示され、余分なパラメータ (p', q') が存在しない。この ($\hat{\tau}$ よりも) $\hat{\lambda}$ を用いて configuration を読み取る方が便利である:

$$\hat{\lambda} = \frac{s'}{r'} - \frac{1}{r'^2(V_\ell + iH_\ell)} = -\frac{1}{\hat{\tau}}, \quad \hat{\rho} = \rho = i \equiv \hat{B}_{89} + i\sqrt{\det \hat{G}_{mn}}, \quad e^{2\hat{\phi}} = \hat{\rho}_2, \quad (5.17a)$$

$$\hat{G}_{mn} = \frac{\hat{\rho}_2}{\hat{\tau}_2} \begin{pmatrix} 1 & \hat{\tau}_1 \\ \hat{\tau}_1 & |\hat{\tau}|^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\hat{\lambda}_2} \begin{pmatrix} |\hat{\lambda}|^2 & -\hat{\lambda}_1 \\ -\hat{\lambda}_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.17b)$$

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{s'}{r'} - \frac{V_\ell}{r'^2 K_\ell}, \quad \hat{\lambda}_2 = \frac{H_\ell}{r'^2 K_\ell}, \quad (5.17c)$$

$$ds^2 = ds_{012345}^2 + H_\ell \left\{ (d\varrho)^2 + \varrho^2 (d\vartheta)^2 \right\} + \hat{\lambda}_2 (dx^8)^2 + \frac{1}{\hat{\lambda}_2} \left\{ dy^9 - \hat{\lambda}_1 dx^8 \right\}^2, \quad (5.17d)$$

$$\hat{B}_{89} = 0, \quad e^{2\hat{\phi}} = 1. \quad (5.17e)$$

[コメント]

- (5.17) は、(5.9) を9-方向に T-duality を実行し、ラベルの貼り替え $(p, q) = (-s', r')$ を施したものである。 s' の前の負号の意味は、座標変換 (5.14) と、conjugate of defect NS5-brane での座標変換 (5.6) の各係数を比較すると $p = -s', q = r'$ となることに由来する。

- $\tilde{\tau}$ (5.13) では、 $s'p' - q'r' = 1$ を用いて q' を追い出している。そのため (5.13) の p' にはもはや拘束がなく、任意の整数であると考えてよい。したがって、(5.13) から $\tilde{\tau}$ (5.15) に移行する時には、座標変換 (5.14) を用いているが、単に $p' = 0$ に設定したと言える。
- ここで得られた configuration (5.17) は、またしても hyper-Kähler geometry であるが、codimension two である。Taub-NUT space は、例えば ALF space と呼ばれている。一方この codimension two の空間は、ALG space という名が付きしている [36, 37]。

5.3 Conjugate configuration of another defect KK5-brane

another defect KK5-brane (2.8) の $SL(2, \mathbb{Z})_\tau \times SL(2, \mathbb{Z})_\rho$ monodromy matrix (3.15) の conjugate matrix (4.3) は (q', p') five-branes、つまり q' defect KK5-branes と p' another KK5-branes の束縛状態を与えている。では、この conjugate configuration の具体的な計量、B-field、dilaton はどうなっているか？

another defect KK5-brane の complex structure τ に注目する (ρ は自明なので気にしない)。この τ を、変換行列(の逆) U_τ^{-1} (4.3a) で $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換しよう：

$$U_\tau^{-1} = \begin{pmatrix} p' & -r' \\ -q' & s' \end{pmatrix}, \quad \tau \rightarrow \tau_U \equiv \frac{p'\tau - r'}{-q'\tau + s'}, \quad \tau = \frac{s'\tau_U + r'}{q'\tau_U + p'}. \quad (5.18)$$

$z \rightarrow ze^{2\pi i}$ を与える monodromy において、 $\tau \rightarrow \tau' = \tau + 2\pi\ell$ と変換された。このとき τ_U は次の様に変換され、monodromy matrix $\Omega_{\tau,U}^{\text{AK}}$ を与える：

$$\tau_U \rightarrow \tau'_U = \frac{p'\tau' - r'}{-q'\tau' + s'} = \frac{p'(\tau + 2\pi\ell) - r'}{-q'(\tau + 2\pi\ell) + s'}, \quad (5.19a)$$

$$\begin{aligned} (\text{分子}) &= p' \left(\frac{s'\tau_U + r'}{q'\tau_U + p'} + 2\pi\ell \right) - r' = \frac{(p's' - r'q')\tau_U + 2\pi\ell p'^2}{q'\tau_U + p'} \\ &= \frac{(1 + 2\pi\ell p'q')\tau_U + 2\pi\ell p'^2}{q'\tau_U + p'}, \end{aligned} \quad (5.19b)$$

$$\begin{aligned} (\text{分母}) &= -q' \left(\frac{s'\tau_U + r'}{q'\tau_U + p'} + 2\pi\ell \right) + s' = \frac{-2\pi\ell q'^2\tau_U + (p's' - q'r' - 2\pi\ell p'q')}{q'\tau_U + p'} \\ &= \frac{-2\pi\ell q'^2\tau_U + (1 - 2\pi\ell p'q')}{q'\tau_U + p'}, \end{aligned} \quad (5.19c)$$

$$\therefore \tau'_U = \frac{(1 + 2\pi\ell p'q')\tau_U + 2\pi\ell p'^2}{-2\pi\ell q'^2\tau_U + (1 - 2\pi\ell p'q')}, \quad (5.19d)$$

$$\therefore \Omega_{\tau,U}^{\text{AK}} = \begin{pmatrix} 1 + 2\pi\ell p'q' & 2\pi\ell p'^2 \\ -2\pi\ell q'^2 & 1 - 2\pi\ell p'q' \end{pmatrix} = \tilde{\Omega}_\tau^{\text{AK}}. \quad (5.19e)$$

つまり conjugate monodromy $\tilde{\Omega}_\tau^{\text{AK}}$ (4.3) を与える complex structure $\tilde{\tau}$ は τ_U であることが (ad hoc であるが) 示された。すなわち、 τ_U (5.18) が、 (q', p') five-branes configuration を与える complex structure $\tilde{\tau}$ である (以下、 $\tau_U = \tilde{\tau}$)。

another defect KK5-brane の τ は torus T^{89} の complex structure であった。一方 $\rho = B_{89} +$

$i\sqrt{\det G_{mn}}$ は自明であった。そのため、conjugate configuration においても $\tilde{B}_{89}$ は自明である:

$$\tilde{B}_{89} = 0, \quad \det \tilde{G}_{mn} = 1. \quad (5.20a)$$

そして $\tilde{\tau}$ が conjugate configuration における torus T^{89} の complex structure である (τ については (3.13) 参照):

$$\tau = V_\ell + iH_\ell, \quad \rho = \tilde{\rho} = i, \quad (5.20b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} &= \frac{p'\tau - r'}{-q'\tau + s'} = \frac{p'(V_\ell + iH_\ell) - r'}{-q'(V_\ell + iH_\ell) + s'} = \frac{[(p'V_\ell - r') + ip'H_\ell][(-q'V_\ell + s') + iq'H_\ell]}{(-q'V_\ell + s')^2 + q'^2 H_\ell^2} \\ &= \frac{[-r's' + (p's' + r'q')V_\ell - p'q'K_\ell] + iH_\ell}{s'^2 - 2q's'V_\ell + q'^2 K_\ell}. \end{aligned} \quad (5.20c)$$

ここで $\tilde{\tau}$ を用いて torus T^{89} 方向の計量を(スケール因子以外)定めてもよいが、(3.3) の表式を用いると直接計量が求められる:

$$\tilde{G}_{mn} = \frac{\tilde{\rho}_2}{\tilde{\tau}_2} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{\tau}_1 \\ \tilde{\tau}_1 & |\tilde{\tau}|^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\rho}_2 = 1, \quad (5.20d)$$

$$\tilde{G}_{88} = \frac{1}{\tilde{\tau}_2} = \frac{s'^2 - 2q's'V_\ell + q'^2 K_\ell}{H_\ell}, \quad (5.20e)$$

$$\tilde{G}_{89} = \tilde{G}_{98} = \frac{\tilde{\tau}_1}{\tilde{\tau}_2} = -\frac{r's' - (p's' + r'q')V_\ell + p'q'K_\ell}{H_\ell}, \quad (5.20f)$$

$$\tilde{G}_{99} = \frac{|\tilde{\tau}|^2}{\tilde{\tau}_2} = \frac{r'^2 - 2p'r'V_\ell + p'^2 K_\ell}{H_\ell}. \quad (5.20g)$$

five-brane 配位では、10次元計量のうち 012345-方向は完全に平坦である。そのため、6789-方向の計量の振る舞いを解析する。この 6789-方向は Ricci-flat である [35]。よってこの計量を supergravity の運動方程式に代入すると、B-field が自明であるために dilaton も自明になることがすぐに分かる。

$$e^{2\tilde{\phi}} = 1. \quad (5.20h)$$

これは (3.4) と矛盾していない。

[コメント]

- (0,1) five-brane (つまり $(q', p') = (0, 1)$) のとき、(5.20) は monodromy matrix Ω_τ^{AK} (3.15) を持つ 1 another defect KK5-brane 単体である。(2.8) に帰着するためには $(s', r') = (1, 0)$ でよい。
- (1,0) five-brane (つまり $(q', p') = (1, 0)$) のとき、(5.20) は monodromy matrix Ω_τ^{KK} (3.11) を持つ 1 defect KK5-brane 単体である。(2.6) に帰着するためには $(s', r') = (0, -1)$ となるべきである。

[$q'p' \neq 0$ を満たす一般の (q', p') five-branes での簡略化]

$(q', 0)$ five-branes もしくは $(0, p')$ five-branes 系では、 $\tilde{\Omega}_\tau^{\text{AK}}$ は Ω_τ^{KK} (3.11) もしくは Ω_τ^{AK} (3.15) に帰着される。一般の $q'p' \neq 0$ である (q', p') five-branes 系では、パラメータ (s', r') が余分で邪魔である。そのため $\tilde{\tau}$ を次の様に変形しよう:

$$\begin{aligned}\tilde{\tau} &= \frac{p'(V_\ell + iH_\ell) - r'}{-q'(V_\ell + iH_\ell) + s'} = \frac{p'q'(V_\ell + iH_\ell) - q'r'}{-q'^2(V_\ell + iH_\ell) + q's'} = \frac{p'q'(V_\ell + iH_\ell) + 1 - p's'}{-q'[q'(V_\ell + iH_\ell) - s']} \\ &= -\frac{p'}{q'} - \frac{1}{q'[(-s' + q'V_\ell) + iq'H_\ell]}.\end{aligned}\quad (5.21)$$

ここで座標変換 (ϑ のシフト)

$$-s' + q'V_\ell = -s' + q'\ell\vartheta \equiv +q'\ell\vartheta', \quad (5.22)$$

を実行すると、

$$\hat{\tau} \equiv -\frac{p'}{q'} - \frac{1}{q'^2(V_\ell + iH_\ell)}, \quad (5.23)$$

となる。さらに $\hat{\lambda} \equiv -1/(\hat{\tau} + \frac{p'}{q'})$ と書き換えて、 $z \rightarrow ze^{2\pi i}$ とモノドロミー変換を実行する:

$$\hat{\lambda} = -\frac{1}{\hat{\tau} + \frac{p'}{q'}} = q'^2(V_\ell + iH_\ell), \quad (5.24a)$$

$$\hat{\lambda} \rightarrow \hat{\lambda}' = \hat{\lambda} + 2\pi\ell q'^2 \rightarrow -\frac{1}{\hat{\tau}' + \frac{p'}{q'}} = -\frac{1}{\hat{\tau} + \frac{p'}{q'}} + 2\pi\ell q'^2, \quad (5.24b)$$

$$\therefore \hat{\tau}' + \frac{p'}{q'} = \frac{\hat{\tau} + \frac{p'}{q'}}{-2\pi\ell q'^2\hat{\tau} + 1 - 2\pi\ell p'q'}, \quad \hat{\tau}' = \frac{(1 + 2\pi\ell p'q')\hat{\tau} + 2\pi\ell p'^2}{-2\pi\ell q'^2\hat{\tau} + (1 - 2\pi\ell p'q')}. \quad (5.24c)$$

よって $\hat{\tau}$ は $\tilde{\tau} = \tau_U$ (5.18) と同じ monodromy を持ち、余分なパラメータが存在しない。したがって、 $\hat{\tau}$ を用いて configuration を読み取る方が便利である:

$$\hat{\tau} = -\frac{p'}{q'} - \frac{1}{q'^2(V_\ell + iH_\ell)}, \quad \hat{\rho} = \rho = i \equiv \hat{B}_{89} + i\sqrt{\det \hat{G}_{mn}}, \quad e^{2\hat{\phi}} \equiv \hat{\rho}_2, \quad (5.25a)$$

$$\hat{\tau}_1 = -\frac{p'}{q'} - \frac{V_\ell}{q'^2 K_\ell}, \quad \hat{\tau}_2 = \frac{H_\ell}{q'^2 K_\ell}, \quad (5.25b)$$

$$ds^2 = ds_{012345}^2 + H_\ell \left\{ (d\varrho)^2 + \varrho^2 (d\vartheta)^2 \right\} + \frac{1}{\hat{\tau}_2} \left\{ dy^8 + \hat{\tau}_1 dx^9 \right\}^2 + \hat{\tau}_2 (dx^9)^2, \quad (5.25c)$$

$$\hat{B}_{89} = 0, \quad e^{2\hat{\phi}} = 1. \quad (5.25d)$$

(5.20) よりも (5.25) の方が扱いやすい。

[コメント]

- (5.25) は、(5.9) を8-方向に T-duality を実行し、ラベルの貼り替え $(p, q) = (p', q')$ を施したものである。

- $\tilde{\tau}$ (5.21) では、 $s'p' - q'r' = 1$ を用いて r' を追い出している。そのため (5.21) の s' にはもはや拘束がなく、任意の整数であると考えてよい。したがって、(5.21) から $\hat{\tau}$ (5.23) に移行する時には、座標変換 (5.14) を用いているが、単に $s' = 0$ に設定したと言える。
- ここで得られた configuration (5.25) も、またしても hyper-Kähler geometry であるが、codimension two である。Taub-NUT space は、例えば ALF space と呼ばれている。一方この codimension two の空間は、ALG space という名が付いている [36, 37]。

5.4 Conjugate configuration of exotic 5_2^2 -brane

exotic 5_2^2 -brane (2.10) の $SL(2, \mathbb{Z})_\tau \times SL(2, \mathbb{Z})_\rho$ monodromy matrix (3.18) の conjugate matrix (4.4) は (r, s) five-branes、つまり r defect NS5-branes と s exotic 5_2^2 -branes の束縛状態を与えている。では、この conjugate configuration の具体的な計量、B-field、dilaton はどうなっているか？

exotic 5_2^2 -brane の complex structure ρ に注目する (τ は自明なので気にしない)。ここで $\omega = -1/\rho$ を次の U_ρ^T で変換する：

$$U_\rho^T = \begin{pmatrix} s & q \\ r & p \end{pmatrix}, \quad \omega \rightarrow \omega_U \equiv \frac{s\omega + q}{r\omega + p} \equiv -\frac{1}{\rho_U}, \quad \omega = \frac{p\omega_U - q}{-r\omega_U + s}. \quad (5.26)$$

$z \rightarrow ze^{2\pi i}$ を与える monodromy において、 $\omega \rightarrow \omega' = \omega + 2\pi\ell$ と変換された。このとき ω_U は次の様に変換され、結果として ρ_U の monodromy matrix $\Omega_{\rho,U}^E$ を与える：

$$\omega_U \rightarrow \omega'_U = \frac{s\omega' + q}{r\omega' + p} = \frac{s(\omega + 2\pi\ell) + q}{r(\omega + 2\pi\ell) + p}, \quad (5.27a)$$

$$(\text{分子}) = s\left(\frac{p\omega_U - q}{-r\omega_U + s} + 2\pi\ell\right) + q = \frac{(1 - 2\pi\ell rs)\omega_U + 2\pi\ell s^2}{-r\omega_U + s}, \quad (5.27b)$$

$$(\text{分母}) = r\left(\frac{p\omega_U - q}{-r\omega_U + s} + 2\pi\ell\right) + p = \frac{-2\pi\ell r^2\omega_U + (1 + 2\pi\ell rs)}{-r\omega_U + s}, \quad (5.27c)$$

$$\begin{aligned} \therefore \omega'_U &= \frac{(1 - 2\pi\ell rs)\omega_U + 2\pi\ell s^2}{-2\pi\ell r^2\omega_U + (1 + 2\pi\ell rs)} \\ &= \frac{-(1 - 2\pi\ell rs)/\rho_U + 2\pi\ell s^2}{2\pi\ell r^2/\rho_U + (1 + 2\pi\ell rs)} = \frac{2\pi\ell s^2\rho_U - (1 - 2\pi\ell rs)}{(1 + 2\pi\ell rs)\rho_U + 2\pi\ell r^2} \equiv -\frac{1}{\rho'_U}, \end{aligned} \quad (5.27d)$$

$$\therefore \rho'_U = \frac{(1 + 2\pi\ell rs)\rho_U + 2\pi\ell r^2}{-2\pi\ell s^2\rho_U + (1 - 2\pi\ell rs)}, \quad (5.27e)$$

$$\therefore \Omega_{\rho,U}^E = \begin{pmatrix} 1 + 2\pi\ell rs & 2\pi\ell r^2 \\ -2\pi\ell s^2 & 1 - 2\pi\ell rs \end{pmatrix} = \tilde{\Omega}_\rho^E. \quad (5.27f)$$

つまり conjugate monodromy $\tilde{\Omega}_\rho^E$ (4.4) を与える complex structure $\tilde{\rho}$ は ρ_U であることが (ad hoc であるが) 示された。すなわち、 ρ_U (5.26) が、 (s, r) five-branes configuration を与える complex structure $\tilde{\rho}$ である (以下、 $\rho_U = \tilde{\rho}$)。

exotic 5_2^2 -brane の τ と ρ の定義により次が言える：

$$\tau = \tilde{\tau} = i, \quad (5.28a)$$

$$\rho = B_{89} + i\sqrt{\det G_{mn}} = \frac{-V_\ell + iH_\ell}{K_\ell} = -\frac{1}{V_\ell + iH_\ell}, \quad (5.28b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= -\frac{-r/\rho + p}{-s/\rho + q} = -\frac{r(V_\ell + iH_\ell) + p}{s(V_\ell + iH_\ell) + q} = -\frac{(p + rV_\ell) + irH_\ell}{(q + sV_\ell) + isH_\ell} \\ &= -\frac{[(p + rV_\ell) + irH_\ell][(q + sV_\ell) - isH_\ell]}{q^2 + 2qsV_\ell + s^2K_\ell} = \frac{-[pq + (ps + rq)V_\ell + rsK_\ell] + iH_\ell}{q^2 + 2qsV_\ell + s^2K_\ell} \\ &\equiv \tilde{B}_{89} + i\sqrt{\det \tilde{G}_{mn}}. \end{aligned} \quad (5.28c)$$

これより、conjugate system での B-field $\tilde{B}_{89}$ と metric $\tilde{G}_{mn}$ が次で与えられる:

$$\tilde{B}_{89} = -\frac{pq + (ps + rq)V_\ell + rsK_\ell}{q^2 + 2qsV_\ell + s^2K_\ell}, \quad (5.29a)$$

$$\sqrt{\det \tilde{G}_{mn}} = \frac{H_\ell}{q^2 + 2qsV_\ell + s^2K_\ell}, \quad (5.29b)$$

$$\therefore \tilde{G}_{mn} = \frac{H_\ell}{q^2 + 2qsV_\ell + s^2K_\ell} \delta_{mn}, \quad m, n = 8, 9. \quad (5.29c)$$

ただし、defect NS5-brane や exotic 5_2^2 -brane 解の様に、計量は対角的である。それは torus T^{89} の complex structure τ が自明であること、conjugate monodromy $\tilde{\Omega}_\tau^E$ も (4.4) のように自明であることによって保証されている。さらに dilaton は (3.4) により

$$e^{2\tilde{\phi}} = \tilde{\rho}_2 = \frac{H_\ell}{q^2 + 2qsV_\ell + s^2K_\ell}, \quad (5.29d)$$

である。(5.29) が supergravity solution であることが示されたら、それは新しい解である [2014 10/23]。

[コメント]

- (0,1) five-brane (つまり $(r, -s) = (0, 1)$) のとき、(5.29) は monodromy matrix Ω_ρ^{NS} (3.7) を持つ 1 exotic 5_2^2 -brane configuration (2.10) に帰着されるべきである。そのためには $(p, q) = (-1, 0)$ とすれば良い。なお、 s の負号の由来は最後に述べる。
- (1,0) five-brane (つまり $(r, -s) = (1, 0)$) のとき、(5.29) は monodromy matrix Ω_ρ^{NS} (3.7) を持つ 1 defect NS5-brane configuration (2.4) に帰着されるべきである。そのためには $(p, q) = (0, -1)$ とすれば良い。
- (1,1) five-brane (つまり $(r, -s) = (1, 1)$) のとき、(5.29) は 1 defect NS5-brane + 1 exotic 5_2^2 -brane である。このとき $(p, q) = (p, p-1)$ であるが、 p を配位から追い出すことができる。

[$rs \neq 0$ を満たす一般の $(r, -s)$ five-branes での簡略化]

$(r, 0)$ five-branes もしくは $(0, -s)$ five-branes 系では、 $\tilde{\Omega}_\rho^E$ は Ω_ρ^{NS} (3.7) もしくは Ω_ρ^E (3.18) に帰着される。一般の $rs \neq 0$ である $(r, -s)$ five-branes 系では、パラメータ (p, q) が余分で邪魔であ

る。そのため $\omega_U = -1/\tilde{\rho}$ に倣って $\tilde{\omega} \equiv \omega_U = -1/\tilde{\rho}$ を次の様に変形しよう:

$$\omega = -\frac{1}{\rho} = V_\ell + iH_\ell, \quad (5.30a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} = -\frac{1}{\tilde{\rho}} &= \frac{s(V_\ell + iH_\ell) + q}{r(V_\ell + iH_\ell) + p} = \frac{rs(V_\ell + iH_\ell) + rq}{r[r(V_\ell + iH_\ell) + p]} = \frac{rs(V_\ell + iH_\ell) + sp - 1}{r[r(V_\ell + iH_\ell) + p]} \\ &= \frac{s}{r} - \frac{1}{r[(rV_\ell + p) + irH_\ell]}. \end{aligned} \quad (5.30b)$$

ここで座標変換 (ϑ のシフト)

$$p + rV_\ell = p + r\ell\vartheta \equiv r\ell\vartheta', \quad (5.31)$$

を実行すると、

$$\hat{\omega} = -\frac{1}{\hat{\rho}} \equiv \frac{s}{r} - \frac{1}{r^2(V_\ell + iH_\ell)}, \quad (5.32)$$

となる。さらに $\hat{\zeta} \equiv -1/(\hat{\omega} - \frac{s}{r})$ と書き換えて、 $z \rightarrow ze^{2\pi i}$ とモノドロミー変換を実行する:

$$\hat{\zeta} = -\frac{1}{\hat{\omega} - \frac{s}{r}} = r^2(V_\ell + iH_\ell), \quad (5.33a)$$

$$\hat{\zeta} \rightarrow \hat{\zeta}' = \hat{\zeta} + 2\pi\ell r^2 \rightarrow -\frac{1}{\hat{\omega}' - \frac{s}{r}} = -\frac{1}{\hat{\omega} - \frac{s}{r}} + 2\pi\ell r^2, \quad (5.33b)$$

$$\therefore \hat{\omega}' - \frac{s}{r} = \frac{\hat{\omega} - \frac{s}{r}}{-2\pi\ell r^2\hat{\omega} + (1 + 2\pi\ell rs)}, \quad \hat{\omega}' = \frac{(1 - 2\pi\ell rs)\hat{\omega} + 2\pi\ell s^2}{-2\pi\ell r^2\hat{\omega} + (1 + 2\pi\ell rs)}, \quad (5.33c)$$

$$\begin{aligned} \therefore \hat{\rho}' &= -\frac{2\pi\ell r^2/\hat{\rho} + (1 + 2\pi\ell rs)}{-(1 - 2\pi\ell rs)/\hat{\rho} + 2\pi\ell s^2} \\ &= \frac{(1 + 2\pi\ell rs)\hat{\rho} + 2\pi\ell r^2}{-2\pi\ell s^2\hat{\rho} + (1 - 2\pi\ell rs)}. \end{aligned} \quad (5.33d)$$

したがって $\hat{\rho}$ は、 $\tilde{\rho} = \rho_U$ と同じ monodromy matrix $\tilde{\Omega}_\rho^E$ (4.4) を与えることが示され、余分なパラメータ (p, q) が存在しない。この $(\hat{\rho})$ よりも $\hat{\omega}$ を用いて configuration を読み取る方が便利である:

$$\hat{\omega} = \frac{s}{r} - \frac{1}{r^2(V_\ell + iH_\ell)} = -\frac{1}{\hat{\rho}}, \quad \hat{\rho} \equiv \hat{B}_{89} + i\sqrt{\det \hat{G}_{mn}}, \quad (5.34a)$$

$$\hat{\omega}_1 = \frac{s}{r} - \frac{V_\ell}{r^2 K_\ell}, \quad \hat{\omega}_2 = \frac{H_\ell}{r^2 K_\ell}, \quad (5.34b)$$

$$\hat{\tau} = \tau = i, \quad e^{2\hat{\phi}} = \hat{\rho}_2, \quad (5.34c)$$

$$ds^2 = ds_{012345}^2 + H_\ell \left\{ (d\varrho)^2 + \varrho^2 (d\vartheta)^2 \right\} + \frac{\hat{\omega}_2}{|\hat{\omega}|^2} \left\{ (dy^8)^2 + (dy^9)^2 \right\}, \quad (5.34d)$$

$$\hat{B}_{89} = \hat{\rho}_1 = -\frac{\hat{\omega}_1}{|\hat{\omega}|^2}, \quad e^{2\hat{\phi}} = \hat{\rho}_2 = \frac{\hat{\omega}_2}{|\hat{\omega}|^2}. \quad (5.34e)$$

(5.29) よりも (5.34) の方が扱いやすい。

[コメント]

- (5.34) は、(5.9) を89-方向に T-duality を実行し、ラベルの貼り替え $(p, q) = (-s, r)$ を施したものである。 s の前の負号の意味は、座標変換 (5.31) と、conjugate of defect NS5-brane での座標変換 (5.6) の各係数を比較すると $p = -s, q = r$ となることに由来する。
- $\tilde{\rho}$ (5.30) では、 $sp - qr = 1$ を用いて q を追い出している。そのため (5.30) の p にはもはや拘束がなく、任意の整数であると考えてよい。したがって、(5.30) から $\hat{\rho}$ (5.32) に移行する時には、座標変換 (5.31) を用いているが、単に $p = 0$ に設定したと言える。

6 Hyper-Kähler with torsion

6.1 Geometry of codimension three

矢田ノート [40] にある hyper-Kähler with torsion を出発点とする [38, 39]²:

$$ds_{\text{KK5}}^2 = H_\alpha [(dx^6)^2 + (dx^7)^2 + (dx^8)^2] + \frac{1}{H_\alpha} [dy^9 - \vec{V}_\alpha \cdot d\vec{x}]^2, \quad (6.1a)$$

$$\begin{aligned} ds_{\text{HKT}}^2 &\equiv H_\beta ds_{\text{KK5}}^2 \\ &= H_\alpha H_\beta [(dx^6)^2 + (dx^7)^2 + (dx^8)^2] + \frac{H_\beta}{H_\alpha} [dy^9 - \vec{V}_\alpha \cdot d\vec{x}]^2, \end{aligned} \quad (6.1b)$$

$$B_{i9} = V_{\beta,i}, \quad e^{2\phi} = H_\beta, \quad (6.1c)$$

$$H_\alpha = 1 + \frac{\alpha_0}{\sqrt{2}|\vec{x}|}, \quad H_\beta = 1 + \frac{\beta_0}{\sqrt{2}|\vec{x}|}, \quad (6.1d)$$

$$\nabla_i H_\alpha = (\nabla \times \vec{V}_\alpha)_i, \quad \nabla_i H_\beta = (\nabla \times \vec{V}_\beta)_i, \quad (6.1e)$$

$$\vec{V}_\alpha \cdot d\vec{x} = \frac{\alpha_0}{\sqrt{2}} \frac{-x^6 dx^8 + x^8 dx^6}{|\vec{x}|(|\vec{x}| + x^7)}, \quad \vec{V}_\beta \cdot d\vec{x} = \frac{\beta_0}{\sqrt{2}} \frac{-x^6 dx^8 + x^8 dx^6}{|\vec{x}|(|\vec{x}| + x^7)}. \quad (6.1f)$$

ここで ds_{KK5}^2 は KK5-brane background geometry (2.2) を用いている。また、表示 $\vec{x} = (x^6, x^7, x^8)$ に対して 9-方向だけ y^9 と表示しているのは、transverse space of KK5-branes が Taub-NUT space であり、 y^9 は Taub-NUT circle であることを意識させるためである。別の視点で言えば、H-monopole (smeared NS5-brane) geometry の時が $\mathbb{R}^4$ であり、そこから 9-方向に T-dual していることを意識させるためである。

B_{IJ} , ϕ はそれぞれ B-field と dilaton である³。それぞれの符号が厳密には [40] と一致せず、むしろ [8] (appendix 2.2 参照) と一致させようとしている。矢田氏の解析により、これら、つまりこの系は、 H_α に支配される KK5-brane と H_β に支配される H-monopole が共に 678-plane の原点に存在しているという、「parallel five-branes」の background geometry であると解釈できる。端的に言えば、計量の off-diagonal 成分は KK5-brane (2.2) が起源であり、一方で B-field と dilaton は計量の scale factor を通じて H-monopole (2.1) が起源になっている。

なお、この系は torsion を持つ空間であり、spin connection が self-dual $\omega_{iab} = \frac{1}{2}\epsilon_{abcd}\omega_i^{cd}$ である [40]。

6.2 Geometry of codimension two: defect hyper-Kähler with torsion

(6.1) を 8-方向に対して reduction したものは次で与えられる:

$$ds_{\text{dHKT}}^2 = H_\alpha H_\beta [(dx^6)^2 + (dx^7)^2 + (dx^8)^2] + \frac{H_\beta}{H_\alpha} [dy^9 - V_\alpha dx^8]^2, \quad (6.2a)$$

²記号などは [40] と全てが同じというわけではない。

³curved space の添字として $I, J = 6, 7, 8, 9$, $i, j = 6, 7, 8$ としている。なお、tangent space の添字は $a, b = \hat{6}, \hat{7}, \hat{8}$ とする。appendix B.2 の様に dummy indices にまで hat を付けることはしない。そして $\hat{9}$ は単独で登場することが多いので $a, b, \dots$ には通常は含めないことにする。

$$H_\alpha = h + \alpha \log \frac{\mu}{\varrho}, \quad V_\alpha = \alpha \vartheta, \quad \alpha = \frac{\alpha_0}{2\pi R_8}, \quad (6.2b)$$

$$H_\beta = h + \beta \log \frac{\mu}{\varrho}, \quad V_\beta = \beta \vartheta, \quad \beta = \frac{\beta_0}{2\pi R_8}, \quad (6.2c)$$

$$B_{89} = V_\beta, \quad e^{2\phi} = H_\beta, \quad (6.2d)$$

$$x^6 = \varrho \cos \vartheta, \quad x^7 = \varrho \sin \vartheta. \quad (6.2e)$$

ここで R_8 は x^8 を S^1 コンパクト化した時の半径である。この系を “defect hyper-Kähler with torsion” と(便宜上)呼んでおこう。

6.3 Moduli matrix and monodromy matrix

さて、hyper-Kähler with torsion である 4-dim. geometry が、defect KK5-brane (H_α 由来) と defect NS5-brane (H_β 由来) の background geometry だと考えよう。この defect KK5-NS5 system を 67-plane 上の原点に配置して、それを中心に一周したときどのような構造を見せてくれるであろうか。generalized geometry $\mathcal{M}$ (2.3) とそれが生み出す monodromy を検討しよう。(6.2) に見られるように、これらはすべて 67-plane 上の角度座標 ϑ に依存する。成分を明記しよう:

$$\mathcal{M}^{\text{dHKT}} = \frac{1}{H_\alpha H_\beta} \begin{pmatrix} K_\alpha K_\beta & -V_\alpha K_\beta & V_\alpha V_\beta & K_\alpha V_\beta \\ -V_\alpha K_\beta & K_\beta & -V_\beta & -V_\alpha V_\beta \\ V_\alpha V_\beta & -V_\beta & 1 & V_\alpha \\ K_\alpha V_\beta & -V_\alpha V_\beta & V_\alpha & K_\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} K_\alpha \equiv (H_\alpha)^2 + (V_\alpha)^2, \\ K_\beta \equiv (H_\beta)^2 + (V_\beta)^2, \end{cases} \quad (6.3a)$$

$$\Omega_{\alpha,\beta}^{\text{dHKT}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2\pi\alpha & 1 & 0 & 0 \\ (2\pi)^2\alpha\beta & -2\pi\beta & 1 & 2\pi\alpha \\ 2\pi\beta & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Omega_\alpha^{\text{KK}} \Omega_\beta^{\text{NS}} = \Omega_\beta^{\text{NS}} \Omega_\alpha^{\text{KK}}. \quad (6.3b)$$

Monodromy matrix $\Omega_{\alpha,\beta}^{\text{dHKT}}$ が Ω_β^{NS} と $\Omega_\alpha^{\text{KK}}$ の積で与えられるということは、defect hyper-Kähler with torsion を与える five-branes が defect NS5 と defect KK5 の2体で記述される事を示唆する。

6.4 T-duality of defect hyper-Kähler with torsion

Buscher rule (appendix A.3) を用いて defect hyper-Kähler with torsion を 8-方向に T-dual する。Buscher rule を見やすくするために、系の計量と B-field、そして dilaton の各成分を明記しよう:

$$G_{66} = H_\alpha H_\beta, \quad G_{77} = H_\alpha H_\beta, \quad G_{67} = 0, \quad (6.4a)$$

$$G_{88} = \frac{K_\alpha H_\beta}{H_\alpha}, \quad G_{99} = \frac{H_\beta}{H_\alpha}, \quad G_{89} = -\frac{V_\alpha H_\beta}{H_\alpha}, \quad (6.4b)$$

$$B_{89} = V_\beta, \quad e^{2\phi} = H_\beta. \quad (6.4c)$$

B-field の添字は 89-方向のみのため、67-方向の成分が混合することはない。そのため 89-方向の成分にのみ着目する:

$$G'_{88} = \frac{1}{G_{88}} = \frac{H_\alpha}{K_\alpha} \frac{1}{H_\beta}, \quad G'_{89} = \frac{B_{89}}{G_{88}} = \frac{H_\alpha}{K_\alpha} \frac{V_\beta}{H_\beta}, \quad (6.5a)$$

$$G'_{99} = G_{99} - \frac{G_{89}G_{89} - B_{89}B_{89}}{G_{88}} = \frac{H_\alpha K_\beta}{K_\alpha H_\beta}, \quad (6.5b)$$

$$B'_{89} = \frac{G_{89}}{G_{88}} = -\frac{V_\alpha}{K_\alpha}, \quad e^{2\phi'} = \frac{e^{2\phi}}{G_{88}} = \frac{H_\alpha}{K_\alpha}. \quad (6.5c)$$

つまり次が得られる:

$$ds_{\text{TdHKT}}^2 = H_\alpha H_\beta [(dx^6)^2 + (dx^7)^2] + \frac{H_\alpha}{K_\alpha} \left\{ \frac{1}{H_\beta} [dy^8 + V_\beta dy^9]^2 + H_\beta (dy^9)^2 \right\}, \quad (6.6a)$$

$$B_{89} = -\frac{V_\alpha}{K_\alpha}, \quad e^{2\phi} = \frac{H_\alpha}{K_\alpha}. \quad (6.6b)$$

この表示から、 H_α は exotic 5_2^2 -brane、B-field そして dilaton を与え、 H_β は defect KK5-brane を与えると推測できる。ここでも、89-方向の moduli matrix $\mathcal{M}$ と、67-plane の原点を中心に一周回ってきたときの moduli matrix の monodromy matrix Ω を評価しよう:

$$G^{mn} = \frac{K_\alpha}{H_\alpha H_\beta} \begin{pmatrix} K_\beta & -V_\beta \\ -V_\beta & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.7a)$$

$$\mathcal{M}^{\text{TdHKT}} = \frac{1}{H_\alpha H_\beta} \begin{pmatrix} 1 & V_\beta & V_\alpha V_\beta & -V_\alpha \\ V_\beta & K_\beta & V_\alpha K_\beta & -V_\alpha V_\beta \\ V_\alpha V_\beta & V_\alpha K_\beta & K_\alpha K_\beta & -K_\alpha V_\beta \\ -V_\alpha & -V_\alpha V_\beta & -K_\alpha V_\beta & K_\alpha \end{pmatrix}, \quad (6.7b)$$

$$\Omega_{\alpha,\beta}^{\text{TdHKT}} = \begin{pmatrix} 1 & 2\pi\beta & (2\pi)^2\alpha\beta & -2\pi\alpha \\ 0 & 1 & 2\pi\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\pi\beta & 1 \end{pmatrix} = \Omega_\beta^{\text{AK}} \Omega_\alpha^{\text{E}} = \Omega_\alpha^{\text{E}} \Omega_\beta^{\text{AK}}. \quad (6.7c)$$

Monodromy matrix $\Omega_{\alpha,\beta}^{\text{TdHKT}}$ が Ω_β^{AK} と Ω_α^{E} の積で与えられるということは、T-dualized defect hyper-Kähler with torsion を与える five-branes が (another) defect KK5-brane と exotic 5_2^2 -brane の2体で記述される事を示唆する。

6.5 Monodromy matrix of defect HKT

(6.2) から、 τ と ρ はそれぞれ次で与えられる:

$$\tau = \frac{-V_\alpha + iH_\alpha}{K_\alpha} = \frac{i}{h + \alpha \log(\mu/z)}, \quad (6.8a)$$

$$\begin{aligned} \rho &= V_\beta + i \sqrt{\det \begin{pmatrix} H_\beta K_\alpha / H_\alpha & -V_\alpha H_\beta / H_\alpha \\ -V_\alpha H_\beta / H_\alpha & H_\beta / H_\alpha \end{pmatrix}} \\ &= V_\beta + iH_\beta = ih + i\beta \log(\mu/z). \end{aligned} \quad (6.8b)$$

特に τ の決定方法は (3.9) と同様である:

$$ds_{89}^2 = H_\alpha H_\beta (dx^8)^2 + \frac{H_\beta}{H_\alpha} [dy^9 - V_\alpha dx^8]^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{H_\beta K_\alpha}{H_\alpha} \left(dx^8 + \frac{-V_\alpha + iH_\alpha}{K_\alpha} dy^9 \right) \left(dx^8 + \frac{-V_\alpha - iH_\alpha}{K_\alpha} dy^9 \right) \\
&\equiv \frac{H_\beta K_\alpha}{H_\alpha} (dx^8 + \tau dy^9)(dx^8 + \bar{\tau} dy^9), \tag{6.9a}
\end{aligned}$$

$$\therefore \tau = \frac{-V_\alpha + iH_\alpha}{K_\alpha}. \tag{6.9b}$$

モノドロミーは、67-方向の座標 $z = \varrho e^{i\vartheta}$ の変換 $z \rightarrow z e^{2\pi i}$ で受ける τ と ρ の変換である:

$$\lambda \rightarrow \lambda + 2\pi\alpha \quad \text{with} \quad \lambda \equiv -1/\tau, \tag{6.10a}$$

$$\rho \rightarrow \rho + 2\pi\beta. \tag{6.10b}$$

これによりそれぞれのモノドロミーは次で与えられる:

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\pi\alpha & 1 \end{pmatrix}_\tau \equiv \Omega_\tau^{\text{dHKT}}, \tag{6.11a}$$

$$\rho \rightarrow \frac{a\rho + b}{c\rho + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_\rho = \begin{pmatrix} 1 & +2\pi\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_\rho \equiv \Omega_\rho^{\text{dHKT}}. \tag{6.11b}$$

6.6 Monodromy matrix of T-dualized defect HKT

(6.6) から、 τ と ρ はそれぞれ次で与えられる:

$$\tau = V_\beta + iH_\beta = ih + i\beta \log(\mu/z), \tag{6.12a}$$

$$\begin{aligned}
\rho &= -\frac{V_\alpha}{K_\alpha} + i \sqrt{\det \begin{pmatrix} H_\alpha/(H_\beta K_\alpha) & H_\alpha V_\beta/(H_\beta K_\alpha) \\ H_\alpha V_\beta/(H_\beta K_\alpha) & H_\alpha K_\beta/(H_\beta K_\alpha) \end{pmatrix}} \\
&= \frac{-V_\alpha + iH_\alpha}{K_\alpha} = \frac{i}{h + \alpha \log(\mu/z)}. \tag{6.12b}
\end{aligned}$$

特に τ の決定方法は (3.9) と同様である:

$$\begin{aligned}
ds_{89}^2 &= \frac{H_\alpha}{H_\beta K_\alpha} [dy^8 + V_\beta dy^9]^2 + \frac{H_\alpha H_\beta}{K_\alpha} (dy^9)^2 \\
&= \frac{H_\alpha}{H_\beta K_\alpha} (dy^8 + (V_\beta + iH_\beta) dy^9)(dy^8 + (V_\beta - iH_\beta) dy^9) \\
&\equiv \frac{H_\alpha}{H_\beta K_\alpha} (dy^8 + \tau dy^9)(dy^8 + \bar{\tau} dy^9), \tag{6.13a}
\end{aligned}$$

$$\therefore \tau = V_\beta + iH_\beta. \tag{6.13b}$$

モノドロミーは、67-方向の座標 $z = \varrho e^{i\vartheta}$ の変換 $z \rightarrow z e^{2\pi i}$ で受ける τ と ρ の変換である:

$$\tau \rightarrow \tau + 2\pi\beta, \tag{6.14a}$$

$$\omega \rightarrow \omega + 2\pi\alpha \quad \text{with} \quad \omega \equiv -1/\rho. \tag{6.14b}$$

これによりそれぞれのモノドロミーは次で与えられる:

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_\tau = \begin{pmatrix} 1 & +2\pi\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_\tau \equiv \Omega_\tau^{\text{TdHKT}}, \quad (6.15a)$$

$$\rho \rightarrow \frac{a\rho + b}{c\rho + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\pi\alpha & 1 \end{pmatrix}_\rho \equiv \Omega_\rho^{\text{TdHKT}}. \quad (6.15b)$$

なお、8-方向の T-duality では、complex structures が ${}^\sharp(\tau, \rho)^{\text{dHKT}} \leftrightarrow (\rho, \tau)^{\text{TdHKT}}$ の様に入れ替わっている。同様に、monodromy matrices が ${}^\sharp(\Omega_\tau, \Omega_\rho)^{\text{dHKT}} \leftrightarrow (\Omega_\rho, \Omega_\tau)^{\text{TdHKT}}$ の様に入れ替わっている。

6.7 Conjugate monodromy matrix of defect HKT

defect HKT についての $SO(2, 2; \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z})_\tau \times SL(2, \mathbb{Z})_\rho$ モノドロミーは (6.11) で与えられた。 $\Omega_\tau^{\text{dHKT}}, \Omega_\rho^{\text{dHKT}}$ それぞれに対して conjugate monodromy matrix を評価する [16]:

$$U_\tau \equiv \begin{pmatrix} s' & r' \\ q' & p' \end{pmatrix}, \quad U_\rho \equiv \begin{pmatrix} s & r \\ q & p \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} s'p' - r'q' &= 1 \\ sp - rq &= 1 \end{aligned}, \quad (6.16a)$$

$$\tilde{\Omega}_\tau^{\text{dHKT}} = U_\tau^{-1} \Omega_\tau^{\text{dHKT}} U_\tau = \begin{pmatrix} 1 + (2\pi\alpha)r's' & (2\pi\alpha)r'^2 \\ -(2\pi\alpha)s'^2 & 1 - (2\pi\alpha)r's' \end{pmatrix}_\tau, \quad (6.16b)$$

$$\tilde{\Omega}_\rho^{\text{dHKT}} = U_\rho^{-1} \Omega_\rho^{\text{dHKT}} U_\rho = \begin{pmatrix} 1 + (2\pi\beta)pq & (2\pi\beta)p^2 \\ -(2\pi\beta)q^2 & 1 - (2\pi\beta)pq \end{pmatrix}_\rho. \quad (6.16c)$$

ここで $pq \neq 0, rs \neq 0, \alpha \neq 0, \beta \neq 0$ なので、任意の conjugates で defect NS5-brane, (another) defect KK5-brane, exotic 5_2^2 -brane に帰着されない。

6.8 Conjugate monodromy matrix of T-dualized defect HKT

T-dualized defect HKT についての $SO(2, 2; \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z})_\tau \times SL(2, \mathbb{Z})_\rho$ モノドロミーは (6.15) で与えられた。 $\Omega_\tau^{\text{TdHKT}}, \Omega_\rho^{\text{TdHKT}}$ それぞれに対して conjugate monodromy matrix を評価する [16]:

$$U_\tau \equiv \begin{pmatrix} s' & r' \\ q' & p' \end{pmatrix}, \quad U_\rho \equiv \begin{pmatrix} s & r \\ q & p \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} s'p' - r'q' &= 1 \\ sp - rq &= 1 \end{aligned}, \quad (6.17a)$$

$$\tilde{\Omega}_\tau^{\text{TdHKT}} = U_\tau^{-1} \Omega_\tau^{\text{TdHKT}} U_\tau = \begin{pmatrix} 1 + (2\pi\beta)p'q' & (2\pi\beta)p'^2 \\ -(2\pi\beta)q'^2 & 1 - (2\pi\beta)p'q' \end{pmatrix}_\tau, \quad (6.17b)$$

$$\tilde{\Omega}_\rho^{\text{TdHKT}} = U_\rho^{-1} \Omega_\rho^{\text{TdHKT}} U_\rho = \begin{pmatrix} 1 + (2\pi\alpha)rs & (2\pi\alpha)r^2 \\ -(2\pi\alpha)s^2 & 1 - (2\pi\alpha)rs \end{pmatrix}_\rho. \quad (6.17c)$$

ここで $pq \neq 0, rs \neq 0, \alpha \neq 0, \beta \neq 0$ なので、任意の conjugates で defect NS5-brane, (another) defect KK5-brane, exotic 5_2^2 -brane に帰着されない。

なお、8-方向の T-duality では、monodromy matrices が $\tilde{\Omega}_\tau^{\text{dHKT}} \leftrightarrow \tilde{\Omega}_\rho^{\text{TdHKT}}, \tilde{\Omega}_\rho^{\text{dHKT}} \leftrightarrow \tilde{\Omega}_\tau^{\text{TdHKT}}$ の様に入れ替わり、ラベルも $(r', s')^{\text{dHKT}} \leftrightarrow (r, s)^{\text{TdHKT}}, (p, q)^{\text{dHKT}} \leftrightarrow (p', q')^{\text{TdHKT}}$ の様に入れ替わっている。

6.9 Conjugate configuration of defect HKT

defect HKT geometry (6.2) は 1 defect NS5-brane + 1 defect KK5-brane である。この系の $SL(2, \mathbb{Z})_\tau \times SL(2, \mathbb{Z})_\rho$ monodromy matrix (6.11) の conjugate matrix (6.16) を与える configuration はどうなっているか?

defect HKT の complex structures $\lambda = -1/\tau$ と ρ は共に非自明であった。それらを、(5.1), (5.10) に倣って次の様に考える:

$$U_\tau^T = \begin{pmatrix} s' & q' \\ r' & p' \end{pmatrix}, \quad \lambda \rightarrow \lambda_U \equiv \frac{s'\lambda + q'}{r'\lambda + p'} \equiv -\frac{1}{\tau_U}, \quad \lambda = \frac{p'\lambda_U - q'}{-r'\lambda_U + s'}, \quad (6.18a)$$

$$U_\rho^{-1} = \begin{pmatrix} p & -r \\ -q & s \end{pmatrix}, \quad \rho \rightarrow \rho_U \equiv \frac{p\rho - r}{-q\rho + s}, \quad \rho = \frac{s\rho_U + r}{q\rho_U + p}. \quad (6.18b)$$

conjugate monodromy matrices (6.16) と (4.1), (4.2) を比較すれば、conjugate configuration における complex structures $\tilde{\tau}, \tilde{\rho}$ は上記で与えられることがすぐに分かる。

$$\tilde{\tau} = \tau_U = -\frac{r'(V_\alpha + iH_\alpha) + p'}{s'(V_\alpha + iH_\alpha) + q'} = \frac{-[p'q' + (p's' + r'q')V_\alpha + r's'K_\alpha] + iH_\alpha}{q'^2 + 2q's'V_\alpha + s'^2K_\alpha}, \quad (6.19a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} = \rho_U &= \frac{p(V_\beta + iH_\beta) - r}{-q(V_\beta + iH_\beta) - s} = \frac{[-rs + (ps + rq)V_\beta - pqK_\beta] + iH_\beta}{s^2 - 2qsV_\beta + q^2K_\beta} \\ &\equiv \tilde{B}_{89} + i\sqrt{\det \tilde{G}_{mn}}. \end{aligned} \quad (6.19b)$$

よって、計量と B-field はすぐに読み取れる:

$$\tilde{B}_{89} = \tilde{\rho}_1 = -\frac{rs - (ps + rq)V_\beta + pqK_\beta}{s^2 - 2qsV_\beta + q^2K_\beta}, \quad (6.20a)$$

$$\tilde{G}_{mn} = \frac{\tilde{\rho}_2}{\tilde{\tau}_2} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{\tau}_1 \\ \tilde{\tau}_1 & |\tilde{\tau}|^2 \end{pmatrix}, \quad (6.20b)$$

$$\tilde{G}_{88} = \frac{\tilde{\rho}_2}{\tilde{\tau}_2} = \frac{H_\beta}{H_\alpha} \frac{q'^2 + 2q's'V_\alpha + s'^2K_\alpha}{s^2 - 2qsV_\beta + q^2K_\beta}, \quad (6.20c)$$

$$\tilde{G}_{89} = \tilde{G}_{98} = \frac{\tilde{\tau}_1 \tilde{\rho}_2}{\tilde{\tau}_2} = -\frac{H_\beta}{H_\alpha} \frac{p'q' + (p's' + r'q')V_\alpha + r's'K_\alpha}{s^2 - 2qsV_\beta + q^2K_\beta}, \quad (6.20d)$$

$$\tilde{G}_{99} = \frac{|\tilde{\tau}|^2 \tilde{\rho}_2}{\tilde{\tau}_2} = \frac{H_\beta}{H_\alpha} \frac{p'^2 + 2p'r'V_\alpha + r'^2K_\alpha}{s^2 - 2qsV_\beta + q^2K_\beta}. \quad (6.20e)$$

さらに dilaton は (3.4) により

$$e^{2\tilde{\phi}} = \tilde{\rho}_2 = \frac{H_\beta}{s^2 - 2qsV_\beta + q^2K_\beta}, \quad (6.20f)$$

である。(6.20) が supergravity solution であることが示されたら、それは新しい解である [2014 10/23]。

- original defect HKT (6.2) に戻る配位は $(p', q', r', s') = (-1, 0, 0, -1)$, $(p, q, r, s) = (1, 0, 0, 1)$ である。このときの branes' picture は、 $-s' = 1$ defect KK5-brane と $p = 1$ defect NS5-brane の共存状態である (束縛状態ではない)。
- 別の単純な配位は $(p', q', r', s') = (0, -1, 1, 0)$, $(p, q, r, s) = (0, 1, -1, 0)$ である。これは $r' = 1$ another defect KK5-brane と $q = 1$ exotic 5_2^2 -brane の共存状態である (束縛状態ではない)。
- $s'r' \neq 0$ かつ $pq \neq 0$ となる一般の配位については、(6.20) では余分なパラメータが多くて見通しが悪い。

[$s'r' \neq 0, pq \neq 0$ をみたす一般の配位]

conjugate configuration を与える complex structures $\tilde{\tau}$ (6.18a) と $\tilde{\rho}$ (6.18b) は、それぞれ conjugate of defect KK5-brane の $\tilde{\tau}$ (5.10) と conjugate of defect NS5-brane の $\tilde{\rho}$ (5.1) と同じである。さらに $s'r' \neq 0, pq \neq 0$ の仮定の下で $s'p' - q'r' = 1$ と $sp - qr = 1$ を用いて q' と r を追い出すと、それぞれ (5.13) と (5.5) になる。ここで p' と s はもはや拘束のない任意の整数パラメータになるので、両方共ゼロにすると (5.15) と (5.7) に簡略化される。ここでも次の complex structures が支配していることになる:

$$\hat{\lambda} = -\frac{1}{\hat{\tau}} = \frac{s'}{r'} - \frac{1}{r'^2(V_\alpha + iH_\alpha)}, \quad \hat{\lambda}_1 = \frac{s'}{r'} - \frac{V_\alpha}{r'^2 K_\alpha}, \quad \hat{\lambda}_2 = \frac{H_\alpha}{r'^2 K_\alpha}, \quad (6.21a)$$

$$\hat{\rho} = -\frac{p}{q} - \frac{1}{q^2(V_\beta + iH_\beta)}, \quad \hat{\rho}_1 = -\frac{p}{q} - \frac{V_\beta}{q^2 K_\beta}, \quad \hat{\rho}_2 = \frac{H_\beta}{q^2 K_\beta}. \quad (6.21b)$$

これらも monodromy matrices (6.16) を満たす。したがって次が与えられる:

$$\hat{B}_{89} = \hat{\rho}_1, \quad e^{2\hat{\phi}} = \hat{\rho}_2, \quad (6.22a)$$

$$\hat{G}_{mn} = \frac{\hat{\rho}_2}{\hat{\tau}_2} \begin{pmatrix} 1 & \hat{\tau}_1 \\ \hat{\tau}_1 & |\hat{\tau}|^2 \end{pmatrix} = \frac{\hat{\rho}_2}{\hat{\lambda}_2} \begin{pmatrix} |\hat{\lambda}|^2 & -\hat{\lambda}_1 \\ -\hat{\lambda}_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.22b)$$

$$ds^2 = ds_{012345}^2 + H_\alpha H_\beta \left\{ (d\varrho)^2 + \varrho^2 (d\vartheta)^2 \right\} + \hat{\lambda}_2 \hat{\rho}_2 (dx^8)^2 + \frac{\hat{\rho}_2}{\hat{\lambda}_2} \left\{ dy^9 - \hat{\lambda}_1 dx^8 \right\}^2. \quad (6.22c)$$

これは、 s' defect KK5-branes と r' another defect KK5-branes の束縛状態である $(-s', r')$ five-branes と、 p defect NS5-branes と q exotic 5_2^2 -branes の束縛状態である (p, q) five-branes の共存状態である。なお前者の $(-s', r')$ five-branes を geometrical に読み替えて、「 $(-s' + r')$ -centered ALG space 上の (p, q) five-branes」とみなすこともできる。

[コメント]

- (6.22) は (6.20) に $p' = 0 = s$ を代入したものに等しい。ただし扱いには注意が必要である。 p' と s を座標変換 (5.14), (5.6) のみに従って消去しようとするとう不具合が生じる。ま

ず $p' + r'V_\alpha$ について ϑ の座標変換で吸収すると、 $\vartheta' = \vartheta + \frac{p'}{\alpha r'}$ となる。これを $-s + qV_\beta$ に代入すると $-s + q\beta\vartheta = q\beta\vartheta' - (\alpha r's + \beta p'q)/(\alpha r')$ のようになり、 $q\beta\vartheta'$ から余計にずれてしまう。このずれを取り除くために $\alpha r's + \beta p'q = 0$ という条件が必要となるが、これは $p' = 0 = s$ でのみ成立する。この設定は、 (q', r) が $sp - qr = 1$, $s'p' - q'r' = 1$ を用いて追いつき、 (p', s) が任意パラメータになったために可能である。

$p' = 0 = s$ の物理的意味を考えると、上記のずれを取り除く操作は、monodromy matrices (6.16) を変えない範囲での「座標変換」と「B-field のゲージ変換」を施したものとみなされる [2014 10/25]。

6.10 Conjugate configuration of T-dualized defect HKT

Tdual of defect HKT geometry (6.6) は 1 defect KK5-brane + 1 exotic 5_2^2 -brane である。この系の $SL(2, \mathbb{Z})_\tau \times SL(2, \mathbb{Z})_\rho$ monodromy matrix (6.15) の conjugate matrix (6.17) を与える configuration はどうなっているか?

defect HKT の complex structures τ と $\omega = -1/\rho$ は共に非自明であった。それらを、(5.18), (5.26) に倣って次の様に考える:

$$U_\tau^{-1} = \begin{pmatrix} p' & -r' \\ -q' & s' \end{pmatrix}, \quad \tau \rightarrow \tau_U \equiv \frac{p'\tau - r'}{-q'\tau + s'}, \quad \tau = \frac{s'\tau_U + r'}{q'\tau_U + p'}, \quad (6.23a)$$

$$U_\rho^T = \begin{pmatrix} s & q \\ r & p \end{pmatrix}, \quad \omega \rightarrow \omega_U \equiv \frac{s\omega + q}{r\omega + p} \equiv -\frac{1}{\rho_U}, \quad \omega = \frac{p\omega_U - q}{-r\omega_U + s}. \quad (6.23b)$$

conjugate monodromy matrices (6.17) と (4.3), (4.4) を比較すれば、conjugate configuration における complex structures $\tilde{\tau}, \tilde{\rho}$ は上記で与えられることがすぐに分かる。

$$\tilde{\tau} = \tau_U = \frac{p'(V_\beta + iH_\beta) - r'}{-q'(V_\beta + iH_\beta) + s'} = \frac{[-r's' + (p's' + r'q')V_\beta - p'q'K_\beta] + iH_\beta}{s'^2 - 2q's'V_\beta + q'^2K_\beta}, \quad (6.24a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} = \rho_U &= -\frac{r(V_\alpha + iH_\alpha) + p}{s(V_\alpha + iH_\alpha) + q} = -\frac{[pq + (ps + rq)V_\alpha + rsK_\alpha] + iH_\alpha}{q^2 + 2qsV_\alpha + s^2K_\alpha} \\ &\equiv \tilde{B}_{89} + i\sqrt{\det \tilde{G}_{mn}}. \end{aligned} \quad (6.24b)$$

よって、計量と B-field はすぐに読み取れる:

$$\tilde{B}_{89} = \tilde{\rho}_1 = -\frac{pq + (ps + rq)V_\alpha + rsK_\alpha}{q^2 + 2qsV_\alpha + s^2K_\alpha}, \quad (6.25a)$$

$$\tilde{G}_{mn} = \frac{\tilde{\rho}_2}{\tilde{\tau}_2} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{\tau}_1 \\ \tilde{\tau}_1 & |\tilde{\tau}|^2 \end{pmatrix}, \quad (6.25b)$$

$$\tilde{G}_{88} = \frac{\tilde{\rho}_2}{\tilde{\tau}_2} = \frac{H_\alpha}{H_\beta} \frac{s'^2 - 2q's'V_\beta + q'^2K_\beta}{q^2 + 2qsV_\alpha + s^2K_\alpha}, \quad (6.25c)$$

$$\tilde{G}_{89} = \tilde{G}_{98} = \frac{\tilde{\tau}_1\tilde{\rho}_2}{\tilde{\tau}_2} = -\frac{H_\alpha}{H_\beta} \frac{r's' - (p's' + r'q')V_\beta + p'q'K_\beta}{q^2 + 2qsV_\alpha + s^2K_\alpha}, \quad (6.25d)$$

$$\tilde{G}_{99} = \frac{|\tilde{\tau}|^2\tilde{\rho}_2}{\tilde{\tau}_2} = \frac{H_\alpha}{H_\beta} \frac{r'^2 - 2p'r'V_\beta + p'^2K_\beta}{q^2 + 2qsV_\alpha + s^2K_\alpha}. \quad (6.25e)$$

さらに dilaton は (3.4) により

$$e^{2\tilde{\phi}} = \tilde{\rho}_2 = \frac{H_\alpha}{q^2 + 2qsV_\alpha + s^2K_\alpha}, \quad (6.25f)$$

である。 (6.25) が supergravity solution であることが示されたら、それは新しい解である [2014 10/23]。

- original T-dualized defect HKT (6.6) に戻る配位は $(p', q', r', s') = (1, 0, 0, 1)$, $(p, q, r, s) = (-1, 0, 0, -1)$ である。この branes' picture は $p' = 1$ another defect KK5-brane と $-s = 1$ exotic 5_2^2 -brane の共存状態である。
- 別の単純な配位は $(p', q', r', s') = (0, -1, 1, 0)$, $(p, q, r, s) = (0, -1, 1, 0)$ である。この branes' picture は $q' = 1$ defect KK5-brane と $r = 1$ defect NS5-brane の共存状態である。
- $p'q' \neq 0$ かつ $sr \neq 0$ となる一般の配位については、(6.25) では余分なパラメータが多くて見通しが悪い。

[$p'q' \neq 0, sr \neq 0$ をみたく一般の配位]

conjugate configuration を与える complex structures $\tilde{\tau}$ (6.23a) と $\tilde{\rho}$ (6.23b) は、それぞれ conjugate of another defect KK5-brane の $\tilde{\tau}$ (5.18) と conjugate of exotic 5_2^2 -brane の $\tilde{\rho}$ (5.26) と同じである。さらに $s'r' \neq 0, pq \neq 0$ の仮定の下で $s'p' - q'r' = 1$ と $sp - qr = 1$ を用いて r' と q を追いつ出すと、それぞれ (5.13) と (5.5) になる。ここで s' と p はもはや拘束のない任意の整数パラメータになるので、両方共ゼロにすると (5.23) と (5.32) に簡略化される。ここでも次の complex structures が支配していることになる：

$$\hat{\tau} = -\frac{p'}{q'} - \frac{1}{q'^2(V_\beta + iH_\beta)}, \quad \hat{\tau}_1 = -\frac{p'}{q'} - \frac{V_\beta}{q'^2K_\beta}, \quad \hat{\tau}_2 = \frac{H_\beta}{q'^2K_\beta}, \quad (6.26a)$$

$$\hat{\omega} = -\frac{1}{\hat{\rho}} = \frac{s}{r} - \frac{1}{r^2(V_\alpha + iH_\alpha)}, \quad \hat{\omega}_1 = \frac{s}{r} - \frac{V_\alpha}{r^2K_\alpha}, \quad \hat{\omega}_2 = \frac{H_\alpha}{r^2K_\alpha}. \quad (6.26b)$$

これらも monodromy matrices (6.17) を満たす。したがって次が与えられる：

$$\hat{B}_{89} = \hat{\rho}_1 = -\frac{\hat{\omega}_1}{|\hat{\omega}|^2}, \quad e^{2\hat{\phi}} = \hat{\rho}_2 = \frac{\hat{\omega}_2}{|\hat{\omega}|^2}, \quad (6.27a)$$

$$\hat{G}_{mn} = \frac{\hat{\rho}_2}{\hat{\tau}_2} \begin{pmatrix} 1 & \hat{\tau}_1 \\ \hat{\tau}_1 & |\hat{\tau}|^2 \end{pmatrix} = \frac{\hat{\omega}_2}{\hat{\tau}_2|\hat{\omega}|^2} \begin{pmatrix} 1 & \hat{\tau}_1 \\ \hat{\tau}_1 & |\hat{\tau}|^2 \end{pmatrix}, \quad (6.27b)$$

$$ds^2 = ds_{012345}^2 + H_\alpha H_\beta \left\{ (d\varrho)^2 + \varrho^2 (d\vartheta)^2 \right\} + \frac{\hat{\omega}_2}{\hat{\tau}_2|\hat{\omega}|^2} \left\{ dy^8 + \hat{\tau}_1 dy^9 \right\}^2 + \frac{\hat{\tau}_2 \hat{\omega}_2}{|\hat{\omega}|^2} (dy^9)^2. \quad (6.27c)$$

これは、 q' defect KK5-branes と p' another defect KK5-branes の束縛状態である (q', p') five-branes と、 r defect NS5-branes と $-s$ exotic 5_2^2 -branes の束縛状態である $(r, -s)$ five-branes の共存状態である。なお前者の (q', p') five-branes を geometrical に読み替えて、「 $(q' + p')$ -centered ALG space 上の $(r, -s)$ five-branes」とみなすこともできる。

[コメント]

- (6.27) は (6.25) に $s' = 0 = p$ を代入したものに等しい。 $s' = 0 = p$ の物理的意味を考えると、それは monodromy matrices (6.17) を変えない範囲で座標変換と B-field のゲージ変換を施したものとみなされる [2014 10/25]。
- (6.27) は、(6.22) を 8-方向に T-duality を実行し、ラベルの貼り替え $(s', r') = (s, r)$, $(p, q) = (p', q')$ を施したものである。この T-duality では、complex structures が $(\hat{\lambda}, \hat{\rho})^{\text{dHKT}} \leftrightarrow (\hat{\omega}, \hat{\tau})^{\text{TdHKT}}$ の様に入れ替わっている。

6.11 Supersymmetry analyses

defect NS5-brane (2.4) や exotic 5_2^2 -brane (2.10) では、complex structure ρ は monodromy 変換を受けるが $\tau = i$ は不変であった。この性質を利用した、supersymmetry analysis については、[16] が詳しい。defect KK5-brane については τ が monodromy 変換を受ける一方で $\rho = i$ は不変であった。こちらの supersymmetry analysis について直接言及する文献は知らないが、[16] を参考にすればできる。ただそれは hyper-Kähler そのものである。

HKT (6.2) の場合、 τ も ρ も非自明であり、どちらも monodromy 変換を受ける。そのような system についての supersymmetry analysis は、[16] section 4.2 の紹介によると [42] において議論されている様である [2014 11/20]。

7 GLSM for defect five-branes with single gauged isometry

基礎となる模型は、GLSM for multi-centered branes [22] である。

7.1 Lagrangians

$U(1)^k$ gauge theory with k complex FI parameters (s_a, t_a) を次で用意する [22]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 \equiv & \sum_{a=1}^k \int d^4\theta \left\{ \frac{1}{e_a^2} \left(-\bar{\Sigma}_a \Sigma_a + \bar{\Phi}_a \Phi_a \right) + \bar{Q}_a e^{+2V_a} Q_a + \bar{\tilde{Q}}_a e^{-2V_a} \tilde{Q}_a \right\} + \int d^4\theta \frac{1}{g^2} \left(-\bar{\Theta} \Theta + \bar{\Psi} \Psi \right) \\ & + \sum_{a=1}^k \left\{ \sqrt{2} \int d^2\theta \left(-\tilde{Q}_a \Phi_a Q_a + (s_a - \Psi) \Phi_a \right) + (\text{h.c.}) \right\} \\ & + \sum_{a=1}^k \left\{ \sqrt{2} \int d^2\tilde{\theta} (t_a - \Theta) \Sigma_a + (\text{h.c.}) \right\}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

これは IR 極限で multi-centered H-monopoles を与える ((s_a, t_a) がそれぞれの H-monopole の位置を示す) [22]。これに対して、次の処置を施す:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Theta) &= \int d^4\theta \left(-\frac{1}{g^2} \bar{\Theta} \Theta \right) + \sum_a \left\{ \sqrt{2} \int d^2\tilde{\theta} (-\Theta) \Sigma_a + (\text{h.c.}) \right\} \\ &= \int d^4\theta \left\{ -\frac{1}{2g^2} (\Theta + \bar{\Theta})^2 - 2(\Theta + \bar{\Theta}) \sum_a V_a \right\} + \sqrt{2} \epsilon^{mn} \sum_a \partial_m (\vartheta A_{n,a}) \\ &= \int d^4\theta \left\{ -\frac{1}{2g^2} B^2 - 2B \sum_a V_a - (\Gamma + \bar{\Gamma}) B \right\} + \sqrt{2} \epsilon^{mn} \sum_a \partial_m (\vartheta A_{n,a}). \end{aligned} \quad (7.2a)$$

ここで B, Γ はそれぞれ real (vector)補助超場、chiral 補助超場である ($\bar{B} = B, \bar{D}_\pm \Gamma = 0$)。この B は、成分場展開するとベクトルゲージ場が補助場として登場し、isometry を持つ(とする)方向を示すスカラー場と結合する [23]。ここでは $\Theta + \bar{\Theta}$ と結合するため、 Θ の虚数方向(の微分)と、ベクトルゲージ場が結合する。その様な real 補助超場によって記述される模型を gauged (nonlinear) sigma model [24] と呼ぶ。ちなみにそれは GLSM [18] とは性質が異なる。[18] は (gauged) NLSM が 2D IR で実現されているものに対する UV completion である。

Γ を積分すると

$$\bar{D}_+ \bar{D}_- B = 0 = D_+ D_- B \rightarrow B = \Theta + \bar{\Theta}, \quad (7.3)$$

となる。一方で、 B を積分すると

$$\frac{1}{g^2} B = -(\Gamma + \bar{\Gamma}) - 2 \sum_{a=1}^k V_a, \quad (7.4)$$

が得られる。 B を通じて dualization 前後の成分場の対応は

$$\Theta + \bar{\Theta} = -g^2 (\Gamma + \bar{\Gamma}) - 2g^2 \sum_{a=1}^k V_a, \quad (7.5)$$

で与えられる。(7.3) を (7.2a) に代入すると (7.1) に戻るが、(7.4) を (7.2a) に代入すると、multi-centered KK5-branes の GLSM が得られる:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 \equiv & \sum_{a=1}^k \int d^4\theta \left\{ \frac{1}{e_a^2} \left(-\bar{\Sigma}_a \Sigma_a + \bar{\Phi}_a \Phi_a \right) + \bar{Q}_a e^{+2V_a} Q_a + \bar{\tilde{Q}}_a e^{-2V_a} \tilde{Q}_a \right\} + \int d^4\theta \frac{g^2}{2} \left(\Gamma + \bar{\Gamma} + 2 \sum_{a=1}^k V_a \right)^2 \\ & + \int d^4\theta \frac{1}{g^2} \bar{\Psi} \Psi + \sum_{a=1}^k \left\{ \sqrt{2} \int d^2\theta \left(-\tilde{Q}_a \Phi_a Q_a + (s_a - \Psi) \Phi_a \right) + (\text{h.c.}) \right\} \\ & + \sum_{a=1}^k \left\{ \sqrt{2} \int d^2\tilde{\theta} t_a \Sigma_a + (\text{h.c.}) \right\} + \sqrt{2} \epsilon^{mn} \sum_{a=1}^k \partial_m (\vartheta A_{n,a}).\end{aligned}\quad (7.6)$$

上記に加え、 Ψ を dualization する処方箋も議論する。まず $\Phi_a = \bar{D}_+ \bar{D}_- C_a$ を用いながら、(7.1) で Ψ の入った項に着目する (この議論のままでは不完全であるため、section 7.2 で不備を克服する):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\Psi) &= \int d^4\theta \frac{1}{g^2} \bar{\Psi} \Psi + \sum_a \left\{ \sqrt{2} \int d^2\theta (-\Psi) \Phi_a + (\text{h.c.}) \right\} \\ &= \int d^4\theta \left\{ \frac{1}{2g^2} (\Psi + \bar{\Psi})^2 - \sqrt{2} (\Psi + \bar{\Psi}) \sum_a (C_a + \bar{C}_a) - \sqrt{2} (\Psi - \bar{\Psi}) \sum_a (C_a - \bar{C}_a) \right\} \\ &= \int d^4\theta \left\{ \frac{1}{2g^2} R^2 - \sqrt{2} R \sum_a (C_a + \bar{C}_a) + (\Xi + \bar{\Xi}) R - \sqrt{2} (\Psi - \bar{\Psi}) \sum_a (C_a - \bar{C}_a) \right\}.\end{aligned}\quad (7.7)$$

ここで R, Ξ は補助場 ($\bar{R} = R, \bar{D}_+ \Xi = 0 = D_- \Xi$)。 Ξ を積分すると

$$\bar{D}_+ D_- R = 0 = D_+ \bar{D}_- R \rightarrow R = \Psi + \bar{\Psi}, \quad (7.8)$$

となる。一方で R を積分すると

$$\frac{1}{g^2} R = -(\Xi + \bar{\Xi}) + \sqrt{2} \sum_{a=1}^k (C_a + \bar{C}_a), \quad (7.9)$$

が得られる。 R を通じて dualization 前後の成分場の対応は

$$\Psi + \bar{\Psi} = -g^2 (\Xi + \bar{\Xi}) + \sqrt{2} g^2 \sum_{a=1}^k (C_a + \bar{C}_a), \quad (7.10)$$

で与えられる。(7.8) を (7.7) に代入すると (7.1) に戻る一方で、(7.9) を代入すると新しい Lagrangian が得られる (これは section 2.8 での another defect KK5-brane に相当する):

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{L}}_2 = & \sum_{a=1}^k \int d^4\theta \left\{ \frac{1}{e_a^2} \left(-\bar{\Sigma}_a \Sigma_a + \bar{\Phi}_a \Phi_a \right) + \bar{Q}_a e^{+2V_a} Q_a + \bar{\tilde{Q}}_a e^{-2V_a} \tilde{Q}_a \right\} + \int d^4\theta \frac{1}{g^2} (-\bar{\Theta} \Theta) \\ & + \int d^4\theta \left\{ -\frac{g^2}{2} \left(\Xi + \bar{\Xi} - \sqrt{2} \sum_{a=1}^k (C_a + \bar{C}_a) \right)^2 - \sqrt{2} (\Psi - \bar{\Psi}) \sum_{a=1}^k (C_a - \bar{C}_a) \right\}\end{aligned}$$

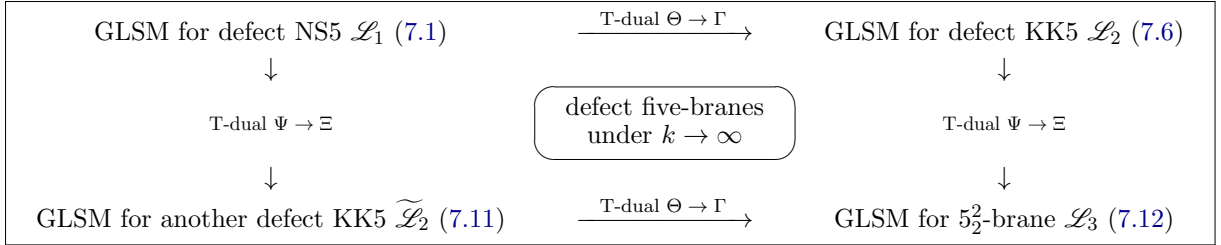
$$+ \sum_{a=1}^k \left\{ \sqrt{2} \int d^2\theta \left(-\tilde{Q}_a \Phi_a Q_a + s_a \Phi_a \right) + (\text{h.c.}) \right\} + \sum_{a=1}^k \left\{ \sqrt{2} \int d^2\tilde{\theta} (t_a - \Theta) \Sigma_a + (\text{h.c.}) \right\}. \quad (7.11)$$

$\mathring{\Psi}$ は、(7.10) に従うという意味である。同様に、 $\mathcal{L}_2$ (7.6) に対して chiral Ψ を (7.7) に沿って dualization すると、次の Lagrangian になる:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 = & \sum_{a=1}^k \int d^4\theta \left\{ \frac{1}{e_a^2} \left(-\bar{\Sigma}_a \Sigma_a + \bar{\Phi}_a \Phi_a \right) + \bar{Q}_a e^{+2V_a} Q_a + \bar{\tilde{Q}}_a e^{-2V_a} \tilde{Q}_a \right\} + \int d^4\theta \frac{g^2}{2} \left(\Gamma + \bar{\Gamma} + 2 \sum_{a=1}^k V_a \right)^2 \\ & + \int d^4\theta \left\{ -\frac{g^2}{2} \left(\Xi + \bar{\Xi} - \sqrt{2} \sum_{a=1}^k (C_a + \bar{C}_a) \right)^2 - \sqrt{2} (\mathring{\Psi} - \bar{\mathring{\Psi}}) \sum_{a=1}^k (C_a - \bar{C}_a) \right\} \\ & + \sum_{a=1}^k \left\{ \sqrt{2} \int d^2\theta \left(-\tilde{Q}_a \Phi_a Q_a + s_a \Phi_a \right) + (\text{h.c.}) \right\} + \sum_{a=1}^k \left\{ \sqrt{2} \int d^2\tilde{\theta} t_a \Sigma_a + (\text{h.c.}) \right\} \\ & + \sqrt{2} \epsilon^{mn} \sum_{a=1}^k \partial_m (\vartheta A_{n,a}). \end{aligned} \quad (7.12)$$

$k \rightarrow \infty$ 極限をとる、つまり無限個のゲージ場もしくは無限個の five-branes を r^2 -方向に並べるという操作は、 $\sum_a \rightarrow \int ds$ に相当する。

Lagrangians の相関図を図示する:



念のため補足しておくが、 $U(1)^k$ gauge theory (7.1) に内蔵される $\mathcal{N} = (4, 4)$ charged hypermultiplets $(Q_a, \tilde{Q}_a)$ の帯電は次の様になっている:

	$U(1)_1$	$\cdots$	$U(1)_a$	$\cdots$	$U(1)_k$
$(Q_1, \tilde{Q}_1)$	$(+1, -1)$				
$\vdots$		$\ddots$			
$(Q_b, \tilde{Q}_b)$			$(+\delta_{ab}, -\delta_{ab})$		
$\vdots$				$\ddots$	
$(Q_k, \tilde{Q}_k)$					$(+1, -1)$

空欄部分は全てゼロである。

7.2 Genuine GLSM for exotic five-brane

実は、 $\mathcal{L}_2$ (7.6) から $\mathcal{L}_3$ (7.12) へは一部不備があった [2013 6/21]。それは、(7.7) をきちんと解析すると、 Ξ の運動方程式を課すだけでは GLSM for KK5-brane (7.6) に戻らない⁴。つまり、(7.7) で Ξ を積分すると、補助場 R は

$$\overline{D}_+ D_- R = 0 = D_+ \overline{D}_- R \rightarrow R = A + \overline{A}, \quad (7.13)$$

という、一般の chiral superfield A ($\overline{D}_\pm A = 0$) が得られるだけであり、 $A = \Psi$ である保証がどこにもない。(7.13) を (7.7) に代入すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Psi) &= \int d^4\theta \left\{ \frac{1}{g^2} \overline{A}A - \sqrt{2}(A + \overline{A}) \sum_a (C_a + \overline{C}_a) - \sqrt{2}(\Psi - \overline{\Psi}) \sum_a (C_a - \overline{C}_a) \right\} \\ &= \int d^4\theta \left\{ \frac{1}{g^2} \overline{A}A - \sqrt{2}[(A + \Psi) + (\overline{A} - \overline{\Psi})] \sum_a C_a - \sqrt{2}[(A - \Psi) + (\overline{A} + \overline{\Psi})] \sum_a \overline{C}_a \right\} \\ &= \int d^4\theta \left\{ \frac{1}{g^2} \overline{A}A + \sum_a \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \int d^2\theta \overline{D}_+ \overline{D}_- \left(-[(A + \Psi) + (\overline{A} - \overline{\Psi})] C_a \right) + (\text{h.c.}) \right\} \right\} \\ &= \int d^4\theta \left\{ \frac{1}{g^2} \overline{A}A + \sum_a \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \int d^2\theta (-A - \Psi) \Phi_a + (\text{h.c.}) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_a \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \int d^2\theta \overline{D}_+ \overline{D}_- [(\overline{A} - \overline{\Psi}) C_a] + (\text{h.c.}) \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (7.14)$$

である。いくらこねくり回しても、 $A = \Psi$ という条件式は登場しない。この議論の不備は、次の点から来ている: GLSM for H-monopole $\mathcal{L}_1$ (7.1) から GLSM for KK5-brane $\mathcal{L}_2$ (7.6) では、twisted chiral Θ を変換する操作を行ったが、その途中の表式、(7.2a) の右辺2行目では、 Θ の虚部が登場せず、実部 $\Theta + \overline{\Theta}$ のみで与えられた。そのため、これに代替される実補助場 B がひとつ与えられ、これを変分する事で、正しい duality 変換が実現できた。しかし、今は (7.7) のように、F-term を D-term に書き直した際、 Ψ の虚部がどうしても登場する。虚部の自由度も変換の対象としないと、正しく duality 変換 (Legendre 変換) が定義できないことになる。

さて、正しい duality 変換則を議論する。次のように、 $\mathcal{L}_2$ (7.6) の Ψ 項を書き直すが、(7.7) では考慮しなかった Ψ の虚部も補助場書き換える:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Psi) &= \int d^4\theta \left\{ \frac{1}{g^2} \overline{\Psi}\Psi + \sum_a \left\{ \sqrt{2} \int d^2\theta (-\Psi) \Phi_a + (\text{h.c.}) \right\} \right\} \\ &= \int d^4\theta \left\{ \frac{c}{g^2} (\Psi + \overline{\Psi})^2 + \frac{1}{g^2} (c - \frac{1}{2}) (\Psi - \overline{\Psi})^2 - \sqrt{2}(\Psi + \overline{\Psi}) \sum_a (C_a + \overline{C}_a) - \sqrt{2}(\Psi - \overline{\Psi}) \sum_a (C_a - \overline{C}_a) \right\} \\ &= \int d^4\theta \left\{ \frac{c}{g^2} R'^2 - \sqrt{2}R' \sum_a (C_a + \overline{C}_a) + (\Xi_1 + \overline{\Xi}_1)R' + R'(X + \overline{X}) \right\} \\ &\quad + \int d^4\theta \left\{ \frac{2c-1}{2g^2} (iS')^2 - \sqrt{2}(iS') \sum_a (C_a - \overline{C}_a) + (\Xi_2 - \overline{\Xi}_2)(iS') + iS'(X - \overline{X}) \right\} \\ &\equiv \mathcal{L}_{RS\Xi X}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

⁴本郷(2013 5/23)での松尾さんと立川くん、基研(2013 6/03)での重森さん、東北大学(2013 6/17)での綿村さんと佐々くんの指摘による。

ここで、導入した補助場の条件は $\bar{R}' = R'$, $\bar{S}' = S'$, $\bar{D}_+\Xi_{1,2} = 0 = D_-\Xi_{1,2}$ である。また、 Ψ の「実部」「虚部」の名残をどこかに留めるため、ここではさらに補助場としての chiral superfield X ($\bar{D}_\pm X = 0$) を導入した。さらに、実定数 c は、 Ψ の canonical kinetic term を満たす任意の数である。ここで超場形式であることを活かしている (超場ではない場合は、 $c = \frac{1}{4}$ に固定されてしまう)。このとき、 $\Xi_{1,2}$ と X の運動方程式を課すと、これは GLSM for KK5-brane $\mathcal{L}_2$ (7.6) の Ψ -項になり、一方で R' と S' の運動方程式を課すと、GLSM for exotic five-brane $\mathcal{L}_3$ (7.12) の Ξ -項を与える。このことを示す [2013 6/21]。

7.2.1 Back to GLSM for KK5-branes

$\mathcal{L}_{RS\Xi X}$ (7.15) において、まずは補助場 Ξ_i の運動方程式を解く：

$$\delta\Xi_1: \quad 0 = \bar{D}_+ D_- R' = D_+ \bar{D}_- R', \quad (7.16a)$$

$$\delta\Xi_2: \quad 0 = \bar{D}_+ D_- (iS') = D_+ \bar{D}_- (iS'), \quad (7.16b)$$

$$\therefore R' = \Psi_1 + \bar{\Psi}_1, \quad iS' = \Psi_2 - \bar{\Psi}_2. \quad (7.16c)$$

この条件下で X の運動方程式を解く：

$$0 = \bar{D}_+ \bar{D}_- (R' + iS') = \bar{D}_+ \bar{D}_- [(\Psi_1 + \bar{\Psi}_1) + (\Psi_2 - \bar{\Psi}_2)] = \bar{D}_+ \bar{D}_- (\bar{\Psi}_1 - \bar{\Psi}_2), \quad (7.17a)$$

$$0 = D_+ D_- (R' - iS') = D_+ D_- [(\Psi_1 + \bar{\Psi}_1) - (\Psi_2 - \bar{\Psi}_2)] = D_+ D_- (\Psi_1 - \Psi_2). \quad (7.17b)$$

これを満たすものは次しかない：

$$\Psi_1 = \Psi_2. \quad (7.17c)$$

つまり、 Ξ と X の運動方程式の下では

$$R' = \Psi_1 + \bar{\Psi}_1, \quad iS' = \Psi_1 - \bar{\Psi}_1, \quad (7.18)$$

である。これを (7.15) に代入すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{RS\Xi X} \Big|_{\Xi, X} &= \int d^4\theta \left\{ \frac{c}{g^2} (\Psi_1 + \bar{\Psi}_1)^2 - \sqrt{2} (\Psi_1 + \bar{\Psi}_1) \sum_a (C_a + \bar{C}_a) \right\} \\ &\quad + \int d^4\theta \left\{ \frac{2c-1}{2g^2} (\Psi_1 - \bar{\Psi}_1)^2 - \sqrt{2} (\Psi_1 - \bar{\Psi}_1) \sum_a (C_a - \bar{C}_a) \right\} \\ &= \int d^4\theta \left\{ \frac{1}{g^2} \bar{\Psi}_1 \Psi_1 - 2\sqrt{2} \Psi_1 \sum_a C_a - 2\sqrt{2} \bar{\Psi}_1 \sum_a \bar{C}_a \right\} \\ &= \int d^4\theta \frac{1}{g^2} \bar{\Psi}_1 \Psi_1 + \sum_a \left\{ \sqrt{2} \int d^2\theta (-\Psi_1) \Phi_a + (\text{h.c.}) \right\}, \end{aligned} \quad (7.19)$$

となる。これは (7.7) の右辺第1行と同じである。すなわち、GLSM for KK5-brane $\mathcal{L}_2$ (7.6) の Ψ -項そのものであり、ここで初めて

$$\Psi_1 = \Psi, \quad (7.20)$$

としてよいことがわかる。

7.2.2 Genuine GLSM for exotic five-brane

今度は、 $\mathcal{L}_{RS\Xi X}$ (7.15) において R' と Ξ_2 の運動方程式を解いて、 Ψ の虚部を duality 変換しよう:

$$\delta R: \quad 0 = \frac{2c}{g^2} R' - \sqrt{2} \sum_a (C_a + \bar{C}_a) + (\Xi_1 + \bar{\Xi}_1) + (X + \bar{X}), \quad (7.21a)$$

$$\delta \Xi_2: \quad 0 = \bar{D}_+ D_- (iS') = D_+ \bar{D}_- (iS'). \quad (7.21b)$$

ここで思い出すべきは C_a の定義である。これは $\Phi_a = \bar{D}_+ \bar{D}_- C_a$ で与えられたため、 C_a に chiral superfield 分のズレを施しても Φ_a には影響しない。つまり、適当な定数 α を用いて

$$\Phi_a = \bar{D}_+ \bar{D}_- C_a = \bar{D}_+ \bar{D}_- (C_a + \alpha X), \quad \bar{\Phi}_a = D_+ D_- \bar{C}_a = D_+ D_- (\bar{C}_a + \bar{\alpha} \bar{X}), \quad (7.22)$$

である。これを (7.21) に適用すると、補助場 X が C_a に吸収できて

$$0 = \frac{2c}{g^2} R' - \sqrt{2} \sum_a (C_a + \bar{C}_a) + (\Xi + \bar{\Xi}), \quad (7.23a)$$

$$iS' = \Psi_2 - \bar{\Psi}_2, \quad (7.23b)$$

として良いことになる。これは、 $c = \frac{1}{2}$ のときに (7.18), (7.20) と併用すれば、 $\mathcal{L}_3$ (7.12) を与える時の duality 変換則 (7.10) と、 $\dot{\Psi} - \bar{\Psi}$ 項を再現していることがわかる:

$$R' = \Psi_1 + \bar{\Psi}_1 = \Psi + \bar{\Psi} = \frac{g^2}{2c} \left\{ -(\Xi + \bar{\Xi}) + \sqrt{2} \sum_a (C_a + \bar{C}_a) \right\}, \quad (7.24a)$$

$$iS' = \Psi_2 - \bar{\Psi}_2 = \Psi - \bar{\Psi}. \quad (7.24b)$$

さて、(7.24) を (7.15) に代入する (ここでも X は (7.22) を用いて C_a に吸収させておく):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{RS\Xi X} \Big|_{R', \Xi_2} &= \int d^4\theta \left\{ \frac{c}{g^2} R'^2 - \sqrt{2} R' \sum_a (C_a + \bar{C}_a) + (\Xi_1 + \bar{\Xi}_1) R' \right\} \Big|_{R', \Xi_2} \\ &\quad + \int d^4\theta \left\{ \frac{2c-1}{2g^2} (iS')^2 - \sqrt{2} (iS') \sum_a (C_a - \bar{C}_a) \right\} \Big|_{R', \Xi_2} \\ &= \int d^4\theta \left\{ -\frac{g^2}{4c} \left(\Xi_1 + \bar{\Xi}_1 - \sqrt{2} \sum_a (C_a + \bar{C}_a) \right)^2 \right\} \\ &\quad + \int d^4\theta \left\{ \frac{2c-1}{2g^2} (\Psi - \bar{\Psi})^2 - \sqrt{2} (\Psi - \bar{\Psi}) \sum_a (C_a - \bar{C}_a) \right\}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

よって、 $c = \frac{1}{2}$ での GLSM for KK5-branes $\mathcal{L}_2$ (7.6) の dualized Lagrangian は $\mathcal{L}_3$ (7.12) そのものになる。ここで、場の表記の統一として

$$(\Psi, \Xi_1) \rightarrow (\dot{\Psi}, \Xi), \quad (7.26)$$

とすればよい。なお $c \neq \frac{1}{2}$ にすると、 Ψ の運動項が dualized system でも登場し、矛盾する。

7.2.3 Features

最後に、補助場 R, S, Ξ_1, Ξ_2, X の導入理由と、積分で生じる模型の性質を列挙する:

- R, Ξ_1 の導入:
超場 Ψ の実部の成分場を Ξ_1 の実部の成分場と対応させるために導入。互いの虚部は、超場展開に伴い微分項同士の対応となる。
- S, Ξ_2 の導入:
超場 Ψ の虚部の成分場を Ξ_2 の虚部の成分場と対応させるために導入。互いの実部は、超場展開に伴い微分項同士の対応となる。なお、考えている模型が、変換したい超場の実部だけで D-term に収まるならば、これは不要。収まらない場合、虚部を放置していたら、duality 変換 (数学的には Legendre 変換) が不完全になる ((7.14) 参照)。さらに、 $\Xi_2 \neq \Xi_1$ としないと、GLSM for 5_2^2 -brane に移行させようとしたとき、必ず R, S を積分する事になってしまう。そのため、 Ψ の全ての成分場が Ξ_1 の成分場に移行し、duality 変換を実現しない。事実、 $(\Psi - \bar{\Psi})(C_a - \bar{C}_a)$ 項が T-fold としての性質を生み出すため、 S 積分はしたくない。
- X の導入:
GLSM for KK5 に戻す過程での Ξ_i の積分に伴い、 R と S はそれぞれ独立な chiral 超場で記述されるが、それを同一にするために必要な超場。なお、GLSM for 5_2^2 -brane にする過程では、これらは “Kähler” 変換 (7.22) で吸収される。
- Ξ_1, Ξ_2, X 積分:
 $\mathcal{L}_{RS\Xi X}$ (7.15) にてこれらの補助場を積分すると、GLSM for KK5-branes $\mathcal{L}_2$ (7.6) の Ψ -部分を再現する。
- R, Ξ_2 積分:
 $\mathcal{L}_{RS\Xi X}$ (7.15) にてこれらの補助場を積分すると、GLSM for 5_2^2 -brane $\mathcal{L}_3$ (7.12) の Ξ -部分を再現する。これにより、KK5-branes での Ψ の虚部が Ξ の虚部に duality 変換される。実部は変換されずに使用される。
- S, Ξ_1 積分:
 $\mathcal{L}_{RS\Xi X}$ (7.15) にてこれらの補助場を積分する操作は、“ R, Ξ_1 積分”操作とほぼ同じである。これに伴い、ここでは KK5-branes での Ψ の実部が Ξ の実部に duality 変換される。虚部は変換されずに使用される。
- R, S 積分:
 $\mathcal{L}_{RS\Xi X}$ (7.15) にてこれらの補助場を積分すると、KK5-branes 側の Ψ そのものが、変換後の Ξ と対応してしまう。この操作では、超場としては chiral と twisted chiral の入れ替えになっているが、成分場としては何も操作しないことになってしまう。なにより、この積分を実行しても、nongeometric な K, HK^{-1} といった構造が計量に登場せず、 5_2^2 -brane を再現しない。

7.3 Relations among component fields

duality relations (7.5), (7.10) の下での成分場の関係を見出しておく。そのため、登場する超場の展開をここに明記しよう⁵:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(r^1 + i r^2) + i\sqrt{2}\theta^+\chi_+ + i\sqrt{2}\theta^-\chi_- + 2i\theta^+\theta^-G + \dots, \quad (7.27a)$$

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(r^3 + i\vartheta) + i\sqrt{2}\theta^+\tilde{\chi}_+ - i\sqrt{2}\theta^-\tilde{\chi}_- + 2i\theta^+\theta^-\tilde{G} + \dots, \quad (7.27b)$$

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^3 + i\gamma^4) + i\sqrt{2}\theta^+\zeta_+ + i\sqrt{2}\theta^-\zeta_- + 2i\theta^+\theta^-G_\Gamma + \dots, \quad (7.27c)$$

$$\Xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(y^1 + i y^2) + i\sqrt{2}\theta^+\bar{\xi}_+ - i\sqrt{2}\theta^-\bar{\xi}_- + 2i\theta^+\theta^-\bar{G}_\Xi + \dots, \quad (7.27d)$$

$$\begin{aligned} V_a = & -\theta^+\bar{\theta}^+(A_{0,a} + A_{1,a}) - \theta^-\bar{\theta}^-(A_{0,a} - A_{1,a}) - \sqrt{2}\theta^-\bar{\theta}^+\sigma_a - \sqrt{2}\theta^+\bar{\theta}^-\bar{\sigma}_a \\ & - 2i\theta^+\theta^-(\bar{\theta}^+\bar{\lambda}_{+,a} + \bar{\theta}^-\bar{\lambda}_{-,a}) + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\theta^+\lambda_{+,a} + \theta^-\lambda_{-,a}) + 2\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-D_{V,a}, \end{aligned} \quad (7.27e)$$

$$\Phi_a = \phi_a + i\sqrt{2}\theta^+\tilde{\lambda}_{+,a} + i\sqrt{2}\theta^-\tilde{\lambda}_{-,a} + 2i\theta^+\theta^-\bar{D}_{\Phi,a} + \dots, \quad (7.27f)$$

$$\begin{aligned} C_a = & \phi_{c,a} + i\sqrt{2}\theta^+\psi_{c+,a} + i\sqrt{2}\theta^-\psi_{c-,a} + i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\bar{\chi}_{c+,a} + i\sqrt{2}\bar{\theta}^-\bar{\chi}_{c-,a} \\ & + 2i\theta^+\theta^-\bar{F}_{c,a} + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-M_{c,a} + 2i\theta^+\bar{\theta}^-G_{c,a} - 2i\theta^-\bar{\theta}^+N_{c,a} - \theta^-\bar{\theta}^-A_{c=,a} - \theta^+\bar{\theta}^+B_{c\neq,a} \\ & - 2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\zeta}_{c+,a} - 2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^-\bar{\zeta}_{c-,a} + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\theta^+\lambda_{c+,a} + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\theta^-\lambda_{c-,a} + 2\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-D_{c,a}. \end{aligned} \quad (7.27g)$$

C_a 以外は constrained superfields なので、微分項の明記は省略している。また C_a は Φ_a になるので、成分場同士の関係も明記する:

$$\phi_a \equiv -2i M_{c,a}, \quad (7.28a)$$

$$D_{\Phi,a} \equiv i D_{c,a} - \frac{1}{2}(\partial_0 - \partial_1)B_{c\neq,a} - \frac{1}{2}(\partial_0 + \partial_1)A_{c=,a} + \frac{i}{2}(\partial_0^2 - \partial_1^2)\phi_{c,a}, \quad (7.28b)$$

$$\tilde{\lambda}_{+,a} \equiv -\sqrt{2}\lambda_{c+,a} - i(\partial_0 + \partial_1)\bar{\chi}_{c-,a}, \quad (7.28c)$$

$$\tilde{\lambda}_{-,a} \equiv -\sqrt{2}\lambda_{c-,a} + i(\partial_0 - \partial_1)\bar{\chi}_{c+,a}, \quad (7.28d)$$

$$\{F_{c,a}, G_{c,a}, N_{c,a}, \psi_{c\pm,a}, \bar{\zeta}_{c\pm,a}\} : \quad (\text{no relations}). \quad (7.28e)$$

Lagrangians に登場する組み合わせを予め用意しよう。

$$\begin{aligned} C_a \pm \bar{C}_a = & (\phi_{c,a} \pm \bar{\phi}_{c,a}) + i\sqrt{2}\theta^+(\psi_{c+,a} \pm \chi_{c+,a}) + i\sqrt{2}\theta^-(\psi_{c-,a} \pm \chi_{c-,a}) \\ & + i\sqrt{2}\bar{\theta}^+(\bar{\chi}_{c+,a} \pm \bar{\psi}_{c+,a}) + i\sqrt{2}\bar{\theta}^-(\bar{\chi}_{c-,a} \pm \bar{\psi}_{c-,a}) \\ & + 2i\theta^+\theta^-(F_{c,a} \pm \bar{M}_{c,a}) + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(M_{c,a} \pm \bar{F}_{c,a}) + 2i\theta^+\bar{\theta}^-(G_{c,a} \pm \bar{N}_{c,a}) - 2i\theta^-\bar{\theta}^+(N_{c,a} \pm \bar{G}_{c,a}) \\ & - \theta^+\bar{\theta}^+(B_{c\neq,a} \pm \bar{B}_{c\neq,a}) - \theta^-\bar{\theta}^-(A_{c=,a} \pm \bar{A}_{c=,a}) + 2\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(D_{c,a} \pm \bar{D}_{c,a}) \\ & - 2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+(\bar{\zeta}_{c+,a} \pm \bar{\lambda}_{c+,a}) - 2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^-(\bar{\zeta}_{c-,a} \pm \bar{\lambda}_{c-,a}) \\ & + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\theta^+(\lambda_{c+,a} \pm \zeta_{c+,a}) + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\theta^-(\lambda_{c-,a} \pm \zeta_{c-,a}). \end{aligned} \quad (7.29)$$

⁵unconstrained complex 超場 C_a の成分場 $\chi_{c\pm,a}, \zeta_{c\pm,a}$ の定義は [1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14] とは hermitian conjugate の分だけ異なることに注意。

$\Psi \pm \bar{\Psi}$ を明記する:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi + \bar{\Psi}) = & r^1 + i\theta^+\chi_+ + i\theta^-\chi_- + i\bar{\theta}^+\bar{\chi}_+ + i\bar{\theta}^-\bar{\chi}_- \\ & + i\sqrt{2}\theta^+\theta^-G + i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{G} \\ & + \theta^+\bar{\theta}^+(\partial_0 + \partial_1)r^2 + \theta^-\bar{\theta}^-(\partial_0 - \partial_1)r^2 + \theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0^2 - \partial_1^2)r^1 \\ & - \theta^+\theta^-\bar{\theta}^+(\partial_0 + \partial_1)\chi_- + \theta^+\theta^-\bar{\theta}^-(\partial_0 - \partial_1)\chi_+ \\ & - \theta^+\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0 + \partial_1)\bar{\chi}_- + \theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0 - \partial_1)\bar{\chi}_+, \end{aligned} \quad (7.30a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi - \bar{\Psi}) = & ir^2 + i\theta^+\chi_+ + i\theta^-\chi_- - i\bar{\theta}^+\bar{\chi}_+ - i\bar{\theta}^-\bar{\chi}_- \\ & + i\sqrt{2}\theta^+\theta^-G - i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{G} \\ & - i\theta^+\bar{\theta}^+(\partial_0 + \partial_1)r^1 - i\theta^-\bar{\theta}^-(\partial_0 - \partial_1)r^1 + i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0^2 - \partial_1^2)r^2 \\ & - \theta^+\theta^-\bar{\theta}^+(\partial_0 + \partial_1)\chi_- + \theta^+\theta^-\bar{\theta}^-(\partial_0 - \partial_1)\chi_+ \\ & + \theta^+\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0 + \partial_1)\bar{\chi}_- - \theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0 - \partial_1)\bar{\chi}_+. \end{aligned} \quad (7.30b)$$

Ξ についても成分場展開を明記する:

$$\begin{aligned} \Xi \equiv & \frac{1}{\sqrt{2}}(y^1 + iy^2) + i\sqrt{2}\theta^+\bar{\xi}_+ - i\sqrt{2}\bar{\theta}^-\xi_- + 2i\theta^+\bar{\theta}^-G_\Xi \\ & - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^+\bar{\theta}^+(\partial_0 + \partial_1)(y^1 + iy^2) + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^-\bar{\theta}^-(\partial_0 - \partial_1)(y^1 + iy^2) \\ & - \frac{1}{\sqrt{2}}\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0^2 - \partial_1^2)(y^1 + iy^2) \\ & - \sqrt{2}\theta^-\bar{\theta}^-\theta^+(\partial_0 - \partial_1)\bar{\xi}_+ - \sqrt{2}\theta^+\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0 + \partial_1)\xi_-, \end{aligned} \quad (7.31a)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Xi} \equiv & \frac{1}{\sqrt{2}}(y^1 - iy^2) + i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\xi_+ - i\sqrt{2}\theta^-\bar{\xi}_- + 2i\bar{\theta}^+\theta^-\bar{G}_\Xi \\ & + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^+\bar{\theta}^+(\partial_0 + \partial_1)(y^1 - iy^2) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^-\bar{\theta}^-(\partial_0 - \partial_1)(y^1 - iy^2) \\ & - \frac{1}{\sqrt{2}}\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0^2 - \partial_1^2)(y^1 - iy^2) \\ & + \sqrt{2}\theta^-\bar{\theta}^-\bar{\theta}^+(\partial_0 - \partial_1)\xi_+ + \sqrt{2}\theta^+\bar{\theta}^+\theta^-(\partial_0 + \partial_1)\bar{\xi}_-, \end{aligned} \quad (7.31b)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(\Xi + \bar{\Xi}) = & y^1 + i\theta^+\bar{\xi}_+ - i\theta^-\bar{\xi}_- + i\bar{\theta}^+\xi_+ - i\bar{\theta}^-\xi_- \\ & + i\sqrt{2}\theta^+\bar{\theta}^-G_\Xi + i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\theta^-\bar{G}_\Xi \\ & + \theta^+\bar{\theta}^+(\partial_0 + \partial_1)y^2 - \theta^-\bar{\theta}^-(\partial_0 - \partial_1)y^2 - \theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0^2 - \partial_1^2)y^1 \\ & - \theta^+\theta^-\bar{\theta}^+(\partial_0 + \partial_1)\bar{\xi}_- - \theta^+\theta^-\bar{\theta}^-(\partial_0 - \partial_1)\bar{\xi}_+ \\ & - \theta^+\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0 + \partial_1)\xi_- - \theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0 - \partial_1)\xi_+. \end{aligned} \quad (7.31c)$$

まず (7.5) により、次の関係が得られる:

$$r^3 = -g^2\gamma^3, \quad \bar{\chi}_\pm = \mp g^2\zeta_\pm, \quad (7.32a)$$

$$\tilde{G} = -i\sqrt{2}g^2\sum_a\bar{\sigma}_a, \quad 0 = G_\Gamma, \quad (7.32b)$$

$$\pm(\partial_0 \pm \partial_1)\vartheta = -g^2 \left[(\partial_0 \pm \partial_1)\gamma^4 - \sqrt{2} \sum_a (A_{0,a} \pm A_{1,a}) \right]. \quad (7.32c)$$

さらに (7.10) により次が得られる:

$$r^1 = -g^2 y^1 + g^2 \sum_a (\phi_{c,a} + \bar{\phi}_{c,a}), \quad (7.33a)$$

$$\chi_{\pm} = \mp g^2 \bar{\xi}_{\pm} + \sqrt{2} g^2 \sum_a (\psi_{c\pm,a} + \chi_{c\pm,a}), \quad (7.33b)$$

$$G = \sqrt{2} g^2 \sum_a (F_{c,a} + \bar{M}_{c,a}), \quad (7.33c)$$

$$0 = -G_{\Xi} + \sqrt{2} \sum_a (G_{c,a} + \bar{N}_{c,a}), \quad (7.33d)$$

$$(\partial_0 + \partial_1)r^2 = -g^2(\partial_0 + \partial_1)y^2 - g^2 \sum_a (B_{c+,a} + \bar{B}_{c+,a}), \quad (7.33e)$$

$$(\partial_0 - \partial_1)r^2 = +g^2(\partial_0 - \partial_1)y^2 - g^2 \sum_a (A_{c=,a} + \bar{A}_{c=,a}). \quad (7.33f)$$

なお、chiral から twisted chiral への duality 変換において、二階微分項の関係式を用いるのは正しくない。微分に twist が入るからである。twisted chiral から chiral への場合も同様。この符号の反転は、超場形式においてすでに考慮されている。超場の二次の項の符号が、chiral と twisted chiral とでは互いに逆であるのがその反映である。そのため、duality 変換の下で変換されない場については、微分のない項同士での同一視をした後は、それをどんな微分項に代入しても問題ない [2013 7/18]。

そして $U(1)$ ゲージ変換則とそれに伴う共変微分は次の通り:

$$D_m q_a \equiv \partial_m q_a - i A_{m,a} q_a, \quad q \rightarrow q' = e^{+i\lambda} q, \quad (7.34a)$$

$$D_m \tilde{q}_a \equiv \partial_m \tilde{q}_a + i A_{m,a} \tilde{q}_a, \quad \tilde{q} \rightarrow \tilde{q}' = e^{-i\lambda} \tilde{q}, \quad (7.34b)$$

$$D_m \psi_{\pm,a} \equiv \partial_m \psi_{\pm,a} - i A_{m,a} \psi_{\pm,a}, \quad D_m \tilde{\psi}_{\pm,a} \equiv \partial_m \tilde{\psi}_{\pm,a} + i A_{m,a} \tilde{\psi}_{\pm,a}, \quad (7.34c)$$

$$D_m \gamma^4 \equiv \partial_m \gamma^4 - \sqrt{2} \sum_a A_{m,a}, \quad (7.34d)$$

$$A_m \rightarrow A'_m = A_m + \partial_m \lambda. \quad (7.34e)$$

これは超場形式での電荷の配位 ($Q, \tilde{Q}$ にそれぞれ $+1, -1$ の電荷) の成分場としての帰結である。こんなことをわざわざ明記した理由は、参照する文献によってこの符号の定義が異なっている (実際はそれぞれの文献の中では矛盾がない) ためである。他の文献を頼って混乱してしまうより、このノートでの定義を明言しておくで混乱がなくなる。ついでにここで超場形式でのゲージ変換則も明記しておこう:

$$2V \rightarrow 2V' = 2V - 2i(\Lambda - \bar{\Lambda}), \quad (7.35a)$$

$$Q \rightarrow Q' = e^{+2i\Lambda} Q, \quad \tilde{Q} \rightarrow \tilde{Q}' = e^{-2i\Lambda} \tilde{Q}, \quad (7.35b)$$

$$\Sigma = \frac{1}{4\sqrt{2}} \{\bar{\mathcal{D}}_+, \mathcal{D}_-\}, \quad \mathcal{D}_{\pm} = e^{-2V} D_{\pm} e^{2V}, \quad \bar{\mathcal{D}}_{\pm} = e^{2V} \bar{D}_{\pm} e^{-2V}. \quad (7.35c)$$

7.4 GLSM for defect NS5-brane

Lagrangian $\mathcal{L}_1$ (7.1) の IR 極限が multi-centered H-monopoles [22] になっている。これを再現する。その後 $k \rightarrow \infty$ 極限操作を行って defect NS5-brane を構築する。

$\mathcal{L}_1$ (7.1) の bosonic terms だけに着目しよう:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{1b} = & \sum_a \frac{1}{e_a^2} \left[\frac{1}{2} (F_{01,a})^2 - |\partial_m \sigma_a|^2 - |\partial_m \phi_a|^2 \right] - \frac{1}{g^2} \left[\frac{1}{2} (\partial_m \tilde{r})^2 + \frac{1}{2} (\partial_m \vartheta)^2 \right] - \sum_a \left[|D_m q_a|^2 + |D_m \tilde{q}_a|^2 \right] \\
& + \sqrt{2} \sum_a (\vartheta - t_{2,a}) F_{01,a} - 2 \sum_a |\sigma_a|^2 (|q_a|^2 + |\tilde{q}_a|^2) \\
& + \sum_a \left\{ \frac{1}{2e_a^2} (D_{V,a})^2 - D_{V,a} (|q_a|^2 - |\tilde{q}_a|^2 - \sqrt{2}(r^3 - t_{1,a})) \right\} \\
& + \sum_a \left\{ |F_a|^2 + |\tilde{F}_a|^2 - i\sqrt{2} \phi_a (q_a \tilde{F}_a + \tilde{q}_a F_a) + i\sqrt{2} \bar{\phi}_a (\bar{q}_a \tilde{F}_a + \tilde{\bar{q}}_a \bar{F}_a) \right\} \\
& + \sum_a \frac{1}{e_a^2} |D_{\Phi,a}|^2 - i \sum_a D_{\Phi,a} \left\{ \sqrt{2} q_a \tilde{q}_a + ((r^1 - s_{1,a}) + i(r^2 - s_{2,a})) \right\} \\
& + i \sum_a \bar{D}_{\Phi,a} \left\{ \sqrt{2} \bar{q}_a \tilde{\bar{q}}_a + ((r^1 - s_{1,a}) - i(r^2 - s_{2,a})) \right\} \\
& + \frac{1}{g^2} |G|^2 - i\sqrt{2} \sum_a \phi_a G + i\sqrt{2} \sum_a \bar{\phi}_a \bar{G} \\
& + \frac{1}{g^2} |\tilde{G}|^2 - i\sqrt{2} \sum_a \sigma_a \tilde{G} + i\sqrt{2} \sum_a \bar{\sigma}_a \tilde{\bar{G}}.
\end{aligned} \tag{7.36}$$

補助場を追い出す。運動方程式は次の通り:

$$0 = \frac{1}{e_a^2} D_{V,a} - (|q_a|^2 - |\tilde{q}_a|^2 - \sqrt{2}(r^3 - t_{1,a})), \tag{7.37a}$$

$$0 = \frac{1}{e_a^2} D_{\Phi,a} + i \left\{ \sqrt{2} \bar{q}_a \tilde{\bar{q}}_a + ((r^1 - s_{1,a}) - i(r^2 - s_{2,a})) \right\} \tag{7.37b}$$

$$0 = F_a + i\sqrt{2} \bar{\phi}_a \tilde{\bar{q}}_a, \quad 0 = \tilde{F}_a + i\sqrt{2} \bar{\phi}_a \bar{q}_a, \tag{7.37c}$$

$$0 = \frac{1}{g^2} G + i\sqrt{2} \sum_a \bar{\phi}_a, \quad 0 = \frac{1}{g^2} \tilde{G} + i\sqrt{2} \sum_a \bar{\sigma}_a. \tag{7.37d}$$

これを (7.36) に代入する:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{1b} = & \sum_a \frac{1}{e_a^2} \left[\frac{1}{2} (F_{01,a})^2 - |\partial_m \sigma_a|^2 - |\partial_m \phi_a|^2 \right] - \frac{1}{2g^2} \left[(\partial_m \tilde{r})^2 + (\partial_m \vartheta)^2 \right] \\
& - \sum_a \left[|D_m q_a|^2 + |D_m \tilde{q}_a|^2 \right] + \sqrt{2} \sum_a (\vartheta - t_{2,a}) F_{01,a} \\
& - 2 \sum_a (|\sigma_a|^2 + |\phi_a|^2) (|q_a|^2 + |\tilde{q}_a|^2) - 2g^2 \sum_{a,b} (\sigma_a \bar{\sigma}_b + \phi_a \bar{\phi}_b) \\
& - \sum_a \frac{e_a^2}{2} \left(|q_a|^2 - |\tilde{q}_a|^2 - \sqrt{2}(r^3 - t_{1,a}) \right)^2 - \sum_a e_a^2 \left| \sqrt{2} q_a \tilde{q}_a + ((r^1 - s_{1,a}) + i(r^2 - s_{2,a})) \right|^2.
\end{aligned} \tag{7.38}$$

7.4.1 Low energy limit

SUSY effective theory を考える。まずは potential のゼロ点を探す:

$$\sigma_a = 0 = \phi_a, \quad (7.39a)$$

$$|q_a|^2 - |\tilde{q}_a|^2 = \sqrt{2}(r^3 - t_{1,a}), \quad -\sqrt{2}q_a\tilde{q}_a = (r^1 - s_{1,a}) + i(r^2 - s_{2,a}). \quad (7.39b)$$

これにより、 $(q_a, \tilde{q}_a)$ の配位が次のように与えられる:

$$(|q_a|^2 + |\tilde{q}_a|^2)^2 = 2(R_a)^2 = 2\left\{(r^1 - s_{1,a})^2 + (r^2 - s_{2,a})^2 + (r^3 - t_{1,a})^2\right\}, \quad (7.40a)$$

$$q_a = \frac{i}{2^{1/4}} e^{+i\alpha_a} \sqrt{R_a + (r^3 - t_{1,a})}, \quad \tilde{q}_a = \frac{i}{2^{1/4}} e^{-i\alpha_a} \frac{(r^1 - s_{1,a}) + i(r^2 - s_{2,a})}{\sqrt{R_a + (r^3 - t_{1,a})}}. \quad (7.40b)$$

これにより、 $(q_a, \tilde{q}_a)$ の運動項は次のように記述できる:

$$\begin{aligned} -|D_m q_a|^2 - |D_m \tilde{q}_a|^2 &= -\frac{1}{2\sqrt{2}R_a} \left[(\partial_m r^1)^2 + (\partial_m r^2)^2 + (\partial_m r^3)^2 \right] \\ &\quad - \sqrt{2}R_a \left(\partial_m \alpha_a - A_{m,a} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega_{i,a} \partial_m r^i \right)^2. \end{aligned} \quad (7.41)$$

特に one-form Ω は次の通り:

$$\Omega_{i,a} \partial_m r^i = \frac{-(r^1 - s_{1,a})\partial_m r^2 + (r^2 - s_{2,a})\partial_m r^1}{\sqrt{2}R_a(R_a + (r^3 - t_{1,a}))}, \quad (7.42a)$$

$$\Omega_{1,a} = \frac{r^2 - s_{2,a}}{\sqrt{2}R_a(R_a + (r^3 - t_{1,a}))}, \quad \Omega_{2,a} = -\frac{r^1 - s_{1,a}}{\sqrt{2}R_a(R_a + (r^3 - t_{1,a}))}, \quad \Omega_{3,a} = 0. \quad (7.42b)$$

ここまでの結果より、 $e_a \rightarrow \infty$, (7.39), (7.41) を (7.38) に代入する:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1b} &= -\frac{1}{2g^2} \left[(\partial_m \vec{r})^2 + (\partial_m \vartheta)^2 \right] - \sum_a \left[|D_m q_a|^2 + |D_m \tilde{q}_a|^2 \right] + \sqrt{2} \sum_a (\vartheta - t_{2,a}) F_{01,a} \\ &= -\frac{1}{2g^2} \left[(\partial_m \vec{r})^2 + (\partial_m \vartheta)^2 \right] - \sum_a \frac{1}{2\sqrt{2}R_a} \left[(\partial_m r^1)^2 + (\partial_m r^2)^2 + (\partial_m r^3)^2 \right] \\ &\quad - \sum_a \sqrt{2}R_a \left(\partial_m \alpha_a - A_{m,a} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega_{i,a} \partial_m r^i \right)^2 + \sqrt{2} \sum_a (\vartheta - t_{2,a}) F_{01,a}. \end{aligned} \quad (7.43)$$

ここからさらにゲージ場を追い出す。gauge field $A_{m,a}$ の運動方程式を評価する:

$$0 = -\frac{\partial \mathcal{L}_{1b}}{\partial A_a^m} = -2\sqrt{2}R_a \left(\partial_m \alpha_a - A_{m,a} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega_{i,a} \partial_m r^i \right) + \sqrt{2} \epsilon_{mn} \partial^n (\vartheta - t_{2,a}), \quad (7.44a)$$

$$\therefore \partial_m \alpha_a - A_{m,a} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Omega_{i,a} \partial_m r^i + \frac{1}{2R_a} \epsilon_{mn} \partial^n \vartheta. \quad (7.44b)$$

$\alpha_a = 0$ にゲージ固定して、上の結果を (7.43) に代入する:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{1b} &= -\frac{1}{2}H(\partial_m \vec{r})^2 - \frac{1}{2g^2}(\partial_m \vartheta)^2 - \sum_a \sqrt{2}R_a \left(-\dot{A}_{m,a} + \frac{1}{\sqrt{2}}\Omega_{i,a} \partial_m r^i \right)^2 \\ &\quad + \sqrt{2} \sum_a \epsilon^{mn} \dot{A}_{m,a} \partial_n \vartheta \\ &= -\frac{1}{2}H \left[(\partial_m \vec{r})^2 + (\partial_m \vartheta)^2 \right] + \epsilon^{mn} \Omega_i \partial_m r^i \partial_n \vartheta, \end{aligned} \quad (7.45a)$$

$$H \equiv \frac{1}{g^2} + \sum_b \frac{1}{\sqrt{2}R_b}, \quad \Omega_i \equiv \sum_b \Omega_{i,b}. \quad (7.45b)$$

これが、multi-centered H-monopoles 解である。この解は次を満たす:

$$(\nabla \times \Omega)_i = \nabla_i H. \quad (7.46)$$

これにさらに、 $t_{1,a} = 0 = t_{2,a} = s_{1,a}$ として、 r^2 -方向を半径 $\mathcal{R}_2$ でコンパクト化し、 $k \rightarrow \infty$ 極限操作を行う (Appendix G 参照):

$$\sum_a \frac{1}{\sqrt{2}R_a} \rightarrow h_0 + \sigma \log \frac{\mu}{\varrho}, \quad \sigma \equiv \frac{1}{\sqrt{2}\pi \mathcal{R}_2}, \quad \varrho^2 \equiv (r^1)^2 + (r^3)^2, \quad (7.47a)$$

$$\Omega_1 = \sum_a \Omega_{1,a} \rightarrow 0, \quad \Omega_2 = \sum_a \Omega_{2,a} \rightarrow \Omega_\varrho \equiv \sigma \vartheta_\varrho, \quad \vartheta_\varrho \equiv \arctan \left(\frac{r^3}{r^1} \right). \quad (7.47b)$$

(A.7) と比較することで、(7.45) から読み取れる target space metric と B-field を明示する:

$$G_{IJ} = H \delta_{IJ}, \quad (7.48a)$$

$$B_{14} = +\Omega_1 \rightarrow 0, \quad B_{24} = +\Omega_2 \rightarrow +\Omega_\varrho, \quad B_{34} = 0. \quad (7.48b)$$

これが (defect) H-monopole である (添字は $(I, J = 1, 2, 3, 4)$)。なお、dilaton は

$$e^{2\phi} = H, \quad (7.48c)$$

である。

7.5 GLSM for defect KK5-brane

Lagrangian $\mathcal{L}_2$ (7.6) の IR 極限が multi-centered KK5-branes [22] になっている。これを再現する。その後 $k \rightarrow \infty$ 極限操作を行って defect KK5-brane を構築する。

$\mathcal{L}_2$ (7.6) の bosonic terms だけに着目しよう:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{2b} = & \sum_a \frac{1}{e_a^2} \left[\frac{1}{2} (F_{01,a})^2 - |\partial_m \sigma_a|^2 - |\partial_m \phi_a|^2 \right] - \frac{1}{2g^2} (\partial_m \vec{r})^2 - \frac{g^2}{2} (D_m \gamma^4)^2 - \sum_a \left[|D_m q_a|^2 + |D_m \tilde{q}_a|^2 \right] \\
& + \sqrt{2} \epsilon^{mn} \sum_{a=1}^k \partial_m ((\vartheta - t_{2,a}) A_{n,a}) - 2g^2 \sum_{a,b} \sigma_a \bar{\sigma}_b - 2 \sum_a |\sigma_a|^2 (|q_a|^2 + |\tilde{q}_a|^2) \\
& + \sum_a \left\{ \frac{1}{2e_a^2} (D_{V,a})^2 - D_{V,a} (|q_a|^2 - |\tilde{q}_a|^2 - \sqrt{2}(r^3 - t_{1,a})) \right\} \\
& + \sum_a \frac{1}{e_a^2} |D_{\Phi,a}|^2 - i \sum_a D_{\Phi,a} \left\{ \sqrt{2} q_a \tilde{q}_a + ((r^1 - s_{1,a}) + i(r^2 - s_{2,a})) \right\} \\
& + i \sum_a \bar{D}_{\Phi,a} \left\{ \sqrt{2} \bar{q}_a \tilde{\bar{q}}_a + ((r^1 - s_{1,a}) - i(r^2 - s_{2,a})) \right\} \\
& + \sum_a \left\{ |F_a|^2 + |\tilde{F}_a|^2 - i\sqrt{2} \phi_a (q_a \tilde{F}_a + \tilde{q}_a F_a) + i\sqrt{2} \bar{\phi}_a (\bar{q}_a \tilde{\bar{F}}_a + \tilde{\bar{q}}_a \bar{F}_a) \right\} \\
& + \frac{1}{g^2} |G|^2 - i\sqrt{2} \sum_a \phi_a G + i\sqrt{2} \sum_a \bar{\phi}_a \bar{G}. \tag{7.49}
\end{aligned}$$

補助場を追い出す。運動方程式は次の通り:

$$0 = \frac{1}{e_a^2} D_{V,a} - (|q_a|^2 - |\tilde{q}_a|^2 - \sqrt{2}(r^3 - t_{1,a})), \tag{7.50a}$$

$$0 = \frac{1}{e_a^2} D_{\Phi,a} + i \left\{ \sqrt{2} \bar{q}_a \tilde{\bar{q}}_a + ((r^1 - s_{1,a}) - i(r^2 - s_{2,a})) \right\} \tag{7.50b}$$

$$0 = F_a + i\sqrt{2} \bar{\phi}_a \tilde{\bar{q}}_a, \quad 0 = \tilde{F}_a + i\sqrt{2} \bar{\phi}_a q_a, \tag{7.50c}$$

$$0 = \frac{1}{g^2} G + i\sqrt{2} \sum_a \bar{\phi}_a. \tag{7.50d}$$

これを (7.49) に代入する:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{2b} = & \sum_a \frac{1}{e_a^2} \left[\frac{1}{2} (F_{01,a})^2 - |\partial_m \sigma_a|^2 - |\partial_m \phi_a|^2 \right] - \frac{1}{2g^2} (\partial_m \vec{r})^2 - \frac{g^2}{2} (D_m \gamma^4)^2 \\
& - \sum_a \left[|D_m q_a|^2 + |D_m \tilde{q}_a|^2 \right] + \sqrt{2} \epsilon^{mn} \sum_{a=1}^k \partial_m ((\vartheta - t_{2,a}) A_{n,a}) \\
& - 2 \sum_a (|\sigma_a|^2 + |\phi_a|^2) (|q_a|^2 + |\tilde{q}_a|^2) - 2g^2 \sum_{a,b} (\sigma_a \bar{\sigma}_b + \phi_a \bar{\phi}_b) \\
& - \sum_a \frac{e_a^2}{2} \left(|q_a|^2 - |\tilde{q}_a|^2 - \sqrt{2}(r^3 - t_{1,a}) \right)^2 - \sum_a e_a^2 \left| \sqrt{2} q_a \tilde{q}_a + ((r^1 - s_{1,a}) + i(r^2 - s_{2,a})) \right|^2. \tag{7.51}
\end{aligned}$$

7.5.1 Low energy limit

SUSY effective theory を考える。まずは potential のゼロ点を探す:

$$\sigma_a = 0 = \phi_a, \quad (7.52a)$$

$$|q_a|^2 - |\tilde{q}_a|^2 = \sqrt{2}(r^3 - t_{1,a}), \quad -\sqrt{2}q_a\tilde{q}_a = (r^1 - s_{1,a}) + i(r^2 - s_{2,a}). \quad (7.52b)$$

これにより、 $(q_a, \tilde{q}_a)$ の配位が次のように与えられる:

$$(|q_a|^2 + |\tilde{q}_a|^2)^2 = 2(R_a)^2 = 2\left\{(r^1 - s_{1,a})^2 + (r^2 - s_{2,a})^2 + (r^3 - t_{1,a})^2\right\}, \quad (7.53a)$$

$$q_a = \frac{i}{2^{1/4}} e^{+i\alpha_a} \sqrt{R_a + (r^3 - t_{1,a})}, \quad \tilde{q}_a = \frac{i}{2^{1/4}} e^{-i\alpha_a} \frac{(r^1 - s_{1,a}) + i(r^2 - s_{2,a})}{\sqrt{R_a + (r^3 - t_{1,a})}}. \quad (7.53b)$$

これにより、 $(q_a, \tilde{q}_a)$ の運動項は次のように記述できる:

$$-|D_m q_a|^2 - |D_m \tilde{q}_a|^2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}R_a}(\partial_m \vec{r})^2 - \sqrt{2}R_a \left(\partial_m \alpha_a - A_{m,a} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega_{i,a} \partial_m r^i \right)^2. \quad (7.54)$$

特に one-form Ω は次の通り:

$$\Omega_{i,a} \partial_m r^i = \frac{-(r^1 - s_{1,a})\partial_m r^2 + (r^2 - s_{2,a})\partial_m r^1}{\sqrt{2}R_a(R_a + (r^3 - t_{1,a}))}, \quad (7.55a)$$

$$\Omega_{1,a} = \frac{r^2 - s_{2,a}}{\sqrt{2}R_a(R_a + (r^3 - t_{1,a}))}, \quad \Omega_{2,a} = -\frac{r^1 - s_{1,a}}{\sqrt{2}R_a(R_a + (r^3 - t_{1,a}))}, \quad \Omega_{3,a} = 0. \quad (7.55b)$$

ここまでの結果より、 $e_a \rightarrow \infty$, (7.52), (7.54) を (7.51) に代入する:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2b} &= -\frac{1}{2g^2}(\partial_m \vec{r})^2 - \frac{g^2}{2}(D_m \gamma^4)^2 - \sum_a \left[|D_m q_a|^2 + |D_m \tilde{q}_a|^2 \right] + \sqrt{2} \epsilon^{mn} \sum_{a=1}^k \partial_m ((\vartheta - t_{2,a}) A_{n,a}) \\ &= -\frac{1}{2g^2}(\partial_m \vec{r})^2 - \sum_a \frac{1}{2\sqrt{2}R_a}(\partial_m \vec{r})^2 \\ &\quad - \frac{g^2}{2}(D_m \gamma^4)^2 - \sum_a \sqrt{2}R_a \left(\partial_m \alpha_a - A_{m,a} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega_{i,a} \partial_m r^i \right)^2 \\ &\quad + \sqrt{2} \epsilon^{mn} \sum_{a=1}^k \partial_m ((\vartheta - t_{2,a}) A_{n,a}). \end{aligned} \quad (7.56)$$

ここからさらにゲージ場を追い出す。gauge field $A_{m,a}$ の運動方程式を評価する:

$$0 = -\frac{\partial \mathcal{L}_{2b}}{\partial A_a^m} = -\sqrt{2}g^2 \left[\partial_m \gamma^4 - \sqrt{2} \sum_b A_{m,b} \right] - 2\sqrt{2}R_a \left(\partial_m \alpha_a - A_{m,a} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega_{i,a} \partial_m r^i \right), \quad (7.57a)$$

$$\therefore 0 = -A_{m,a} + \partial_m \alpha_a + \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega_{i,a} \partial_m r^i + \frac{g^2}{2R_a} \partial_m \gamma^4 - \frac{g^2}{\sqrt{2}R_a} \sum_b A_{m,b}. \quad (7.57b)$$

(7.57b) の a について和を考える:

$$0 = -\left(\frac{1}{g^2} + \sum_a \frac{1}{\sqrt{2}R_a} \right) \sum_b A_{m,b} + \partial_m \gamma^4 \sum_a \frac{1}{2R_a} + \frac{1}{g^2} \sum_a \partial_m \alpha_a + \frac{1}{\sqrt{2}g^2} \sum_a \Omega_{i,a} \partial_m r^i$$

$$= -H \sum_b A_{m,b} + \partial_m \gamma^4 \sum_a \frac{1}{2R_a} + \frac{1}{g^2} \sum_a \partial_m \alpha_a + \frac{1}{\sqrt{2}g^2} \sum_a \Omega_{i,a} \partial_m r^i, \quad (7.58a)$$

$$\therefore A_{m,a} = \frac{1}{2R_a H} \left(\partial_m \tilde{\vartheta} - \Omega_i \partial_m r^i \right) + \partial_m \alpha_a + \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega_{i,a} \partial_m r^i. \quad (7.58b)$$

ここで次の表記を導入した:

$$H \equiv \frac{1}{g^2} + \sum_b \frac{1}{\sqrt{2}R_b}, \quad \tilde{\vartheta} \equiv \gamma^4 - \sqrt{2} \sum_b \alpha_b, \quad \Omega_i \equiv \sum_b \Omega_{i,b}. \quad (7.58c)$$

$\alpha_a = 0$ にゲージ固定した上で、上の結果を (7.56) に代入する ($\dot{A}_m \equiv \sum_a \dot{A}_{m,a}$, etc.):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2b} &= -\frac{1}{2} H (\partial_m \vec{r})^2 - \frac{g^2}{2} \left(\partial_m \gamma^4 - \sqrt{2} \dot{A}_m \right)^2 - \sum_a \sqrt{2} R_a \left(-\dot{A}_{m,a} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega_{i,a} \partial_m r^i \right)^2 \\ &\quad + \sqrt{2} \epsilon^{mn} \partial_m ((\vartheta - t_2) \dot{A}_n) \\ &= -\frac{1}{2} H (\partial_m \vec{r})^2 - \frac{1}{2} H^{-1} \left(\partial_m \tilde{\vartheta} - \Omega_i \partial_m r^i \right)^2 + \sqrt{2} \epsilon^{mn} \partial_m ((\vartheta - t_2) \dot{A}_n). \end{aligned} \quad (7.59)$$

これが、multi-centered KK5-branes 解である。これにさらに、 $t_{1,a} = 0 = t_{2,a} = s_{1,a}$ として、 r^2 -方向を半径 $\mathcal{R}_2$ でコンパクト化し、 $k \rightarrow \infty$ 極限操作を行う:

$$\sum_a \frac{1}{\sqrt{2}R_a} \rightarrow h_0 + \sigma \log \frac{\mu}{\varrho}, \quad \sigma \equiv \frac{1}{\sqrt{2}\pi \mathcal{R}_2}, \quad \varrho^2 \equiv (r^1)^2 + (r^3)^2, \quad (7.60a)$$

$$\Omega_1 = \sum_a \Omega_{1,a} \rightarrow 0, \quad \Omega_2 = \sum_a \Omega_{2,a} \rightarrow \Omega_\varrho \equiv \sigma \vartheta_\varrho, \quad \vartheta_\varrho \equiv \arctan \left(\frac{r^3}{r^1} \right). \quad (7.60b)$$

(A.7) と比較することで、(7.59) から読み取れる target space metric と B-field を明示する:

$$G_{11} = H + \frac{(\Omega_1)^2}{H} \rightarrow H, \quad G_{22} = H + \frac{(\Omega_2)^2}{H} \rightarrow \frac{H^2 + (\Omega_\varrho)^2}{H}, \quad (7.61a)$$

$$G_{33} = H, \quad G_{\widetilde{44}} = H^{-1}, \quad (7.61b)$$

$$G_{1\widetilde{4}} = -\frac{\Omega_1}{H} \rightarrow 0, \quad G_{2\widetilde{4}} = -\frac{\Omega_2}{H} \rightarrow -\frac{\Omega_\varrho}{H}, \quad (7.61c)$$

$$G_{3\widetilde{4}} = 0, \quad B_{IJ} = 0. \quad (7.61d)$$

これが (defect) KK5-brane である (添字は $(I, J = 1, 2, 3, \widetilde{4})$, $(i, j = 1, 2, 3)$)。なお、dilaton は、(defect) H-monopole (7.48) からの Buscher rule により

$$e^{2\phi_{\text{KK}}} = e^{2\phi_{\text{H}}} \cdot (G_{44})_{\text{H}}^{-1} = 1, \quad (7.61e)$$

である。smearing を実行する前の (7.59) による計量は Ricci tensor が自明である。さらに、(7.61) を通じて smearing して与えられる Einstein tensor $E_{IJ} = R_{IJ} - \frac{1}{2} R G_{IJ}$ も自明である。

7.6 GLSM for exotic five-brane

section C.12 を用いて、 $\mathcal{L}_3$ (7.12) の成分場展開を実行する。 bosonic terms だけを書き下そう:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{3b} = & \sum_a \frac{1}{e_a^2} \left[\frac{1}{2} (F_{01,a})^2 - |\partial_m \sigma_a|^2 - |\partial_m \phi_a|^2 \right] - \frac{1}{2g^2} \left[(\partial_m r^1)^2 + (\partial_m r^3)^2 \right] - \frac{g^2}{2} \left[(\partial_m y^2)^2 + (D_m \gamma^4)^2 \right] \\
& - \sum_a \left\{ |D_m q_a|^2 + |D_m \tilde{q}_a|^2 \right\} + \sqrt{2} \epsilon^{mn} \sum_a \partial_m (\vartheta A_{n,a}) - \sqrt{2} \sum_a t_{2,a} F_{01,a} \\
& - 2g^2 \sum_{a,b} \sigma_a \bar{\sigma}_b - 2 \sum_a |\sigma_a|^2 (|q_a|^2 + |\tilde{q}_a|^2) \\
& + \sum_a \left\{ \frac{1}{2e_a^2} (D_{V,a})^2 - D_{V,a} (|q_a|^2 - |\tilde{q}_a|^2 - \sqrt{2} r^3 + \sqrt{2} t_{1,a}) \right\} \\
& + \sum_a \left\{ \frac{1}{e_a^2} |D_{\Phi,a}|^2 - i\sqrt{2} q_a \tilde{q}_a D_{\Phi,a} + i\sqrt{2} \bar{q}_a \tilde{\bar{q}}_a \bar{D}_{\Phi,a} \right\} \\
& + \sum_a \left\{ |F_a|^2 + |\tilde{F}_a|^2 - i\sqrt{2} \phi_a (q_a \tilde{F}_a + \tilde{q}_a F_a) + i\sqrt{2} \bar{\phi}_a (\bar{q}_a \tilde{\bar{F}}_a + \tilde{\bar{q}}_a \bar{F}_a) \right\} \\
& + g^2 |G_{\Xi}|^2 - \sqrt{2} g^2 \sum_a \left[(G_{c,a} + \bar{N}_{c,a}) \bar{G}_{\Xi} + (\bar{G}_{c,a} + N_{c,a}) G_{\Xi} \right] + 2g^2 \sum_{a,b} (G_{c,a} + \bar{N}_{c,a}) (\bar{G}_{c,b} + N_{c,b}) \\
& + \frac{i}{2} \sum_a (\phi_{c,a} - \bar{\phi}_{c,a}) (\partial_0^2 - \partial_1^2) r^2 \\
& - \frac{i}{2} \sum_a \left[(B_{c++,a} - \bar{B}_{c++,a}) (\partial_0 - \partial_1) r^1 + (A_{c=,a} - \bar{A}_{c=,a}) (\partial_0 + \partial_1) r^1 \right] \\
& + \sum_a (D_{c,a} + \bar{D}_{c,a}) r^1 + i\sqrt{2} \sum_a \left\{ s_a D_{\Phi,a} - \bar{s}_a \bar{D}_{\Phi,a} \right\} \\
& + \frac{1}{2} \sum_a (\phi_{c,a} + \bar{\phi}_{c,a}) (\partial_0^2 - \partial_1^2) r^1 + i \sum_a (D_{c,a} - \bar{D}_{c,a}) r^2 \\
& + \frac{g^2}{2} \sum_a \left[(B_{c++,a} + \bar{B}_{c++,a}) (\partial_0 - \partial_1) y^2 - (A_{c=,a} + \bar{A}_{c=,a}) (\partial_0 + \partial_1) y^2 \right] \\
& - \frac{g^2}{2} \sum_{a,b} (A_{c=,a} + \bar{A}_{c=,a}) (B_{c++,b} + \bar{B}_{c++,b}) \\
& - 2g^2 \sum_{a,b} (F_{c,a} + \bar{M}_{c,a}) (\bar{F}_{c,b} + M_{c,b}) + \sqrt{2} \sum_a \left[(F_{c,a} - \bar{M}_{c,a}) \bar{G} + (\bar{F}_{c,a} - M_{c,a}) G \right]. \quad (7.62)
\end{aligned}$$

なお、 ϕ_a , $D_{\Phi,a}$ は (7.28) に従い、 y^1 , G , G_{Ξ} , r^2 は (7.33) に従う。

(7.28) より、各々の a について次が言える:

$$-\frac{1}{e_a^2} |\partial_m \phi_a|^2 = -\frac{4}{e_a^2} |\partial_m M_{c,a}|^2, \quad (7.63a)$$

$$i\sqrt{2} \phi_a (q_a \tilde{F}_a + \tilde{q}_a F_a) = 2\sqrt{2} M_{c,a} (q_a \tilde{F}_a + \tilde{q}_a F_a), \quad (7.63b)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{e_a^2} |D_{\Phi,a}|^2 - i\sqrt{2} q_a \tilde{q}_a D_{\Phi,a} + i\sqrt{2} \bar{q}_a \tilde{\bar{q}}_a \bar{D}_{\Phi,a} \\
&= \frac{1}{e_a^2} |D_{c,a} + \sqrt{2} e_a^2 \bar{q}_a \tilde{q}_a|^2 - 2e_a^2 |q_a \tilde{q}_a|^2 \\
&\quad - \frac{i}{2e_a^2} (D_{c,a} + \sqrt{2} e_a^2 \bar{q}_a \tilde{q}_a) \left[(\partial_0 - \partial_1) \bar{B}_{c+,a} + (\partial_0 + \partial_1) \bar{A}_{c=,a} + i(\partial_0^2 - \partial_1^2) \bar{\phi}_{c,a} \right] \\
&\quad + \frac{i}{2e_a^2} (\bar{D}_{c,a} + \sqrt{2} e_a^2 q_a \tilde{q}_a) \left[(\partial_0 - \partial_1) B_{c+,a} + (\partial_0 + \partial_1) A_{c=,a} - i(\partial_0^2 - \partial_1^2) \phi_{c,a} \right] \\
&\quad + \frac{1}{4e_a^2} \left| (\partial_0 - \partial_1) B_{c+,a} + (\partial_0 + \partial_1) A_{c=,a} - i(\partial_0^2 - \partial_1^2) \phi_{c,a} \right|^2. \tag{7.63c}
\end{aligned}$$

これらを加味して (7.62) を書き換える:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{3b} = & \sum_a \frac{1}{e_a^2} \left[\frac{1}{2} (F_{01,a})^2 - |\partial_m \sigma_a|^2 - 4 |\partial_m M_{c,a}|^2 \right] - \frac{1}{2g^2} \left[(\partial_m r^1)^2 + (\partial_m r^3)^2 \right] - \frac{g^2}{2} \left[(\partial_m y^2)^2 + (D_m \gamma^4)^2 \right] \\
& - \sum_a \left\{ |D_m q_a|^2 + |D_m \tilde{q}_a|^2 \right\} + \sqrt{2} \varepsilon^{mn} \sum_a \partial_m ((\vartheta - t_{2,a}) A_{n,a}) \\
& - 2g^2 \sum_{a,b} \sigma_a \bar{\sigma}_b - 2 \sum_a |\sigma_a|^2 (|q_a|^2 + |\tilde{q}_a|^2) \\
& + \sum_a \left\{ \frac{1}{2e_a^2} (D_{V,a})^2 - D_{V,a} (|q_a|^2 - |\tilde{q}_a|^2 - \sqrt{2} (r^3 - t_{1,a})) \right\} \\
& + \frac{1}{2} \sum_a (\phi_{c,a} + \bar{\phi}_{c,a}) (\partial_0^2 - \partial_1^2) r^1 + \sum_a \frac{1}{4e_a^2} \left| (\partial_0 - \partial_1) B_{c+,a} + (\partial_0 + \partial_1) A_{c=,a} - i(\partial_0^2 - \partial_1^2) \phi_{c,a} \right|^2 \\
& + \sum_a \frac{1}{e_a^2} |D_{c,a} + \sqrt{2} e_a^2 \bar{q}_a \tilde{q}_a|^2 - \sum_a 2e_a^2 |q_a \tilde{q}_a|^2 \\
& - \sum_a D_{c,a} ((r^1 - s_{1,a}) + i(r^2 - s_{2,a})) - \sum_a \bar{D}_{c,a} ((r^1 - s_{1,a}) - i(r^2 - s_{2,a})) \\
& - \sum_a \frac{i}{2e_a^2} (D_{c,a} + \sqrt{2} e_a^2 \bar{q}_a \tilde{q}_a) \left[(\partial_0 - \partial_1) \bar{B}_{c+,a} + (\partial_0 + \partial_1) \bar{A}_{c=,a} + i(\partial_0^2 - \partial_1^2) \bar{\phi}_{c,a} \right] \\
& + \sum_a \frac{i}{2e_a^2} (\bar{D}_{c,a} + \sqrt{2} e_a^2 q_a \tilde{q}_a) \left[(\partial_0 - \partial_1) B_{c+,a} + (\partial_0 + \partial_1) A_{c=,a} - i(\partial_0^2 - \partial_1^2) \phi_{c,a} \right] \\
& + \sum_a \left\{ |F_a|^2 + |\bar{F}_a|^2 - 2\sqrt{2} M_{c,a} (q_a \tilde{F}_a + \tilde{q}_a F_a) - 2\sqrt{2} \bar{M}_{c,a} (\bar{q}_a \tilde{\bar{F}}_a + \tilde{\bar{q}}_a \bar{F}_a) \right\} \\
& - 2g^2 \sum_{a,b} (F_{c,a} + \bar{M}_{c,a}) (\bar{F}_{c,b} + M_{c,b}) + 4g^2 \sum_{a,b} (F_{c,a} \bar{F}_{c,b} - \bar{M}_{c,a} M_{c,b}) \\
& + \frac{g^2}{2} \sum_a \left[(B_{c+,a} + \bar{B}_{c+,a}) (\partial_0 - \partial_1) y^2 - (A_{c=,a} + \bar{A}_{c=,a}) (\partial_0 + \partial_1) y^2 \right] \\
& + \frac{i}{2} \sum_a (\phi_{c,a} - \bar{\phi}_{c,a}) (\partial_0^2 - \partial_1^2) r^2 - \frac{g^2}{2} \sum_{a,b} (A_{c=,a} + \bar{A}_{c=,a}) (B_{c+,b} + \bar{B}_{c+,b}) \\
& - \frac{i}{2} \sum_a \left[(B_{c+,a} - \bar{B}_{c+,a}) (\partial_0 - \partial_1) r^1 + (A_{c=,a} - \bar{A}_{c=,a}) (\partial_0 + \partial_1) r^1 \right]. \tag{7.64}
\end{aligned}$$

7.6.1 Auxiliary field equations

補助場 $(D_{V,a}, D_{c,a}, F_{c,a}, F_a, \tilde{F}_a, A_{c=,a}, B_{c\pm,a}, \phi_{c,a})$ について運動方程式を評価する:

$$0 = \frac{1}{e_a^2} D_{V,a} - (|q_a|^2 - |\tilde{q}_a|^2 - \sqrt{2}(r^3 - t_{1,a})), \quad (7.65a)$$

$$0 = \frac{1}{e_a^2} (\overline{D}_{c,a} + \sqrt{2} e_a^2 q_a \tilde{q}_a) - \frac{i}{2e_a^2} [(\partial_0 - \partial_1) \overline{B}_{c\pm,a} + (\partial_0 + \partial_1) \overline{A}_{c=,a} + i(\partial_0^2 - \partial_1^2) \overline{\phi}_{c,a}] \\ - ((r^1 - s_{1,a}) + i(r^2 - s_{2,a})), \quad (7.65b)$$

$$0 = \frac{1}{e_a^2} (D_{c,a} + \sqrt{2} e_a^2 \tilde{q}_a q_a) + \frac{i}{2e_a^2} [(\partial_0 - \partial_1) B_{c\pm,a} + (\partial_0 + \partial_1) A_{c=,a} - i(\partial_0^2 - \partial_1^2) \phi_{c,a}] \\ - ((r^1 - s_{1,a}) - i(r^2 - s_{2,a})), \quad (7.65c)$$

$$0 = 2g^2 \sum_b (\overline{F}_{c,b} - M_{c,b}), \quad 0 = 2g^2 \sum_b (F_{c,b} - \overline{M}_{c,b}), \quad (7.65d)$$

$$0 = \overline{F}_a - 2\sqrt{2} M_{c,a} \tilde{q}_a, \quad 0 = F_a - 2\sqrt{2} \overline{M}_{c,a} \tilde{q}_a, \quad (7.65e)$$

$$0 = \overline{\tilde{F}}_a - 2\sqrt{2} M_{c,a} q_a, \quad 0 = \tilde{F}_a - 2\sqrt{2} \overline{M}_{c,a} q_a, \quad (7.65f)$$

$$0 = -\frac{i}{2e_a^2} \partial_+ (\overline{D}_{c,a} + \sqrt{2} e_a^2 q_a \tilde{q}_a) - \frac{1}{4e_a^2} \partial_+ \left\{ \partial_- \overline{B}_{c\pm,a} + \partial_+ \overline{A}_{c=,a} + i\partial_+ \partial_- \overline{\phi}_{c,a} \right\} \\ - \frac{i}{2} \partial_+ r^1 - \frac{g^2}{2} \partial_+ y^2 - \frac{g^2}{2} \sum_b (B_{c\pm,b} + \overline{B}_{c\pm,b}), \quad (7.65g)$$

$$0 = -\frac{i}{2e_a^2} \partial_- (\overline{D}_{c,a} + \sqrt{2} e_a^2 q_a \tilde{q}_a) - \frac{1}{4e_a^2} \partial_- \left\{ \partial_- \overline{B}_{c\pm,a} + \partial_+ \overline{A}_{c=,a} + i\partial_+ \partial_- \overline{\phi}_{c,a} \right\} \\ - \frac{i}{2} \partial_- r^1 + \frac{g^2}{2} \partial_- y^2 - \frac{g^2}{2} \sum_b (A_{c=,b} + \overline{A}_{c=,b}), \quad (7.65h)$$

$$0 = \frac{1}{2e_a^2} \partial_+ \partial_- (\overline{D}_{c,a} + \sqrt{2} e_a^2 q_a \tilde{q}_a) - \frac{i}{4e_a^2} \partial_+ \partial_- \left\{ \partial_- \overline{B}_{c\pm,a} + \partial_+ \overline{A}_{c=,a} + i\partial_+ \partial_- \overline{\phi}_{c,a} \right\} \\ + \frac{1}{2} \partial_+ \partial_- (r^1 + ir^2). \quad (7.65i)$$

ここで $\partial_\pm \equiv \partial_0 \pm \partial_1$ である。そして (7.28) と $D_{c,a}$ の運動方程式の下で、 $A_{c=,a}$, $B_{c\pm,a}$, $\phi_{c,a}$ の運動方程式は自明になる。

これらの結果を (7.64) に代入する:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{3b} = & \sum_a \frac{1}{e_a^2} \left[\frac{1}{2} (F_{01,a})^2 - |\partial_m \sigma_a|^2 - 4 |\partial_m M_{c,a}|^2 \right] - \frac{1}{2g^2} \left[(\partial_m r^1)^2 + (\partial_m r^3)^2 \right] - \frac{g^2}{2} \left[(\partial_m y^2)^2 + (D_m \gamma^4)^2 \right] \\
& - \sum_a \left\{ |D_m q_a|^2 + |D_m \tilde{q}_a|^2 \right\} + \sqrt{2} \epsilon^{mn} \sum_a \partial_m ((\vartheta - t_{2,a}) A_{n,a}) \\
& - 2g^2 \sum_{a,b} (\sigma_a \bar{\sigma}_b + 4 M_{c,a} \bar{M}_{c,b}) - 2 \sum_a (|\sigma_a|^2 + 4 |M_{c,a}|^2) (|q_a|^2 + |\tilde{q}_a|^2) \\
& - \sum_a \frac{e_a^2}{2} (|q_a|^2 - |\tilde{q}_a|^2 - \sqrt{2} (r^3 - t_{1,a}))^2 - \sum_a e_a^2 \left| \sqrt{2} q_a \tilde{q}_a + ((r^1 - s_{1,a}) + i(r^2 - s_{2,a})) \right|^2 \\
& + \frac{g^2}{2} \sum_{a,b} (A_{c=,a} + \bar{A}_{c=,a}) (B_{c\neq,b} + \bar{B}_{c\neq,b}). \tag{7.66}
\end{aligned}$$

7.6.2 Low energy limit

ポテンシャルの構造から、次の SUSY 拘束条件が得られる:

$$\sigma_a = 0 = M_{c,a}, \tag{7.67a}$$

$$|q_a|^2 - |\tilde{q}_a|^2 = \sqrt{2} (r^3 - t_{1,a}), \quad -\sqrt{2} q_a \tilde{q}_a = (r^1 - s_{1,a}) + i(r^2 - s_{2,a}), \tag{7.67b}$$

$$0 = \frac{g^2}{2} \sum_{a,b} (A_{c=,a} + \bar{A}_{c=,a}) (B_{c\neq,b} + \bar{B}_{c\neq,b}). \tag{7.67c}$$

特に最後の条件は (7.33) を用いて次の様になる:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{g^2}{2} \sum_{a,b} (A_{c=,a} + \bar{A}_{c=,a}) (B_{c\neq,b} + \bar{B}_{c\neq,b}) \\
&= -\frac{1}{2g^2} (\partial_m r^2)^2 + \frac{g^2}{2} (\partial_m y^2)^2 + \epsilon^{mn} (\partial_m r^2) (\partial_n y^2). \tag{7.68}
\end{aligned}$$

これを (7.66) にあてはめると、一時的に $(\partial_m y^2)^2$ -項が消え、代わりに $(\partial_m r^2)^2$ -項が復活する。そして位相項が増えている。また (7.67) により、 $(q_a, \tilde{q}_a)$ の配位が求められる:

$$q_a = \frac{i}{2^{1/4}} e^{+i\alpha_a} \sqrt{R_a + (r^3 - t_{1,a})}, \quad \tilde{q}_a = \frac{i}{2^{1/4}} e^{-i\alpha_a} \frac{(r^1 - s_{1,a}) + i(r^2 - s_{2,a})}{\sqrt{R_a + (r^3 - t_{1,a})}}, \tag{7.69a}$$

$$R_a^2 \equiv (r^1 - s_{1,a})^2 + (r^2 - s_{2,a})^2 + (r^3 - t_{1,a})^2. \tag{7.69b}$$

これに基づく各 a ごとの $(q_a, \tilde{q}_a)$ の運動項は次の通り:

$$\begin{aligned}
-|D_m q_a|^2 - |D_m \tilde{q}_a|^2 &= -\frac{1}{2\sqrt{2}R_a} \left[(\partial_m r^1)^2 + (\partial_m r^2)^2 + (\partial_m r^3)^2 \right] \\
&\quad - \sqrt{2} R_a \left(\partial_m \alpha_a - A_{m,a} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega_{i,a} \partial_m r^i \right)^2. \tag{7.70}
\end{aligned}$$

特に one-form Ω は次の通り:

$$\Omega_{i,a} \partial_m r^i = \frac{-(r^1 - s_{1,a})\partial_m r^2 + (r^2 - s_{2,a})\partial_m r^1}{\sqrt{2}R_a(R_a + (r^3 - t_{1,a}))}, \quad (7.71a)$$

$$\Omega_{1,a} = \frac{r^2 - s_{2,a}}{\sqrt{2}R_a(R_a + (r^3 - t_{1,a}))}, \quad \Omega_{2,a} = -\frac{r^1 - s_{1,a}}{\sqrt{2}R_a(R_a + (r^3 - t_{1,a}))}, \quad \Omega_{3,a} = 0. \quad (7.71b)$$

ここまでの結果から得られる effective theory を記述する。 $e_a \rightarrow \infty$ の下で、(7.67) と (7.70) を用いる:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{3b} = & -\frac{1}{2g^2} \left[(\partial_m r^1)^2 + (\partial_m r^2)^2 + (\partial_m r^3)^2 \right] - \sum_a \frac{1}{2\sqrt{2}R_a} \left[(\partial_m r^1)^2 + (\partial_m r^2)^2 + (\partial_m r^3)^2 \right] \\ & - \frac{g^2}{2} (D_m \gamma^4)^2 - \sum_a \sqrt{2}R_a \left(\partial_m \alpha_a - A_{m,a} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega_{i,a} \partial_m r^i \right)^2 \\ & + \sqrt{2} \epsilon^{mn} \sum_a \partial_m ((\vartheta - t_{2,a}) A_{n,a}) + \epsilon^{mn} (\partial_m r^2) (\partial_n y^2). \end{aligned} \quad (7.72)$$

共変微分 (7.34) に注意しながら、gauge field $A_{m,a}$ の運動方程式を評価する:

$$0 = -\frac{\partial \mathcal{L}_{3b}}{\partial A_a^m} = -\sqrt{2}g^2 \left[\partial_m \gamma^4 - \sqrt{2} \sum_b A_{m,b} \right] - 2\sqrt{2}R_a \left(\partial_m \alpha_a - A_{m,a} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega_{i,a} \partial_m r^i \right), \quad (7.73a)$$

$$\therefore 0 = -A_{m,a} + \partial_m \alpha_a + \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega_{i,a} \partial_m r^i + \frac{g^2}{2R_a} \partial_m \gamma^4 - \frac{g^2}{\sqrt{2}R_a} \sum_b A_{m,b}. \quad (7.73b)$$

(7.73b) の a について和を考える:

$$\begin{aligned} 0 = & -\left(\frac{1}{g^2} + \sum_a \frac{1}{\sqrt{2}R_a} \right) \sum_b A_{m,b} + \partial_m \gamma^4 \sum_a \frac{1}{2R_a} + \frac{1}{g^2} \sum_a \partial_m \alpha_a + \frac{1}{\sqrt{2}g^2} \sum_a \Omega_{i,a} \partial_m r^i \\ = & -H \sum_b A_{m,b} + \partial_m \gamma^4 \sum_a \frac{1}{2R_a} + \frac{1}{g^2} \sum_a \partial_m \alpha_a + \frac{1}{\sqrt{2}g^2} \sum_a \Omega_{i,a} \partial_m r^i, \end{aligned} \quad (7.74a)$$

$$\therefore A_{m,a} = \frac{1}{2R_a H} \left(\partial_m \tilde{\vartheta} - \Omega_i \partial_m r^i \right) + \partial_m \alpha_a + \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega_{i,a} \partial_m r^i, \quad (7.74b)$$

$$H \equiv \frac{1}{g^2} + \sum_b \frac{1}{\sqrt{2}R_b}, \quad \tilde{\vartheta} \equiv \gamma^4 - \sqrt{2} \sum_b \alpha_b, \quad \Omega_i \equiv \sum_b \Omega_{i,b}. \quad (7.74c)$$

$\alpha_a = 0$ にゲージ固定した上で、(7.73b), (7.74b) を (7.72) に代入する ($\sum_a \dot{A}_{m,a} \equiv \dot{A}_m$):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{3b} = & -\frac{1}{2}H\left[(\partial_m r^1)^2 + (\partial_m r^2)^2 + (\partial_m r^3)^2\right] - \frac{1}{2H}(\partial_m \tilde{\vartheta})^2 - \frac{(\Omega_2)^2}{2H}(\partial_m r^2)^2 + \frac{\Omega_2}{H}(\partial_m \tilde{\vartheta})(\partial^m r^2) \\ & - \frac{(\Omega_1)^2}{2H}(\partial_m r^1)^2 - \frac{\Omega_1 \Omega_2}{H}(\partial_m r^1)(\partial^m r^2) + \frac{\Omega_1}{H}(\partial_m \tilde{\vartheta})(\partial^m r^1) \\ & + \sqrt{2}\epsilon^{mn}\partial_m(\vartheta \dot{A}_n) + \epsilon^{mn}(\partial_m r^2)(\partial_n y^2). \end{aligned} \quad (7.75)$$

これは非常に入り組んだ形式である。但し、 $s_{1,a} = t_{1,a} = t_{2,a} = 0$ 、ゲージ場の数を $k \rightarrow \infty$ にすると、 $s_{2,a} \rightarrow s$, $\sum_a \rightarrow \int ds$ 積分に置き換えられる。そのため、次の様な極限操作となる:

$$\frac{1}{g^2} + \sum_a \frac{1}{\sqrt{2}R_a} \rightarrow h_0 + \sigma \log \frac{\mu}{\varrho}, \quad \sigma \equiv \frac{1}{\sqrt{2}\pi\mathcal{R}_2}, \quad \varrho^2 \equiv (r^1)^2 + (r^3)^2, \quad (7.76a)$$

$$\Omega_1 = \sum_a \Omega_{1,a} \rightarrow 0, \quad \Omega_2 = \sum_a \Omega_{2,a} \rightarrow \Omega_\varrho \equiv \sigma \vartheta_\varrho, \quad \vartheta_\varrho \equiv \arctan\left(\frac{r^3}{r^1}\right). \quad (7.76b)$$

ここで $\mathcal{R}_2$ は r^2 -方向の半径 (y^2 -方向ではない)。これを当てはめる:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{3b} = & -\frac{1}{2}H\left[(\partial_m r^1)^2 + (\partial_m r^3)^2\right] \\ & - \frac{1}{2H}(\partial_m \tilde{\vartheta})^2 - \frac{1}{2}\frac{K}{H}(\partial_m r^2)^2 + \frac{\Omega_\varrho}{H}(\partial_m \tilde{\vartheta})(\partial^m r^2) + \epsilon^{mn}(\partial_m r^2)(\partial_n y^2) \\ & + \sqrt{2}\epsilon^{mn}\partial_m(\vartheta \dot{A}_n), \end{aligned} \quad (7.77a)$$

$$K \equiv H^2 + (\Omega_\varrho)^2. \quad (7.77b)$$

最後の仕上げを行う。追い出したい場 r^2 の変分を考える:

$$0 = \delta\mathcal{L}_{3b} = \partial^m \left\{ \frac{K}{H} \partial_m r^2 - \frac{\Omega_\varrho}{H} \partial_m \tilde{\vartheta} - \epsilon_{mn} \partial^n y^2 \right\} \delta r^2, \quad (7.78a)$$

$$\therefore \partial_m r^2 = -\frac{H}{K} \left(-\frac{\Omega_\varrho}{H} (\partial_m \tilde{\vartheta}) - \epsilon_{mn} (\partial^n y^2) \right) + \text{(constant vector)}. \quad (7.78b)$$

2D Lorentz invariance を考えると定数ベクトルはゼロである。これを (7.77) に代入する:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{3b} = & -\frac{1}{2}H\left[(\partial_m r^1)^2 + (\partial_m r^3)^2\right] - \frac{1}{2}HK^{-1}\left[(\partial_m y^2)^2 + (\partial_m \tilde{\vartheta})^2\right] \\ & - \Omega_\varrho K^{-1} \epsilon^{mn}(\partial_m y^2)(\partial_n \tilde{\vartheta}) + \sqrt{2}\epsilon^{mn}\partial_m(\vartheta \dot{A}_n). \end{aligned} \quad (7.79)$$

なお、 Ω_ϱ にある σ は、

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\mathcal{R}_2} = \frac{\tilde{\mathcal{R}}_2}{\sqrt{2}\pi\alpha'}, \quad (7.80)$$

のように dual coordinate radius $\tilde{\mathcal{R}}_2 = \alpha'/\mathcal{R}_2$ で記述される。そして、(7.79) から読み取れる 5₂-brane 計量と B-field は、(A.7) から読み取ると

$$G_{ij} = H = h_0 + \sigma \log\left(\frac{\mu}{\varrho}\right), \quad i, j = 1, 3, \quad (7.81a)$$

$$G_{\tilde{i}\tilde{j}} = HK^{-1} = \frac{H}{H^2 + (\Omega_\varrho)^2}, \quad \tilde{i}, \tilde{j} = 2, 4, \quad (7.81b)$$

$$B_{\tilde{2}4} = -\Omega_\varrho K^{-1}, \quad (7.81c)$$

である。

APPENDIX

A 10D supergravity theories

A.1 IIA supergravity

bosonic terms のみ考慮する。String frame における 10D IIA supergravity action は次の通り:

$$S_{\text{str}}^{\text{IIA}} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-G^{\text{str}}} e^{-2\phi} \left(R^{\text{str}} + 4(\partial_M \phi)^2 - \frac{1}{2}|H_3|^2 \right) - \frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-G^{\text{str}}} \left(|F_2|^2 + |\tilde{F}_4|^2 \right) - \frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int B_2 \wedge F_4 \wedge F_4, \quad (\text{A.1a})$$

$$H_3 = dB_2, \quad F_2 = dA_1, \quad (\text{A.1b})$$

$$\tilde{F}_4 = F_4 - A_1 \wedge H_3, \quad F_4 = dC_3, \quad (\text{A.1c})$$

$$2\kappa_{10}^2 = (2\pi)^7 \alpha'^4, \quad (\text{A.1d})$$

$$|F_p|^2 \equiv \frac{1}{p!} G^{M_1 N_1} \dots G^{M_p N_p} F_{M_1 \dots M_p} F_{N_1 \dots N_p}. \quad (\text{A.1e})$$

この運動方程式を与える:

$$0 = R_{MN} - \frac{1}{2} R G_{MN} + G_{MN} \left[-2\nabla^2 \phi + 4(\partial_P \phi)^2 \right] + 2\nabla_M \nabla_N \phi - 4\partial_M \phi \partial_N \phi - \frac{1}{2} G_{MN} \left[\left(4(\partial_P \phi)^2 - \frac{1}{2}|H_3|^2 \right) - \frac{e^{2\phi}}{2} \left(|F_2|^2 + |\tilde{F}_4|^2 \right) \right] + \left(4\partial_M \phi \partial_N \phi - \frac{1}{4} H_{MPQ} H_N{}^{PQ} \right) - \frac{e^{2\phi}}{2} \left(F_{MP} F_N{}^P + \frac{1}{3!} \tilde{F}_{MPQR} \tilde{F}_N{}^{PQR} \right), \quad (\text{A.2a})$$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{-G}} \partial_M \left[\sqrt{-G} \left(e^{-2\phi} H^{MPQ} + \tilde{F}^{MNPQ} A_N \right) \right] - \frac{1}{2 \cdot (4!)^2} e^{-1} \varepsilon^{MNPQRSTUVW} F_{MNR S} F_{TUVW}, \quad (\text{A.2b})$$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{-G}} \partial_M \left(\sqrt{-G} \partial^M \phi \right) + \frac{1}{4} R - (\partial_M \phi)^2 - \frac{1}{8} |H_3|^2, \quad (\text{A.2c})$$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{-G}} \partial_M \left(\sqrt{-G} F^{MN} \right) + \frac{1}{3!} \tilde{F}^{NMPQ} H_{MPQ}, \quad (\text{A.2d})$$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{-G}} \partial_M \left(\sqrt{-G} \tilde{F}^{MNPQ} \right) - \frac{1}{4 \cdot (3!)^2} e^{-1} \varepsilon^{MNPQRSTUVW} H_{RST} F_{MUVW}. \quad (\text{A.2e})$$

A.2 IIB supergravity

bosonic terms のみ考慮する。String frame における 10D IIB supergravity action は次の通り:

$$S_{\text{str}}^{\text{IIB}} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-G} e^{-2\phi} \left(R^{\text{str}} + 4(\partial_M \phi)^2 - \frac{1}{2}|H_3|^2 \right) - \frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-G} \left(|F_1|^2 + |\tilde{F}_3|^2 + \frac{1}{2}|\tilde{F}_5|^2 \right) - \frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int D_4 \wedge H_3 \wedge F_3, \quad (\text{A.3a})$$

$$H_3 = dB_2^{(1)}, \quad F_1 = dC_0, \quad (\text{A.3b})$$

$$\tilde{F}_3 = F_3 - C_0 H_3, \quad F_3 = dB_2^{(2)}, \quad (\text{A.3c})$$

$$\tilde{F}_5 = dD_4 - \frac{1}{2}B_2^{(2)} \wedge H_3 + \frac{1}{2}B_2^{(1)} \wedge F_3, \quad \tilde{F}_5 = *_ {10} \tilde{F}_5. \quad (\text{A.3d})$$

この運動方程式を与える:

$$0 = R_{MN} - \frac{1}{2}R G_{MN} + G_{MN} \left[-2\nabla^2 \phi + 4(\partial_P \phi)^2 \right] + 2\nabla_M \nabla_N \phi - 4\partial_M \phi \partial_N \phi - \frac{1}{2}G_{MN} \left[\left(4(\partial_P \phi)^2 - \frac{1}{2}|H_3|^2 \right) - \frac{e^{2\phi}}{2} \left(|F_1|^2 + |\tilde{F}_3|^2 + \frac{1}{2}|\tilde{F}_5|^2 \right) \right] + \left(4\partial_M \phi \partial_N \phi - \frac{1}{4}H_{MPQ}H_N^{PQ} \right) - \frac{e^{2\phi}}{2} \left(\partial_M C_0 \partial_N C_0 + \frac{1}{2}\tilde{F}_{MPQ}\tilde{F}_N^{PQ} + \frac{1}{48}\tilde{F}_{MPQRS}\tilde{F}_N^{PQRS} \right), \quad (\text{A.4a})$$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{-G}} \partial_M \left[\sqrt{-G} \left(e^{-2\phi} H^{MNP} - \tilde{F}^{MNP} C_0 - \frac{1}{8}\tilde{F}^{MNPQR} B_{QR}^{(2)} \right) \right] - \frac{1}{4 \cdot 3!} \tilde{F}^{MQRNP} F_{MQR} + \frac{1}{5! \cdot 3! \cdot 2!} e^{-1} \epsilon^{MNPQRSTUVW} F_{MQRST} F_{UVW}, \quad (\text{A.4b})$$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{-G}} \partial_M \left(\sqrt{-G} \partial^M \phi \right) + \frac{1}{4}R - (\partial_M \phi)^2 - \frac{1}{8}|H_3|^2, \quad (\text{A.4c})$$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{-G}} \partial_M \left(\sqrt{-G} F^M \right) + \frac{1}{3!} \tilde{F}^{MNP} H_{MNP}, \quad (\text{A.4d})$$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{-G}} \partial_M \left[\sqrt{-G} \left(\tilde{F}^{MNP} + \frac{1}{8}\tilde{F}^{MNPQR} B_{QR}^{(1)} \right) \right] + \frac{1}{4 \cdot 3!} \tilde{F}^{MNPQR} H_{MQR} + \frac{1}{5! \cdot 3! \cdot 2!} e^{-1} \epsilon^{MNPQRSTUVW} F_{QRSTU} H_{MVW}, \quad (\text{A.4e})$$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{-G}} \partial_M \left(\sqrt{-G} \tilde{F}^{MNPQR} \right) + \frac{1}{(3!)^2} e^{-1} \epsilon^{MNPQRSTUVW} H_{STU} F_{MVW}. \quad (\text{A.4f})$$

A.3 Buscher rule in type II supergravities

x^9 -方向をコンパクト化して IIA (A.1) から IIB (A.3) へ、もしくはその逆変換をすることが出来る。表記が少し混乱するので、(IIA : $g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \phi; A_1, C_3$), (IIB : $J_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}^{(1)}, \varphi; C_0, B_2^{(2)}, D_4$) のように改めて明記しておく。

IIA から IIB へ:

$$J_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{g_{9\mu}g_{9\nu} - B_{9\mu}B_{9\nu}}{g_{99}}, \quad J_{9\mu} = \frac{B_{9\mu}}{g_{99}}, \quad J_{99} = \frac{1}{g_{99}}, \quad (\text{A.5a})$$

$$B_{\mu\nu}^{(1)} = B_{\mu\nu} + \frac{2g_{9[\mu}B_{\nu]9}}{g_{99}}, \quad B_{9\mu}^{(1)} = \frac{g_{9\mu}}{g_{99}}, \quad (\text{A.5b})$$

$$B_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{3}{2}C_{\mu\nu 9} - 2A_{[\mu}B_{\nu]9} + \frac{2g_{9[\mu}B_{\nu]9}A_9}{g_{99}}, \quad B_{9\mu}^{(2)} = -A_\mu + \frac{A_9g_{9\mu}}{g_{99}}, \quad (\text{A.5c})$$

$$\varphi = \phi - \frac{1}{2}\log(g_{99}), \quad C_0 = A_9, \quad (\text{A.5d})$$

$$D_{9\mu\nu\rho} = \frac{3}{8}\left[C_{\mu\nu\rho} - A_{[\mu}B_{\nu\rho]} + \frac{g_{9[\mu}B_{\nu\rho]}A_9}{g_{99}} - \frac{3}{2}\frac{g_{9[\mu}C_{\nu\rho]9}}{g_{99}}\right]. \quad (\text{A.5e})$$

$D_{\mu\nu\rho\sigma}$ については IIB self-duality condition を用いて $D_{9\mu\nu\rho}$ で与えられるので省略。

IIB から IIA へ:

$$g_{\mu\nu} = J_{\mu\nu} - \frac{J_{9\mu}J_{9\nu} - B_{9\mu}^{(1)}B_{9\nu}^{(1)}}{J_{99}}, \quad g_{9\mu} = \frac{B_{9\mu}^{(1)}}{J_{99}}, \quad g_{99} = \frac{1}{J_{99}}, \quad (\text{A.6a})$$

$$B_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}^{(1)} + \frac{2B_{9[\mu}J_{\nu]9}^{(1)}}{J_{99}}, \quad B_{9\mu} = \frac{J_{9\mu}}{J_{99}}, \quad (\text{A.6b})$$

$$\phi = \varphi - \frac{1}{2}\log(J_{99}), \quad (\text{A.6c})$$

$$A_\mu = -B_{9\mu}^{(2)} + C_0B_{9\mu}^{(1)}, \quad A_9 = C_0, \quad (\text{A.6d})$$

$$C_{\mu\nu\rho} = \frac{8}{3}D_{9\mu\nu\rho} + \varepsilon^{ij}B_{9[\mu}^{(i)}B_{\nu\rho]}^{(j)} + \frac{\varepsilon^{ij}B_{9[\mu}^{(i)}B_{9|\nu]9}^{(j)}}{J_{99}}, \quad C_{9\mu\nu} = \frac{2}{3}\left[B_{\mu\nu}^{(2)} + \frac{2B_{9[\mu}J_{\nu]9}^{(2)}}{J_{99}}\right]. \quad (\text{A.6e})$$

A.4 String worldsheet sigma model

string worldsheet sigma model から、target space metric G_{IJ} and B-field B_{IJ} を読み取る処方箋は次の通り:

$$\mathcal{L}_{\text{string}} = -\frac{1}{2}g^{mn}G_{IJ}\partial_m X^I\partial_n X^J + \frac{1}{2}\epsilon^{mn}B_{IJ}\partial_m X^I\partial_n X^J, \quad \epsilon^{\hat{0}\hat{1}} = +1. \quad (\text{A.7})$$

B Differential forms

B.1 Volume-form, invariant tensor, and Hodge-dual on Lorentzian space

Lorentz計量の時空における不変テンソルや体積要素を定義しておく必要がある。添字の走りを簡単にするため、4次元で書いておこう (一般の D 次元への拡張は自明):

$$\epsilon^{\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{3}} \equiv +\alpha, \quad \epsilon_{\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{3}} = -\alpha, \quad (\text{B.1a})$$

$$\epsilon^{abcd} = e^{-1} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} e_\mu^a e_\nu^b e_\rho^c e_\sigma^d, \quad \epsilon_{abcd} = e \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} e_a^\mu e_b^\nu e_c^\rho e_d^\sigma, \quad (\text{B.1b})$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = e \epsilon^{abcd} e_a^\mu e_b^\nu e_c^\rho e_d^\sigma, \quad \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = e^{-1} \epsilon_{abcd} e_\mu^a e_\nu^b e_\rho^c e_\sigma^d, \quad (\text{B.1c})$$

$$\epsilon^{abcd} \epsilon_{abcd} = -4! \alpha^2, \quad \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -4! \alpha^2, \quad (\text{B.1d})$$

$$\epsilon^{abcd} \epsilon_{ebcd} = -3! \alpha^2 \delta_e^a, \quad \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\lambda\nu\rho\sigma} = -3! \alpha^2 \delta_\lambda^\mu, \quad (\text{B.1e})$$

$$\epsilon^{abcd} \epsilon_{efcd} = -2! \cdot 2! \alpha^2 \delta_{ef}^{ab}, \quad \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\lambda\tau\rho\sigma} = -2! \cdot 2! \alpha^2 \delta_{\lambda\tau}^{\mu\nu}, \quad (\text{B.1f})$$

$$\delta_{ef}^{ab} = \frac{1}{2!} (\delta_e^a \delta_f^b - \delta_f^a \delta_e^b). \quad (\text{B.1g})$$

体積要素についていくつかの関係式を列挙して、スケール因子を固定しよう:

$$\begin{aligned} (\text{vol.})_4 &= e^{\hat{0}} \wedge e^{\hat{1}} \wedge e^{\hat{2}} \wedge e^{\hat{3}} = -\frac{1}{4! \alpha} \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \\ &= e_\mu^{\hat{0}} e_\nu^{\hat{1}} e_\rho^{\hat{2}} e_\sigma^{\hat{3}} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma \equiv e d^4x, \end{aligned} \quad (\text{B.2a})$$

$$e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \equiv \beta \epsilon^{abcd} e^{\hat{0}} \wedge e^{\hat{1}} \wedge e^{\hat{2}} \wedge e^{\hat{3}} = \beta \epsilon^{abcd} (\text{vol.})_4, \quad (\text{B.2b})$$

$$d^4x = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \equiv a \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma, \quad (\text{B.2c})$$

$$dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma \equiv b \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} d^4x. \quad (\text{B.2d})$$

規格化因子 α とは別にスケール因子 β, a, b を導入した。それぞれは恒等式で関係付く:

$$\epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d = \beta \epsilon_{abcd} \epsilon^{abcd} (\text{vol.})_4 = -4! \alpha^2 \beta (\text{vol.})_4 = -4! \alpha (\text{vol.})_4, \quad (\text{B.3a})$$

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma = b \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} d^4x = -4! \alpha^2 b d^4x = \frac{1}{a} d^4x, \quad (\text{B.3b})$$

$$e a \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma = a \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d = -4! a \alpha (\text{vol.})_4 \equiv (\text{vol.})_4. \quad (\text{B.3c})$$

これにより以下が導かれる:

$$\alpha^2 \beta = \alpha, \quad ab = -\frac{1}{4! \alpha^2}, \quad 1 = -4! a \alpha, \quad (\text{B.4a})$$

$$\therefore \beta = \frac{1}{\alpha}, \quad a = -\frac{1}{4! \alpha}, \quad b = \frac{1}{\alpha}. \quad (\text{B.4b})$$

α は任意。このノートでは $\alpha \equiv +1$ とする(事が多い)。厳密に言えば、 ϵ^{abcd} はテンソルであるが $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ は完全反対称記号でありテンソルではない。

Hodge 双対の定義を次の通りとする。全て4次元接空間で行う:

$$*1 \equiv \frac{1}{0! \cdot 4!} \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d = -\alpha (\text{vol.})_4, \quad (\text{B.5a})$$

$$*\omega_1 = *(\omega_a e^a) \equiv \frac{1}{1! \cdot 3!} \omega^a \epsilon_{abcd} e^b \wedge e^c \wedge e^d \equiv \frac{1}{3!} W_{bcd} e^b \wedge e^c \wedge e^d, \quad (\text{B.5b})$$

$$*\omega_2 = *\left(\frac{1}{2!} \omega_{ab} e^a \wedge e^b\right) \equiv \frac{1}{2! \cdot 2!} \omega^{ab} \epsilon_{abcd} e^c \wedge e^d \equiv \frac{1}{2!} W_{cd} e^c \wedge e^d, \quad (\text{B.5c})$$

$$*(\text{vol.})_4 = *\left(-\frac{1}{4! \alpha} \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d\right) \equiv -\frac{1}{4! \cdot 0! \alpha} \epsilon^{abcd} \epsilon_{abcd} = \alpha, \quad (\text{B.5d})$$

$$W_{bcd} = \omega^a \epsilon_{abcd}, \quad W_{cd} = \frac{1}{2!} \omega^{ab} \epsilon_{abcd}, \quad (\text{B.5e})$$

$$W^{bcd} = \omega_a \epsilon^{abcd}, \quad W^{cd} = \frac{1}{2!} \omega_{ab} \epsilon^{abcd}. \quad (\text{B.5f})$$

ここでHodge双対を2回作用する操作を評価する:

$$*(*1) = *(-\alpha (\text{vol.})_4) = -\alpha^2, \quad (\text{B.6a})$$

$$\begin{aligned} *(*\omega_1) &= *\left(\frac{1}{3!} W_{abc} e^a \wedge e^b \wedge e^c\right) = \frac{1}{3! \cdot 1!} W^{abc} \epsilon_{abcd} e^d = \frac{1}{3! \cdot 1!} \omega_e \epsilon^{eabc} \epsilon_{abcd} e^d \\ &= \frac{1}{3!} \omega_e \left(+3! \alpha^2 \delta_d^e\right) e^d = +\alpha^2 \omega_e e^e, \end{aligned} \quad (\text{B.6b})$$

$$\begin{aligned} *(*\omega_2) &= *\left(\frac{1}{2!} W_{cd} e^c \wedge e^d\right) = \frac{1}{2! \cdot 2!} W^{cd} \epsilon_{cdab} e^a \wedge e^b = \frac{1}{(2!)^3} \omega_{ef} \epsilon^{efcd} \epsilon_{cdab} e^a \wedge e^b \\ &= \frac{1}{(2!)^3} \omega_{ef} \left(-(2!)^2 \alpha^2 \delta_{ab}^{ef}\right) e^a \wedge e^b = -\frac{\alpha^2}{2!} \omega_{ab} e^a \wedge e^b, \end{aligned} \quad (\text{B.6c})$$

$$*(*(\text{vol.})_4) = *\alpha = -\alpha^2 (\text{vol.})_4. \quad (\text{B.6d})$$

これより次が確認できる:

$$\therefore **1 = -\alpha^2, \quad **(\text{vol.})_4 = -\alpha^2 (\text{vol.})_4. \quad (\text{B.7})$$

これを拡張して、 D 次元 Lorentz 時空での Hodge 双対を一般に次の様に定める:

$$\omega_p = \frac{1}{p!} \omega_{a_1 \dots a_p} e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_p} = \frac{1}{p!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}, \quad (\text{B.8a})$$

$$\begin{aligned} *\omega_p &= \frac{1}{p!(D-p)!} \omega^{a_1 \dots a_p} \epsilon_{a_1 \dots a_p b_1 \dots b_{D-p}} e^{b_1} \wedge \dots \wedge e^{b_{D-p}} \\ &= \frac{\sqrt{|g_D|}}{p!(D-p)!} \omega^{\mu_1 \dots \mu_p} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_{D-p}} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_{D-p}}, \end{aligned} \quad (\text{B.8b})$$

$$**\omega_p = (-1)^{p(D-p)+1} \alpha^2 \omega_p. \quad (\text{B.8c})$$

なお、表記が混同してややこしい場合は、curved space における完全反対称テンソルとして振る舞う

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \epsilon_{abcd} e_\mu^a e_\nu^b e_\rho^c e_\sigma^d = (e \epsilon_{\kappa\lambda\tau\eta} e_a^\kappa e_b^\lambda e_c^\tau e_d^\eta) e_\mu^a e_\nu^b e_\rho^c e_\sigma^d = e \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (\text{B.9a})$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \epsilon^{abcd} e_a^\mu e_b^\nu e_c^\rho e_d^\sigma = (e^{-1} \epsilon^{\kappa\lambda\tau\eta} e_\kappa^a e_\lambda^b e_\tau^c e_\eta^d) e_a^\mu e_b^\nu e_c^\rho e_d^\sigma = e^{-1} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (\text{B.9b})$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{abcd} \epsilon_{abcd} = -4! \alpha^2, \quad \text{etc.} \quad (\text{B.9c})$$

という表記を導入すれば良い。

B.2 Volume-form, invariant tensor, and Hodge-dual on Euclidean space

Euclid 計量の空間における不変テンソルや体積要素を定義しておく必要がある。添字の走りを簡単にするため、4次元で書いておこう (一般の D 次元への拡張は自明):

$$\epsilon^{\hat{1}\hat{2}\hat{3}\hat{4}} \equiv +\tilde{\alpha}, \quad \epsilon_{\hat{1}\hat{2}\hat{3}\hat{4}} \equiv +\tilde{\alpha}, \quad (\text{B.10a})$$

$$\epsilon^{abcd} = e^{-1} \varepsilon^{mnpq} e_m^a e_n^b e_p^c e_q^d, \quad \epsilon_{abcd} = e \varepsilon_{mnpq} e_a^m e_b^n e_c^p e_d^q, \quad (\text{B.10b})$$

$$\varepsilon^{mnpq} = e \epsilon^{abcd} e_a^m e_b^n e_c^p e_d^q, \quad \varepsilon_{mnpq} = e^{-1} \epsilon_{abcd} e_m^a e_n^b e_p^c e_q^d, \quad (\text{B.10c})$$

$$\epsilon^{abcd} \epsilon_{abcd} = +4! \tilde{\alpha}^2, \quad \varepsilon^{mnpq} \varepsilon_{mnpq} = +4! \tilde{\alpha}^2, \quad (\text{B.10d})$$

$$\epsilon^{abcd} \epsilon_{ebcd} = +3! \alpha^2 \delta_e^a, \quad \varepsilon^{mnpq} \varepsilon_{rnpq} = +3! \alpha^2 \delta_r^m, \quad (\text{B.10e})$$

$$\epsilon^{abcd} \epsilon_{efcd} = +2! \cdot 2! \alpha^2 \delta_{ef}^{ab}, \quad \varepsilon^{mnpq} \varepsilon_{rspq} = +2! \cdot 2! \alpha^2 \delta_{rs}^{mn}, \quad (\text{B.10f})$$

$$\delta_{ef}^{ab} = \frac{1}{2!} (\delta_e^a \delta_f^b - \delta_f^a \delta_e^b). \quad (\text{B.10g})$$

体積要素についていくつかの関係式を列挙して、スケール因子を固定しよう:

$$\begin{aligned} (\text{vol.})_4 &= e^{\hat{1}} \wedge e^{\hat{2}} \wedge e^{\hat{3}} \wedge e^{\hat{4}} = \frac{1}{4! \tilde{\alpha}} \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \\ &= e_m^{\hat{1}} e_n^{\hat{2}} e_p^{\hat{3}} e_q^{\hat{4}} dx^m \wedge dx^n \wedge dx^p \wedge dx^q \equiv e d^4 x, \end{aligned} \quad (\text{B.11a})$$

$$e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \equiv \tilde{\beta} \epsilon^{abcd} e^{\hat{1}} \wedge e^{\hat{2}} \wedge e^{\hat{3}} \wedge e^{\hat{4}} = \tilde{\beta} \epsilon^{abcd} (\text{vol.})_4, \quad (\text{B.11b})$$

$$d^4 x = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 \equiv \tilde{a} \varepsilon_{mnpq} dx^m \wedge dx^n \wedge dx^p \wedge dx^q, \quad (\text{B.11c})$$

$$dx^m \wedge dx^n \wedge dx^p \wedge dx^q \equiv \tilde{b} \varepsilon^{mnpq} d^4 x. \quad (\text{B.11d})$$

規格化因子 $\tilde{\alpha}$ とは別にスケール因子 $\tilde{\beta}, \tilde{a}, \tilde{b}$ を導入した。それぞれは恒等式で関係付く:

$$\epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d = \tilde{\beta} \epsilon_{abcd} \epsilon^{abcd} (\text{vol.})_4 = 4! \tilde{\alpha}^2 \tilde{\beta} (\text{vol.})_4 = 4! \tilde{\alpha} (\text{vol.})_4, \quad (\text{B.12a})$$

$$\varepsilon_{mnpq} dx^m \wedge dx^n \wedge dx^p \wedge dx^q = \tilde{b} \varepsilon_{mnpq} \varepsilon^{mnpq} d^4 x = +4! \tilde{\alpha}^2 \tilde{b} d^4 x = \frac{1}{\tilde{a}} d^4 x, \quad (\text{B.12b})$$

$$e^a \varepsilon_{mnpq} dx^m \wedge dx^n \wedge dx^p \wedge dx^q = \tilde{a} \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d = 4! \tilde{a} \tilde{\alpha} (\text{vol.})_4 \equiv (\text{vol.})_4. \quad (\text{B.12c})$$

これにより以下が導かれる:

$$\tilde{\alpha}^2 \tilde{\beta} = \tilde{\alpha}, \quad \tilde{a} \tilde{b} = +\frac{1}{4! \tilde{\alpha}^2}, \quad 1 = 4! \tilde{a} \tilde{\alpha}, \quad (\text{B.13a})$$

$$\therefore \tilde{\beta} = \frac{1}{\tilde{\alpha}}, \quad \tilde{a} = \frac{1}{4! \tilde{\alpha}}, \quad \tilde{b} = \frac{1}{\tilde{\alpha}}. \quad (\text{B.13b})$$

$\tilde{\alpha}$ は任意。このノートでは $\tilde{\alpha} \equiv +1$ とする事がある。厳密に言えば、 ϵ^{abcd} はテンソルであるが ε^{mnpq} は完全反対称記号でありテンソルではない。

Euclid 空間での Hodge 双対の定義は次の通りとする。全て4次元接空間で行う:

$$*1 \equiv \frac{1}{0! \cdot 4!} \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d = \tilde{\alpha} (\text{vol.})_4, \quad (\text{B.14a})$$

$$*\omega_1 = *(\omega_a e^a) \equiv \frac{1}{1! \cdot 3!} \omega^a \epsilon_{abcd} e^b \wedge e^c \wedge e^d \equiv \frac{1}{3!} W_{bcd} e^b \wedge e^c \wedge e^d, \quad (\text{B.14b})$$

$$*\omega_2 = *\left(\frac{1}{2!} \omega_{ab} e^a \wedge e^b\right) \equiv \frac{1}{2! \cdot 2!} \omega^{ab} \epsilon_{abcd} e^c \wedge e^d \equiv \frac{1}{2!} W_{cd} e^c \wedge e^d, \quad (\text{B.14c})$$

$$*(\text{vol.})_4 = *\left(\frac{1}{4! \tilde{\alpha}} \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d\right) \equiv \frac{1}{4! \cdot 0! \tilde{\alpha}} \epsilon^{abcd} \epsilon_{abcd} = \tilde{\alpha}, \quad (\text{B.14d})$$

$$W_{bcd} = \omega^a \epsilon_{abcd}, \quad W_{cd} = \frac{1}{2!} \omega^{ab} \epsilon_{abcd}, \quad (\text{B.14e})$$

$$W^{bcd} = \omega_a \epsilon^{abcd}, \quad W^{cd} = \frac{1}{2!} \omega_{ab} \epsilon^{abcd}. \quad (\text{B.14f})$$

ここでHodge双対を2回作用する操作を評価する:

$$*(*1) = *(\tilde{\alpha}(\text{vol.})_4) = \tilde{\alpha}^2, \quad (\text{B.15a})$$

$$\begin{aligned} *(*\omega_1) &= * \left(\frac{1}{3!} W_{abc} e^a \wedge e^b \wedge e^c \right) = \frac{1}{3! \cdot 1!} W^{abc} \epsilon_{abcd} e^d = \frac{1}{3! \cdot 1!} \omega_e \epsilon^{abc} \epsilon_{abcd} e^d \\ &= \frac{1}{3!} \omega_e \left(-3! \tilde{\alpha}^2 \delta_e^d \right) e^d = -\tilde{\alpha}^2 \omega_c e^c, \end{aligned} \quad (\text{B.15b})$$

$$\begin{aligned} *(*\omega_2) &= * \left(\frac{1}{2!} W_{cd} e^c \wedge e^d \right) = \frac{1}{2! \cdot 2!} W^{cd} \epsilon_{cdab} e^a \wedge e^b = \frac{1}{(2!)^3} \omega_{ef} \epsilon^{efcd} \epsilon_{cdab} e^a \wedge e^b \\ &= \frac{1}{(2!)^3} \omega_{ef} \left((2!)^2 \tilde{\alpha}^2 \delta_{ab}^{de} \right) e^a \wedge e^b = \frac{\tilde{\alpha}^2}{2!} \omega_{ab} e^a \wedge e^b, \end{aligned} \quad (\text{B.15c})$$

$$*(*(\text{vol.})_4) = *\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}^2(\text{vol.})_4. \quad (\text{B.15d})$$

これより次が確認できる:

$$**1 = +\tilde{\alpha}^2, \quad **(\text{vol.})_4 = +\tilde{\alpha}^2(\text{vol.})_4. \quad (\text{B.16})$$

これを拡張して、一般の D 次元 Euclid 空間での Hodge 双対を一般に次の様に定める:

$$\omega_p = \frac{1}{p!} \omega_{a_1 \dots a_p} e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_p} = \frac{1}{p!} \omega_{m_1 \dots m_p} dx^{m_1} \wedge \dots \wedge dx^{m_p}, \quad (\text{B.17a})$$

$$\begin{aligned} *\omega_p &= \frac{1}{p!(D-p)!} \omega^{a_1 \dots a_p} \epsilon_{a_1 \dots a_p b_1 \dots b_{D-p}} e^{b_1} \wedge \dots \wedge e^{b_{D-p}} \\ &= \frac{\sqrt{|g_D|}}{p!(D-p)!} \omega^{m_1 \dots m_p} \epsilon_{m_1 \dots m_p n_1 \dots n_{D-p}} dx^{n_1} \wedge \dots \wedge dx^{n_{D-p}}, \end{aligned} \quad (\text{B.17b})$$

$$**\omega_p = (-1)^{p(D-p)} \tilde{\alpha}^2 \omega_p. \quad (\text{B.17c})$$

なお、表記が混同してややこしい場合は、curved space における完全反対称テンソルとして振る舞う

$$\epsilon_{mnpq} \equiv \epsilon_{abcd} e_m^a e_n^b e_p^c e_q^d = (e \epsilon_{ijkl} e_a^i e_b^j e_c^k e_d^l) e_m^a e_n^b e_p^c e_q^d = e \epsilon_{mnpq}, \quad (\text{B.18a})$$

$$\epsilon^{mnpq} \equiv \epsilon^{abcd} e_a^m e_b^n e_c^p e_d^q = (e^{-1} \epsilon^{ijkl} e_i^a e_j^b e_k^c e_l^d) e_a^m e_b^n e_c^p e_d^q = e^{-1} \epsilon^{mnpq}, \quad (\text{B.18b})$$

$$\epsilon^{mnpq} \epsilon_{mnpq} = \epsilon^{abcd} \epsilon_{abcd} = +4! \tilde{\alpha}^2, \quad \text{etc.} \quad (\text{B.18c})$$

という表記を導入すれば良い。

C $\mathcal{N} = (2, 2)$ supersymmetry in 2D Lorentzian spacetime

C.1 Clifford algebra

Lorentzian signature における Clifford 代数とその Weyl 表示を具体的に明示しておこう ([7, 8] から少し変更するが支障はない):

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = +2\eta^{ab}, \quad (\gamma^a)^\dagger = \gamma_a = -\gamma^{\hat{0}}\gamma^a(\gamma^{\hat{0}})^{-1}, \quad \eta_{ab} = \text{diag.}(-, +), \quad (\text{C.1a})$$

$$\gamma^{\hat{0}} = i\sigma^2, \quad \gamma^{\hat{1}} = \sigma^1, \quad \gamma_3 = \gamma^{\hat{0}}\gamma^{\hat{1}} = \sigma^3, \quad (\text{C.1b})$$

$$C = -\gamma^{\hat{0}} = -i\sigma^2, \quad C^\dagger = C^T = C^{-1} = -C, \quad C\gamma^a C^{-1} = -(\gamma^a)^T. \quad (\text{C.1c})$$

ここで σ^i は Pauli matrix. C は 2D charge conjugate matrix.

C.2 Spinors in this notes

The covariant superderivatives $D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}$ and supercharges $Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ are rewritten as follows:

$$D_\pm = \frac{\partial}{\partial\theta^\pm} - i\bar{\theta}^\pm(\partial_0 \pm \partial_1), \quad \bar{D}_\pm = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\pm} + i\theta^\pm(\partial_0 \pm \partial_1), \quad (\text{C.2a})$$

$$Q_\pm = \frac{\partial}{\partial\theta^\pm} + i\bar{\theta}^\pm(\partial_0 \pm \partial_1), \quad \bar{Q}_\pm = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\pm} - i\theta^\pm(\partial_0 \pm \partial_1). \quad (\text{C.2b})$$

Here we define the measure of fermionic coordinates in the superspace:

$$d^2\theta = -\frac{1}{4}d\theta^\alpha d\theta^\beta \varepsilon_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}d\theta^+ d\theta^-, \quad d^2\bar{\theta} = -\frac{1}{4}d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} d\bar{\theta}_{\dot{\beta}} \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \frac{1}{2}d\bar{\theta}^+ d\bar{\theta}^-, \quad (\text{C.3a})$$

$$d^2\tilde{\theta} = -\frac{1}{2}d\theta^+ d\bar{\theta}^-, \quad d^2\bar{\tilde{\theta}} = -\frac{1}{2}d\theta^- d\bar{\theta}^+, \quad (\text{C.3b})$$

$$d^4\theta = d^2\theta d^2\bar{\theta} = -d^2\tilde{\theta} d^2\bar{\tilde{\theta}} = -\frac{1}{4}d\theta^+ d\theta^- d\bar{\theta}^+ d\bar{\theta}^-. \quad (\text{C.3c})$$

ただし hermitian conjugate は $(\eta_+\lambda_-)^\dagger = +\bar{\lambda}_-\bar{\eta}_+$ と定義する。

We define integrals of superspace coordinates as follows:

$$\int d^2\theta \theta\theta = 1, \quad \int d^2\bar{\theta} \bar{\theta}\bar{\theta} = 1, \quad \int d^2\tilde{\theta} \theta^+\bar{\theta}^- = \frac{1}{2}, \quad \int d^2\bar{\tilde{\theta}} \theta^-\bar{\theta}^+ = \frac{1}{2}. \quad (\text{C.4})$$

We describe general $\mathcal{N} = (2, 2)$ supersymmetry (anti-)commutation relations:

$$Q_+^2 = Q_-^2 = \bar{Q}_+^2 = \bar{Q}_-^2 = 0, \quad (\text{C.5a})$$

$$\{Q_\pm, \bar{Q}_\pm\} = -2i(\partial_0 \pm \partial_1) = 2(H \mp P), \quad (\text{C.5b})$$

$$\{\bar{Q}_+, \bar{Q}_-\} = 0, \quad \{Q_+, Q_-\} = 0, \quad \{Q_-, \bar{Q}_+\} = 0, \quad \{Q_+, \bar{Q}_-\} = 0, \quad (\text{C.5c})$$

$$\{D_\pm, \bar{D}_\pm\} = 2i(\partial_0 \pm \partial_1), \quad (\text{C.5d})$$

$$\{\bar{D}_\alpha, \bar{D}_\beta\} = \{D_\alpha, D_\beta\} = \{D_\pm, \bar{D}_\mp\} = 0, \quad (\text{C.5e})$$

$$\{D_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{D}_\alpha, Q_\beta\} = \{D_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = \{\bar{D}_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = 0, \quad (\text{C.5f})$$

$$[M, Q_{\pm}] = \mp Q_{\pm}, \quad [M, \bar{Q}_{\pm}] = \mp \bar{Q}_{\pm}, \quad (\text{C.5g})$$

$$[F_V, Q_{\pm}] = -Q_{\pm}, \quad [F_V, \bar{Q}_{\pm}] = \bar{Q}_{\pm}, \quad (\text{C.5h})$$

$$[F_A, Q_{\pm}] = \mp Q_{\pm}, \quad [F_A, \bar{Q}_{\pm}] = \pm \bar{Q}_{\pm}. \quad (\text{C.5i})$$

where M is a two-dimensional Lorentz generator; F_V, F_A are vector R -rotation, axial R -rotation generators, respectively. These R -rotations are defined by

$$e^{i\alpha F_V} : \mathcal{F}(x, \theta^{\pm}, \bar{\theta}^{\pm}) \mapsto e^{i\alpha q_V} \mathcal{F}(x, e^{-i\alpha} \theta^{\pm}, e^{i\alpha} \bar{\theta}^{\pm}), \quad (\text{C.6a})$$

$$e^{i\beta F_A} : \mathcal{F}(x, \theta^{\pm}, \bar{\theta}^{\pm}) \mapsto e^{i\beta q_A} \mathcal{F}(x, e^{\mp i\beta} \theta^{\pm}, e^{\pm i\beta} \bar{\theta}^{\pm}), \quad (\text{C.6b})$$

where $\mathcal{F}(x, \theta^{\pm}, \bar{\theta}^{\pm})$ is an arbitrary superfield and q_V, q_A are R -charges of $\mathcal{F}$.

Here, following [18], we have introduced the convention:

$$(\theta^1, \theta^2) \equiv (\theta^-, \theta^+), \quad (\text{C.7a})$$

$$\theta_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta} \theta^{\beta}, \quad \theta^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta} \theta_{\beta}, \quad (\text{C.7b})$$

$$\varepsilon^{-+} = \varepsilon_{+-} = +1, \quad \theta^{-} = +\theta_{+}, \quad \theta^{+} = -\theta_{-}, \quad (\text{C.7c})$$

$$(\theta^{\alpha})^{\dagger} = \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \quad (\theta^{\pm})^{\dagger} = \bar{\theta}^{\pm}, \quad (\text{C.7d})$$

$$\theta\theta \equiv \theta^{\alpha} \theta_{\alpha} = \theta^{\alpha} (\varepsilon_{\alpha\beta} \theta^{\beta}) = +\theta^{+} \theta^{-} - \theta^{-} \theta^{+} = 2\theta^{+} \theta^{-}, \quad (\text{C.7e})$$

$$\bar{\theta}\bar{\theta} \equiv \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} (\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\theta}_{\dot{\beta}}) = -\bar{\theta}_{+} \bar{\theta}_{-} + \bar{\theta}_{-} \bar{\theta}_{+} = +\bar{\theta}^{-} \bar{\theta}^{+} - \bar{\theta}^{+} \bar{\theta}^{-} = -2\bar{\theta}^{+} \bar{\theta}^{-}. \quad (\text{C.7f})$$

C.3 Dirac spinors

一般に Dirac spinor ψ_D の Dirac conjugate $\bar{\psi}_D \equiv i\psi^\dagger \gamma^0$ を用いて、Weyl spinors での表記を Dirac spinors の表記にしておこう⁶:

$$\theta_D \equiv \begin{pmatrix} \theta_+ \\ \theta_- \end{pmatrix}, \quad \bar{\theta}_D \equiv i\theta_D^\dagger \gamma^0 = (\bar{\theta}_+ \ \bar{\theta}_-) \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = (-i\bar{\theta}_- \ i\bar{\theta}_+), \quad (\text{C.8a})$$

$$\theta_D^c \equiv C\bar{\theta}_D^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\bar{\theta}_- \\ i\bar{\theta}_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\bar{\theta}_+ \\ -i\bar{\theta}_- \end{pmatrix}. \quad (\text{C.8b})$$

さて、これを用いて以下を書き換えておく:

$$\begin{aligned} 2\theta^+ \theta^- &= -2\theta_- \theta_+ = (\theta_+ \ \theta_-) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_+ \\ \theta_- \end{pmatrix} = \theta_D^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \theta_D \\ &= -\theta_D^T C \theta_D, \end{aligned} \quad (\text{C.9a})$$

$$\begin{aligned} 2\bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- &= -2\bar{\theta}_- \bar{\theta}_+ = (-i\bar{\theta}_- \ i\bar{\theta}_+) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\bar{\theta}_- \\ i\bar{\theta}_+ \end{pmatrix} \\ &= \bar{\theta}_D C \bar{\theta}_D^T, \end{aligned} \quad (\text{C.9b})$$

$$\begin{aligned} \theta^- \bar{\theta}^+ \sigma &= \bar{\theta}_- \theta_+ \sigma = (-i\bar{\theta}_- \ i\bar{\theta}_+) \begin{pmatrix} i\sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_+ \\ \theta_- \end{pmatrix} = i\bar{\theta}_D \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \theta_D \\ &= i\bar{\theta}_D P_+ \theta_D \sigma, \quad P_\pm \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm \gamma_3), \end{aligned} \quad (\text{C.9c})$$

$$\begin{aligned} \theta^+ \bar{\theta}^- \bar{\sigma} &= \bar{\theta}_+ \theta_- \bar{\sigma} = (-i\bar{\theta}_- \ i\bar{\theta}_+) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -i\bar{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_+ \\ \theta_- \end{pmatrix} = -i\bar{\theta}_D \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} \end{pmatrix} \theta_D \\ &= -i\bar{\theta}_D P_- \theta_D \bar{\sigma}, \end{aligned} \quad (\text{C.9d})$$

$$\begin{aligned} \theta^+ \bar{\theta}^+ (A_0 + A_1) + \theta^- \bar{\theta}^- (A_0 - A_1) &= -\bar{\theta}_- \theta_- (A_0 + A_1) - \bar{\theta}_+ \theta_+ (A_0 - A_1) \\ &= (-i\bar{\theta}_- \ i\bar{\theta}_+) \begin{pmatrix} 0 & -i(A_0 + A_1) \\ -i(-A_0 + A_1) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_+ \\ \theta_- \end{pmatrix} \\ &= -i\bar{\theta}_D \gamma^m \theta_D A_m. \end{aligned} \quad (\text{C.9e})$$

ガンマ行列の表示は (C.1) を用いている。なお、次が用いられている:

$$\begin{aligned} (\gamma_3)^T &= (\gamma^0 \gamma^1)^T = (\gamma^1)^T (\gamma^0)^T = C \gamma^1 \gamma^0 C^{-1} = -C \gamma^0 \gamma^1 C^{-1} \\ &= -C \gamma_3 C^{-1} = \gamma_3, \end{aligned} \quad (\text{C.10a})$$

$$\begin{aligned} (\gamma_3)^\dagger &= (\gamma^0 \gamma^1)^\dagger = (\gamma^1)^\dagger (\gamma^0)^\dagger = -\gamma^1 \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^1 \\ &= \gamma_3, \end{aligned} \quad (\text{C.10b})$$

$$P_+^T = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_3^T) = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - C \gamma_3 C^{-1}) = C P_- C^{-1} = P_+. \quad (\text{C.10c})$$

なお、Majorana 条件とは $\psi_D = \psi_D^c \equiv C\bar{\psi}_D^T$ (つまり $\bar{\psi}_D = \psi_D^T C$) という関係が成立するときのことを言うが、この模型で扱っている $\theta_\pm$ や $\psi_\pm$ はあくまでも Weyl spinors であるとして、Majorana 条件を課していないことに注意。

⁶Weyl spinors の成分についての hermitian conjugate と同記号を用いるが、添字が異なるので判別可能であろう。

C.4 Explicit forms

各 superfields の成分場表示を明記しておく (V_a は abelian で、かつ Wess-Zumino gauge 下)⁷。

Vector multiplets:

$$V_a = -\theta^+\bar{\theta}^+(A_{0,a} + A_{1,a}) - \theta^-\bar{\theta}^-(A_{0,a} - A_{1,a}) - \sqrt{2}\theta^-\bar{\theta}^+\sigma_a - \sqrt{2}\theta^+\bar{\theta}^-\bar{\sigma}_a \\ - 2i\theta^+\theta^-(\bar{\theta}^+\bar{\lambda}_{+,a} + \bar{\theta}^-\bar{\lambda}_{-,a}) + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\theta^+\lambda_{+,a} + \theta^-\lambda_{-,a}) + 2\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-D_{V,a}, \quad (\text{C.11a})$$

$$V_a^2 = 2\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(-A_{0,a}^2 + A_{1,a}^2 + 2|\sigma_a|^2), \quad (\text{C.11b})$$

$$\Sigma_a = \frac{1}{4\sqrt{2}}\{\bar{D}_+, D_-\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{D}_+D_-V_a \\ = \sigma_a + i\sqrt{2}\theta^+\bar{\lambda}_{+,a} - i\sqrt{2}\bar{\theta}^-\lambda_{-,a} - \sqrt{2}\theta^+\bar{\theta}^-(D_{V,a} - iF_{01,a}) \\ - i\bar{\theta}^-\theta^-(\partial_0 - \partial_1)\sigma_a - i\theta^+\bar{\theta}^+(\partial_0 + \partial_1)\sigma_a - \sqrt{2}\bar{\theta}^-\theta^+\theta^-(\partial_0 - \partial_1)\bar{\lambda}_{+,a} \\ + \sqrt{2}\theta^+\bar{\theta}^-\bar{\theta}^+(\partial_0 + \partial_1)\lambda_{-,a} - \theta^+\bar{\theta}^-\theta^-\bar{\theta}^+(\partial_0^2 - \partial_1^2)\sigma_a, \quad (\text{C.11c})$$

$$\bar{\Sigma}_a = \bar{\sigma}_a + i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\lambda_{+,a} - i\sqrt{2}\theta^-\bar{\lambda}_{-,a} - \sqrt{2}\theta^-\bar{\theta}^+(D_{V,a} + iF_{01,a}) \\ + i\bar{\theta}^-\theta^-(\partial_0 - \partial_1)\bar{\sigma}_a + i\theta^+\bar{\theta}^+(\partial_0 + \partial_1)\bar{\sigma}_a - \sqrt{2}\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0 - \partial_1)\lambda_{+,a} \\ + \sqrt{2}\bar{\theta}^+\theta^-\theta^+(\partial_0 + \partial_1)\bar{\lambda}_{-,a} - \theta^+\bar{\theta}^-\theta^-\bar{\theta}^+(\partial_0^2 - \partial_1^2)\bar{\sigma}_a, \quad (\text{C.11d})$$

$$\Phi_a = \bar{D}_+\bar{D}_-C_a \\ = \phi_a + i\sqrt{2}\theta^+\tilde{\lambda}_{+,a} + i\sqrt{2}\theta^-\tilde{\lambda}_{-,a} + 2i\theta^+\theta^-D_{\Phi,a} \\ - i\theta^+\bar{\theta}^+(\partial_0 + \partial_1)\phi_a - i\theta^-\bar{\theta}^-(\partial_0 - \partial_1)\phi_a + \theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0^2 - \partial_1^2)\phi_a \\ + \sqrt{2}\theta^+\bar{\theta}^+\theta^-(\partial_0 + \partial_1)\tilde{\lambda}_{-,a} + \sqrt{2}\theta^-\bar{\theta}^-\theta^+(\partial_0 - \partial_1)\tilde{\lambda}_{+,a}, \quad (\text{C.11e})$$

$$\bar{\Phi}_a = \bar{\phi}_a + i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\tilde{\bar{\lambda}}_{+,a} + i\sqrt{2}\bar{\theta}^-\tilde{\bar{\lambda}}_{-,a} + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{D}_{\Phi,a} \\ + i\theta^+\bar{\theta}^+(\partial_0 + \partial_1)\bar{\phi}_a + i\theta^-\bar{\theta}^-(\partial_0 - \partial_1)\bar{\phi}_a + \theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0^2 - \partial_1^2)\bar{\phi}_a \\ - \sqrt{2}\theta^+\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0 + \partial_1)\tilde{\bar{\lambda}}_{-,a} - \sqrt{2}\theta^-\bar{\theta}^-\bar{\theta}^+(\partial_0 - \partial_1)\tilde{\bar{\lambda}}_{+,a}, \quad (\text{C.11f})$$

$$C_a = \phi_{c,a} + i\sqrt{2}\theta^+\psi_{c+,a} + i\sqrt{2}\theta^-\psi_{c-,a} + i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\bar{\chi}_{c+,a} + i\sqrt{2}\bar{\theta}^-\bar{\chi}_{c-,a} \\ + 2i\theta^+\theta^-F_{c,a} + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-M_{c,a} + 2i\theta^+\bar{\theta}^-G_{c,a} - 2i\theta^-\bar{\theta}^+N_{c,a} - \theta^-\bar{\theta}^-A_{c=,a} - \theta^+\bar{\theta}^+B_{c=,a} \\ - 2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\zeta}_{c+,a} - 2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^-\bar{\zeta}_{c-,a} + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\theta^+\lambda_{c+,a} + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\theta^-\lambda_{c-,a} \\ + 2\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-D_{c,a}. \quad (\text{C.11g})$$

なお、注意として2種類の共変微分は次で定義される:

$$D_{\pm} = \frac{\partial}{\partial\theta^{\pm}} - i\bar{\theta}^{\pm}(\partial_0 \pm \partial_1), \quad \bar{D}_{\pm} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\pm}} + i\theta^{\pm}(\partial_0 \pm \partial_1). \quad (\text{C.12})$$

また、 $\Phi_a = \bar{D}_+\bar{D}_-C_a$ に伴う成分場の対応は次の通り:

$$\phi_a \equiv -2iM_{c,a}, \quad (\text{C.13a})$$

$$D_{\Phi,a} \equiv iD_{c,a} - \frac{1}{2}(\partial_0 - \partial_1)B_{c=,a} - \frac{1}{2}(\partial_0 + \partial_1)A_{c=,a} + \frac{i}{2}(\partial_0^2 - \partial_1^2)\phi_{c,a}, \quad (\text{C.13b})$$

$$\tilde{\lambda}_{\pm,a} \equiv -\sqrt{2}\lambda_{c\pm,a} \mp i(\partial_0 \pm \partial_1)\bar{\chi}_{c\mp,a}, \quad (\text{C.13c})$$

$$\{F_{c,a}, G_{c,a}, N_{c,a}, \psi_{c\pm,a}, \bar{\zeta}_{c\pm,a}\} : \quad (\text{no relations}). \quad (\text{C.13d})$$

⁷unconstrained 超場 C_a の成分場 $\chi_{c\pm,a}, \zeta_{c\pm,a}$ の定義は [1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14] とは異なる。

Charged hypermultiplets:

$$\begin{aligned}
Q &= q + i\sqrt{2}\theta^+\psi_+ + i\sqrt{2}\theta^-\psi_- + 2i\theta^+\theta^-F \\
&\quad - i\theta^+\bar{\theta}^+(\partial_0 + \partial_1)q - i\theta^-\bar{\theta}^-(\partial_0 - \partial_1)q + \theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0^2 - \partial_1^2)q \\
&\quad + \sqrt{2}\theta^+\bar{\theta}^+\theta^-(\partial_0 + \partial_1)\psi_- + \sqrt{2}\theta^-\bar{\theta}^-\theta^+(\partial_0 - \partial_1)\psi_+,
\end{aligned} \tag{C.14a}$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q} &= \bar{q} + i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\bar{\psi}_+ + i\sqrt{2}\bar{\theta}^-\bar{\psi}_- + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{F} \\
&\quad + i\theta^+\bar{\theta}^+(\partial_0 + \partial_1)\bar{q} + i\theta^-\bar{\theta}^-(\partial_0 - \partial_1)\bar{q} + \theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0^2 - \partial_1^2)\bar{q} \\
&\quad - \sqrt{2}\theta^+\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0 + \partial_1)\bar{\psi}_- - \sqrt{2}\theta^-\bar{\theta}^-\bar{\theta}^+(\partial_0 - \partial_1)\bar{\psi}_+,
\end{aligned} \tag{C.14b}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{Q} &= \tilde{q} + i\sqrt{2}\theta^+\tilde{\psi}_+ + i\sqrt{2}\theta^-\tilde{\psi}_- + 2i\theta^+\theta^-\tilde{F} \\
&\quad - i\theta^+\bar{\theta}^+(\partial_0 + \partial_1)\tilde{q} - i\theta^-\bar{\theta}^-(\partial_0 - \partial_1)\tilde{q} + \theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0^2 - \partial_1^2)\tilde{q} \\
&\quad + \sqrt{2}\theta^+\bar{\theta}^+\theta^-(\partial_0 + \partial_1)\tilde{\psi}_- + \sqrt{2}\theta^-\bar{\theta}^-\theta^+(\partial_0 - \partial_1)\tilde{\psi}_+,
\end{aligned} \tag{C.14c}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\tilde{Q}} &= \bar{\tilde{q}} + i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\bar{\tilde{\psi}}_+ + i\sqrt{2}\bar{\theta}^-\bar{\tilde{\psi}}_- + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{\tilde{F}} \\
&\quad + i\theta^+\bar{\theta}^+(\partial_0 + \partial_1)\bar{\tilde{q}} + i\theta^-\bar{\theta}^-(\partial_0 - \partial_1)\bar{\tilde{q}} + \theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0^2 - \partial_1^2)\bar{\tilde{q}} \\
&\quad - \sqrt{2}\theta^+\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0 + \partial_1)\bar{\tilde{\psi}}_- - \sqrt{2}\theta^-\bar{\theta}^-\bar{\theta}^+(\partial_0 - \partial_1)\bar{\tilde{\psi}}_+.
\end{aligned} \tag{C.14d}$$

Neutral hypermultiplet:

$$\begin{aligned}
\Psi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(r^1 + ir^2) + i\sqrt{2}\theta^+\chi_+ + i\sqrt{2}\theta^-\chi_- + 2i\theta^+\theta^-G \\
&\quad - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^+\bar{\theta}^+(\partial_0 + \partial_1)(r^1 + ir^2) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^-\bar{\theta}^-(\partial_0 - \partial_1)(r^1 + ir^2) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0^2 - \partial_1^2)(r^1 + ir^2) \\
&\quad + \sqrt{2}\theta^+\bar{\theta}^+\theta^-(\partial_0 + \partial_1)\chi_- + \sqrt{2}\theta^-\bar{\theta}^-\theta^+(\partial_0 - \partial_1)\chi_+,
\end{aligned} \tag{C.15a}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(r^1 - ir^2) + i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\bar{\chi}_+ + i\sqrt{2}\bar{\theta}^-\bar{\chi}_- + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{G} \\
&\quad + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^+\bar{\theta}^+(\partial_0 + \partial_1)(r^1 - ir^2) + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^-\bar{\theta}^-(\partial_0 - \partial_1)(r^1 - ir^2) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0^2 - \partial_1^2)(r^1 - ir^2) \\
&\quad - \sqrt{2}\theta^+\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0 + \partial_1)\bar{\chi}_- - \sqrt{2}\theta^-\bar{\theta}^-\bar{\theta}^+(\partial_0 - \partial_1)\bar{\chi}_+,
\end{aligned} \tag{C.15b}$$

$$\begin{aligned}
\Theta &= \frac{1}{\sqrt{2}}(r^3 + i\vartheta) + i\sqrt{2}\theta^+\tilde{\chi}_+ - i\sqrt{2}\theta^-\tilde{\chi}_- + 2i\theta^+\theta^-\tilde{G} \\
&\quad - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^+\bar{\theta}^+(\partial_0 + \partial_1)(r^3 + i\vartheta) + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^-\bar{\theta}^-(\partial_0 - \partial_1)(r^3 + i\vartheta) \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2}}\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0^2 - \partial_1^2)(r^3 + i\vartheta) \\
&\quad - \sqrt{2}\theta^-\bar{\theta}^-\theta^+(\partial_0 - \partial_1)\tilde{\chi}_+ - \sqrt{2}\theta^+\bar{\theta}^+\theta^-(\partial_0 + \partial_1)\tilde{\chi}_-,
\end{aligned} \tag{C.15c}$$

$$\bar{\Theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(r^3 - i\vartheta) + i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\tilde{\chi}_+ - i\sqrt{2}\bar{\theta}^-\tilde{\chi}_- + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{\tilde{G}}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{i}{\sqrt{2}} \theta^+ \bar{\theta}^+ (\partial_0 + \partial_1) (r^3 - i\vartheta) - \frac{i}{\sqrt{2}} \theta^- \bar{\theta}^- (\partial_0 - \partial_1) (r^3 - i\vartheta) \\
& - \frac{1}{\sqrt{2}} \theta^+ \theta^- \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- (\partial_0^2 - \partial_1^2) (r^3 - i\vartheta) \\
& + \sqrt{2} \theta^- \bar{\theta}^- \bar{\theta}^+ (\partial_0 - \partial_1) \tilde{\chi}_+ + \sqrt{2} \theta^+ \bar{\theta}^+ \theta^- (\partial_0 + \partial_1) \tilde{\chi}_-,
\end{aligned} \tag{C.15d}$$

$$\begin{aligned}
\Xi & \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (y^1 + i y^2) + i\sqrt{2} \theta^+ \bar{\xi}_+ - i\sqrt{2} \bar{\theta}^- \xi_- + 2i \theta^+ \bar{\theta}^- G_\Xi \\
& - \frac{i}{\sqrt{2}} \theta^+ \bar{\theta}^+ (\partial_0 + \partial_1) (y^1 + i y^2) + \frac{i}{\sqrt{2}} \theta^- \bar{\theta}^- (\partial_0 - \partial_1) (y^1 + i y^2) \\
& - \frac{1}{\sqrt{2}} \theta^+ \theta^- \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- (\partial_0^2 - \partial_1^2) (y^1 + i y^2) \\
& - \sqrt{2} \theta^- \bar{\theta}^- \theta^+ (\partial_0 - \partial_1) \bar{\xi}_+ - \sqrt{2} \theta^+ \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- (\partial_0 + \partial_1) \xi_-,
\end{aligned} \tag{C.15e}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Xi} & \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (y^1 - i y^2) + i\sqrt{2} \bar{\theta}^+ \xi_+ - i\sqrt{2} \theta^- \bar{\xi}_- + 2i \bar{\theta}^+ \theta^- \bar{G}_\Xi \\
& + \frac{i}{\sqrt{2}} \theta^+ \bar{\theta}^+ (\partial_0 + \partial_1) (y^1 - i y^2) - \frac{i}{\sqrt{2}} \theta^- \bar{\theta}^- (\partial_0 - \partial_1) (y^1 - i y^2) \\
& - \frac{1}{\sqrt{2}} \theta^+ \theta^- \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- (\partial_0^2 - \partial_1^2) (y^1 - i y^2) \\
& + \sqrt{2} \theta^- \bar{\theta}^- \bar{\theta}^+ (\partial_0 - \partial_1) \xi_+ + \sqrt{2} \theta^+ \bar{\theta}^+ \theta^- (\partial_0 + \partial_1) \bar{\xi}_-,
\end{aligned} \tag{C.15f}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma & = \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma^3 + i\gamma^4) + i\sqrt{2} \theta^+ \zeta_+ + i\sqrt{2} \theta^- \zeta_- + 2i \theta^+ \theta^- G_\Gamma \\
& - \frac{i}{\sqrt{2}} \theta^+ \bar{\theta}^+ (\partial_0 + \partial_1) (\gamma^3 + i\gamma^4) - \frac{i}{\sqrt{2}} \theta^- \bar{\theta}^- (\partial_0 - \partial_1) (\gamma^3 + i\gamma^4) \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}} \theta^+ \theta^- \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- (\partial_0^2 - \partial_1^2) (\gamma^3 + i\gamma^4) \\
& + \sqrt{2} \theta^+ \bar{\theta}^+ \theta^- (\partial_0 + \partial_1) \zeta_- + \sqrt{2} \theta^- \bar{\theta}^- \theta^+ (\partial_0 - \partial_1) \zeta_+,
\end{aligned} \tag{C.15g}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma} & = \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma^3 - i\gamma^4) + i\sqrt{2} \bar{\theta}^+ \bar{\zeta}_+ + i\sqrt{2} \bar{\theta}^- \bar{\zeta}_- + 2i \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- \bar{G}_\Gamma \\
& + \frac{i}{\sqrt{2}} \theta^+ \bar{\theta}^+ (\partial_0 + \partial_1) (\gamma^3 - i\gamma^4) + \frac{i}{\sqrt{2}} \theta^- \bar{\theta}^- (\partial_0 - \partial_1) (\gamma^3 - i\gamma^4) \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}} \theta^+ \theta^- \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- (\partial_0^2 - \partial_1^2) (\gamma^3 - i\gamma^4) \\
& - \sqrt{2} \theta^+ \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- (\partial_0 + \partial_1) \bar{\zeta}_- - \sqrt{2} \theta^- \bar{\theta}^- \bar{\theta}^+ (\partial_0 - \partial_1) \bar{\zeta}_+.
\end{aligned} \tag{C.15h}$$

Duality transformation $\Theta \rightarrow \Gamma$:

$$\Theta + \bar{\Theta} = -g^2 (\Gamma + \bar{\Gamma}) - 2g^2 \sum_a V_a; \tag{C.16a}$$

$$r^3 = -g^2 \gamma^3, \tag{C.16b}$$

$$\bar{\chi}_\pm = \mp g^2 \zeta_\pm, \tag{C.16c}$$

$$\tilde{G} = -i\sqrt{2} g^2 \sum_a \bar{\sigma}_a, \tag{C.16d}$$

$$0 = G_\Gamma, \tag{C.16e}$$

$$\pm(\partial_0 \pm \partial_1)\vartheta = -g^2 \left[(\partial_0 \pm \partial_1)\gamma^4 - \sqrt{2} \sum_a (A_{0,a} \pm A_{1,a}) \right]. \quad (\text{C.16f})$$

Duality transformation $\Psi \rightarrow \Xi$:

$$\Psi + \bar{\Psi} = -g^2(\Xi + \bar{\Xi}) + \sqrt{2}g^2 \sum_a (C_a + \bar{C}_a); \quad (\text{C.17a})$$

$$r^1 = -g^2 y^1 + g^2 \sum_a (\phi_{c,a} + \bar{\phi}_{c,a}), \quad (\text{C.17b})$$

$$\chi_{\pm} = \mp g^2 \bar{\xi}_{\pm} + \sqrt{2}g^2 \sum_a (\psi_{c\pm,a} + \chi_{c\pm,a}), \quad (\text{C.17c})$$

$$G = \sqrt{2}g^2 \sum_a (F_{c,a} + \bar{M}_{c,a}), \quad (\text{C.17d})$$

$$0 = -G_{\Xi} + \sqrt{2} \sum_a (G_{c,a} + \bar{N}_{c,a}), \quad (\text{C.17e})$$

$$(\partial_0 + \partial_1)r^2 = -g^2(\partial_0 + \partial_1)y^2 - g^2 \sum_a (B_{c+,a} + \bar{B}_{c+,a}), \quad (\text{C.17f})$$

$$(\partial_0 - \partial_1)r^2 = +g^2(\partial_0 - \partial_1)y^2 - g^2 \sum_a (A_{c=,a} + \bar{A}_{c=,a}). \quad (\text{C.17g})$$

なお、duality 変換前後での信頼できる成分場同士の対応関係は、 θ 展開での最低次項同士の対応関係である。つまり $\Theta \rightarrow \Gamma$ においては、 (r^3, γ^3) , $(\bar{\chi}_{\pm}, \zeta_{\pm})$ の θ 展開最低次項は微分のない項であり、高次で再登場する関係は (twist 操作があるので) 即座に信頼できない。一方で (ϑ, γ^4) の θ 展開最低次項では既に微分が含まれているため、これを用いるしかない。同様にして、 $\Psi \rightarrow \Xi$ においては (r^1, y^1) , $(\chi_{\pm}, \bar{\xi}_{\pm})$ の θ 展開最低次項は微分のない項である。高次項は (twist された) 微分が含まれるので対応が厄介になる。しかし (r^2, y^2) の対応は θ 展開最低次項で既に微分が含まれるので、これを用いる。

ここで、 $+1, -1$ の電荷をそれぞれ持つ chiral 超場 $Q, \tilde{Q}$ のゲージ変換則も明記しておこう:

$$2V \rightarrow 2V' = 2V - 2i(\Lambda - \bar{\Lambda}), \quad (\text{C.18a})$$

$$Q \rightarrow Q' = e^{+2i\Lambda}Q, \quad \tilde{Q} \rightarrow \tilde{Q}' = e^{-2i\Lambda}\tilde{Q}, \quad (\text{C.18b})$$

$$\Sigma = \frac{1}{4\sqrt{2}}\{\bar{\mathcal{D}}_+, \mathcal{D}_-\}, \quad \mathcal{D}_{\pm} = e^{-2V}D_{\pm}e^{2V}, \quad \bar{\mathcal{D}}_{\pm} = e^{2V}\bar{D}_{\pm}e^{-2V}. \quad (\text{C.18c})$$

C.5 Supersymmetry transformations

$\mathcal{N} = (2, 2)$ 超場を用いて、成分場の超対称変換則を定めよう。任意の超場 $\mathcal{F}$ の超対称変換則を定義する:

$$\delta\mathcal{F} \equiv \left(-i\varepsilon_- Q_+ + i\varepsilon_+ Q_- - i\bar{\varepsilon}_- \bar{Q}_+ + i\bar{\varepsilon}_+ \bar{Q}_- \right) \mathcal{F}. \quad (\text{C.19})$$

ここで $\varepsilon_\pm$ と $\bar{\varepsilon}_\pm$ は超対称変換パラメータで、 $(\varepsilon_\pm)^\dagger = \bar{\varepsilon}_\pm$ である。

C.6 Chiral superfields

supercharges $Q_\pm$ と $\bar{Q}_\pm$ が一般の (neutral) chiral 超場 Φ に作用すると次の様になる:

$$\begin{aligned} \Phi &= \phi + i\sqrt{2}\theta^+\psi_+ + i\sqrt{2}\theta^-\psi_- + 2i\theta^+\theta^-F \\ &\quad - i\theta^+\bar{\theta}^+(\partial_0 + \partial_1)\phi - i\theta^-\bar{\theta}^-(\partial_0 - \partial_1)\phi + \theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0^2 - \partial_1^2)\phi \\ &\quad + \sqrt{2}\theta^+\bar{\theta}^+\theta^-(\partial_0 + \partial_1)\psi_- + \sqrt{2}\theta^-\bar{\theta}^-\theta^+(\partial_0 - \partial_1)\psi_+, \end{aligned} \quad (\text{C.20a})$$

$$\begin{aligned} -i\varepsilon_- Q_+ \Phi &= \sqrt{2}\varepsilon_- \psi_+ - 2\theta^-\varepsilon_- F - i\sqrt{2}\left\{ \theta^+\bar{\theta}^+\varepsilon_- (\partial_0 + \partial_1) + \theta^-\bar{\theta}^-\varepsilon_- (\partial_0 - \partial_1) \right\} \psi_+ \\ &\quad - 2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\varepsilon_- (\partial_0 + \partial_1)F + \sqrt{2}\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\varepsilon_- (\partial_0^2 - \partial_1^2)\psi_+, \end{aligned} \quad (\text{C.20b})$$

$$\begin{aligned} i\varepsilon_+ Q_- \Phi &= -\sqrt{2}\varepsilon_+ \psi_- - 2\theta^+\varepsilon_+ F + i\sqrt{2}\left\{ \theta^+\bar{\theta}^+\varepsilon_+ (\partial_0 + \partial_1) + \theta^-\bar{\theta}^-\varepsilon_+ (\partial_0 - \partial_1) \right\} \psi_- \\ &\quad + 2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^-\varepsilon_+ (\partial_0 - \partial_1)F - \sqrt{2}\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\varepsilon_+ (\partial_0^2 - \partial_1^2)\psi_+, \end{aligned} \quad (\text{C.20c})$$

$$-i\bar{\varepsilon}_- \bar{Q}_+ \Phi = 2\theta^+\bar{\varepsilon}_- (\partial_0 + \partial_1)\phi - 2i\sqrt{2}\theta^+\theta^-\bar{\varepsilon}_- (\partial_0 + \partial_1)\psi_- - 2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^-\bar{\varepsilon}_- (\partial_0^2 - \partial_1^2)\phi, \quad (\text{C.20d})$$

$$i\bar{\varepsilon}_+ \bar{Q}_- \Phi = -2\theta^-\bar{\varepsilon}_+ (\partial_0 - \partial_1)\phi - 2i\sqrt{2}\theta^+\theta^-\bar{\varepsilon}_+ (\partial_0 - \partial_1)\psi_+ - 2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\varepsilon}_+ (\partial_0^2 - \partial_1^2)\phi. \quad (\text{C.20e})$$

よって Φ の成分場 $\phi, \psi_\pm, F$ の超対称変換則は次で与えられる:

$$\delta\Phi \equiv \delta\phi + i\sqrt{2}\theta^+\delta\psi_+ + i\sqrt{2}\theta^-\delta\psi_- + 2i\theta^+\theta^-\delta F + \dots, \quad (\text{C.21a})$$

$$\delta\phi = \sqrt{2}\varepsilon_- \psi_+ - \sqrt{2}\varepsilon_+ \psi_-, \quad (\text{C.21b})$$

$$\delta F = -\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_- (\partial_0 + \partial_1)\psi_- - \sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+ (\partial_0 - \partial_1)\psi_+, \quad (\text{C.21c})$$

$$\delta\psi_+ = -i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_- (\partial_0 + \partial_1)\phi + i\sqrt{2}\varepsilon_+ F, \quad (\text{C.21d})$$

$$\delta\psi_- = i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+ (\partial_0 - \partial_1)\phi + i\sqrt{2}\varepsilon_- F. \quad (\text{C.21e})$$

supercharges $Q_\pm$ と $\bar{Q}_\pm$ が一般の (neutral) chiral 超場 $\bar{\Phi}$ に作用すると次の様になる:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= \bar{\phi} + i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\bar{\psi}_+ + i\sqrt{2}\bar{\theta}^-\bar{\psi}_- + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-F \\ &\quad + i\theta^+\bar{\theta}^+(\partial_0 + \partial_1)\bar{\phi} + i\theta^-\bar{\theta}^-(\partial_0 - \partial_1)\bar{\phi} + \theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0^2 - \partial_1^2)\bar{\phi} \\ &\quad - \sqrt{2}\theta^+\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0 + \partial_1)\bar{\psi}_- - \sqrt{2}\theta^-\bar{\theta}^-\bar{\theta}^+(\partial_0 - \partial_1)\bar{\psi}_+, \end{aligned} \quad (\text{C.22a})$$

$$-i\varepsilon_- Q_+ \bar{\Phi} = -2\bar{\theta}^+\varepsilon_- (\partial_0 + \partial_1)\bar{\phi} + 2i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\varepsilon_- (\partial_0 + \partial_1)\bar{\psi}_- + 2i\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\varepsilon_- (\partial_0^2 - \partial_1^2)\bar{\phi}, \quad (\text{C.22b})$$

$$i\varepsilon_+ Q_- \bar{\Phi} = 2\bar{\theta}^-\varepsilon_+ (\partial_0 - \partial_1)\bar{\phi} + 2i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\varepsilon_+ (\partial_0 - \partial_1)\bar{\psi}_+ + 2i\theta^+\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\varepsilon_+ (\partial_0^2 - \partial_1^2)\bar{\phi}, \quad (\text{C.22c})$$

$$-i\bar{\varepsilon}_- \bar{Q}_+ \bar{\Phi} = -\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_- \bar{\psi}_+ + 2\bar{\theta}^-\bar{\varepsilon}_- F - i\sqrt{2}\left\{ \theta^+\bar{\theta}^+\bar{\varepsilon}_- (\partial_0 + \partial_1) + \theta^-\bar{\theta}^-\bar{\varepsilon}_- (\partial_0 - \partial_1) \right\} \bar{\psi}_+$$

$$+ 2i\theta^+\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{\varepsilon}_-(\partial_0 - \partial_1)\bar{F} - \sqrt{2}\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{\varepsilon}_-(\partial_0^2 - \partial_1^2)\bar{\psi}_+, \quad (\text{C.22d})$$

$$\begin{aligned} i\bar{\varepsilon}_+\bar{Q}_-\bar{\Phi} &= \sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+\bar{\psi}_- + 2\bar{\theta}^+\bar{\varepsilon}_+\bar{F} + i\sqrt{2}\left\{\theta^+\bar{\theta}^+\bar{\varepsilon}_+(\partial_0 + \partial_1) + \theta^-\bar{\theta}^-\bar{\varepsilon}_+(\partial_0 - \partial_1)\right\}\bar{\psi}_- \\ &\quad - 2i\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{\varepsilon}_+(\partial_0 - \partial_1)\bar{F} + \sqrt{2}\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{\varepsilon}_+(\partial_0^2 - \partial_1^2)\bar{\psi}_-. \end{aligned} \quad (\text{C.22e})$$

よって $\bar{\Phi}$ の成分場 $\bar{\phi}$, $\bar{\psi}_\pm$, $\bar{F}$ の超対称変換則は次で与えられる:

$$\delta\bar{\Phi} \equiv \delta\bar{\phi} + i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\delta\bar{\psi}_+ + i\sqrt{2}\bar{\theta}^-\delta\bar{\psi}_- + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\delta\bar{F} + \dots, \quad (\text{C.23a})$$

$$\delta\bar{\phi} = -\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-\bar{\psi}_+ + \sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+\bar{\psi}_-, \quad (\text{C.23b})$$

$$\delta\bar{F} = \sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-(\partial_0 + \partial_1)\bar{\psi}_- + \sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+(\partial_0 - \partial_1)\bar{\psi}_+, \quad (\text{C.23c})$$

$$\delta\bar{\psi}_+ = i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-(\partial_0 + \partial_1)\bar{\phi} - i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+\bar{F}, \quad (\text{C.23d})$$

$$\delta\bar{\psi}_- = -i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+(\partial_0 - \partial_1)\bar{\phi} - i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-\bar{F}. \quad (\text{C.23e})$$

C.7 Twisted chiral superfields

supercharges $Q_\pm$ と $\bar{Q}_\pm$ が一般の (neutral) twisted chiral 超場 Y に作用すると次の様になる:

$$\begin{aligned} Y &= y + i\sqrt{2}\theta^+\bar{\chi}_+ - i\sqrt{2}\bar{\theta}^-\chi_- + 2i\theta^+\bar{\theta}^-G \\ &\quad - i\theta^+\bar{\theta}^+(\partial_0 + \partial_1)y + i\theta^-\bar{\theta}^-(\partial_0 - \partial_1)y - \theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0^2 - \partial_1^2)y \\ &\quad - \sqrt{2}\theta^-\bar{\theta}^-\theta^+(\partial_0 - \partial_1)\bar{\chi}_+ - \sqrt{2}\theta^+\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0 + \partial_1)\chi_-, \end{aligned} \quad (\text{C.24a})$$

$$\begin{aligned} -i\varepsilon_-Q_+Y &= \sqrt{2}\varepsilon_-\bar{\chi}_+ - 2\bar{\theta}^-\varepsilon_-G - i\sqrt{2}\left\{\theta^+\bar{\theta}^+\varepsilon_-(\partial_0 + \partial_1) - \theta^-\bar{\theta}^-\varepsilon_-(\partial_0 - \partial_1)\right\}\bar{\chi}_+ \\ &\quad + 2i\theta^+\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\varepsilon_-(\partial_0 + \partial_1)G - \sqrt{2}\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\varepsilon_-(\partial_0^2 - \partial_1^2)\bar{\chi}_+, \end{aligned} \quad (\text{C.24b})$$

$$i\varepsilon_+Q_-Y = 2\bar{\theta}^-\varepsilon_+(\partial_0 - \partial_1)y + 2i\sqrt{2}\theta^+\bar{\theta}^-\varepsilon_+(\partial_0 - \partial_1)\bar{\chi}_+ - 2i\theta^+\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\varepsilon_+(\partial_0^2 - \partial_1^2)y, \quad (\text{C.24c})$$

$$-i\bar{\varepsilon}_-\bar{Q}_+Y = 2\theta^+\bar{\varepsilon}_-(\partial_0 + \partial_1)y + 2i\sqrt{2}\theta^+\bar{\theta}^-\bar{\varepsilon}_-(\partial_0 + \partial_1)\chi_- + 2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^-\bar{\varepsilon}_-(\partial_0^2 - \partial_1^2)y, \quad (\text{C.24d})$$

$$\begin{aligned} i\bar{\varepsilon}_+\bar{Q}_-Y &= -\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+\chi_- + 2\theta^+\bar{\varepsilon}_+G + i\sqrt{2}\left\{\theta^+\bar{\theta}^+\bar{\varepsilon}_+(\partial_0 + \partial_1) - \theta^-\bar{\theta}^-\bar{\varepsilon}_+(\partial_0 - \partial_1)\right\}\chi_- \\ &\quad + 2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^-\bar{\varepsilon}_+(\partial_0 - \partial_1)G + \sqrt{2}\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{\varepsilon}_+(\partial_0^2 - \partial_1^2)\chi_-. \end{aligned} \quad (\text{C.24e})$$

よって Y の成分場 y , $\bar{\chi}_+$, χ_- , G の超対称変換則は次で与えられる:

$$\delta Y \equiv \delta y + i\sqrt{2}\theta^+\delta\bar{\chi}_+ - i\sqrt{2}\bar{\theta}^-\delta\chi_- + 2i\theta^+\bar{\theta}^-\delta G + \dots, \quad (\text{C.25a})$$

$$\delta y = \sqrt{2}\varepsilon_-\bar{\chi}_+ - \sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+\chi_-, \quad (\text{C.25b})$$

$$\delta G = \sqrt{2}\varepsilon_+(\partial_0 - \partial_1)\bar{\chi}_+ + \sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-(\partial_0 + \partial_1)\chi_-, \quad (\text{C.25c})$$

$$\delta\bar{\chi}_+ = -i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-(\partial_0 + \partial_1)y - i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+G, \quad (\text{C.25d})$$

$$\delta\chi_- = i\sqrt{2}\varepsilon_+(\partial_0 - \partial_1)y - i\sqrt{2}\varepsilon_-G. \quad (\text{C.25e})$$

supercharges $Q_\pm$ と $\bar{Q}_\pm$ が一般の (neutral) twisted chiral 超場 $\bar{Y}$ に作用すると次の様になる:

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= \bar{y} + i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\chi_+ - i\sqrt{2}\bar{\theta}^-\bar{\chi}_- + 2i\bar{\theta}^+\theta^-\bar{G} \\ &\quad + i\theta^+\bar{\theta}^+(\partial_0 + \partial_1)\bar{y} - i\theta^-\bar{\theta}^-(\partial_0 - \partial_1)\bar{y} - \theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0^2 - \partial_1^2)\bar{y} \\ &\quad + \sqrt{2}\theta^-\bar{\theta}^-\bar{\theta}^+(\partial_0 - \partial_1)\chi_+ + \sqrt{2}\theta^+\bar{\theta}^+\theta^-(\partial_0 + \partial_1)\bar{\chi}_-, \end{aligned} \quad (\text{C.26a})$$

$$-i\varepsilon_- Q_+ \bar{Y} = -2\bar{\theta}^+ \varepsilon_- (\partial_0 + \partial_1) \bar{y} + 2i\sqrt{2} \theta^- \bar{\theta}^+ \varepsilon_- (\partial_0 + \partial_1) \bar{\chi}_- - 2i \theta^- \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- \varepsilon_- (\partial_0^2 - \partial_1^2) \bar{y}, \quad (C.26b)$$

$$\begin{aligned} i\varepsilon_+ Q_- \bar{Y} &= \sqrt{2} \varepsilon_+ \bar{\chi}_- - 2\bar{\theta}^+ \varepsilon_+ \bar{G} + i\sqrt{2} \left\{ \theta^+ \bar{\theta}^+ \varepsilon_+ (\partial_0 + \partial_1) - \theta^- \bar{\theta}^- \varepsilon_+ (\partial_0 - \partial_1) \right\} \bar{\chi}_- \\ &\quad + 2i \theta^- \bar{\theta}^- \bar{\theta}^+ \varepsilon_+ (\partial_0 - \partial_1) \bar{G} - \sqrt{2} \theta^+ \theta^- \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- \varepsilon_+ (\partial_0^2 - \partial_1^2) \bar{\chi}_-, \end{aligned} \quad (C.26c)$$

$$\begin{aligned} -i\bar{\varepsilon}_- \bar{Q}_+ \bar{Y} &= -\sqrt{2} \bar{\varepsilon}_- \chi_+ + 2\theta^- \bar{\varepsilon}_- \bar{G} - i\sqrt{2} \left\{ \theta^+ \bar{\theta}^+ \bar{\varepsilon}_- (\partial_0 + \partial_1) - \theta^- \bar{\theta}^- \bar{\varepsilon}_- (\partial_0 - \partial_1) \right\} \chi_+ \\ &\quad + 2i \theta^+ \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- \bar{\varepsilon}_- (\partial_0 + \partial_1) \bar{G} + \sqrt{2} \theta^+ \theta^- \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- \bar{\varepsilon}_- (\partial_0^2 - \partial_1^2) \chi_+, \end{aligned} \quad (C.26d)$$

$$i\bar{\varepsilon}_+ \bar{Q}_- \bar{Y} = -2\theta^- \bar{\varepsilon}_+ (\partial_0 - \partial_1) \bar{y} + 2i\sqrt{2} \theta^- \bar{\theta}^+ \bar{\varepsilon}_+ (\partial_0 - \partial_1) \chi_+ + 2i \theta^+ \theta^- \bar{\theta}^+ \bar{\varepsilon}_+ (\partial_0^2 - \partial_1^2) \bar{y}. \quad (C.26e)$$

よって $\bar{Y}$ の成分場 $\bar{y}$, χ_+ , $\bar{\chi}_-$, $\bar{G}$ の超対称変換則は次で与えられる:

$$\delta \bar{Y} \equiv \delta \bar{y} + i\sqrt{2} \bar{\theta}^+ \delta \chi_+ - i\sqrt{2} \theta^- \delta \bar{\chi}_- + 2i \bar{\theta}^+ \theta^- \delta \bar{G} + \dots, \quad (C.27a)$$

$$\delta \bar{y} = -\sqrt{2} \bar{\varepsilon}_- \chi_+ + \sqrt{2} \varepsilon_+ \bar{\chi}_-, \quad (C.27b)$$

$$\delta \bar{G} = -\sqrt{2} \bar{\varepsilon}_+ (\partial_0 - \partial_1) \chi_+ - \sqrt{2} \varepsilon_- (\partial_0 + \partial_1) \bar{\chi}_-, \quad (C.27c)$$

$$\delta \chi_+ = i\sqrt{2} \varepsilon_- (\partial_0 + \partial_1) \bar{y} + i\sqrt{2} \varepsilon_+ \bar{G}, \quad (C.27d)$$

$$\delta \bar{\chi}_- = -i\sqrt{2} \bar{\varepsilon}_+ (\partial_0 - \partial_1) \bar{y} + i\sqrt{2} \bar{\varepsilon}_- \bar{G}. \quad (C.27e)$$

同様にして、twisted chiral 超場 Σ , $\bar{\Sigma}$ についての超対称変換則を明記する:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \sigma + i\sqrt{2} \theta^+ \bar{\lambda}_+ - i\sqrt{2} \bar{\theta}^- \lambda_- - \sqrt{2} \theta^+ \bar{\theta}^- (D_V - iF_{01}) \\ &\quad - i \theta^+ \bar{\theta}^+ (\partial_0 + \partial_1) \sigma + i \theta^- \bar{\theta}^- (\partial_0 - \partial_1) \sigma - \theta^+ \theta^- \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- (\partial_0^2 - \partial_1^2) \sigma \\ &\quad - \sqrt{2} \theta^- \bar{\theta}^- \theta^+ (\partial_0 - \partial_1) \bar{\lambda}_+ - \sqrt{2} \theta^+ \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- (\partial_0 + \partial_1) \lambda_-, \end{aligned} \quad (C.28a)$$

$$\begin{aligned} -i\varepsilon_- Q_+ \Sigma &= \sqrt{2} \varepsilon_- \bar{\lambda}_+ - i\sqrt{2} \bar{\theta}^- \varepsilon_- (D_V - iF_{01}) - i\sqrt{2} \left\{ \theta^+ \bar{\theta}^+ \varepsilon_- (\partial_0 + \partial_1) - \theta^- \bar{\theta}^- \varepsilon_- (\partial_0 - \partial_1) \right\} \bar{\lambda}_+ \\ &\quad - \sqrt{2} \theta^+ \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- \varepsilon_- (\partial_0 + \partial_1) (D_V - iF_{01}) - \sqrt{2} \theta^+ \theta^- \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- \varepsilon_- (\partial_0^2 - \partial_1^2) \bar{\lambda}_+, \end{aligned} \quad (C.28b)$$

$$i\varepsilon_+ Q_- \Sigma = 2\bar{\theta}^- \varepsilon_+ (\partial_0 - \partial_1) \sigma + 2i\sqrt{2} \theta^+ \bar{\theta}^- \varepsilon_+ (\partial_0 - \partial_1) \bar{\lambda}_+ - 2i \theta^+ \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- \varepsilon_+ (\partial_0^2 - \partial_1^2) \sigma, \quad (C.28c)$$

$$-i\bar{\varepsilon}_- \bar{Q}_+ \Sigma = 2\theta^+ \bar{\varepsilon}_- (\partial_0 + \partial_1) \sigma + 2i\sqrt{2} \theta^+ \bar{\theta}^- \bar{\varepsilon}_- (\partial_0 + \partial_1) \lambda_- + 2i \theta^+ \theta^- \bar{\theta}^- \bar{\varepsilon}_- (\partial_0^2 - \partial_1^2) \sigma, \quad (C.28d)$$

$$\begin{aligned} i\bar{\varepsilon}_+ \bar{Q}_- \Sigma &= -\sqrt{2} \bar{\varepsilon}_+ \lambda_- + i\sqrt{2} \theta^+ \bar{\varepsilon}_+ (D_V - iF_{01}) + i\sqrt{2} \left\{ \theta^+ \bar{\theta}^+ \bar{\varepsilon}_+ (\partial_0 + \partial_1) - \theta^- \bar{\theta}^- \bar{\varepsilon}_+ (\partial_0 - \partial_1) \right\} \lambda_- \\ &\quad - \sqrt{2} \theta^+ \theta^- \bar{\theta}^- \bar{\varepsilon}_+ (\partial_0 - \partial_1) (D_V - iF_{01}) + \sqrt{2} \theta^+ \theta^- \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- \bar{\varepsilon}_+ (\partial_0^2 - \partial_1^2) \lambda_-. \end{aligned} \quad (C.28e)$$

$$\delta \sigma = \sqrt{2} \varepsilon_- \bar{\lambda}_+ - \sqrt{2} \bar{\varepsilon}_+ \lambda_-, \quad (C.29a)$$

$$\delta (D_V - iF_{01}) = -2i \varepsilon_+ (\partial_0 - \partial_1) \bar{\lambda}_+ - 2i \bar{\varepsilon}_- (\partial_0 + \partial_1) \lambda_-, \quad (C.29b)$$

$$\delta \bar{\lambda}_+ = -i\sqrt{2} \bar{\varepsilon}_- (\partial_0 + \partial_1) \sigma + \bar{\varepsilon}_+ (D_V - iF_{01}), \quad (C.29c)$$

$$\delta \lambda_- = i\sqrt{2} \varepsilon_+ (\partial_0 - \partial_1) \sigma + \varepsilon_- (D_V - iF_{01}). \quad (C.29d)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma} &= \bar{\sigma} + i\sqrt{2} \bar{\theta}^+ \lambda_+ - i\sqrt{2} \theta^- \bar{\lambda}_- + \sqrt{2} \bar{\theta}^+ \theta^- (D_V + iF_{01}) \\ &\quad + i \theta^+ \bar{\theta}^+ (\partial_0 + \partial_1) \bar{\sigma} - i \theta^- \bar{\theta}^- (\partial_0 - \partial_1) \bar{\sigma} - \theta^+ \theta^- \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- (\partial_0^2 - \partial_1^2) \bar{\sigma} \\ &\quad + \sqrt{2} \theta^- \bar{\theta}^- \bar{\theta}^+ (\partial_0 - \partial_1) \lambda_+ + \sqrt{2} \theta^+ \bar{\theta}^+ \theta^- (\partial_0 + \partial_1) \bar{\lambda}_-, \end{aligned} \quad (C.30a)$$

$$-i\varepsilon_- Q_+ \bar{\Sigma} = -2\bar{\theta}^+ \varepsilon_- (\partial_0 + \partial_1) \bar{\sigma} + 2i\sqrt{2} \theta^- \bar{\theta}^+ \varepsilon_- (\partial_0 + \partial_1) \bar{\lambda}_- - 2i \theta^- \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- \varepsilon_- (\partial_0^2 - \partial_1^2) \bar{\sigma}, \quad (\text{C.30b})$$

$$\begin{aligned} i\varepsilon_+ Q_- \bar{\Sigma} &= \sqrt{2} \varepsilon_+ \bar{\lambda}_- + i\sqrt{2} \bar{\theta}^+ \varepsilon_+ (D_V + iF_{01}) + i\sqrt{2} \left\{ \theta^+ \bar{\theta}^+ \varepsilon_+ (\partial_0 + \partial_1) - \theta^- \bar{\theta}^- \varepsilon_+ (\partial_0 - \partial_1) \right\} \bar{\lambda}_- \\ &\quad + \sqrt{2} \theta^- \bar{\theta}^- \bar{\theta}^+ \varepsilon_+ (\partial_0 - \partial_1) (D_V + iF_{01}) - \sqrt{2} \theta^+ \theta^- \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- \varepsilon_+ (\partial_0^2 - \partial_1^2) \bar{\lambda}_-, \end{aligned} \quad (\text{C.30c})$$

$$\begin{aligned} -i\bar{\varepsilon}_- \bar{Q}_+ \bar{\Sigma} &= -\sqrt{2} \bar{\varepsilon}_- \lambda_+ - i\sqrt{2} \theta^- \bar{\varepsilon}_- (D_V + iF_{01}) - i\sqrt{2} \left\{ \theta^+ \bar{\theta}^+ \bar{\varepsilon}_- (\partial_0 + \partial_1) - \theta^- \bar{\theta}^- \bar{\varepsilon}_- (\partial_0 - \partial_1) \right\} \lambda_+ \\ &\quad + \sqrt{2} \theta^+ \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- \bar{\varepsilon}_- (\partial_0 + \partial_1) (D_V + iF_{01}) + \sqrt{2} \theta^+ \theta^- \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- \bar{\varepsilon}_- (\partial_0^2 - \partial_1^2) \lambda_+, \end{aligned} \quad (\text{C.30d})$$

$$i\bar{\varepsilon}_+ \bar{Q}_- \bar{\Sigma} = -2\theta^- \bar{\varepsilon}_+ (\partial_0 - \partial_1) \bar{\sigma} + 2i\sqrt{2} \theta^- \bar{\theta}^+ \bar{\varepsilon}_+ (\partial_0 - \partial_1) \lambda_+ + 2i \theta^+ \theta^- \bar{\theta}^+ \bar{\varepsilon}_+ (\partial_0^2 - \partial_1^2) \bar{\sigma}. \quad (\text{C.30e})$$

$$\delta \bar{\sigma} = -\sqrt{2} \bar{\varepsilon}_- \lambda_+ + \sqrt{2} \varepsilon_+ \bar{\lambda}_-, \quad (\text{C.31a})$$

$$\delta(D_V + iF_{01}) = -2i \bar{\varepsilon}_+ (\partial_0 - \partial_1) \lambda_+ - 2i \varepsilon_- (\partial_0 + \partial_1) \bar{\lambda}_-, \quad (\text{C.31b})$$

$$\delta \lambda_+ = i\sqrt{2} \varepsilon_- (\partial_0 + \partial_1) \bar{\sigma} + \varepsilon_+ (D_V + iF_{01}), \quad (\text{C.31c})$$

$$\delta \bar{\lambda}_- = -i\sqrt{2} \bar{\varepsilon}_+ (\partial_0 - \partial_1) \bar{\sigma} + \bar{\varepsilon}_- (D_V + iF_{01}). \quad (\text{C.31d})$$

C.8 Abelian vector superfields

supercharges $Q_{\pm}$ と $\bar{Q}_{\pm}$ を一般の abelian vector 超場 V (Wess-Zumino gauge) に作用させる:

$$\begin{aligned} V &= -\theta^+ \bar{\theta}^+ (A_0 + A_1) - \theta^- \bar{\theta}^- (A_0 - A_1) - \sqrt{2} \theta^- \bar{\theta}^+ \sigma - \sqrt{2} \theta^+ \bar{\theta}^- \bar{\sigma} \\ &\quad - 2i \theta^+ \theta^- (\bar{\theta}^+ \bar{\lambda}_+ + \bar{\theta}^- \bar{\lambda}_-) + 2i \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- (\theta^+ \lambda_+ + \theta^- \lambda_-) + 2\theta^+ \theta^- \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- D, \end{aligned} \quad (\text{C.32a})$$

$$\begin{aligned} -i\varepsilon_- Q_+ V &= -i\sqrt{2} \bar{\theta}^- \varepsilon_- \bar{\sigma} - i\bar{\theta}^+ \varepsilon_- (A_0 + A_1) \\ &\quad - 2\theta^- \bar{\theta}^+ \varepsilon_- \bar{\lambda}_+ + 2\bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- \varepsilon_- \lambda_+ - 2\theta^- \bar{\theta}^- \varepsilon_- \bar{\lambda}_- \\ &\quad + i\theta^- \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- \varepsilon_- \left\{ 2D + i(\partial_0 + \partial_1)(A_0 - A_1) \right\} - \sqrt{2} \theta^+ \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- \varepsilon_- (\partial_0 + \partial_1) \bar{\sigma} \\ &\quad - 2i \theta^+ \theta^- \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- \varepsilon_- (\partial_0 + \partial_1) \bar{\lambda}_-, \end{aligned} \quad (\text{C.32b})$$

$$\begin{aligned} i\varepsilon_+ Q_- V &= i\sqrt{2} \bar{\theta}^+ \varepsilon_+ \sigma + i\bar{\theta}^- \varepsilon_+ (A_0 - A_1) \\ &\quad - 2\theta^+ \bar{\theta}^- \varepsilon_+ \bar{\lambda}_- - 2\bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- \varepsilon_+ \lambda_- - 2\theta^+ \bar{\theta}^+ \varepsilon_+ \bar{\lambda}_+ \\ &\quad + i\theta^+ \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- \varepsilon_+ \left\{ 2D + i(\partial_0 - \partial_1)(A_0 + A_1) \right\} - \sqrt{2} \theta^- \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- \varepsilon_+ (\partial_0 - \partial_1) \sigma \\ &\quad - 2i \theta^+ \theta^- \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- \varepsilon_+ (\partial_0 - \partial_1) \bar{\lambda}_+, \end{aligned} \quad (\text{C.32c})$$

$$\begin{aligned} -i\bar{\varepsilon}_- \bar{Q}_+ V &= -i\sqrt{2} \theta^- \bar{\varepsilon}_- \sigma - i\theta^+ \bar{\varepsilon}_- (A_0 + A_1) \\ &\quad + 2\theta^+ \theta^- \bar{\varepsilon}_- \bar{\lambda}_+ + 2\theta^+ \bar{\theta}^- \bar{\varepsilon}_- \lambda_+ + 2\theta^- \bar{\theta}^- \bar{\varepsilon}_- \lambda_- \\ &\quad - i\theta^+ \theta^- \bar{\theta}^- \bar{\varepsilon}_- \left\{ 2D - i(\partial_0 + \partial_1)(A_0 - A_1) \right\} - \sqrt{2} \theta^+ \theta^- \bar{\theta}^+ \bar{\varepsilon}_- (\partial_0 + \partial_1) \sigma \\ &\quad - 2i \theta^+ \theta^- \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- \bar{\varepsilon}_- (\partial_0 + \partial_1) \lambda_-, \end{aligned} \quad (\text{C.32d})$$

$$\begin{aligned} i\bar{\varepsilon}_+ \bar{Q}_- V &= i\sqrt{2} \theta^+ \bar{\varepsilon}_+ \bar{\sigma} + i\theta^- \bar{\varepsilon}_+ (A_0 - A_1) \\ &\quad - 2\theta^+ \theta^- \bar{\varepsilon}_+ \bar{\lambda}_- + 2\theta^- \bar{\theta}^+ \bar{\varepsilon}_+ \lambda_- + 2\theta^+ \bar{\theta}^+ \bar{\varepsilon}_+ \lambda_+ \\ &\quad - i\theta^+ \theta^- \bar{\theta}^+ \bar{\varepsilon}_+ \left\{ 2D - i(\partial_0 - \partial_1)(A_0 + A_1) \right\} - \sqrt{2} \theta^+ \theta^- \bar{\theta}^- \bar{\varepsilon}_+ (\partial_0 - \partial_1) \bar{\sigma} \\ &\quad - 2i \theta^+ \theta^- \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- \bar{\varepsilon}_+ (\partial_0 - \partial_1) \lambda_+. \end{aligned} \quad (\text{C.32e})$$

これにより超場としての変化分は次の様になる:

$$\begin{aligned}
\delta V = & i\sqrt{2}\theta^+\left\{\bar{\varepsilon}_+\bar{\sigma}-\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_-(A_0+A_1)\right\}+i\sqrt{2}\theta^-\left\{-\bar{\varepsilon}_-\sigma+\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_+(A_0-A_1)\right\} \\
& +i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\left\{\varepsilon_+\sigma-\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_-(A_0+A_1)\right\}+i\sqrt{2}\bar{\theta}^-\left\{-\varepsilon_-\bar{\sigma}+\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_+(A_0-A_1)\right\} \\
& +2i\theta^+\theta^-\left\{-i\bar{\varepsilon}_-\bar{\lambda}_++i\bar{\varepsilon}_+\bar{\lambda}_-\right\}+2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\left\{-i\varepsilon_-\lambda_++i\varepsilon_+\lambda_-\right\} \\
& -\theta^+\bar{\theta}^+\left\{2\varepsilon_+\bar{\lambda}_+-2\bar{\varepsilon}_+\lambda_+\right\}-\theta^-\bar{\theta}^-\left\{2\varepsilon_-\bar{\lambda}_--2\bar{\varepsilon}_-\lambda_-\right\} \\
& -\sqrt{2}\theta^-\bar{\theta}^+\left\{\sqrt{2}\varepsilon_-\bar{\lambda}_+-\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+\lambda_-\right\}-\sqrt{2}\theta^+\bar{\theta}^-\left\{\sqrt{2}\varepsilon_+\bar{\lambda}_--\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-\lambda_+\right\} \\
& +\theta^+\theta^-\bar{\theta}^-\left[-i\bar{\varepsilon}_-\left\{2D-i(\partial_0+\partial_1)(A_0-A_1)\right\}-\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+(\partial_0-\partial_1)\bar{\sigma}\right] \\
& +\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\left[-i\bar{\varepsilon}_+\left\{2D-i(\partial_0-\partial_1)(A_0+A_1)\right\}-\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-(\partial_0+\partial_1)\sigma\right] \\
& +\theta^+\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\left[i\varepsilon_+\left\{2D+i(\partial_0-\partial_1)(A_0+A_1)\right\}-\sqrt{2}\varepsilon_-(\partial_0+\partial_1)\bar{\sigma}\right] \\
& +\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\left[i\varepsilon_-\left\{2D+i(\partial_0+\partial_1)(A_0-A_1)\right\}-\sqrt{2}\varepsilon_+(\partial_0-\partial_1)\sigma\right] \\
& +2\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\left\{-i\varepsilon_-(\partial_0+\partial_1)\bar{\lambda}_--i\varepsilon_+(\partial_0-\partial_1)\bar{\lambda}_+-i\bar{\varepsilon}_-(\partial_0+\partial_1)\lambda_--i\bar{\varepsilon}_+(\partial_0-\partial_1)\lambda_+\right\}.
\end{aligned} \tag{C.33}$$

このままでは Wess-Zumino gauge からずれてしまう。そのため chiral 超場 $\Phi_\Lambda, \bar{\Phi}_\Lambda$ を用いて再度ゲージ変換を行う:

$$V + \delta V \rightarrow V + \delta V + \Phi_\Lambda + \bar{\Phi}_\Lambda \equiv V + \delta' V, \tag{C.34a}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_\Lambda + \bar{\Phi}_\Lambda = & \phi_\Lambda + \bar{\phi}_\Lambda + i\sqrt{2}\theta^+\psi_{\Lambda+} + i\sqrt{2}\theta^-\psi_{\Lambda-} + i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\bar{\psi}_{\Lambda+} + i\sqrt{2}\bar{\theta}^-\bar{\psi}_{\Lambda-} + 2i\theta^+\theta^-F_\Lambda + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{F}_\Lambda \\
& -i\theta^+\bar{\theta}^+(\partial_0+\partial_1)(\phi_\Lambda-\bar{\phi}_\Lambda) - i\theta^-\bar{\theta}^-(\partial_0-\partial_1)(\phi_\Lambda-\bar{\phi}_\Lambda) \\
& +\sqrt{2}\theta^+\theta^-\bar{\theta}^-(\partial_0-\partial_1)\psi_{\Lambda+} - \sqrt{2}\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+(\partial_0+\partial_1)\psi_{\Lambda-} \\
& -\sqrt{2}\theta^+\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0+\partial_1)\bar{\psi}_{\Lambda-} + \sqrt{2}\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0-\partial_1)\bar{\psi}_{\Lambda+} \\
& +\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0^2-\partial_1^2)(\phi_\Lambda+\bar{\phi}_\Lambda),
\end{aligned} \tag{C.34b}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \delta' V = & \phi_\Lambda + \bar{\phi}_\Lambda + i\sqrt{2}\theta^+\left\{\bar{\varepsilon}_+\bar{\sigma}-\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_-(A_0+A_1)+\psi_{\Lambda+}\right\} \\
& +i\sqrt{2}\theta^-\left\{-\bar{\varepsilon}_-\sigma+\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_+(A_0-A_1)+\psi_{\Lambda-}\right\} \\
& +i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\left\{\varepsilon_+\sigma-\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_-(A_0+A_1)+\bar{\psi}_{\Lambda+}\right\}+i\sqrt{2}\bar{\theta}^-\left\{-\varepsilon_-\bar{\sigma}+\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_+(A_0-A_1)+\bar{\psi}_{\Lambda-}\right\} \\
& +2i\theta^+\theta^-\left\{-i\bar{\varepsilon}_-\bar{\lambda}_++i\bar{\varepsilon}_+\bar{\lambda}_-+F_\Lambda\right\}+2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\left\{-i\varepsilon_-\lambda_++i\varepsilon_+\lambda_--\bar{F}_\Lambda\right\} \\
& -\theta^+\bar{\theta}^+\left\{2\varepsilon_+\bar{\lambda}_+-2\bar{\varepsilon}_+\lambda_++i(\partial_0+\partial_1)(\phi_\Lambda-\bar{\phi}_\Lambda)\right\} \\
& -\theta^-\bar{\theta}^-\left\{2\varepsilon_-\bar{\lambda}_--2\bar{\varepsilon}_-\lambda_++i(\partial_0-\partial_1)(\phi_\Lambda-\bar{\phi}_\Lambda)\right\} \\
& -\sqrt{2}\theta^-\bar{\theta}^+\left\{\sqrt{2}\varepsilon_-\bar{\lambda}_+-\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+\lambda_-\right\}-\sqrt{2}\theta^+\bar{\theta}^-\left\{\sqrt{2}\varepsilon_+\bar{\lambda}_--\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-\lambda_+\right\} \\
& -2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\left[\bar{\varepsilon}_+\left\{D-\frac{i}{2}(\partial_0-\partial_1)(A_0+A_1)\right\}-\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_-(\partial_0+\partial_1)\sigma-\frac{i}{\sqrt{2}}(\partial_0+\partial_1)\psi_{\Lambda-}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^-\left[\bar{\varepsilon}_-\left\{D-\frac{i}{2}(\partial_0+\partial_1)(A_0-A_1)\right\}-\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_+(\partial_0-\partial_1)\bar{\sigma}+\frac{i}{\sqrt{2}}(\partial_0-\partial_1)\psi_{\Lambda+}\right] \\
& +2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\theta^+\left[\varepsilon_+\left\{D+\frac{i}{2}(\partial_0-\partial_1)(A_0+A_1)\right\}+\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_-(\partial_0+\partial_1)\bar{\sigma}+\frac{i}{\sqrt{2}}(\partial_0+\partial_1)\bar{\psi}_{\Lambda-}\right] \\
& +2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\theta^-\left[\varepsilon_-\left\{D+\frac{i}{2}(\partial_0+\partial_1)(A_0-A_1)\right\}+\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_+(\partial_0-\partial_1)\sigma-\frac{i}{\sqrt{2}}(\partial_0-\partial_1)\bar{\psi}_{\Lambda+}\right] \\
& +2\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\left\{-i\varepsilon_-(\partial_0+\partial_1)\bar{\lambda}_- -i\varepsilon_+(\partial_0-\partial_1)\bar{\lambda}_+ -i\bar{\varepsilon}_-(\partial_0+\partial_1)\lambda_- -i\bar{\varepsilon}_+(\partial_0-\partial_1)\lambda_+\right\} \\
& +\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\partial_0^2-\partial_1^2)(\phi_\Lambda+\bar{\phi}_\Lambda). \tag{C.34c}
\end{aligned}$$

これにより、Wess-Zumino gauge にするための条件が得られる:

$$\phi_\Lambda = 0, \quad \bar{\phi}_\Lambda = 0, \tag{C.35a}$$

$$\psi_{\Lambda+} = -\bar{\varepsilon}_+\bar{\sigma} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_-(A_0+A_1), \quad \psi_{\Lambda-} = \bar{\varepsilon}_-\sigma - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_+(A_0-A_1), \tag{C.35b}$$

$$\bar{\psi}_{\Lambda+} = -\varepsilon_+\sigma + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_-(A_0+A_1), \quad \bar{\psi}_{\Lambda-} = \varepsilon_-\bar{\sigma} - \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_+(A_0-A_1), \tag{C.35c}$$

$$F_\Lambda = i\bar{\varepsilon}_-\bar{\lambda}_+ - i\bar{\varepsilon}_+\bar{\lambda}_-, \quad \bar{F}_\Lambda = i\varepsilon_-\lambda_+ - i\varepsilon_+\lambda_-. \tag{C.35d}$$

よって Wess-Zumino gauge における V の成分場 σ , A_m , $\bar{\sigma}$, $\lambda_\pm$, $\bar{\lambda}_\pm$, D の超対称変換則は次で与えられる:

$$\begin{aligned}
\delta'V & \equiv -\theta^+\bar{\theta}^+(\delta A_0+\delta A_1) - \theta^-\bar{\theta}^-(\delta A_0-\delta A_1) - \sqrt{2}\theta^-\bar{\theta}^+\delta\sigma - \sqrt{2}\theta^+\bar{\theta}^-\delta\bar{\sigma} \\
& -2i\theta^+\theta^-(\bar{\theta}^+\delta\bar{\lambda}_+ + \bar{\theta}^-\delta\bar{\lambda}_-) + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\theta^+\delta\lambda_+ + \theta^-\delta\lambda_-) + 2\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\delta D, \tag{C.36a}
\end{aligned}$$

$$\delta\sigma = \sqrt{2}\varepsilon_-\bar{\lambda}_+ - \sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+\lambda_-, \tag{C.36b}$$

$$\delta\bar{\sigma} = -\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-\lambda_+ + \sqrt{2}\varepsilon_+\bar{\lambda}_-, \tag{C.36c}$$

$$\delta A_0 = \varepsilon_+\bar{\lambda}_+ + \varepsilon_-\bar{\lambda}_- - \bar{\varepsilon}_+\lambda_+ - \bar{\varepsilon}_-\lambda_-, \tag{C.36d}$$

$$\delta A_1 = \varepsilon_+\bar{\lambda}_+ - \varepsilon_-\bar{\lambda}_- - \bar{\varepsilon}_+\lambda_+ + \bar{\varepsilon}_-\lambda_-, \tag{C.36e}$$

$$\delta D = -i\varepsilon_-(\partial_0+\partial_1)\bar{\lambda}_- - i\varepsilon_+(\partial_0-\partial_1)\bar{\lambda}_+ - i\bar{\varepsilon}_-(\partial_0+\partial_1)\lambda_- - i\bar{\varepsilon}_+(\partial_0-\partial_1)\lambda_+, \tag{C.36f}$$

$$\begin{aligned}
\delta\lambda_+ & = \varepsilon_+\left\{D+\frac{i}{2}(\partial_0-\partial_1)(A_0+A_1)\right\} + \frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_-(\partial_0+\partial_1)\bar{\sigma} + \frac{i}{\sqrt{2}}(\partial_0+\partial_1)\bar{\psi}'_- \\
& = \varepsilon_+(D+iF_{01}) + i\sqrt{2}\varepsilon_-(\partial_0+\partial_1)\bar{\sigma}, \tag{C.36g}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\lambda_- & = \varepsilon_-\left\{D+\frac{i}{2}(\partial_0+\partial_1)(A_0-A_1)\right\} + \frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_+(\partial_0-\partial_1)\sigma - \frac{i}{\sqrt{2}}(\partial_0-\partial_1)\bar{\psi}'_+ \\
& = \varepsilon_-(D-iF_{01}) + i\sqrt{2}\varepsilon_+(\partial_0-\partial_1)\sigma, \tag{C.36h}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\bar{\lambda}_+ & = \bar{\varepsilon}_+\left\{D-\frac{i}{2}(\partial_0-\partial_1)(A_0+A_1)\right\} - \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_-(\partial_0+\partial_1)\sigma - \frac{i}{\sqrt{2}}(\partial_0+\partial_1)\psi'_- \\
& = \bar{\varepsilon}_+(D-iF_{01}) - i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-(\partial_0+\partial_1)\sigma, \tag{C.36i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\bar{\lambda}_- & = \bar{\varepsilon}_-\left\{D-\frac{i}{2}(\partial_0+\partial_1)(A_0-A_1)\right\} - \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_+(\partial_0-\partial_1)\bar{\sigma} + \frac{i}{\sqrt{2}}(\partial_0-\partial_1)\psi'_+ \\
& = \bar{\varepsilon}_-(D+iF_{01}) - i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+(\partial_0-\partial_1)\bar{\sigma}. \tag{C.36j}
\end{aligned}$$

C.9 Chiral superfields in a covariant form

Wess-Zumino gauge を保つためのゲージの取り直しは、charged chiral 超場の超対称変換則にも変更を加える [46]。電荷 α の chiral 超場と vector 超場のゲージ変換則と、Wess-Zumino gauge への取り直し (C.34) を列挙すれば、chiral 超場の再定義が明確になるだろう:

$$V \rightarrow V - i(\Lambda - \bar{\Lambda}) + \Phi_\Lambda + \bar{\Phi}_\Lambda, \quad \bar{\Phi} e^{2\alpha V} \Phi \rightarrow \bar{\Phi} e^{2\alpha V} \Phi, \quad (\text{C.37a})$$

$$\therefore \Phi \rightarrow e^{2i\alpha\Lambda - 2\alpha\Phi_\Lambda} \Phi = e^{2i\alpha\Lambda} (e^{-2\alpha\Phi_\Lambda} \Phi), \quad (\text{C.37b})$$

$$\bar{\Phi} \rightarrow e^{-2i\alpha\bar{\Lambda} - 2\alpha\bar{\Phi}_\Lambda} \bar{\Phi} = e^{-2i\alpha\bar{\Lambda}} (e^{-2\alpha\bar{\Phi}_\Lambda} \bar{\Phi}). \quad (\text{C.37c})$$

つまり $(e^{-2\alpha\Phi_\Lambda} - 1)\Phi \equiv \delta'\Phi$ が超対称変換 $\delta\Phi$ (C.21) に追加される。 $\delta'\Phi$ を (C.35) を用いながら成分場で表示しよう:

$$\begin{aligned} \delta'\Phi &= (e^{-2\alpha\Phi_\Lambda} - 1)\Phi = (-2\alpha\Phi_\Lambda + \dots)\Phi \\ &= -2\alpha \left(i\sqrt{2}\theta^+\psi_{\Lambda+} + i\sqrt{2}\theta^-\psi_{\Lambda-} + 2i\theta^+\theta^-F_\Lambda \right) \left(\phi + i\sqrt{2}\theta^+\psi_+ + i\sqrt{2}\theta^-\psi_- + 2i\theta^+\theta^-F \right) + \dots \\ &= i\sqrt{2}\theta^+ \{ -2\alpha\psi_{\Lambda+}\phi \} + i\sqrt{2}\theta^- \{ -2\alpha\psi_{\Lambda-}\phi \} + 2i\theta^+\theta^-(-2\alpha) \left(F_\Lambda\phi - i\psi_{\Lambda+}\psi_- + i\psi_{\Lambda-}\psi_+ \right) + \dots \\ &\equiv \delta'\phi + i\sqrt{2}\theta^+\delta'\psi_+ + i\sqrt{2}\theta^-\delta'\psi_- + 2i\theta^+\theta^-\delta'F + \dots, \end{aligned} \quad (\text{C.38a})$$

$$\delta'\phi = 0, \quad (\text{C.38b})$$

$$\begin{aligned} \delta'\psi_+ &= -2\alpha\psi_{\Lambda+}\phi \\ &= -2\alpha \left(-\bar{\varepsilon}_+\bar{\sigma} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_-(A_0 + A_1) \right) \phi, \end{aligned} \quad (\text{C.38c})$$

$$\begin{aligned} \delta'\psi_- &= -2\alpha\psi_{\Lambda-}\phi \\ &= -2\alpha \left(\bar{\varepsilon}_-\sigma - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_+(A_0 - A_1) \right) \phi, \end{aligned} \quad (\text{C.38d})$$

$$\begin{aligned} \delta'F &= -2\alpha \left(F_\Lambda\phi - i\psi_{\Lambda+}\psi_- + i\psi_{\Lambda-}\psi_+ \right) \\ &= -2i\alpha \left\{ \bar{\varepsilon}_- \left(\psi_+\sigma + \bar{\lambda}_+\phi - \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_-(A_0 + A_1) \right) + \bar{\varepsilon}_+ \left(\psi_-\bar{\sigma} - \bar{\lambda}_-\phi - \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_+(A_0 - A_1) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.38e})$$

これにより、Wess-Zumino gauge における charged chiral 超場について、ゲージ共変な超対称変換則が得られる:

$$\widehat{\delta}\Phi = \delta\Phi + \delta'\Phi, \quad (\text{C.39a})$$

$$\widehat{\delta}\phi = \sqrt{2}\varepsilon_-\psi_+ - \sqrt{2}\varepsilon_+\psi_-, \quad (\text{C.39b})$$

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}F &= -\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-(D_0 + D_1)\psi_- - \sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+(D_0 - D_1)\psi_+ \\ &\quad - 2i\alpha \left\{ \bar{\varepsilon}_- (\psi_+\sigma + \bar{\lambda}_+\phi) + \bar{\varepsilon}_+ (\psi_-\bar{\sigma} - \bar{\lambda}_-\phi) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.39c})$$

$$\widehat{\delta}\psi_+ = -i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-(D_0 + D_1)\phi + i\sqrt{2}\varepsilon_+F + 2\alpha\bar{\varepsilon}_+\bar{\sigma}\phi, \quad (\text{C.39d})$$

$$\widehat{\delta}\psi_- = i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+(D_0 - D_1)\phi + i\sqrt{2}\varepsilon_-F - 2\alpha\bar{\varepsilon}_-\sigma\phi. \quad (\text{C.39e})$$

ただし共変微分は次で定義されていることを思い出せ:

$$D_m\phi = \partial_m\phi - \alpha i A_m\phi, \quad D_m\psi_\pm = \partial_m\psi_\pm - \alpha i A_m\psi_\pm. \quad (\text{C.40})$$

同様に $\bar{\Phi}$ の超対称変換則 (C.23) への補正 $\delta'\bar{\Phi} \equiv (e^{-2\alpha\bar{\Phi}_\Lambda} - 1)\bar{\Phi}$ を評価する:

$$\begin{aligned}\delta'\bar{\Phi} &= (e^{-2\alpha\bar{\Phi}_\Lambda} - 1)\bar{\Phi} = (-2\alpha\bar{\Phi}_\Lambda + \dots)\bar{\Phi} \\ &= -2\alpha\left(i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\bar{\psi}_{\Lambda+} + i\sqrt{2}\bar{\theta}^-\bar{\psi}_{\Lambda-} + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{F}_\Lambda\right)\left(\bar{\phi} + i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\bar{\psi}_+ + i\sqrt{2}\bar{\theta}^-\bar{\psi}_- + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{F}\right) + \dots \\ &= i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\{-2\alpha\bar{\psi}_{\Lambda+}\bar{\phi}\} + i\sqrt{2}\bar{\theta}^-\{-2\alpha\bar{\psi}_{\Lambda-}\bar{\phi}\} + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(2\alpha)\left(\bar{F}_\Lambda\bar{\phi} - i\bar{\psi}_{\Lambda+}\bar{\psi}_- + i\bar{\psi}_{\Lambda-}\bar{\psi}_+\right) + \dots \\ &\equiv \delta'\bar{\phi} + i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\delta'\bar{\psi}_+ + i\sqrt{2}\bar{\theta}^-\delta'\bar{\psi}_- + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\delta'\bar{F} + \dots, \tag{C.41a}\end{aligned}$$

$$\delta'\bar{\phi} = 0, \tag{C.41b}$$

$$\begin{aligned}\delta'\bar{\psi}_+ &= -2\alpha\bar{\psi}_{\Lambda+}\bar{\phi} \\ &= -2\alpha\left(-\varepsilon_+\sigma + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_-(A_0 + A_1)\right)\bar{\phi}, \tag{C.41c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta'\bar{\psi}_- &= -2\alpha\bar{\psi}_{\Lambda-}\bar{\phi} \\ &= -2\alpha\left(\varepsilon_-\bar{\sigma} - \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_+(A_0 - A_1)\right)\bar{\phi}, \tag{C.41d}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta'\bar{F} &= -2\alpha\left(\bar{F}_\Lambda\bar{\phi} - i\bar{\psi}_{\Lambda+}\bar{\psi}_- + i\bar{\psi}_{\Lambda-}\bar{\psi}_+\right) \\ &= -2i\alpha\left\{\varepsilon_-\left(\bar{\psi}_+\bar{\sigma} + \lambda_+\bar{\phi} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_-(A_0 + A_1)\right) + \varepsilon_+\left(\bar{\psi}_-\bar{\sigma} - \lambda_-\bar{\phi} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_+(A_0 - A_1)\right)\right\}. \tag{C.41e}\end{aligned}$$

これにより、Wess-Zumino gauge における charged chiral 超場について、ゲージ共変な超対称変換則が得られる:

$$\widehat{\delta}\bar{\Phi} = \delta\bar{\Phi} + \delta'\bar{\Phi}, \tag{C.42a}$$

$$\widehat{\delta}\bar{\phi} = -\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-\bar{\psi}_+ + \sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+\bar{\psi}_-, \tag{C.42b}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\delta}\bar{F} &= \sqrt{2}\varepsilon_-(D_0 + D_1)\bar{\psi}_- + \sqrt{2}\varepsilon_+(D_0 - D_1)\bar{\psi}_+ \\ &\quad - 2i\alpha\left\{\varepsilon_-(\bar{\psi}_+\bar{\sigma} + \lambda_+\bar{\phi}) + \varepsilon_+(\bar{\psi}_-\bar{\sigma} - \lambda_-\bar{\phi})\right\}, \tag{C.42c}\end{aligned}$$

$$\widehat{\delta}\bar{\psi}_+ = i\sqrt{2}\varepsilon_-(D_0 + D_1)\bar{\phi} - i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+\bar{F} + 2\alpha\varepsilon_+\sigma\bar{\phi}, \tag{C.42d}$$

$$\widehat{\delta}\bar{\psi}_- = -i\sqrt{2}\varepsilon_+(D_0 - D_1)\bar{\phi} - i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-\bar{F} - 2\alpha\varepsilon_-\bar{\sigma}\bar{\phi}. \tag{C.42e}$$

ただし共変微分は次で定義されていることを思い出せ:

$$D_m\bar{\phi} = \partial_m\bar{\phi} + \alpha i A_m\bar{\phi}, \quad D_m\bar{\psi}_\pm = \partial_m\bar{\psi}_\pm + \alpha i A_m\bar{\psi}_\pm. \tag{C.43}$$

C.10 Stückelberg-type chiral superfield in a covariant form

Stückelberg-type chiral superfield Γ も γ^4 がゲージ変換を受けるので、Wess-Zumino gauge の再固定が $\delta\Gamma$ に寄与する。 duality 変換で得られるゲージ不変な超場形式は

$$\Gamma + \bar{\Gamma} + 2 \sum_a V_a, \quad (\text{C.44})$$

である。Wess-Zumino gauge への再固定の操作を含むゲージ変換は

$$V_a \rightarrow -i(\Lambda_a - \bar{\Lambda}_a) + \Phi_{\Lambda,a} + \bar{\Phi}_{\Lambda,a}, \quad \Gamma + \bar{\Gamma} + 2 \sum_a V_a \rightarrow \Gamma + \bar{\Gamma} + 2 \sum_a V_a, \quad (\text{C.45a})$$

$$\therefore \Gamma \rightarrow \Gamma - 2 \sum_a (-i\Lambda_a + \Phi_{\Lambda,a}) = \Gamma' + 2i \sum_a \Lambda_a, \quad \Gamma' \equiv \Gamma - 2 \sum_a \Phi_{\Lambda,a}, \quad (\text{C.45b})$$

$$\bar{\Gamma} \rightarrow \bar{\Gamma} - 2 \sum_a (i\bar{\Lambda}_a + \bar{\Phi}_{\Lambda,a}) = \bar{\Gamma}' - 2i \sum_a \bar{\Lambda}_a, \quad \bar{\Gamma}' \equiv \bar{\Gamma} - 2 \sum_a \bar{\Phi}_{\Lambda,a}, \quad (\text{C.45c})$$

である。すなわちゲージ共変化された Γ の超対称変換を構築するために、(C.35) を用いた $\delta'\Gamma = -2 \sum_a \Phi_{\Lambda,a}$ が超対称変換に追加される:

$$\delta'\Gamma = -2 \sum_a \Phi_{\Lambda,a}, \quad (\text{C.46a})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \delta'(\gamma^3 + i\gamma^4) = -2 \sum_a \phi_{\Lambda,a} = 0, \quad (\text{C.46b})$$

$$\delta'G_\Gamma = -2 \sum_a F_{\Lambda,a} = -2i \sum_a (\bar{\varepsilon}_- \bar{\lambda}_{+,a} - \bar{\varepsilon}_+ \bar{\lambda}_{-,a}), \quad (\text{C.46c})$$

$$\delta'\zeta_+ = -2 \sum_a \psi_{\Lambda+,a} = -2 \sum_a \left(-\bar{\varepsilon}_+ \bar{\sigma}_a + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\varepsilon}_- (A_{0,a} + A_{1,a}) \right), \quad (\text{C.46d})$$

$$\delta'\zeta_- = -2 \sum_a \psi_{\Lambda-,a} = -2 \sum_a \left(\bar{\varepsilon}_- \sigma_a - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\varepsilon}_+ (A_{0,a} - A_{1,a}) \right). \quad (\text{C.46e})$$

一方で Γ のゲージ場と結合しない場合の超対称変換は (C.21) を用いて与えられる:

$$\delta\Gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \delta(\gamma^3 + i\gamma^4) + i\sqrt{2} \theta^+ \delta\zeta_+ + i\sqrt{2} \theta^- \delta\zeta_- + 2i \theta^+ \theta^- \delta G_\Gamma + \dots, \quad (\text{C.47a})$$

$$\delta(\gamma^3 + i\gamma^4) = 2\varepsilon_- \zeta_+ - 2\varepsilon_+ \zeta_-, \quad (\text{C.47b})$$

$$\delta G_\Gamma = -\sqrt{2} \bar{\varepsilon}_- (\partial_0 + \partial_1) \zeta_- - \sqrt{2} \bar{\varepsilon}_+ (\partial_0 - \partial_1) \zeta_+, \quad (\text{C.47c})$$

$$\delta\zeta_+ = -i\bar{\varepsilon}_- (\partial_0 + \partial_1) (\gamma^3 + i\gamma^4) + i\sqrt{2} \varepsilon_+ G_\Gamma, \quad (\text{C.47d})$$

$$\delta\zeta_- = i\bar{\varepsilon}_+ (\partial_0 - \partial_1) (\gamma^3 + i\gamma^4) + i\sqrt{2} \varepsilon_- G_\Gamma. \quad (\text{C.47e})$$

よって Γ のゲージ共変な超対称変換則 $\hat{\delta}\Gamma$ は次の様になる:

$$\hat{\delta}\Gamma = \delta\Gamma + \delta'\Gamma, \quad (\text{C.48a})$$

$$\hat{\delta}(\gamma^3 + i\gamma^4) = 2\varepsilon_- \zeta_+ - 2\varepsilon_+ \zeta_-, \quad (\text{C.48b})$$

$$\hat{\delta}G_\Gamma = -\sqrt{2} \bar{\varepsilon}_- (\partial_0 + \partial_1) \zeta_- - \sqrt{2} \bar{\varepsilon}_+ (\partial_0 - \partial_1) \zeta_+ - 2i \sum_a (\bar{\varepsilon}_- \bar{\lambda}_{+,a} - \bar{\varepsilon}_+ \bar{\lambda}_{-,a}), \quad (\text{C.48c})$$

$$\widehat{\delta}\zeta_+ = -i\bar{\varepsilon}_-(\partial_0 + \partial_1)\gamma^3 + \bar{\varepsilon}_-(D_0 + D_1)\gamma^4 + i\sqrt{2}\varepsilon_+G_\Gamma + 2\sum_a\bar{\sigma}_a\bar{\varepsilon}_+, \quad (\text{C.48d})$$

$$\widehat{\delta}\zeta_- = i\bar{\varepsilon}_+(\partial_0 - \partial_1)\gamma^3 - \bar{\varepsilon}_+(D_0 - D_1)\gamma^4 + i\sqrt{2}\varepsilon_-G_\Gamma - 2\sum_a\sigma_a\bar{\varepsilon}_-. \quad (\text{C.48e})$$

ただし共変微分は γ^4 にのみ作用し、 γ^3 は通常の微分となる:

$$D_m\gamma^4 = \partial_m\gamma^4 - \sqrt{2}\sum_a A_{m,a}. \quad (\text{C.49})$$

同様に、Wess-Zumino gauge 再固定に従う変形された $\delta'\bar{\Gamma}$ は次の通り:

$$\delta'\bar{\Gamma} = -2\sum_a\bar{\Phi}_{\Lambda,a}, \quad (\text{C.50a})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\delta'(\gamma^3 - i\gamma^4) = -2\sum_a\bar{\phi}_{\Lambda,a} = 0, \quad (\text{C.50b})$$

$$\delta'\bar{G}_\Gamma = -2\sum_a\bar{F}_{\Lambda,a} = -2i\sum_a\left(\varepsilon_-\lambda_{+,a} - \varepsilon_+\lambda_{-,a}\right), \quad (\text{C.50c})$$

$$\delta'\bar{\zeta}_+ = -2\sum_a\bar{\psi}_{\Lambda+,a} = -2\sum_a\left(-\varepsilon_+\sigma_a + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_-(A_{0,a} + A_{1,a})\right), \quad (\text{C.50d})$$

$$\delta'\bar{\zeta}_- = -2\sum_a\bar{\psi}_{\Lambda-,a} = -2\sum_a\left(\varepsilon_-\bar{\sigma}_a - \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_+(A_{0,a} - A_{1,a})\right). \quad (\text{C.50e})$$

ゲージ場と結合しない場合の $\bar{\Gamma}$ の超対称変換は

$$\delta\bar{\Gamma} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\delta(\gamma^3 - i\gamma^4) + i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\delta\bar{\zeta}_+ + i\sqrt{2}\bar{\theta}^-\delta\bar{\zeta}_- + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\delta\bar{G}_\Gamma + \dots, \quad (\text{C.51a})$$

$$\delta(\gamma^3 - i\gamma^4) = -2\bar{\varepsilon}_-\bar{\zeta}_+ + 2\bar{\varepsilon}_+\bar{\zeta}_-, \quad (\text{C.51b})$$

$$\delta\bar{G}_\Gamma = \sqrt{2}\varepsilon_-(\partial_0 + \partial_1)\bar{\zeta}_- + \sqrt{2}\varepsilon_+(\partial_0 - \partial_1)\bar{\zeta}_+, \quad (\text{C.51c})$$

$$\delta\bar{\zeta}_+ = i\varepsilon_-(\partial_0 + \partial_1)(\gamma^3 - i\gamma^4) - i\sqrt{2}\bar{G}_\Gamma\bar{\varepsilon}_+, \quad (\text{C.51d})$$

$$\delta\bar{\zeta}_- = -i\varepsilon_+(\partial_0 - \partial_1)(\gamma^3 - i\gamma^4) - i\sqrt{2}\bar{G}_\Gamma\bar{\varepsilon}_-. \quad (\text{C.51e})$$

である。よって、 $\bar{\Gamma}$ のゲージ共変な超対称変換 $\widehat{\delta}\bar{\Gamma}$ は次で与えられる:

$$\widehat{\delta}\bar{\Gamma} = \delta\bar{\Gamma} + \delta'\bar{\Gamma}, \quad (\text{C.52a})$$

$$\widehat{\delta}(\gamma^3 - i\gamma^4) = -2\bar{\varepsilon}_-\bar{\zeta}_+ + 2\bar{\varepsilon}_+\bar{\zeta}_-, \quad (\text{C.52b})$$

$$\widehat{\delta}\bar{G}_\Gamma = \sqrt{2}\varepsilon_-(\partial_0 + \partial_1)\bar{\zeta}_- + \sqrt{2}\varepsilon_+(\partial_0 - \partial_1)\bar{\zeta}_+ - 2i\sum_a\left(\varepsilon_-\lambda_{+,a} - \varepsilon_+\lambda_{-,a}\right), \quad (\text{C.52c})$$

$$\widehat{\delta}\bar{\zeta}_+ = i\varepsilon_-(\partial_0 + \partial_1)\gamma^3 + \varepsilon_-(D_0 + D_1)\gamma^4 - i\sqrt{2}\bar{G}_\Gamma\bar{\varepsilon}_+ + 2\sum_a\sigma_a\varepsilon_+, \quad (\text{C.52d})$$

$$\widehat{\delta}\bar{\zeta}_- = -i\varepsilon_+(\partial_0 - \partial_1)\gamma^3 - \varepsilon_+(D_0 - D_1)\gamma^4 - i\sqrt{2}\bar{G}_\Gamma\bar{\varepsilon}_- - 2\sum_a\bar{\sigma}_a\varepsilon_-. \quad (\text{C.52e})$$

C.11 Unconstrained complex superfield

supercharges $Q_{\pm}$ と $\bar{Q}_{\pm}$ が一般の unconstrained complex 超場 C に作用すると次の様になる:

$$\begin{aligned} C = & \phi_c + i\sqrt{2}\theta^+\psi_{c+} + i\sqrt{2}\theta^-\psi_{c-} + i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\bar{\chi}_{c+} + i\sqrt{2}\bar{\theta}^-\bar{\chi}_{c-} \\ & + 2i\theta^+\theta^-F_c + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-M_c + 2i\theta^+\bar{\theta}^-G_c - 2i\theta^-\bar{\theta}^+N_c - \theta^-\bar{\theta}^-A_{c=} - \theta^+\bar{\theta}^+B_{c\neq} \\ & - 2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\zeta}_{c+} - 2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^-\bar{\zeta}_{c-} + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\theta^+\lambda_{c+} + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\theta^-\lambda_{c-} \\ & + 2\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-D_c, \end{aligned} \quad (C.53a)$$

$$\begin{aligned} -i\varepsilon_-Q_+C = & \sqrt{2}\varepsilon_-\psi_{c+} - 2\theta^-\varepsilon_-F_c + i\bar{\theta}^+\varepsilon_-\left(i(\partial_0 + \partial_1)\phi_c - B_{c\neq}\right) - 2\bar{\theta}^-\varepsilon_-G_c \\ & + i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\varepsilon_-\left((\partial_0 + \partial_1)\bar{\chi}_{c-} - i\sqrt{2}\lambda_{c+}\right) - i\sqrt{2}\theta^-\bar{\theta}^+\varepsilon_-\left((\partial_0 + \partial_1)\psi_{c-} - i\sqrt{2}\bar{\zeta}_{c+}\right) \\ & - 2\theta^-\bar{\theta}^-\varepsilon_-\bar{\zeta}_{c-} - i\sqrt{2}\theta^+\bar{\theta}^+\varepsilon_-(\partial_0 + \partial_1)\psi_{c+} \\ & - 2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\varepsilon_-(\partial_0 + \partial_1)F_c + 2i\theta^+\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\varepsilon_-(\partial_0 + \partial_1)G_c + i\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\varepsilon_-\left(i(\partial_0 + \partial_1)A_{c=} + 2D_c\right) \\ & - 2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\varepsilon_-(\partial_0 + \partial_1)\bar{\zeta}_{c-}, \end{aligned} \quad (C.53b)$$

$$\begin{aligned} i\varepsilon_+Q_-C = & -\sqrt{2}\varepsilon_+\psi_{c-} - 2\theta^+\varepsilon_+F_c - 2\bar{\theta}^+\varepsilon_+N_c - i\bar{\theta}^-\varepsilon_+\left(i(\partial_0 - \partial_1)\phi_c - A_{c=}\right) \\ & + i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\varepsilon_+\left((\partial_0 - \partial_1)\psi_{c+} + i\sqrt{2}\bar{\zeta}_{c-}\right) + i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\varepsilon_+\left((\partial_0 - \partial_1)\bar{\chi}_{c+} + i\sqrt{2}\lambda_{c-}\right) \\ & + i\sqrt{2}\theta^-\bar{\theta}^-\varepsilon_+(\partial_0 - \partial_1)\psi_{c-} - 2\theta^+\bar{\theta}^+\varepsilon_+\bar{\zeta}_{c+} \\ & + 2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^-\varepsilon_+(\partial_0 - \partial_1)F_c + i\theta^+\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\varepsilon_+\left(i(\partial_0 - \partial_1)B_{c\neq} + 2D_c\right) - 2i\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\varepsilon_+(\partial_0 - \partial_1)N_c \\ & - 2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\varepsilon_+(\partial_0 - \partial_1)\bar{\zeta}_{c+}, \end{aligned} \quad (C.53c)$$

$$\begin{aligned} -i\bar{\varepsilon}_-\bar{Q}_+C = & -\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-\bar{\chi}_{c+} - i\theta^+\bar{\varepsilon}_-\left(i(\partial_0 + \partial_1)\phi_c + B_{c\neq}\right) + 2\theta^-\bar{\varepsilon}_-N_c + 2\bar{\theta}^-\bar{\varepsilon}_-M_c \\ & - i\sqrt{2}\theta^+\theta^-\bar{\varepsilon}_-\left((\partial_0 + \partial_1)\psi_{c-} + i\sqrt{2}\bar{\zeta}_{c+}\right) - i\sqrt{2}\theta^+\bar{\theta}^-\bar{\varepsilon}_-\left((\partial_0 + \partial_1)\bar{\chi}_{c-} + i\sqrt{2}\lambda_{c+}\right) \\ & + 2\theta^-\bar{\theta}^-\bar{\varepsilon}_-\lambda_{c-} - i\sqrt{2}\theta^+\bar{\theta}^+\bar{\varepsilon}_-(\partial_0 + \partial_1)\bar{\chi}_{c+} \\ & - 2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\varepsilon}_-(\partial_0 + \partial_1)N_c + i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^-\bar{\varepsilon}_-\left(i(\partial_0 + \partial_1)A_{c=} - 2D_c\right) + 2i\theta^+\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{\varepsilon}_-(\partial_0 + \partial_1)M_c \\ & - 2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{\varepsilon}_-(\partial_0 + \partial_1)\lambda_{c-}, \end{aligned} \quad (C.53d)$$

$$\begin{aligned} i\bar{\varepsilon}_+\bar{Q}_-C = & \sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+\bar{\chi}_{c-} + 2\theta^+\bar{\varepsilon}_+G_c + i\theta^-\bar{\varepsilon}_+\left(i(\partial_0 - \partial_1)\phi_c + A_{c=}\right) + 2\bar{\theta}^+\bar{\varepsilon}_+M_c \\ & - i\sqrt{2}\theta^+\theta^-\bar{\varepsilon}_+\left((\partial_0 - \partial_1)\psi_{c+} - i\sqrt{2}\bar{\zeta}_{c-}\right) + i\sqrt{2}\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\varepsilon}_+\left((\partial_0 - \partial_1)\bar{\chi}_{c+} - i\sqrt{2}\lambda_{c-}\right) \\ & + i\sqrt{2}\theta^-\bar{\theta}^-\bar{\varepsilon}_+(\partial_0 - \partial_1)\bar{\chi}_{c-} + 2\theta^+\bar{\theta}^+\bar{\varepsilon}_+\lambda_{c+} \\ & + i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\varepsilon}_+\left(i(\partial_0 - \partial_1)B_{c\neq} - 2D_c\right) + 2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^-\bar{\varepsilon}_+(\partial_0 - \partial_1)G_c - 2i\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{\varepsilon}_+(\partial_0 - \partial_1)M_c \\ & - 2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{\varepsilon}_+(\partial_0 - \partial_1)\lambda_{c+}. \end{aligned} \quad (C.53e)$$

よって C の成分場 $\phi_c, \psi_{c\pm}, \bar{\chi}_{c\pm}, F_c, M_c, G_c, N_c, A_{c=}, B_{c\neq}, \bar{\zeta}_{c\pm}, \lambda_{c\pm}, D_c$ の超対称変換則は次で与えられる:

$$\begin{aligned} \delta C \equiv & \delta\phi_c + i\sqrt{2}\theta^+\delta\psi_{c+} + i\sqrt{2}\theta^-\delta\psi_{c-} + i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\delta\bar{\chi}_{c+} + i\sqrt{2}\bar{\theta}^-\delta\bar{\chi}_{c-} \\ & + 2i\theta^+\theta^-\delta F_c + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\delta M_c + 2i\theta^+\bar{\theta}^-\delta G_c - 2i\theta^-\bar{\theta}^+\delta N_c - \theta^-\bar{\theta}^-\delta A_{c=} - \theta^+\bar{\theta}^+\delta B_{c\neq} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\delta\bar{\zeta}_{c+} - 2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^-\delta\bar{\zeta}_{c-} + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\theta^+\delta\lambda_{c+} + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\theta^-\delta\lambda_{c-} \\
& + 2\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\delta D_c \\
= & \left\{ \sqrt{2}\varepsilon_-\psi_{c+} - \sqrt{2}\varepsilon_+\psi_{c-} - \sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-\bar{\chi}_{c+} + \sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+\bar{\chi}_{c-} \right\} \\
& + i\sqrt{2}\theta^+\left\{ -\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_-\left((\partial_0+\partial_1)\phi_c - iB_{c++}\right) + i\sqrt{2}\varepsilon_+F_c - i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+G_c \right\} \\
& + i\sqrt{2}\theta^-\left\{ \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_+\left((\partial_0-\partial_1)\phi_c - iA_{c=}\right) + i\sqrt{2}\varepsilon_-F_c - i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-N_c \right\} \\
& + i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\left\{ \frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_-\left((\partial_0+\partial_1)\phi_c + iB_{c++}\right) + i\sqrt{2}\varepsilon_+N_c - i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+M_c \right\} \\
& + i\sqrt{2}\bar{\theta}^-\left\{ -\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_+\left((\partial_0-\partial_1)\phi_c + iA_{c=}\right) + i\sqrt{2}\varepsilon_-G_c - i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-M_c \right\} \\
& + 2i\theta^+\theta^-\left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_-\left((\partial_0+\partial_1)\psi_{c-} + i\sqrt{2}\bar{\zeta}_{c+}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_+\left((\partial_0-\partial_1)\psi_{c+} - i\sqrt{2}\bar{\zeta}_{c-}\right) \right\} \\
& + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_-\left((\partial_0+\partial_1)\bar{\chi}_{c-} - i\sqrt{2}\lambda_{c+}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_+\left((\partial_0-\partial_1)\bar{\chi}_{c+} + i\sqrt{2}\lambda_{c-}\right) \right\} \\
& + 2i\theta^+\bar{\theta}^-\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_+\left((\partial_0-\partial_1)\psi_{c+} + i\sqrt{2}\bar{\zeta}_{c-}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_-\left((\partial_0+\partial_1)\bar{\chi}_{c-} + i\sqrt{2}\lambda_{c+}\right) \right\} \\
& - 2i\theta^-\bar{\theta}^+\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_-\left((\partial_0+\partial_1)\psi_{c-} - i\sqrt{2}\bar{\zeta}_{c+}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_+\left((\partial_0-\partial_1)\bar{\chi}_{c+} - i\sqrt{2}\lambda_{c-}\right) \right\} \\
& - \theta^-\bar{\theta}^-\left\{ -i\sqrt{2}\varepsilon_+(\partial_0-\partial_1)\psi_{c-} - i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+(\partial_0-\partial_1)\bar{\chi}_{c-} + 2\varepsilon_-\bar{\zeta}_{c-} - 2\bar{\varepsilon}_-\lambda_{c-} \right\} \\
& - \theta^+\bar{\theta}^+\left\{ i\sqrt{2}\varepsilon_-(\partial_0+\partial_1)\psi_{c+} + i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-(\partial_0+\partial_1)\bar{\chi}_{c+} + 2\varepsilon_+\bar{\zeta}_{c+} - 2\bar{\varepsilon}_+\lambda_{c+} \right\} \\
& - 2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\left\{ -\frac{i}{2}\bar{\varepsilon}_+\left((\partial_0-\partial_1)B_{c++} + 2iD_c\right) + \varepsilon_-(\partial_0+\partial_1)F_c + \bar{\varepsilon}_-(\partial_0+\partial_1)N_c \right\} \\
& - 2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^-\left\{ -\frac{i}{2}\bar{\varepsilon}_-\left((\partial_0+\partial_1)A_{c=} + 2iD_c\right) - \varepsilon_+(\partial_0-\partial_1)F_c - \bar{\varepsilon}_+(\partial_0-\partial_1)G_c \right\} \\
& + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\theta^+\left\{ \frac{i}{2}\varepsilon_+\left(i(\partial_0-\partial_1)B_{c++} - 2iD_c\right) + \varepsilon_-(\partial_0+\partial_1)G_c + \bar{\varepsilon}_-(\partial_0+\partial_1)M_c \right\} \\
& + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\theta^-\left\{ \frac{i}{2}\varepsilon_-\left((\partial_0+\partial_1)A_{c=} - 2iD_c\right) - \varepsilon_+(\partial_0-\partial_1)N_c - \bar{\varepsilon}_+(\partial_0-\partial_1)M_c \right\} \\
& + 2\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\left\{ -i\varepsilon_-(\partial_0+\partial_1)\bar{\zeta}_{c-} - i\varepsilon_+(\partial_0-\partial_1)\bar{\zeta}_{c+} - i\bar{\varepsilon}_-(\partial_0+\partial_1)\lambda_{c-} - i\bar{\varepsilon}_+(\partial_0-\partial_1)\lambda_{c+} \right\},
\end{aligned} \tag{C.54a}$$

$$\delta\phi_c = \sqrt{2}\varepsilon_-\psi_{c+} - \sqrt{2}\varepsilon_+\psi_{c-} - \sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-\bar{\chi}_{c+} + \sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+\bar{\chi}_{c-}, \tag{C.54b}$$

$$\delta\psi_{c+} = -\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_-\left((\partial_0+\partial_1)\phi_c - iB_{c++}\right) + i\sqrt{2}\varepsilon_+F_c - i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+G_c, \tag{C.54c}$$

$$\delta\psi_{c-} = \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_+\left((\partial_0-\partial_1)\phi_c - iA_{c=}\right) + i\sqrt{2}\varepsilon_-F_c - i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-N_c, \tag{C.54d}$$

$$\delta\bar{\chi}_{c+} = \frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_-\left((\partial_0+\partial_1)\phi_c + iB_{c++}\right) + i\sqrt{2}\varepsilon_+N_c - i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+M_c, \tag{C.54e}$$

$$\delta\bar{\chi}_{c-} = -\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_+\left((\partial_0-\partial_1)\phi_c + iA_{c=}\right) + i\sqrt{2}\varepsilon_-G_c - i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-M_c, \tag{C.54f}$$

$$\delta F_c = -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_-\left((\partial_0 + \partial_1)\psi_{c-} + i\sqrt{2}\bar{\zeta}_{c+}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_+\left((\partial_0 - \partial_1)\psi_{c+} - i\sqrt{2}\bar{\zeta}_{c-}\right), \quad (\text{C.54g})$$

$$\delta M_c = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_-\left((\partial_0 + \partial_1)\bar{\chi}_{c-} - i\sqrt{2}\lambda_{c+}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_+\left((\partial_0 - \partial_1)\bar{\chi}_{c+} + i\sqrt{2}\lambda_{c-}\right), \quad (\text{C.54h})$$

$$\delta G_c = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_+\left((\partial_0 - \partial_1)\psi_{c+} + i\sqrt{2}\bar{\zeta}_{c-}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_-\left((\partial_0 + \partial_1)\bar{\chi}_{c-} + i\sqrt{2}\lambda_{c+}\right), \quad (\text{C.54i})$$

$$\delta N_c = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_-\left((\partial_0 + \partial_1)\psi_{c-} - i\sqrt{2}\bar{\zeta}_{c+}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_+\left((\partial_0 - \partial_1)\bar{\chi}_{c+} - i\sqrt{2}\lambda_{c-}\right), \quad (\text{C.54j})$$

$$\delta A_{c=} = -i\sqrt{2}\varepsilon_+(\partial_0 - \partial_1)\psi_{c-} - i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+(\partial_0 - \partial_1)\bar{\chi}_{c-} + 2\varepsilon_-\bar{\zeta}_{c-} - 2\bar{\varepsilon}_-\lambda_{c-}, \quad (\text{C.54k})$$

$$\delta B_{c\pm} = i\sqrt{2}\varepsilon_-(\partial_0 + \partial_1)\psi_{c+} + i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-(\partial_0 + \partial_1)\bar{\chi}_{c+} + 2\varepsilon_+\bar{\zeta}_{c+} - 2\bar{\varepsilon}_+\lambda_{c+}, \quad (\text{C.54l})$$

$$\delta\bar{\zeta}_{c+} = -\frac{i}{2}\bar{\varepsilon}_+\left((\partial_0 - \partial_1)B_{c\pm} + 2iD_c\right) + \varepsilon_-(\partial_0 + \partial_1)F_c + \bar{\varepsilon}_-(\partial_0 + \partial_1)N_c, \quad (\text{C.54m})$$

$$\delta\bar{\zeta}_{c-} = -\frac{i}{2}\bar{\varepsilon}_-\left((\partial_0 + \partial_1)A_{c=} + 2iD_c\right) - \varepsilon_+(\partial_0 - \partial_1)F_c - \bar{\varepsilon}_+(\partial_0 - \partial_1)G_c, \quad (\text{C.54n})$$

$$\delta\lambda_{c+} = \frac{i}{2}\varepsilon_+\left((\partial_0 - \partial_1)B_{c\pm} - 2iD_c\right) + \varepsilon_-(\partial_0 + \partial_1)G_c + \bar{\varepsilon}_-(\partial_0 + \partial_1)M_c, \quad (\text{C.54o})$$

$$\delta\lambda_{c-} = \frac{i}{2}\varepsilon_-\left((\partial_0 + \partial_1)A_{c=} - 2iD_c\right) - \varepsilon_+(\partial_0 - \partial_1)N_c - \bar{\varepsilon}_+(\partial_0 - \partial_1)M_c, \quad (\text{C.54p})$$

$$\delta D_c = -i\varepsilon_-(\partial_0 + \partial_1)\bar{\zeta}_{c-} - i\varepsilon_+(\partial_0 - \partial_1)\bar{\zeta}_{c+} - i\bar{\varepsilon}_-(\partial_0 + \partial_1)\lambda_{c-} - i\bar{\varepsilon}_+(\partial_0 - \partial_1)\lambda_{c+}. \quad (\text{C.54q})$$

supercharges $Q_{\pm}$ と $\bar{Q}_{\pm}$ が一般の unconstrained complex 超場 $\bar{C}$ に作用すると次の様になる:

$$\begin{aligned} \bar{C} = & \bar{\phi}_c + i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\bar{\psi}_{c+} + i\sqrt{2}\bar{\theta}^-\bar{\psi}_{c-} + i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\chi_{c+} + i\sqrt{2}\bar{\theta}^-\chi_{c-} \\ & + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{F}_c + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{M}_c - 2i\bar{\theta}^-\bar{\theta}^+\bar{G}_c + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{N}_c - \bar{\theta}^-\bar{\theta}^-\bar{A}_{c=} - \bar{\theta}^+\bar{\theta}^+\bar{B}_{c\pm} \\ & + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{\theta}^+\zeta_{c+} + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{\theta}^-\zeta_{c-} - 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{\theta}^+\bar{\lambda}_{c+} - 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{\theta}^-\bar{\lambda}_{c-} \\ & + 2\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{D}_c, \end{aligned} \quad (\text{C.55a})$$

$$\begin{aligned} -i\varepsilon_-Q_+\bar{C} = & \sqrt{2}\varepsilon_-\chi_{c+} - 2\bar{\theta}^-\varepsilon_-\bar{M}_c + i\bar{\theta}^+\varepsilon_-\left(i(\partial_0 + \partial_1)\bar{\phi}_c - \bar{B}_{c\pm}\right) - 2\bar{\theta}^-\varepsilon_-\bar{N}_c \\ & + i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\varepsilon_-\left((\partial_0 + \partial_1)\bar{\psi}_{c-} - i\sqrt{2}\zeta_{c+}\right) - i\sqrt{2}\bar{\theta}^-\bar{\theta}^+\varepsilon_-\left((\partial_0 + \partial_1)\chi_{c-} - i\sqrt{2}\bar{\lambda}_{c+}\right) \\ & - 2\bar{\theta}^-\bar{\theta}^-\varepsilon_-\bar{\lambda}_{c-} + \sqrt{2}\bar{\theta}^+\bar{\theta}^+(-i\varepsilon_-)(\partial_0 + \partial_1)\chi_{c+} \\ & + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\varepsilon_-(\partial_0 + \partial_1)\bar{N}_c + i\bar{\theta}^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\varepsilon_-\left(i(\partial_0 + \partial_1)\bar{A}_{c=} + 2\bar{D}_c\right) - 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{\theta}^+\varepsilon_-(\partial_0 + \partial_1)\bar{M}_c \\ & - 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\varepsilon_-(\partial_0 + \partial_1)\bar{\lambda}_{c-}, \end{aligned} \quad (\text{C.55b})$$

$$\begin{aligned} i\varepsilon_+Q_-\bar{C} = & -\sqrt{2}\varepsilon_+\chi_{c-} - 2\bar{\theta}^+\varepsilon_+\bar{M}_c - 2\bar{\theta}^+\varepsilon_+\bar{G}_c - i\bar{\theta}^-\varepsilon_+\left(i(\partial_0 - \partial_1)\bar{\phi}_c - \bar{A}_{c=}\right) \\ & + i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\varepsilon_+\left((\partial_0 - \partial_1)\bar{\psi}_{c+} + i\sqrt{2}\zeta_{c-}\right) + i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\varepsilon_+\left((\partial_0 - \partial_1)\chi_{c+} + i\sqrt{2}\bar{\lambda}_{c-}\right) \\ & + i\sqrt{2}\bar{\theta}^-\bar{\theta}^-\varepsilon_+(\partial_0 - \partial_1)\chi_{c-} - 2\bar{\theta}^+\bar{\theta}^+\varepsilon_+\bar{\lambda}_{c+} \\ & + i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\varepsilon_+\left(i(\partial_0 - \partial_1)\bar{B}_{c\pm} + 2\bar{D}_c\right) - 2i\bar{\theta}^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\varepsilon_+(\partial_0 - \partial_1)\bar{G}_c + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{\theta}^-\varepsilon_+(\partial_0 - \partial_1)\bar{M}_c \\ & - 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\varepsilon_+(\partial_0 - \partial_1)\bar{\lambda}_{c+}, \end{aligned} \quad (\text{C.55c})$$

$$\begin{aligned} -i\bar{\varepsilon}_-\bar{Q}_+\bar{C} = & -\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-\bar{\psi}_{c+} - i\bar{\theta}^+\bar{\varepsilon}_-\left(i(\partial_0 + \partial_1)\bar{\phi}_c + \bar{B}_{c\pm}\right) + 2\bar{\theta}^-\bar{\varepsilon}_-\bar{G}_c + 2\bar{\theta}^-\bar{\varepsilon}_-\bar{F}_c \\ & - i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{\varepsilon}_-\left((\partial_0 + \partial_1)\chi_{c-} + i\sqrt{2}\bar{\lambda}_{c+}\right) - i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{\varepsilon}_-\left((\partial_0 + \partial_1)\bar{\psi}_{c-} + i\sqrt{2}\zeta_{c+}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\theta^-\bar{\theta}^-\bar{\varepsilon}_-\zeta_{c-} - i\sqrt{2}\theta^+\bar{\theta}^+\bar{\varepsilon}_-(\partial_0 + \partial_1)\bar{\psi}_{c+} \\
& + 2i\theta^+\bar{\theta}^+\bar{\varepsilon}_-(\partial_0 + \partial_1)\bar{F}_c - 2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\varepsilon}_-(\partial_0 + \partial_1)\bar{G}_c + i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^-\bar{\varepsilon}_-\left(i(\partial_0 + \partial_1)\bar{A}_{c=} - 2\bar{D}_c\right) \\
& - 2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\varepsilon}_-(\partial_0 + \partial_1)\zeta_{c-}, \tag{C.55d}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i\bar{\varepsilon}_+\bar{Q}_-\bar{C} &= \sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+\bar{\psi}_{c-} + 2\theta^+\bar{\varepsilon}_+\bar{N}_c + i\theta^-\bar{\varepsilon}_+\left(i(\partial_0 - \partial_1)\bar{\phi}_c + \bar{A}_{c=}\right) + 2\bar{\theta}^+\bar{\varepsilon}_+\bar{F}_c \\
& - i\sqrt{2}\theta^+\theta^-\bar{\varepsilon}_+\left((\partial_0 - \partial_1)\chi_{c+} - i\sqrt{2}\bar{\lambda}_{c-}\right) + i\sqrt{2}\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\varepsilon}_+\left((\partial_0 - \partial_1)\bar{\psi}_{c+} - i\sqrt{2}\zeta_{c-}\right) \\
& + i\sqrt{2}\theta^-\bar{\theta}^-\bar{\varepsilon}_+(\partial_0 - \partial_1)\bar{\psi}_{c-} + 2\theta^+\bar{\theta}^+\bar{\varepsilon}_+\zeta_{c+} \\
& - 2i\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\varepsilon}_+(\partial_0 - \partial_1)\bar{F}_c + i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\varepsilon}_+\left(i(\partial_0 - \partial_1)\bar{B}_{c+} - 2\bar{D}_c\right) + 2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^-\bar{\varepsilon}_+(\partial_0 - \partial_1)\bar{N}_c \\
& - 2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\varepsilon}_+(\partial_0 - \partial_1)\zeta_{c+}. \tag{C.55e}
\end{aligned}$$

よって $\bar{C}$ の成分場 $\bar{\phi}_c, \bar{\psi}_{c\pm}, \chi_{c\pm}, \bar{F}_c, \bar{M}_c, \bar{G}_c, \bar{N}_c, \bar{A}_{c=}, \bar{B}_{c+}, \zeta_{c\pm}, \bar{\lambda}_{c\pm}, \bar{D}_c$ の超対称変換則は次で与えられる:

$$\begin{aligned}
\delta\bar{C} &\equiv \delta\bar{\phi}_c + i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\delta\bar{\psi}_{c+} + i\sqrt{2}\bar{\theta}^-\delta\bar{\psi}_{c-} + i\sqrt{2}\theta^+\delta\chi_{c+} + i\sqrt{2}\theta^-\delta\chi_{c-} \\
& + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\delta\bar{F}_c + 2i\theta^+\theta^-\delta\bar{M}_c - 2i\theta^-\bar{\theta}^+\delta\bar{G}_c + 2i\theta^+\bar{\theta}^-\delta\bar{N}_c - \theta^-\bar{\theta}^-\delta\bar{A}_{c=} - \theta^+\bar{\theta}^+\delta\bar{B}_{c+} \\
& + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\theta^+\delta\zeta_{c+} + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\theta^-\delta\zeta_{c-} - 2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\delta\bar{\lambda}_{c+} - 2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^-\delta\bar{\lambda}_{c-} \\
& + 2\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\delta\bar{D}_c \\
& = \left\{ -\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-\bar{\psi}_{c+} + \sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+\bar{\psi}_{c-} + \sqrt{2}\varepsilon_-\chi_{c+} - \sqrt{2}\varepsilon_+\chi_{c-} \right\} \\
& + i\sqrt{2}\bar{\theta}^+\left\{ \frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_-\left((\partial_0 + \partial_1)\bar{\phi}_c + i\bar{B}_{c+}\right) - i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+\bar{F}_c + i\sqrt{2}\varepsilon_+\bar{G}_c \right\} \\
& + i\sqrt{2}\bar{\theta}^-\left\{ -\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_+\left((\partial_0 - \partial_1)\bar{\phi}_c + i\bar{A}_{c=}\right) - i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-\bar{F}_c + i\sqrt{2}\varepsilon_-\bar{N}_c \right\} \\
& + i\sqrt{2}\theta^+\left\{ -\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_-\left((\partial_0 + \partial_1)\bar{\phi}_c - i\bar{B}_{c+}\right) - i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+\bar{N}_c + i\sqrt{2}\varepsilon_+\bar{M}_c \right\} \\
& + i\sqrt{2}\theta^-\left\{ \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_+\left((\partial_0 - \partial_1)\bar{\phi}_c - i\bar{A}_{c=}\right) - i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-\bar{G}_c + i\sqrt{2}\varepsilon_-\bar{M}_c \right\} \\
& + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_-\left((\partial_0 + \partial_1)\bar{\psi}_{c-} - i\sqrt{2}\zeta_{c+}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_+\left((\partial_0 - \partial_1)\bar{\psi}_{c+} + i\sqrt{2}\zeta_{c-}\right) \right\} \\
& + 2i\theta^+\theta^-\left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_-\left((\partial_0 + \partial_1)\chi_{c-} + i\sqrt{2}\bar{\lambda}_{c+}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_+\left((\partial_0 - \partial_1)\chi_{c+} - i\sqrt{2}\bar{\lambda}_{c-}\right) \right\} \\
& - 2i\theta^-\bar{\theta}^+\left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_+\left((\partial_0 - \partial_1)\bar{\psi}_{c+} - i\sqrt{2}\zeta_{c-}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_-\left((\partial_0 + \partial_1)\chi_{c-} - i\sqrt{2}\bar{\lambda}_{c+}\right) \right\} \\
& + 2i\theta^+\bar{\theta}^-\left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_-\left((\partial_0 + \partial_1)\bar{\psi}_{c-} + i\sqrt{2}\zeta_{c+}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_+\left((\partial_0 - \partial_1)\chi_{c+} + i\sqrt{2}\bar{\lambda}_{c-}\right) \right\} \\
& - \theta^-\bar{\theta}^-\left\{ -i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+(\partial_0 - \partial_1)\bar{\psi}_{c-} - i\sqrt{2}\varepsilon_+(\partial_0 - \partial_1)\chi_{c-} - 2\bar{\varepsilon}_-\zeta_{c-} + 2\varepsilon_-\bar{\lambda}_{c-} \right\} \\
& - \theta^+\bar{\theta}^+\left\{ i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-(\partial_0 + \partial_1)\bar{\psi}_{c+} + i\sqrt{2}\varepsilon_-(\partial_0 + \partial_1)\chi_{c+} - 2\bar{\varepsilon}_+\zeta_{c+} + 2\varepsilon_+\bar{\lambda}_{c+} \right\} \\
& + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\theta^+\left\{ \frac{i}{2}\varepsilon_+\left((\partial_0 - \partial_1)\bar{B}_{c+} - 2i\bar{D}_c\right) + \bar{\varepsilon}_-(\partial_0 + \partial_1)\bar{F}_c + \varepsilon_-(\partial_0 + \partial_1)\bar{N}_c \right\} \\
& + 2i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\theta^-\left\{ \frac{i}{2}\varepsilon_-\left((\partial_0 + \partial_1)\bar{A}_{c=} - 2i\bar{D}_c\right) - \bar{\varepsilon}_+(\partial_0 - \partial_1)\bar{F}_c - \varepsilon_+(\partial_0 - \partial_1)\bar{G}_c \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\left\{-\frac{i}{2}\bar{\varepsilon}_+\left((\partial_0-\partial_1)\bar{B}_{c++}+2i\bar{D}_c\right)+\bar{\varepsilon}_-(\partial_0+\partial_1)\bar{G}_c+\varepsilon_-(\partial_0+\partial_1)\bar{M}_c\right\} \\
& -2i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^-\left\{-\frac{i}{2}\bar{\varepsilon}_-\left((\partial_0+\partial_1)\bar{A}_{c=+}+2i\bar{D}_c\right)-\bar{\varepsilon}_+(\partial_0-\partial_1)\bar{N}_c-\varepsilon_+(\partial_0-\partial_1)\bar{M}_c\right\} \\
& +2\theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\left\{-i\bar{\varepsilon}_-(\partial_0+\partial_1)\zeta_{c-}-i\bar{\varepsilon}_+(\partial_0-\partial_1)\zeta_{c+}-i\varepsilon_+(\partial_0-\partial_1)\bar{\lambda}_{c+}-i\varepsilon_-(\partial_0+\partial_1)\bar{\lambda}_{c-}\right\},
\end{aligned} \tag{C.56a}$$

$$\delta\bar{\phi}_c = -\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-\bar{\psi}_{c+}+\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+\bar{\psi}_{c-}+\sqrt{2}\varepsilon_-\chi_{c+}-\sqrt{2}\varepsilon_+\chi_{c-}, \tag{C.56b}$$

$$\delta\bar{\psi}_{c+} = \frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_-\left((\partial_0+\partial_1)\bar{\phi}_c+i\bar{B}_{c++}\right)-i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+\bar{F}_c+i\sqrt{2}\varepsilon_+\bar{G}_c, \tag{C.56c}$$

$$\delta\bar{\psi}_{c-} = -\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_+\left((\partial_0-\partial_1)\bar{\phi}_c+i\bar{A}_{c=+}\right)-i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-\bar{F}_c+i\sqrt{2}\varepsilon_-\bar{N}_c, \tag{C.56d}$$

$$\delta\chi_{c+} = -\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_-\left((\partial_0+\partial_1)\bar{\phi}_c-i\bar{B}_{c++}\right)-i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+\bar{N}_c+i\sqrt{2}\varepsilon_+\bar{M}_c, \tag{C.56e}$$

$$\delta\chi_{c-} = \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_+\left((\partial_0-\partial_1)\bar{\phi}_c-i\bar{A}_{c=+}\right)-i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-\bar{G}_c+i\sqrt{2}\varepsilon_-\bar{M}_c, \tag{C.56f}$$

$$\delta\bar{F}_c = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_-\left((\partial_0+\partial_1)\bar{\psi}_{c-}-i\sqrt{2}\zeta_{c+}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_+\left((\partial_0-\partial_1)\bar{\psi}_{c+}+i\sqrt{2}\zeta_{c-}\right), \tag{C.56g}$$

$$\delta\bar{M}_c = -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_-\left((\partial_0+\partial_1)\chi_{c-}+i\sqrt{2}\bar{\lambda}_{c+}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_+\left((\partial_0-\partial_1)\chi_{c+}-i\sqrt{2}\bar{\lambda}_{c-}\right), \tag{C.56h}$$

$$\delta\bar{G}_c = -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_+\left((\partial_0-\partial_1)\bar{\psi}_{c+}-i\sqrt{2}\zeta_{c-}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_-\left((\partial_0+\partial_1)\chi_{c-}-i\sqrt{2}\bar{\lambda}_{c+}\right), \tag{C.56i}$$

$$\delta\bar{N}_c = -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}_-\left((\partial_0+\partial_1)\bar{\psi}_{c-}+i\sqrt{2}\zeta_{c+}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_+\left((\partial_0-\partial_1)\chi_{c+}+i\sqrt{2}\bar{\lambda}_{c-}\right), \tag{C.56j}$$

$$\delta\bar{A}_{c=+} = -i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_+(\partial_0-\partial_1)\bar{\psi}_{c-}-i\sqrt{2}\varepsilon_+(\partial_0-\partial_1)\chi_{c-}-2\bar{\varepsilon}_-\zeta_{c-}+2\varepsilon_-\bar{\lambda}_{c-}, \tag{C.56k}$$

$$\delta\bar{B}_{c++} = i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}_-(\partial_0+\partial_1)\bar{\psi}_{c+}+i\sqrt{2}\varepsilon_-(\partial_0+\partial_1)\chi_{c+}-2\bar{\varepsilon}_+\zeta_{c+}+2\varepsilon_+\bar{\lambda}_{c+}, \tag{C.56l}$$

$$\delta\zeta_{c+} = \frac{i}{2}\varepsilon_+\left((\partial_0-\partial_1)\bar{B}_{c++}-2i\bar{D}_c\right)+\bar{\varepsilon}_-(\partial_0+\partial_1)\bar{F}_c+\varepsilon_-(\partial_0+\partial_1)\bar{N}_c, \tag{C.56m}$$

$$\delta\zeta_{c-} = \frac{i}{2}\varepsilon_-\left((\partial_0+\partial_1)\bar{A}_{c=+}-2i\bar{D}_c\right)-\bar{\varepsilon}_+(\partial_0-\partial_1)\bar{F}_c-\varepsilon_+(\partial_0-\partial_1)\bar{G}_c, \tag{C.56n}$$

$$\delta\bar{\lambda}_{c+} = -\frac{i}{2}\bar{\varepsilon}_+\left((\partial_0-\partial_1)\bar{B}_{c++}+2i\bar{D}_c\right)+\bar{\varepsilon}_-(\partial_0+\partial_1)\bar{G}_c+\varepsilon_-(\partial_0+\partial_1)\bar{M}_c, \tag{C.56o}$$

$$\delta\bar{\lambda}_{c-} = -\frac{i}{2}\bar{\varepsilon}_-\left((\partial_0+\partial_1)\bar{A}_{c=+}+2i\bar{D}_c\right)-\bar{\varepsilon}_+(\partial_0-\partial_1)\bar{N}_c-\varepsilon_+(\partial_0-\partial_1)\bar{M}_c, \tag{C.56p}$$

$$\delta\bar{D}_c = -i\bar{\varepsilon}_-(\partial_0+\partial_1)\zeta_{c-}-i\bar{\varepsilon}_+(\partial_0-\partial_1)\zeta_{c+}-i\varepsilon_+(\partial_0-\partial_1)\bar{\lambda}_{c+}-i\varepsilon_-(\partial_0+\partial_1)\bar{\lambda}_{c-}. \tag{C.56q}$$

C.12 Expansions of abelian GLSM

超場で書かれた abelian GLSM の全ての項の展開を明記しておこう (FI parameters の規格化は $s_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(s_{1,a} + i s_{2,a})$, $t_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(t_{1,a} + i t_{2,a})$):

C.12.1 twisted F-terms

$$\begin{aligned}
\sum_{a=1}^k \left\{ \sqrt{2} \int d^2\tilde{\theta} (t_a - \Theta) \Sigma_a + (\text{h.c.}) \right\} &= \sum_a \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \int d\theta^+ d\bar{\theta}^- (\Theta - t_a) \Sigma_a + (\text{h.c.}) \right\} \\
&= -\sqrt{2} \sum_a \left\{ i \sigma_a \tilde{G} - i \bar{\sigma}_a \bar{\tilde{G}} - D_{V,a} r^3 - \vartheta F_{01,a} - \bar{\lambda}_{-,a} \tilde{\chi}_+ - \bar{\lambda}_{+,a} \tilde{\chi}_- - \bar{\tilde{\chi}}_+ \lambda_{-,a} - \bar{\tilde{\chi}}_- \lambda_{+,a} \right\} \\
&\quad - \sqrt{2} \sum_a \left\{ t_{1,a} D_{V,a} + t_{2,a} F_{01,a} \right\}. \tag{C.57}
\end{aligned}$$

C.12.2 F-terms

$$\begin{aligned}
\sum_{a=1}^k \left\{ \sqrt{2} \int d^2\theta \left(-\tilde{Q}_a \Phi_a Q_a \right) + (\text{h.c.}) \right\} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_a \left\{ \int d\theta^+ d\theta^- \tilde{Q}_a \Phi_a Q_a + (\text{h.c.}) \right\} \\
&= -i\sqrt{2} \sum_a \left[\phi_a (q_a \tilde{F}_a + \tilde{q}_a F_a) + q_a \tilde{q}_a D_{\Phi,a} \right] + i\sqrt{2} \sum_a \left[\bar{\phi}_a (\bar{q}_a \bar{\tilde{F}}_a + \bar{\tilde{q}}_a \bar{F}_a) + \bar{q}_a \bar{\tilde{q}}_a \bar{D}_{\Phi,a} \right] \\
&\quad - \sqrt{2} \sum_a \left[\phi_a (\psi_{+,a} \tilde{\psi}_{-,a} + \tilde{\psi}_{+,a} \psi_{-,a}) \right] - \sqrt{2} \sum_a \left[\bar{\phi}_a (\bar{\psi}_{-,a} \bar{\psi}_{+,a} + \bar{\psi}_{-,a} \bar{\tilde{\psi}}_{+,a}) \right] \\
&\quad - \sqrt{2} \sum_a \left[q_a (\tilde{\lambda}_{+,a} \tilde{\psi}_{-,a} + \tilde{\psi}_{+,a} \tilde{\lambda}_{-,a}) + \tilde{q}_a (\tilde{\lambda}_{+,a} \psi_{-,a} + \psi_{+,a} \tilde{\lambda}_{-,a}) \right] \\
&\quad - \sqrt{2} \sum_a \left[\bar{q}_a (\bar{\tilde{\psi}}_{-,a} \bar{\tilde{\lambda}}_{+,a} + \bar{\tilde{\lambda}}_{-,a} \bar{\tilde{\psi}}_{+,a}) + \tilde{q}_a (\bar{\psi}_{-,a} \bar{\tilde{\lambda}}_{+,a} + \bar{\tilde{\lambda}}_{-,a} \bar{\psi}_{+,a}) \right], \tag{C.58a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{a=1}^k \left\{ \sqrt{2} \int d^2\theta \left(-\Psi \Phi_a \right) + (\text{h.c.}) \right\} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_a \left\{ \int d\theta^+ d\theta^- \Psi \Phi_a + (\text{h.c.}) \right\} \\
&= -i \sum_a \left[\sqrt{2} \phi_a G + (r^1 + i r^2) D_{\Phi,a} \right] + i \sum_a \left[\sqrt{2} \bar{\phi}_a \bar{G} + (r^1 - i r^2) \bar{D}_{\Phi,a} \right] \\
&\quad - \sqrt{2} \sum_a \left[\chi_+ \tilde{\lambda}_{-,a} - \chi_- \tilde{\lambda}_{+,a} \right] - \sqrt{2} \sum_a \left[\bar{\tilde{\lambda}}_{-,a} \bar{\chi}_+ - \bar{\tilde{\lambda}}_{+,a} \bar{\chi}_- \right], \tag{C.58b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{a=1}^k \left\{ \sqrt{2} \int d^2\theta s_a \Phi_a + (\text{h.c.}) \right\} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_a \left\{ \int d\theta^+ d\theta^- s_a \Phi_a + (\text{h.c.}) \right\} \\
&= i\sqrt{2} \sum_a \left\{ s_a D_{\Phi,a} - \bar{s}_a \bar{D}_{\Phi,a} \right\}. \tag{C.58c}
\end{aligned}$$

C.12.3 D-terms

$$\begin{aligned}
\sum_{a=1}^k \int d^4\theta \frac{1}{e_a^2} \left(-\bar{\Sigma}_a \Sigma_a + \bar{\Phi}_a \Phi_a \right) &= \sum_a \int d\theta^+ d\theta^- d\bar{\theta}^+ d\bar{\theta}^- \frac{1}{4e_a^2} \left(\bar{\Sigma}_a \Sigma_a - \bar{\Phi}_a \Phi_a \right) \\
&= \sum_a \frac{1}{e_a^2} \left[\frac{1}{2} (F_{01,a})^2 - |\partial_m \sigma_a|^2 - |\partial_m \phi_a|^2 + \frac{1}{2} (D_{V,a})^2 + |D_{\Phi,a}|^2 \right] \\
&\quad + \sum_a \frac{i}{e_a^2} \left[\bar{\lambda}_{+,a} (\partial_0 - \partial_1) \lambda_{+,a} + \bar{\lambda}_{-,a} (\partial_0 + \partial_1) \lambda_{-,a} + \bar{\tilde{\lambda}}_{+,a} (\partial_0 - \partial_1) \tilde{\lambda}_{+,a} + \bar{\tilde{\lambda}}_{-,a} (\partial_0 + \partial_1) \tilde{\lambda}_{-,a} \right],
\end{aligned} \tag{C.59a}$$

$$\begin{aligned}
\int d^4\theta \frac{1}{g^2} \left(-\bar{\Theta} \Theta \right) &= \int d\theta^+ d\theta^- d\bar{\theta}^+ d\bar{\theta}^- \frac{1}{4g^2} \left(\bar{\Theta} \Theta \right) \\
&= -\frac{1}{g^2} \left[\frac{1}{2} (\partial_m r^3)^2 + \frac{1}{2} (\partial_m \vartheta)^2 - |\tilde{G}|^2 \right] + \frac{i}{g^2} \left[\bar{\chi}_+ (\partial_0 - \partial_1) \tilde{\chi}_+ + \bar{\chi}_- (\partial_0 + \partial_1) \tilde{\chi}_- \right],
\end{aligned} \tag{C.59b}$$

$$\begin{aligned}
\int d^4\theta \frac{1}{g^2} \left(\bar{\Psi} \Psi \right) &= -\int d\theta^+ d\theta^- d\bar{\theta}^+ d\bar{\theta}^- \frac{1}{4g^2} \left(\bar{\Psi} \Psi \right) \\
&= -\frac{1}{g^2} \left[\frac{1}{2} (\partial_m r^1)^2 + \frac{1}{2} (\partial_m r^2)^2 - |G|^2 \right] + \frac{i}{g^2} \left[\bar{\chi}_+ (\partial_0 - \partial_1) \chi_+ + \bar{\chi}_- (\partial_0 + \partial_1) \chi_- \right],
\end{aligned} \tag{C.59c}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{a=1}^k \int d^4\theta \left(\bar{Q}_a e^{+2V_a} Q_a + \bar{\tilde{Q}}_a e^{-2V_a} \tilde{Q}_a \right) &= \sum_a \int d\theta^+ d\theta^- d\bar{\theta}^+ d\bar{\theta}^- \frac{1}{4} \left(-\bar{Q}_a e^{+2V_a} Q_a - \bar{\tilde{Q}}_a e^{-2V_a} \tilde{Q}_a \right) \\
&= \sum_a \left\{ -|D_m q_a|^2 - |D_m \tilde{q}_a|^2 - 2|\sigma_a|^2 (|q_a|^2 + |\tilde{q}_a|^2) + |F_a|^2 + |\tilde{F}_a|^2 - D_{V,a} (|q_a|^2 - |\tilde{q}_a|^2) \right\} \\
&\quad + i \sum_a \left\{ \bar{\psi}_{+,a} (D_0 - D_1) \psi_{+,a} + \bar{\psi}_{-,a} (D_0 + D_1) \psi_{-,a} \right\} \\
&\quad + i \sum_a \left\{ \bar{\tilde{\psi}}_{+,a} (D_0 - D_1) \tilde{\psi}_{+,a} + \bar{\tilde{\psi}}_{-,a} (D_0 + D_1) \tilde{\psi}_{-,a} \right\} \\
&\quad + \sqrt{2} \sum_a \left\{ q_a \left(\bar{\psi}_{+,a} \bar{\lambda}_{-,a} - \bar{\psi}_{-,a} \bar{\lambda}_{+,a} \right) + \bar{q}_a \left(\psi_{-,a} \lambda_{+,a} - \psi_{+,a} \lambda_{-,a} \right) \right\} \\
&\quad + \sqrt{2} \sum_a \left\{ \tilde{q}_a \left(\bar{\tilde{\psi}}_{-,a} \bar{\lambda}_{+,a} - \bar{\tilde{\psi}}_{+,a} \bar{\lambda}_{-,a} \right) + \tilde{\bar{q}}_a \left(\tilde{\psi}_{+,a} \lambda_{-,a} - \tilde{\psi}_{-,a} \lambda_{+,a} \right) \right\} \\
&\quad - \sqrt{2} \sum_a \left\{ \sigma_a \left(\bar{\psi}_{-,a} \psi_{+,a} - \bar{\tilde{\psi}}_{-,a} \tilde{\psi}_{+,a} \right) + \bar{\sigma}_a \left(\bar{\psi}_{+,a} \psi_{-,a} - \bar{\tilde{\psi}}_{+,a} \tilde{\psi}_{-,a} \right) \right\},
\end{aligned} \tag{C.59d}$$

$$\begin{aligned}
\int d^4\theta \frac{g^2}{2} \left(\Gamma + \bar{\Gamma} + 2 \sum_{a=1}^k V_a \right)^2 &= -\int d\theta^+ d\theta^- d\bar{\theta}^+ d\bar{\theta}^- \frac{g^2}{8} \left(\Gamma + \bar{\Gamma} + 2 \sum_{a=1}^k V_a \right)^2 \\
&= -\frac{g^2}{2} \left[(\partial_m \gamma^3)^2 + (D_m \gamma^4)^2 \right] - 2g^2 \sum_{a,b} \sigma_a \bar{\sigma}_b + g^2 |G_\Gamma|^2 - \sqrt{2} g^2 \gamma^3 \sum_a D_{V,a} \\
&\quad + i g^2 \left[\bar{\zeta}_+ (\partial_0 - \partial_1) \zeta_+ + \bar{\zeta}_- (\partial_0 + \partial_1) \zeta_- \right] \\
&\quad + \sqrt{2} g^2 \sum_a \left[\bar{\lambda}_{+,a} \bar{\zeta}_- - \bar{\lambda}_{-,a} \bar{\zeta}_+ + \zeta_- \lambda_{+,a} - \zeta_+ \lambda_{-,a} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{g^2}{2} \left[(\partial_m \gamma^3)^2 + (D_m \gamma^4)^2 \right] - 2g^2 \sum_{a,b} \sigma_a \bar{\sigma}_b + g^2 |G_\Gamma|^2 - \sqrt{2} g^2 \gamma^3 \sum_a D_{V,a} \\
&\quad + \frac{i}{g^2} \left[\bar{\chi}_+ (\partial_0 - \partial_1) \tilde{\chi}_+ + \bar{\chi}_- (\partial_0 + \partial_1) \tilde{\chi}_- \right] \\
&\quad - \sqrt{2} \sum_a \left[\bar{\lambda}_{+,a} \tilde{\chi}_- - \bar{\lambda}_{-,a} \tilde{\chi}_+ + \bar{\chi}_- \lambda_{+,a} - \bar{\chi}_+ \lambda_{-,a} \right], \tag{C.59e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int d^4\theta \left\{ -\frac{g^2}{2} (\Xi + \bar{\Xi} - \sqrt{2} \sum_{a=1}^k (C_a + \bar{C}_a))^2 \right\} \\
&= \int d\theta^+ d\theta^- d\bar{\theta}^+ d\bar{\theta}^- \left\{ \frac{g^2}{4} \bar{\Xi} \Xi - \frac{g^2}{2\sqrt{2}} (\Xi + \bar{\Xi}) \sum_a (C_a + \bar{C}_a) + \frac{g^2}{4} \left[\sum_a (C_a + \bar{C}_a) \right]^2 \right\} \\
&= -\frac{g^2}{2} \left[\partial_m y^1 - \sum_a \partial_m (\phi_{c,a} + \bar{\phi}_{c,a}) \right]^2 + g^2 \left[-\frac{1}{2} (\partial_m y^2)^2 + |G_\Xi|^2 \right] \\
&\quad + i g^2 \left[\bar{\xi}_+ (\partial_0 - \partial_1) \xi_+ + \bar{\xi}_- (\partial_0 + \partial_1) \xi_- \right] \\
&\quad - g^2 \sum_a (D_{c,a} + \bar{D}_{c,a}) \left[y^1 - \sum_b (\phi_{c,b} + \bar{\phi}_{c,b}) \right] \\
&\quad - \frac{g^2}{2} \sum_a (\phi_{c,a} + \bar{\phi}_{c,a}) (\partial_0^2 - \partial_1^2) \left[y^1 - \sum_b (\phi_{c,b} + \bar{\phi}_{c,b}) \right] \\
&\quad + \frac{g^2}{2} \sum_a \left[(B_{c\pm,a} + \bar{B}_{c\pm,a}) (\partial_0 - \partial_1) y^2 - (A_{c=,a} + \bar{A}_{c=,a}) (\partial_0 + \partial_1) y^2 \right] \\
&\quad - \frac{g^2}{2} \sum_{a,b} (A_{c=,a} + \bar{A}_{c=,a}) (B_{c\pm,b} + \bar{B}_{c\pm,b}) - \sqrt{2} g^2 \sum_a \left[(G_{c,a} + \bar{N}_{c,a}) \bar{G}_\Xi + (\bar{G}_{c,a} + N_{c,a}) G_\Xi \right] \\
&\quad - 2g^2 \sum_{a,b} \left[(F_{c,a} + \bar{M}_{c,a}) (\bar{F}_{c,b} + M_{c,b}) - (G_{c,a} + \bar{N}_{c,a}) (\bar{G}_{c,b} + N_{c,b}) \right] \\
&\quad - \frac{i}{\sqrt{2}} g^2 \sum_a \left[(\psi_{c+,a} + \chi_{c+,a}) (\partial_0 - \partial_1) \xi_+ - (\psi_{c-,a} + \chi_{c-,a}) (\partial_0 + \partial_1) \xi_- \right] \\
&\quad - \frac{i}{\sqrt{2}} g^2 \sum_a \left[\bar{\xi}_+ (\partial_0 - \partial_1) (\bar{\chi}_{c+,a} + \bar{\psi}_{c+,a}) - \bar{\xi}_- (\partial_0 + \partial_1) (\bar{\chi}_{c-,a} + \bar{\psi}_{c-,a}) \right] \\
&\quad - g^2 \sum_a \left[(\bar{\zeta}_{c-,a} + \bar{\lambda}_{c-,a}) \xi_+ + (\bar{\zeta}_{c+,a} + \bar{\lambda}_{c+,a}) \xi_- + \bar{\xi}_+ (\lambda_{c-,a} + \zeta_{c-,a}) + \bar{\xi}_- (\lambda_{c+,a} + \zeta_{c+,a}) \right] \\
&\quad + \sqrt{2} g^2 \sum_{a,b} \left[(\psi_{c+,a} + \chi_{c+,a}) (\lambda_{c-,b} + \zeta_{c-,b}) - (\psi_{c-,a} + \chi_{c-,a}) (\lambda_{c+,b} + \zeta_{c+,b}) \right] \\
&\quad + \sqrt{2} g^2 \sum_{a,b} \left[(\bar{\chi}_{c-,a} + \bar{\psi}_{c-,a}) (\bar{\zeta}_{c+,b} + \bar{\lambda}_{c+,b}) - (\bar{\chi}_{c+,a} + \bar{\psi}_{c+,a}) (\bar{\zeta}_{c-,b} + \bar{\lambda}_{c-,b}) \right], \tag{C.59f}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int d^4\theta \left\{ -\sqrt{2} (\Psi - \bar{\Psi}) \sum_{a=1}^k (C_a - \bar{C}_a) \right\} = \int d\theta^+ d\theta^- d\bar{\theta}^+ d\bar{\theta}^- \left\{ \frac{1}{2\sqrt{2}} (\Psi - \bar{\Psi}) \sum_a (C_a - \bar{C}_a) \right\} \\
&= \sum_a \left[\frac{i}{2} (\phi_{c,a} - \bar{\phi}_{c,a}) (\partial_0^2 - \partial_1^2) r^2 + i (D_{c,a} - \bar{D}_{c,a}) r^2 + \sqrt{2} (F_{c,a} - \bar{M}_{c,a}) \bar{G} + \sqrt{2} (\bar{F}_{c,a} - M_{c,a}) G \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{i}{2} \sum_a \left[(B_{c+,a} - \bar{B}_{c+,a})(\partial_0 - \partial_1)r^1 + (A_{c=,a} - \bar{A}_{c=,a})(\partial_0 + \partial_1)r^1 \right] \\
& + \frac{i}{\sqrt{2}} \sum_a \left[(\psi_{c+,a} - \chi_{c+,a})(\partial_0 - \partial_1)\bar{\chi}_+ + (\psi_{c-,a} - \chi_{c-,a})(\partial_0 + \partial_1)\bar{\chi}_- \right] \\
& - \frac{i}{\sqrt{2}} \sum_a \left[(\bar{\chi}_{c+,a} - \bar{\psi}_{c+,a})(\partial_0 - \partial_1)\chi_+ + (\bar{\chi}_{c-,a} - \bar{\psi}_{c-,a})(\partial_0 + \partial_1)\chi_- \right] \\
& + \sum_a \left[(\bar{\zeta}_{c+,a} - \bar{\lambda}_{c+,a})\bar{\chi}_- - (\bar{\zeta}_{c-,a} - \bar{\lambda}_{c-,a})\bar{\chi}_+ + (\lambda_{c+,a} - \zeta_{c+,a})\chi_- - (\lambda_{c-,a} - \zeta_{c-,a})\chi_+ \right].
\end{aligned} \tag{C.59g}$$

注意として、もちろんの事ながら $(\sum_a V_a)^2 \neq \sum_a (V_a)^2$, $[\sum_a (C_a + \bar{C}_a)]^2 \neq \sum_a (C_a + \bar{C}_a)^2$ である:

$$\left(2 \sum_a V_a\right)^2 = -8 \sum_{a,b} \left[A_{0,a} A_{0,b} - A_{1,a} A_{1,b} - \sigma_a \bar{\sigma}_b - \bar{\sigma}_a \sigma_b \right] \theta^+ \bar{\theta}^- \theta^- \bar{\theta}^+ + \dots \tag{C.60}$$

そして共変微分は次の通り:

$$D_m q_a \equiv \partial_m q_a - i A_{m,a} q_a, \quad q_a \rightarrow q'_a = e^{+i\lambda_a} q_a, \tag{C.61a}$$

$$D_m \tilde{q}_a \equiv \partial_m \tilde{q}_a + i A_{m,a} \tilde{q}_a, \quad \tilde{q}_a \rightarrow \tilde{q}'_a = e^{-i\lambda_a} \tilde{q}_a, \tag{C.61b}$$

$$D_m \gamma^4 \equiv \partial_m \gamma^4 - \sqrt{2} \sum_a A_{m,a}, \quad \gamma^4 \rightarrow (\gamma^4)' = \gamma^4 + \sqrt{2} \sum_a \lambda_a, \tag{C.61c}$$

$$D_m \psi_{\pm,a} \equiv \partial_m \psi_{\pm,a} - i A_{m,a} \psi_{\pm,a}, \quad D_m \tilde{\psi}_{\pm,a} \equiv \partial_m \tilde{\psi}_{\pm,a} + i A_{m,a} \tilde{\psi}_{\pm,a}, \tag{C.61d}$$

$$A_{m,a} \rightarrow A'_{m,a} = A_{m,a} + \partial_m \lambda_a. \tag{C.61e}$$

これは超場形式での電荷の配位 ($Q, \tilde{Q}$ にそれぞれ $+1, -1$ の電荷) の成分場としての帰結である。こんなことをわざわざ明記した理由は、参照する文献によってこの符号の定義が異なっている (実際はそれぞれの文献の中では矛盾がない) ためである。他の文献を頼って混乱してしまうより、このノートでの定義を明言しておくで混乱がなくなる。

$\Phi_a = \bar{D}_+ \bar{D}_- C_a$ (C.13) により、各々の a について次が言える:

$$-\frac{1}{e_a^2} |\partial_m \phi_a|^2 = -\frac{4}{e_a^2} |\partial_m M_{c,a}|^2, \tag{C.62a}$$

$$i\sqrt{2} \phi_a (q_a \tilde{F}_a + \tilde{q}_a F_a) = 2\sqrt{2} M_{c,a} (q_a \tilde{F}_a + \tilde{q}_a F_a), \tag{C.62b}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{e_a^2} |D_{\Phi,a}|^2 - i\sqrt{2} q_a \tilde{q}_a D_{\Phi,a} + i\sqrt{2} \bar{q}_a \tilde{\bar{q}}_a \bar{D}_{\Phi,a} \\
& = \frac{1}{e_a^2} |D_{c,a} + \sqrt{2} e_a^2 \bar{q}_a \tilde{\bar{q}}_a|^2 - 2e_a^2 |q_a \tilde{q}_a|^2 \\
& \quad - \frac{i}{2e_a^2} (D_{c,a} + \sqrt{2} e_a^2 \bar{q}_a \tilde{\bar{q}}_a) \left[(\partial_0 - \partial_1) \bar{B}_{c+,a} + (\partial_0 + \partial_1) \bar{A}_{c=,a} + i(\partial_0^2 - \partial_1^2) \bar{\phi}_{c,a} \right] \\
& \quad + \frac{i}{2e_a^2} (\bar{D}_{c,a} + \sqrt{2} e_a^2 q_a \tilde{q}_a) \left[(\partial_0 - \partial_1) B_{c+,a} + (\partial_0 + \partial_1) A_{c=,a} - i(\partial_0^2 - \partial_1^2) \phi_{c,a} \right] \\
& \quad + \frac{1}{4e_a^2} \left| (\partial_0 - \partial_1) B_{c+,a} + (\partial_0 + \partial_1) A_{c=,a} - i(\partial_0^2 - \partial_1^2) \phi_{c,a} \right|^2.
\end{aligned} \tag{C.62c}$$

D $\mathcal{N} = (4, 4)$ Lagrangian of charged hypermultiplets

$\mathcal{N} = (4, 4)$ abelian gauge theory Lagrangian を次の様にする:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \int d^4\theta \left\{ \frac{1}{e^2} \left(-|\Sigma|^2 + |\Phi|^2 \right) + |Q|^2 e^{2\alpha V} + |\tilde{Q}|^2 e^{-2\alpha V} \right\} \\ & + \left\{ \sqrt{2} \int d^2\theta \beta \tilde{Q} \Phi Q + (\text{h.c.}) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

ここで $\mathcal{N} = (4, 4)$ SUSY を保つための α と β の相関を調べる。調べるには $\mathcal{N} = (4, 4)$ の $SU(2)_R$ -symmetry について考察することになる。成分場に分解しよう:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{e^2} \left[\frac{1}{2} (F_{01})^2 - |\partial_m \sigma|^2 - |\partial_m \phi|^2 + \frac{1}{2} (D_V)^2 + |D_\Phi|^2 \right] \\ & + \left[-|D_m q|^2 - 2\alpha^2 |\sigma|^2 |q|^2 + |F|^2 + \alpha D_V |q|^2 \right] \\ & + \left[-|D_m \tilde{q}|^2 - 2\alpha^2 |\sigma|^2 |\tilde{q}|^2 + |\tilde{F}|^2 - \alpha D_V |\tilde{q}|^2 \right] \\ & + \frac{i}{e^2} \left[\bar{\lambda}_+ (\partial_0 - \partial_1) \lambda_+ + \bar{\lambda}_- (\partial_0 + \partial_1) \lambda_- \right] + \frac{i}{e^2} \left[\bar{\tilde{\lambda}}_+ (\partial_0 - \partial_1) \tilde{\lambda}_+ + \bar{\tilde{\lambda}}_- (\partial_0 + \partial_1) \tilde{\lambda}_- \right] \\ & + i \left[\bar{\psi}_+ (D_0 - D_1) \psi_+ + \bar{\psi}_- (D_0 + D_1) \psi_- \right] + i \left[\bar{\tilde{\psi}}_+ (D_0 - D_1) \tilde{\psi}_+ + \bar{\tilde{\psi}}_- (D_0 + D_1) \tilde{\psi}_- \right] \\ & + i\sqrt{2} \beta \left[\phi (q \tilde{F} + \tilde{q} F) + q \tilde{q} D_\Phi \right] - i\sqrt{2} \beta \left[\bar{\phi} (\bar{q} \tilde{F} + \bar{\tilde{q}} F) + \bar{q} \bar{\tilde{q}} \bar{D}_\Phi \right] \\ & + \sqrt{2} \alpha \left\{ q (\bar{\psi}_+ \bar{\lambda}_- - \bar{\psi}_- \bar{\lambda}_+) + \bar{q} (\psi_- \lambda_+ - \psi_+ \lambda_-) \right\} - \sqrt{2} \alpha \left\{ \tilde{q} (\bar{\tilde{\psi}}_+ \bar{\tilde{\lambda}}_- - \bar{\tilde{\psi}}_- \bar{\tilde{\lambda}}_+) + \bar{\tilde{q}} (\tilde{\psi}_- \tilde{\lambda}_+ - \tilde{\psi}_+ \tilde{\lambda}_-) \right\} \\ & + \sqrt{2} \beta \left[q (\tilde{\lambda}_+ \tilde{\psi}_- + \tilde{\psi}_+ \tilde{\lambda}_-) + \bar{q} (\bar{\tilde{\psi}}_- \bar{\tilde{\lambda}}_+ + \bar{\tilde{\lambda}}_- \bar{\tilde{\psi}}_+) \right] + \sqrt{2} \beta \left[\tilde{q} (\tilde{\lambda}_+ \psi_- + \psi_+ \tilde{\lambda}_-) + \bar{\tilde{q}} (\bar{\tilde{\psi}}_- \bar{\tilde{\lambda}}_+ + \bar{\tilde{\lambda}}_- \bar{\tilde{\psi}}_+) \right] \\ & - \sqrt{2} \alpha \left\{ \sigma \bar{\psi}_- \psi_+ + \bar{\sigma} \bar{\psi}_+ \psi_- \right\} + \sqrt{2} \alpha \left\{ \sigma \bar{\tilde{\psi}}_- \tilde{\psi}_+ + \bar{\sigma} \bar{\tilde{\psi}}_+ \tilde{\psi}_- \right\} \\ & + \sqrt{2} \beta \left[\phi (\psi_+ \tilde{\psi}_- + \tilde{\psi}_+ \psi_-) \right] + \sqrt{2} \beta \left[\bar{\phi} (\bar{\tilde{\psi}}_- \bar{\psi}_+ + \bar{\psi}_- \bar{\tilde{\psi}}_+) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

中程にある3点相互作用に注目する。 $SU(2)_R$ -symmetry においては、それぞれの fields は次の交換を伴う [26, 27]:

$$(q, \bar{q}) \rightarrow (\bar{q}, -q), \quad (\psi_\pm, \bar{\tilde{\psi}}_\pm) \rightarrow (\psi_\pm, \bar{\tilde{\psi}}_\pm), \quad (\lambda_\pm, \tilde{\lambda}_\pm) \rightarrow (\tilde{\lambda}_\pm, -\lambda_\pm). \quad (\text{D.3})$$

さてこの (D.3) の下で Lagrangian が不変であるためには、

$$\alpha = -\beta, \quad (\text{D.4})$$

であるべきことが要請される。

E R-symmetry charges

[21, 44] にならって、特に GLSM for KK5-branes (7.6) を構成する成分場(補助場除く)についての $SU(2) \times SO(4) \simeq SU(2)_1 \times SU(2)_2 \times SU(2)_3$ R-symmetry に対する表現を記載しておく⁸:

$$\begin{aligned}
(Q_-^{A\dot{\alpha}}, Q_+^{A\alpha}) &: (\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{2})_- \oplus (\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{1})_+ \\
(\sigma_a, \phi_a) &: (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}) \\
(\lambda_{\pm,a}, \tilde{\lambda}_{\pm,a}) &: (\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{1})_- \oplus (\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{2})_+ \\
(q_a, \tilde{q}_a) &: (\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \\
(\psi_{\pm,a}, \tilde{\psi}_{\pm,a}) &: (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2})_- \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})_+ \\
(r^1, r^2, r^3) &: (\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \\
\gamma^4 &: (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \\
(\chi_{\pm}, \tilde{\chi}_{\pm}) &: (\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{2})_- \oplus (\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{1})_+.
\end{aligned} \tag{E.1}$$

ここで $Q_-^{A\dot{\alpha}}, Q_+^{A\alpha}$ は $\mathcal{N} = (4, 4)$ SUSY charges である。添字の $(A, \alpha, \dot{\alpha})$ は $SU(2)_1 \times SU(2)_2 \times SU(2)_3$ それぞれの doublets を表す。また、 $(q_a, \psi_{\pm,a}), (\tilde{q}_a, \tilde{\psi}_{\pm,a})$ はさらに $U(1)_f$ flavor symmetry charges をそれぞれ $+1, -1$ だけ運ぶ。他の成分場はすべて $U(1)_f$ neutral である。この $U(1)_f$ flavor symmetry は、 γ^4 の $U(1)$ gauge symmetry とは無関係である。

さて、 $\mathcal{N} = (0, 2)$ SUSY charges として具体的に (Q_+^{--}, Q_+^{++}) を選ぶ (誤植確認のために [43] も参照)。つまり Lorentzian signature においては Q_+ 及び $\bar{Q}_+$ で構成される部分だけを見る。そして $SU(2)_1 \times SU(2)_2 \times SU(2)_3$ の Cartan generators と $U(1)_f$ の charge をそれぞれ $\{Q_1, Q_2, Q_R; Q_f\}$ と表記しよう。GLSM for KK5-branes (7.6) の各成分場(補助場含む)についての charge assignment は次の通り:

$\mathcal{N} = (4, 4)$ vector		$Q_1 - Q_2$	Q_R	Q_f	$\mathcal{N} = (0, 2)$ rep.
V_a	$\bar{\sigma}_a$	-1	+1	0	chiral
	$\lambda_{+,a}$	-1	+1	0	
	$A_{m,a}$	0	0	0	vector
	$\lambda_{-,a}$	0	0	0	
	$D_{V,a}$	0	0	0	(auxiliary field)
Φ_a	ϕ_a	+1	+1	0	chiral
	$\tilde{\lambda}_{+,a}$	+1	+1	0	fermi
	$\tilde{\lambda}_{-,a}$	+2	0	0	
	$D_{\Phi,a}$	+2	0	0	(auxiliary field)
t_a		0	0	0	FI parameters
s_a		-2	0	0	FI parameters

⁸R-symmetry $SU(2)_1 \times SO(4)$ の brane configuration を用いた弦理論起源は、 $SU(2)_1$ が 678-方向の $SO(3)$ 回転、 $SO(4)$ は 2345-方向の $SO(4)$ 回転である。

補助場 ($D_{V,a}, D_{\Phi,a}$) それぞれには charge assignment が同じ vector/fermi multiplets が存在している。注意として FI parameters (s_a, t_a) は $(r^1, r^2, r^3, \gamma^4)$ 同様に $SU(2)_1 \times SU(2)_2 \times SU(2)_3$ の $(\mathbf{3} + \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ 表現に属していたことを思い出すべし (see section IV.C.1 of [32])。

$\mathcal{N} = (4, 4)$ charged hyper		$Q_1 - Q_2$	Q_R	Q_f	$\mathcal{N} = (0, 2)$ rep.
Q_a	q_a	-1	0	+1	chiral
	$\psi_{+,a}$	-1	0	+1	
	$\psi_{-,a}$	0	-1	+1	fermi
	F_a	0	-1	+1	(auxiliary field)
$\tilde{Q}_a$	$\tilde{q}_a$	-1	0	-1	chiral
	$\tilde{\psi}_{+,a}$	-1	0	-1	
	$\tilde{\psi}_{-,a}$	0	-1	-1	fermi
	$\tilde{F}_a$	0	-1	-1	(auxiliary field)

補助場 ($F_a, \tilde{F}_a$) の charge assignment は F-term から容易に分かる。それぞれには charge assignment が同じ fermi multiplets が存在している。

$\mathcal{N} = (4, 4)$ neutral hyper		$Q_1 - Q_2$	Q_R	Q_f	$\mathcal{N} = (0, 2)$ rep.
Ψ	$r^1 + i r^2$	-2	0	0	chiral
	χ_+	-2	0	0	
	χ_-	-1	-1	0	fermi
	G	-1	-1	0	(auxiliary field)
Γ	$\gamma^3 + i \gamma^4$	0	0	0	chiral
	$\zeta_+ = -g^{-2} \tilde{\chi}_+$	0	0	0	
	$\zeta_- = +g^{-2} \tilde{\chi}_-$	+1	-1	0	fermi
	G_Γ	(+1)	(-1)	(0)	(auxiliary field)

補助場 G の charge assignment は fermi multiplet である χ_- と同じである。一方で、補助場 G_Γ の charge assignment は Lagrangian では読み取れないが、fermi multiplet である $\tilde{\chi}_-$ と同じ assignment を(便宜上)導入しておく。実は G_Γ は、Wess-Zumino gauge の下での dualization (7.5) では対応する場が存在しないのだが、念のために [8] 以来ずっと残している。

これを応用して、GLSM for H-monopoles (7.1) での超場 Θ の成分場と GLSM for exotic five-brane (7.12) での超場 Ξ の成分場、それぞれの charge assignment を評価しておこう：

$\mathcal{N} = (2, 2)$ twisted chiral		$Q_1 - Q_2$	Q_R	Q_f	$\mathcal{N} = (0, 2)$ rep.
Θ	$r^3 + i\vartheta$	0	0	0	chiral
	$\bar{\bar{\chi}}_+$	0	0	0	
	$\tilde{\chi}_-$	-1	+1	0	fermi
	$\tilde{\bar{G}}$	-1	+1	0	(auxiliary field)

$\mathcal{N} = (2, 2)$ twisted chiral		$Q_1 - Q_2$	Q_R	Q_f	$\mathcal{N} = (0, 2)$ rep.
Ξ	$y^1 + iy^2$	-2	0	0	chiral
	$\bar{\xi}_+ = -g^{-2}\chi_+ + \dots$	-2	0	0	
	$\xi_- = +g^{-2}\bar{\chi}_- + \dots$	+1	+1	0	fermi
	G_Ξ	$(q_1 = +1)$	$(q_R = +1)$	$(q_f = 0)$	(auxiliary field)

補助場 G_Ξ の charge assignment は Lagrangian では読み取れないが、fermi multiplet である ξ_- と同じ assignment を (便宜上) 導入しておく。

さらにこれを応用して、unconstrained complex superfield C_a (由来は $\Phi_a = \bar{D}_+ \bar{D}_- C_a$) の成分場についての charge assignment を、dualization (7.10) および Lagrangian から評価する:

$\Phi_a = \bar{D}_+ \bar{D}_- C_a$		$Q_1 - Q_2$	Q_R	Q_f	$\mathcal{N} = (2, 2)$ chiral Φ_a
C_a	$M_{c,a}$	+1	+1	0	$\phi_a = -2iM_{c,a}$
	$\lambda_{c+,a}$	+1	+1	0	$\tilde{\lambda}_{+,a} = -\sqrt{2}\lambda_{c+,a} - i(\partial_0 + \partial_1)\bar{\chi}_{c-,a}$
	$\bar{\chi}_{c-,a}$	+1	+1	0	
	$\lambda_{c-,a}$	+2	0	0	$\tilde{\lambda}_{-,a} = -\sqrt{2}\lambda_{c-,a} + i(\partial_0 - \partial_1)\bar{\chi}_{c+,a}$
	$\bar{\chi}_{c+,a}$	+2	0	0	
	$D_{c,a}$	+2	0	0	
	$B_{c\pm,a}$	+2	0	0	$D_{\Phi,a} = iD_{c,a} - \frac{1}{2}(\partial_0 - \partial_1)B_{c\pm,a} - \frac{1}{2}(\partial_0 + \partial_1)A_{c\pm,a} + \frac{i}{2}(\partial_0^2 - \partial_1^2)\phi_{c,a}$
	$A_{c\pm,a}$	+2	0	0	
	$\phi_{c,a}$	+2	0	0	
	$F_{c,a}$	-1	-1	0	
	$\psi_{c-,a}$	-1	-1	0	redundantly auxiliary fields
	$\bar{\zeta}_{c+,a}$	-1	-1	0	
	$\psi_{c+,a}$	-2	0	0	
	$\bar{\zeta}_{c-,a}$	-2	0	0	redundantly auxiliary fields
	$G_{c,a}$	(q_1)	(q_R)	(q_f)	
	$N_{c,a}$	$(-q_1)$	$(-q_R)$	$(-q_f)$	

一般性を失わずに簡略化することが可能かどうか、次の考察を行っておく [2015 1/07]:

- 補助場 $(F_{c,a}, \psi_{c\pm,a}, \bar{\zeta}_{c\pm,a})$ は Φ_a に対応する場がない余分な場である。事実これらは常に他の場との線形和でのみ登場し、解析的に何も影響を与えない [8]。そのため、最初から手でゼロに設定しても問題はないが、[8] 以来ずっと残してある。
- 補助場 $G_{c,a}$ と $\bar{N}_{c,a}$ は $G_{\Xi} \in \Xi$ と同じ charge assignment であるが、dualization 前の Ψ に対応する場が存在しないため、不定である。事実、 $(G_{c,a}, N_{c,a}; G_{\Xi})$ は他の場と結合しないままであり、定まらなくても問題ない。

F Covariant derivative of charged scalar fields

次の配位を考える:

$$|q|^2 - |\tilde{q}|^2 = \sqrt{2}Z, \quad -\sqrt{2}q\tilde{q} = X + iY. \quad (\text{F.1})$$

$(q, \tilde{q})$ を r^i で記述しよう [21]:

$$(|q|^2 + |\tilde{q}|^2)^2 = (|q|^2 - |\tilde{q}|^2)^2 + 4|q\tilde{q}|^2 = 2R^2, \quad (\text{F.2a})$$

$$R^2 \equiv X^2 + Y^2 + Z^2, \quad (\text{F.2b})$$

$$q \equiv \frac{i}{2^{1/4}} e^{+i\alpha} \sqrt{R+Z}, \quad \tilde{q} \equiv \frac{i}{2^{1/4}} e^{-i\alpha} \frac{X+iY}{\sqrt{R+Z}}. \quad (\text{F.2c})$$

ここで α は不定因子。これを用いて q と $\tilde{q}$ の共変微分項を書き換える:

$$\begin{aligned} |D_m q|^2 + |D_m \tilde{q}|^2 &= |\partial_m q - iA_m q|^2 + |\partial_m \tilde{q} + iA_m \tilde{q}|^2 \\ &= |\partial_m q|^2 + |\partial_m \tilde{q}|^2 + (|q|^2 + |\tilde{q}|^2)A_m A^m + A_m \Pi^m \\ &= |\partial_m q|^2 + |\partial_m \tilde{q}|^2 - \frac{1}{4\sqrt{2}R} \Pi_m \Pi^m + \sqrt{2}R \left(A_m + \frac{1}{2\sqrt{2}R} \Pi_m \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

各要素は次の通り:

$$\partial_m q = i q \left[\partial_m \alpha - i \frac{\partial_m (R+Z)}{2(R+Z)} \right] \equiv i q \left[\partial_m \alpha - i \mathcal{B}_m \right], \quad (\text{F.4a})$$

$$\partial_m \tilde{q} = -i \tilde{q} \left[\partial_m \alpha - i \frac{\partial_m (R+Z)}{2(R+Z)} + i \frac{\partial_m (X+iY)}{X+iY} \right] \equiv -i \tilde{q} \left[\partial_m \alpha - i \mathcal{B}_m + i \mathcal{C}_m \right], \quad (\text{F.4b})$$

$$|\tilde{q}|^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{X^2 + Y^2}{R+Z}, \quad (\text{F.4c})$$

$$\mathcal{B}_m = \frac{X\partial_m X + Y\partial_m Y + (R+Z)\partial_m Z}{2R(R+Z)}, \quad (\text{F.4d})$$

$$\mathcal{C}_m \bar{\mathcal{C}}^m = \frac{1}{X^2 + Y^2} \left[(\partial_m X)^2 + (\partial_m Y)^2 \right], \quad (\text{F.4e})$$

$$\mathcal{C}^m + \bar{\mathcal{C}}^m = \frac{2}{X^2 + Y^2} \left[X\partial^m X + Y\partial^m Y \right], \quad (\text{F.4f})$$

$$-i(\mathcal{C}^m - \bar{\mathcal{C}}^m) = \frac{2}{X^2 + Y^2} \left[X\partial^m Y - Y\partial^m X \right], \quad (\text{F.4g})$$

$$\begin{aligned} \Pi_m &\equiv i(\bar{q}\partial_m q - q\partial_m \bar{q}) - i(\tilde{q}\partial_m \tilde{q} - \tilde{q}\partial_m \bar{\tilde{q}}) = -2(|q|^2 + |\tilde{q}|^2)\partial_m \alpha - i(\mathcal{C}_m - \bar{\mathcal{C}}_m)|\tilde{q}|^2 \\ &= -2\sqrt{2}R \left(\partial_m \alpha + \frac{-X\partial^m Y + Y\partial^m X}{2R(R+Z)} \right). \end{aligned} \quad (\text{F.4h})$$

よって、計算の続きは次の通り:

$$\begin{aligned}
-|D_m q|^2 - |D_m \tilde{q}|^2 &= -|\partial_m q|^2 - |\partial_m \tilde{q}|^2 + \frac{1}{4\sqrt{2}R} \Pi_m \Pi^m - \sqrt{2}R \left(A_m + \frac{1}{2\sqrt{2}R} \Pi_m \right)^2 \\
&= -|q|^2 \left[(\partial_m \alpha)^2 + (\mathcal{B}_m)^2 \right] \\
&\quad - |\tilde{q}|^2 \left[(\partial_m \alpha)^2 + (\mathcal{B}_m)^2 + \mathcal{C}_m \bar{\mathcal{C}}^m + i(\partial_m \alpha)(\mathcal{C}^m - \bar{\mathcal{C}}^m) - \mathcal{B}_m(\mathcal{C}^m + \bar{\mathcal{C}}^m) \right] \\
&\quad + \sqrt{2}R \left(\partial_m \alpha + \frac{-\mathbf{X} \partial^m \mathbf{Y} + \mathbf{Y} \partial^m \mathbf{X}}{2R(R + \mathbf{Z})} \right)^2 \\
&\quad - \sqrt{2}R \left(\partial_m \alpha - A_m + \frac{-\mathbf{X} \partial^m \mathbf{Y} + \mathbf{Y} \partial^m \mathbf{X}}{2R(R + \mathbf{Z})} \right)^2 \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}R} \left[(\partial_m \mathbf{X})^2 + (\partial_m \mathbf{Y})^2 + (\partial_m \mathbf{Z})^2 \right] \\
&\quad - \sqrt{2}R \left(\partial_m \alpha - A_m + \frac{-\mathbf{X} \partial_m \mathbf{Y} + \mathbf{Y} \partial_m \mathbf{X}}{2R(R + \mathbf{Z})} \right)^2. \tag{F.5}
\end{aligned}$$

G Smearing procedure

r^2 -方向を半径 $\mathcal{R}_2$ でコンパクト化して、素朴に s -積分を実行しよう⁹:

$$R^2 \equiv (r^1)^2 + (r^2 + s)^2 + (r^3)^2, \quad (\text{G.1a})$$

$$\varrho^2 \equiv (r^1)^2 + (r^3)^2, \quad (\text{G.1b})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\mathcal{R}_2} \int_{-L}^L ds H(R) &= \frac{1}{2\pi\mathcal{R}_2} \int_{-L}^L ds \left(\frac{1}{g^2} + \frac{1}{\sqrt{2}R} \right) = \frac{1}{g^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi\mathcal{R}_2} \int_{-L}^L \frac{ds}{\sqrt{\varrho^2 + (r^2 + s)^2}} \\ &= \frac{1}{g^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi\mathcal{R}_2} \left[\log(s + \sqrt{s^2 + \varrho^2}) \right]_{-L}^L \\ &= \frac{1}{g^2} + \frac{1}{\sqrt{2}\pi\mathcal{R}_2} \log \left(\frac{L + \sqrt{L^2 + \varrho^2}}{\varrho} \right) \\ &\equiv H(\varrho), \end{aligned} \quad (\text{G.1c})$$

$$\frac{1}{2\pi\mathcal{R}_2} \int_{-L}^L ds \Omega_1 = \frac{1}{2\pi\mathcal{R}_2} \int_{-L}^L ds \frac{r^2 + s}{\sqrt{2}R(R + r^3)} = 0, \quad (\text{G.1d})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\mathcal{R}_2} \int_{-L}^L ds \Omega_2 &= -\frac{1}{2\pi\mathcal{R}_2} \int_{-L}^L ds \frac{r^1}{\sqrt{2}R(R + r^3)} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}\pi\mathcal{R}_2} \left[\arctan \left(\frac{L}{r^1} \right) - \arctan \left(\frac{L}{\sqrt{L^2 + \varrho^2}} \frac{r^3}{r^1} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi\mathcal{R}_2} \arctan \left(\frac{r^3}{r^1} \right) + (\text{divergent term}). \end{aligned} \quad (\text{G.1e})$$

ここで L は r^2 -方向についての IR cutoff である。平均化を行っているので、 $r^2 + s$ の奇関数部分はゼロになる (r^2 を原点にしても構わない)。さらに次も示される:

$$\nabla H(\varrho) = \frac{\partial}{\partial r^1} H(\varrho) dr^1 + \frac{\partial}{\partial r^3} H(\varrho) dr^3 = -\frac{1}{\sqrt{2}\pi\mathcal{R}_2} \frac{r^1 dr^1 + r^3 dr^3}{\varrho^2}, \quad (\text{G.2a})$$

$$\frac{1}{2\pi\mathcal{R}_2} \int ds (\nabla \times \Omega)_1 = -\frac{1}{2\pi\mathcal{R}_2} \int ds \frac{r^1}{\sqrt{2}R^3} = -\frac{1}{\sqrt{2}\pi\mathcal{R}_2} \frac{r^1}{\varrho^2}, \quad (\text{G.2b})$$

$$\frac{1}{2\pi\mathcal{R}_2} \int ds (\nabla \times \Omega)_2 = -\frac{1}{2\pi\mathcal{R}_2} \int ds \frac{r^2 + s}{\sqrt{2}R^3} = 0, \quad (\text{G.2c})$$

$$\frac{1}{2\pi\mathcal{R}_2} \int ds (\nabla \times \Omega)_3 = -\frac{1}{2\pi\mathcal{R}_2} \int ds \frac{r^3}{\sqrt{2}R^3} = -\frac{1}{\sqrt{2}\pi\mathcal{R}_2} \frac{r^3}{\varrho^2}, \quad (\text{G.2d})$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi\mathcal{R}_2} \int_{-L}^L ds (\nabla H(R)) = \nabla H(\varrho) = \frac{1}{2\pi\mathcal{R}_2} \int_{-L}^L ds (\nabla \times \Omega). \quad (\text{G.2e})$$

$L \rightarrow \infty$ のため、途中で $L/\sqrt{L^2 + \varrho^2} \equiv 1$ とした。これにより、smearing 操作は微分積分の操作と可換であることが分かる。

⁹岩波数学公式I: 微分積分・平面曲線, p.110 参照。

H Einstein frame in D dimensions

往々にして、(defect) objects の質量などを定量的に導出したくなる場合がある。その時は、string frame よりも Einstein frame に移って計算をする必要がある。ここではそれら frame の行き来をごく簡単に紹介しておく。つまり string frame での10次元時空の計量 G_{MN}^{str} と、 $D = 10 - d$ 次元時空での Einstein frame の計量 G_{MN}^{E} との関係を簡単に述べる。

まず、10次元 string frame での計量と dilaton を

$$G_{MN}^{\text{str}10}, \quad \phi_{10}, \quad (\text{H.1})$$

とする。そして $d = 10 - D$ 次元だけ次元還元する。そうすれば計量のうちで次元還元されない部分 $G_{\mu\nu}^{\text{str}}$ がそのまま残り、次元還元された方向 $G_{\mu m}^{\text{str}}, G_{mn}^{\text{str}}$ は見えなくなる。そして dilaton が次の様になる (例えば [45] (4.7) 参照):

$$e^{-2\phi_D} = \int \text{vol}_d e^{-2\phi_{10}}. \quad (\text{H.2})$$

この新しく定義された ϕ_D を用いて、 D 次元での string frame から Einstein frame に、次の様に書き換えられる:

$$G_{\mu\nu}^{\text{E}} = e^{-\frac{4}{D-2}\phi_D} G_{\mu\nu}^{\text{str}}. \quad (\text{H.3})$$

例を考える。[16] にある、3次元 Einstein frame での exotic 5_2^2 -brane 計量を 10次元 string frame から与えよう:

$$ds_{\text{str}10}^2 = -dt^2 + dx_{12345}^2 + H dx_{67}^2 + \frac{H}{K} dx_{89}^2, \quad e^{2\phi_{10}} = \frac{H}{K}. \quad (\text{H.4})$$

ここで、1234589-方向を次元還元することで $D = 3$ 次元 ($d = 7$) にしよう:

$$ds_{\text{str}3}^2 = -dt^2 + H dx_{67}^2, \quad (\text{H.5a})$$

$$\begin{aligned} e^{-2\phi_3} &= \int \text{vol}_7 e^{-2\phi_{10}} = \int d^7x \sqrt{\det G_{mn}} e^{-2\phi_{10}} = \int d^7x \frac{H}{K} \frac{K}{H} \\ &= v. \end{aligned} \quad (\text{H.5b})$$

ここで v は体積を与える定数。つまりこれより ϕ_3 は定数である。これを $v = 1$ に規格化しておこう。これを $D = 3$ 次元で Einstein frame にする:

$$G_{\mu\nu}^{\text{E}} = e^{-\frac{4}{3-2}\phi_3} G_{\mu\nu}^{\text{str}} = v^2 G_{\mu\nu}^{\text{str}} = G_{\mu\nu}^{\text{str}}, \quad (\text{H.6a})$$

$$\therefore ds_{\text{E}3}^2 = -dt^2 + H dx_{67}^2. \quad (\text{H.6b})$$

I GLSM for A-type ALE and ALF

I.1 D1-brane description

A_2 -type ALE space (3-Taub-NUT space) の orbifold limit $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_3$ を string が伝搬する様子を worldsheet sigma model とその GLSM で記述したい。この空間は、10次元では three-centered KK5-branes である。static gauge を採用するとして、次の様に配位を与える:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	(9)
3 KK5	✓	✓	✓	✓	✓	✓				
F1	✓	✓								

Table 2: KK5-branes と string の広がり. (9) は Taub-NUT circle であった compact S^1 を表す.

これを 2D $\mathcal{N} = (4, 4)$ gauge theory の Higgs branch で表記する方法がある。まずは [29, 30] の様に hyper-Kähler quotient の処方箋を D1-branes での記述に置き換えたものを紹介する。特に [30] で具体的に説明されているので、それに従う。 A_2 -type ALE space を記述するために、affine A_2 Dynkin diagram を用意する (Figure 1):

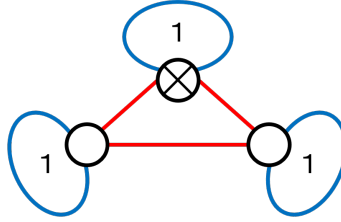
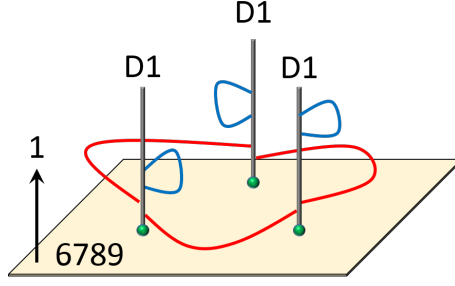


Figure 1: affine A_2 Dynkin diagram (に青色線を追加したもの).

Figure 1 は quiver diagram としても機能する。すなわち、3つの node (それぞれにラベル“1”が付いている) には青色の線と赤色の線が伸びている。それぞれの node のラベルはゲージ群を表す。今はそれぞれが $U(1)$ であることを意味する。出発点と同じ node に戻ってくる青線はそれぞれのゲージ群に従う adjoint scalars を表す。最後に赤線は $U(1) \times U(1)$ に対する bi-fundamental scalars を表す。

[30] によると、3つの node それぞれが、Taub-NUT space の3つの特異点を表し、その直上に D1-brane が乗っている。そして node 同士をつなぐ link は、D1-brane 同士を端点に持つ open F-string を表す (今は $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_3$ なので、特異点は1点に集中している。そのためこの open string は軽い)。青色ラインは D1-brane 上の F-string であり、赤色ラインは2つの D1-branes をつなぐ F-string である。それぞれの振動モードから登場するスカラー場が、ゲージ群に対して adjoint、bi-fundamental であることは容易に理解できるだろう。この open F-string の Chan-Paton 因子により、端点で結合する D1-brane 上で互いに逆符号の charges を持つ (Figure 2):

Figure 2 では、 A_2 -type ALE ($\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_3$) の特異点上に D1-brane が乗る。緑の点の特異点を表

Figure 2: A_2 -ALE space を与える D1-branes の配置と開弦.

し、青い open F-string は D1-brane 上の $\mathcal{N} = (4, 4)$ $U(1)$ vector multiplet を与える。また赤い open F-string は、異なる D1-branes 同士を繋いでおり、 $\mathcal{N} = (4, 4)$ charged hypermultiplets $\omega_i = (q_i, \hat{q}_i^\dagger)^T$ を与える。つまり、2D gauge theory としての matter contents と gauge symmetry の charges が次の様に与えられる [20]:

	$U(1)_1$	$U(1)_2$	$U(1)_3$
$\omega_1 = (q_1, q_1^\dagger)^T$	+1	-1	0
$\omega_2 = (q_2, q_2^\dagger)^T$	0	+1	-1
$\omega_3 = (q_3, q_3^\dagger)^T$	-1	0	+1
(A_m^1, ϕ_1)	adj	-	-
(A_m^2, ϕ_2)	-	adj	-
(A_m^3, ϕ_3)	-	-	adj

Table 3: A_2 -ALE 空間を与える 2D $\mathcal{N} = (4, 4)$ charged hypermultiplets ω_i と vector multiplets.

この配位での branes の広がり Table 4 の様になっている:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	(9)
3 KK5	✓	✓	✓	✓	✓	✓				
D1	✓	✓								

Table 4: KK5-branes と D1-brane. 2D $\mathcal{N} = (4, 4)$ gauge theory は 01-方向の場の理論.

なお、Table 4 の S-dual が Table 2 である。つまり D1-branes を通じて記述される 2D gauge theory は、Table 2 の配位を持つ string worldsheet sigma model の strong coupling limit in IIB string theory である。

また、これだけで 2D $\mathcal{N} = (4, 4)$ gauge theory は Lagrangian が完全に記述できる。FI parameters などを入れる余地を探したいならば moment map $\vec{\mu}_i$ を議論すれば良い [30, 20, 41]。moment map とは、非常に荒っぽく言うと、系の Kähler potential を gauge symmetry に沿って

微分したときに登場する不変量である。これは D-flatness 条件として登場する。実は3つの $U(1)$ ゲージ群は独立ではなく、一つの $U(1)$ は decouple させることができる。なので、Tong [20] にあるように、一般の A-type ALE についての 2D gauge theory は、次の様に標語的に表すことになる:

$$A_{N-1}\text{-type ALE} \rightarrow 2\text{D } \mathcal{N} = (4, 4) \text{ } U(1)^{N-1} \text{ VMs with } N \text{ charged HMs}$$

ここで紹介した 2D $\mathcal{N} = (4, 4)$ gauge theory は hyper-Kähler quotient に基づくものである [29, 30]。一方で A-type ALE space を toric variety として記述し、それを $\mathcal{N} = (2, 2)$ gauge theory として実現させる (IR 固定点上の conformal NLSM は $\mathcal{N} = (4, 4)$ に格上げされている) 方法がある [19]。さらに、我々は最近、toric data を尊重しながら $\mathcal{N} = (4, 4)$ gauge theory として記述した [4]。

1.2 Brane-web description

先ほどの話を、Hanany-Witten scenario [31, 32] と親和性の高い方法で記述しなおそう。そのため、string dualities を用いて Table 4 を変形していく。具体的には、9-方向に T-dual を実行してみよう:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3 NS5	✓	✓	✓	✓	✓	✓				
D2	✓	✓								✓

Table 5: NS5-branes と D2-brane.

Table 5 を図示したものが Figure 3 である:

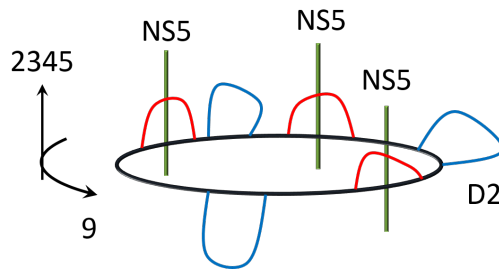


Figure 3: Brane configuration.

Figure 3 では、circle 上になった D2-brane が、3つの NS5-branes によって3分割されている。それぞれの線分 D2-brane 上の開弦を考える。同一の線分 D2-brane に両端を持つ open F-string (青色) からは、2D (01-方向) $\mathcal{N} = (4, 4)$ vector multiplet が登場する。また、異なる線分 D2-branes を端点を持つ open F-string (赤色) からは、2D $\mathcal{N} = (4, 4)$ charged hypermultiplet が登場

する (F-string は NS5-brane に端を持ってないので素通りしている)。線分 D2-branes が3つあるので、vector multiplets と hypermultiplets もそれぞれ3組ずつ登場する。ただしこれは Taub-NUT circle 方向 (9-方向) に T-dual しているので、ALE space を直接与える brane configuration ではなく、図にあるように NS5-branes で表現し直した配置である。ALE space として与えたいならば、Figure 2 について、各々の D1-brane に沿って垂直に KK5-brane を置けば得られる。F-string は KK5-brane に端を持ってないので、Figure 2 以上に spectrum を出す開弦は増えない。

ちなみに、NS5-branes は 6789-方向については原点に位置している。これは $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_3$ の T-dual だからである。しかし 6789-方向に原点からずらす事が可能である。これは 2D gauge theory の立場では FI parameters を用いて Higgs branch の方向にずらすことを示している [32]。FI parameters の導入は moment map $\vec{\mu}_a$ からも読み取れる [30, 20]。moment map とは、非常に荒っぽく言うと、系の Kähler potential を gauge symmetry に沿って微分したときに登場する不変量である。これは D-flatness 条件として登場する。

これで 2D $\mathcal{N} = (4, 4)$ gauge theory は Lagrangian が完全に記述できる。

I.3 GLSM for A_2 -type ALE space

A_2 -type ALE space は $\mathcal{G} = U(1)_1 \times U(1)_2 \times U(1)_3$ gauge symmetry によって支配される。Moment map を与える charged hypermultiplets $\omega_i = (q_i, \tilde{q}_i^\dagger)^T \equiv (a_i, \bar{b}_i)^T$ を再度掲載する：

	$U(1)_1$	$U(1)_2$	$U(1)_3$
$\omega_1 = (a_1, \bar{b}_1)^T$	+1	-1	0
$\omega_2 = (a_2, \bar{b}_2)^T$	0	+1	-1
$\omega_3 = (a_3, \bar{b}_3)^T$	-1	0	+1
(A_m^1, ϕ_1)	adj	-	-
(A_m^2, ϕ_2)	-	adj	-
(A_m^3, ϕ_3)	-	-	adj

(I.1a)

$$\vec{\mu}_1 = \omega_1^\dagger \vec{\tau} \omega_1 - \omega_3^\dagger \vec{\tau} \omega_3, \quad (I.1b)$$

$$\vec{\mu}_2 = \omega_2^\dagger \vec{\tau} \omega_2 - \omega_1^\dagger \vec{\tau} \omega_1, \quad (I.1c)$$

$$\vec{\mu}_3 = \omega_3^\dagger \vec{\tau} \omega_3 - \omega_2^\dagger \vec{\tau} \omega_2, \quad (I.1d)$$

$$0 = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2 + \vec{\mu}_3. \quad (I.1e)$$

これにより、独立な moment map は $\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_2$ である。それぞれの成分を書き下す：

$$\mu_1^1 - i\mu_1^2 = 2a_1b_1 - 2a_3b_3, \quad \mu_2^1 - i\mu_2^2 = 2a_2b_2 - 2a_1b_1, \quad (I.2a)$$

$$\mu_1^1 + i\mu_1^2 = 2\bar{a}_1\bar{b}_1 - 2\bar{a}_3\bar{b}_3, \quad \mu_2^1 + i\mu_2^2 = 2\bar{a}_2\bar{b}_2 - 2\bar{a}_1\bar{b}_1, \quad (I.2b)$$

$$\mu_1^3 = (|a_1|^2 - |b_1|^2) - (|a_3|^2 - |b_3|^2), \quad \mu_2^3 = (|a_2|^2 - |b_2|^2) - (|a_1|^2 - |b_1|^2). \quad (I.2c)$$

これが gauge multiplets の補助場を積分したときに D-term に寄与する様に、超場の相互作用を確定すると、次の様になる：

$$\mathcal{L}_{\text{HM}} = \int d^4\theta \left\{ |A_1|^2 e^{+2V_1 - 2V_2} + |A_2|^2 e^{+2V_2} + |A_3|^2 e^{-2V_1} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \int d^4\theta \left\{ |B_1|^2 e^{-2V_1+2V_2} + |B_2|^2 e^{-2V_2} + |B_3|^2 e^{+2V_1} \right\} \\
& - \left\{ \sqrt{2} \int d^2\theta \left[\Phi_1 (A_1 B_1 - A_3 B_3) + \Phi_2 (A_2 B_2 - A_1 B_1) \right] + (\text{h.c.}) \right\}. \quad (\text{I.3a})
\end{aligned}$$

gauge multiplets $(V_1, \Phi_1), (V_2, \Phi_2)$ は $\mathcal{G}/U(1)$ を司る。ここでは $U(1)_3$ を decouple させて、運動項と FI 項を次で用意しておこう¹⁰:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{VM}} = & \frac{1}{e_1^2} \int d^4\theta \left\{ -|\Sigma_1|^2 + |\Phi_1|^2 \right\} + \frac{1}{e_2^2} \int d^4\theta \left\{ -|\Sigma_2|^2 + |\Phi_2|^2 \right\} \\
& + \left\{ \sqrt{2} \int d^2\theta (s_1 \Phi_1) + (\text{h.c.}) \right\} + \left\{ \sqrt{2} \int d^2\tilde{\theta} (t_1 \Sigma_1) + (\text{h.c.}) \right\} \\
& + \left\{ \sqrt{2} \int d^2\theta (s_2 \Phi_2) + (\text{h.c.}) \right\} + \left\{ \sqrt{2} \int d^2\tilde{\theta} (t_2 \Sigma_2) + (\text{h.c.}) \right\}. \quad (\text{I.3b})
\end{aligned}$$

$t_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(t_a^1 + it_a^2)$ としたときの t_a^1 が、 $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_3$ の blow-up parameter に相当する。そして FI parameters は moment map に追加される「積分定数」である。

I.4 Deformation to A_2 -type ALF space

Tong [20] は、ALF space を GLSM で記述するときに、模型の変形を行っている。この deformation は数学側でも [33] で紹介されている。

これまた処方箋としてのみ端的に述べよう (詳細は [20])。GLSM for A_2 -ALE space では2つの独立なゲージ群が3つの charged HMs $\omega_i = (q_i, \hat{q}_i^\dagger)^T = (a_i, \bar{b}_i)^T$ に作用していた。ALF space への変形では、全ての ω_i について同じ方向に位相変換させる $U(1)_F$ flavor symmetry をゲージ化して、さらに neutral hypermultiplet を一組追加することである。まず、 $U(1)_F$ は次の様に作用する:

	$U(1)_1$	$U(1)_2$	$U(1)_3$	$U(1)_F$
$\omega_1 = (a_1, \bar{b}_1)^T$	+1	-1	0	+1
$\omega_2 = (a_2, \bar{b}_2)^T$	0	+1	-1	+1
$\omega_3 = (a_3, \bar{b}_3)^T$	-1	0	+1	+1

$$\omega_i \rightarrow \exp(i\alpha) \omega_i \quad \text{for } \forall i \rightarrow \quad (\text{I.4a})$$

そしてこれに伴う moment map $\vec{\mu}_F$ を、追加する neutral hypermultiplet (のうち3成分) $\vec{r} = (-r^1, r^2, r^3)$ と共に導入する¹¹:

$$\vec{\mu}_F = \sum_{i=1}^3 \omega_i^\dagger \vec{r} \omega_i - \sqrt{2} \vec{r} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(\mu_F^1 - i\mu_F^2) = \sum_{i=1}^3 \sqrt{2} a_i b_i + (r^1 + ir^2), \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\mu_F^1 + i\mu_F^2) = \sum_{i=1}^3 \sqrt{2} \bar{a}_i \bar{b}_i + (r^1 - ir^2), \\ \mu_F^3 = \sum_{i=1}^3 (|a_i|^2 - |b_i|^2) - \sqrt{2} r^3. \end{cases} \quad (\text{I.4b})$$

¹⁰何も考えずに $U(1)_1 \times U(1)_2 \times U(1)_3$ gauge symmetry を持つ GLSM を構成しても良い。簡単のために gauge coupling constants e_a が全て同じとすれば、 $U(1)_3$ を司る VM (V_3, Φ_3) が $(V_a - V_{a+1} \equiv W_a$ の様な (V_a, Φ_a) 同士の線形変換の後に) 系から離脱することがすぐに読み取れる。

¹¹ $\vec{r}$ 成分の符号やスケールは [20] と異なるが、単に convention の違いであり、時折調整される。

これらの導入により、GLSM (I.3) が次の様に拡張される ((V_F, Φ_F) は $U(1)_F$ をゲージ化したときの vector multiplet):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{HM}} = & \int d^4\theta \left\{ |A_1|^2 e^{+2(V_1-V_2+V_F)} + |A_2|^2 e^{+2(V_2+V_F)} + |A_3|^2 e^{+2(-V_1+V_F)} \right\} \\ & + \int d^4\theta \left\{ |B_1|^2 e^{-2(V_1-V_2+V_F)} + |B_2|^2 e^{-2(V_2+V_F)} + |B_3|^2 e^{-2(-V_1+V_F)} \right\} \\ & + \frac{1}{g^2} \int d^4\theta \left\{ -|\Theta|^2 + |\Psi|^2 \right\} \\ & - \left\{ \sqrt{2} \int d^2\theta \left[A_1 B_1 (\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_F) \right] + (\text{h.c.}) \right\} \\ & - \left\{ \sqrt{2} \int d^2\theta \left[A_2 B_2 (\Phi_2 + \Phi_F) + A_3 B_3 (-\Phi_1 + \Phi_F) \right] + (\text{h.c.}) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{I.5a})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{VM}} = & \frac{1}{e_1^2} \int d^4\theta \left\{ -|\Sigma_1|^2 + |\Phi_1|^2 \right\} + \frac{1}{e_2^2} \int d^4\theta \left\{ -|\Sigma_2|^2 + |\Phi_2|^2 \right\} + \frac{1}{e_F^2} \int d^4\theta \left\{ -|\Sigma_F|^2 + |\Phi_F|^2 \right\} \\ & + \left\{ \sqrt{2} \int d^2\theta (s_1 \Phi_1) + (\text{h.c.}) \right\} + \left\{ \sqrt{2} \int d^2\tilde{\theta} (t_1 \Sigma_1) + (\text{h.c.}) \right\} \\ & + \left\{ \sqrt{2} \int d^2\theta (s_2 \Phi_2) + (\text{h.c.}) \right\} + \left\{ \sqrt{2} \int d^2\tilde{\theta} (t_2 \Sigma_2) + (\text{h.c.}) \right\} \\ & + \left\{ \sqrt{2} \int d^2\theta [(s_F - \Psi) \Phi_F] + (\text{h.c.}) \right\} + \left\{ \sqrt{2} \int d^2\tilde{\theta} [(t_F - \Theta) \Sigma_F] + (\text{h.c.}) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{I.5b})$$

ここで neutral hypermultiplet として twisted HM $(\Psi, \Theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(r^1 + ir^2, r^3 + i\vartheta) + \dots$ を導入した。これは IR limit で 3-centered NS5-branes (H-monopoles) geometry の 6789-方向の座標を与える。ここで Ψ, Θ はそれぞれ $\mathcal{N} = (2, 2)$ chiral, twisted chiral である。 $U(1)_F$ のゲージ化とその geometrical な同定は、Taub-NUT circle coordinate $\tilde{\vartheta}$ の isometry のゲージ化であるので、ALF space 自身としてこれを実現するには、neutral HM $(\Psi, \Gamma) = \frac{1}{\sqrt{2}}(r^1 + ir^2, -r^3/g^2 + i\tilde{\vartheta}) + \dots$ を用意する [20]。 Γ は $\mathcal{N} = (2, 2)$ chiral で、Stückelberg field とする。これは shift symmetry $\tilde{\vartheta} \rightarrow \tilde{\vartheta} + \delta\tilde{\vartheta}$ がゲージ化されるためである。このとき、 Γ の運動項は [20] にあるように

$$\int d^4\theta (\Gamma + \bar{\Gamma} + 2V_F)^2, \quad (\text{I.6})$$

のようになる。

実は、(I.5) は、[22] とは様子が異なる。しかし同一である。同一性を見るため、 $(V_a, \Phi_a) = e_a(V'_a, \Phi'_a)$ の様に gauge coupling constants を超場に埋め込み、さらに (V'_a, Φ'_a) を次の様に線形変換しよう:

$$\begin{pmatrix} \tilde{e}_1 \tilde{V}'_1 \\ \tilde{e}_2 \tilde{V}'_2 \\ \tilde{e}_3 \tilde{V}'_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 V'_1 \\ e_2 V'_2 \\ e_F V'_F \end{pmatrix}, \quad (\text{I.7a})$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{e}_1 \tilde{\Phi}'_1 \\ \tilde{e}_2 \tilde{\Phi}'_2 \\ \tilde{e}_3 \tilde{\Phi}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \Phi'_1 \\ e_2 \Phi'_2 \\ e_F \Phi'_F \end{pmatrix}. \quad (\text{I.7b})$$

FI parameters (s_1, s_2, s_F) , (t_1, t_2, t_F) も同様に線形(逆)変換させる。すると、新しい「基底」 $(\tilde{V}_a, \tilde{\Phi}_a) = \tilde{e}_a(\tilde{V}'_a, \tilde{\Phi}'_a)$ にて与えられる Lagrangian は [20, 22] のそれになる:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{HM}} &= \int d^4\theta \left\{ |A_1|^2 e^{+2\tilde{V}_1} + |A_2|^2 e^{+2\tilde{V}_2} + |A_3|^2 e^{+2\tilde{V}_3} \right\} + \int d^4\theta \left\{ |B_1|^2 e^{-2\tilde{V}_1} + |B_2|^2 e^{-2\tilde{V}_2} + |B_3|^2 e^{-2\tilde{V}_3} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{g^2} \int d^4\theta \left\{ -|\Theta|^2 + |\Psi|^2 \right\} \\ &\quad - \left\{ \sqrt{2} \int d^2\theta \left[A_1 B_1 \tilde{\Phi}_1 + A_2 B_2 \tilde{\Phi}_2 + A_3 B_3 \tilde{\Phi}_3 \right] + (\text{h.c.}) \right\} \\ &= \sum_{a=1}^3 \int d^4\theta \left\{ |A_a|^2 e^{+2\tilde{V}_a} + |B_a|^2 e^{-2\tilde{V}_a} \right\} + \frac{1}{g^2} \int d^4\theta \left\{ -|\Theta|^2 + |\Psi|^2 \right\} \\ &\quad - \sum_{a=1}^3 \left\{ \sqrt{2} \int d^2\theta (\Phi_a A_a B_a) + (\text{h.c.}) \right\},\end{aligned}\tag{I.8a}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{VM}} &= \frac{1}{\tilde{e}_1^2} \int d^4\theta \left\{ -|\tilde{\Sigma}_1|^2 + |\tilde{\Phi}_1|^2 \right\} + \frac{1}{\tilde{e}_2^2} \int d^4\theta \left\{ -|\tilde{\Sigma}_2|^2 + |\tilde{\Phi}_2|^2 \right\} + \frac{1}{\tilde{e}_3^2} \int d^4\theta \left\{ -|\tilde{\Sigma}_3|^2 + |\tilde{\Phi}_3|^2 \right\} \\ &\quad + \left\{ \sqrt{2} \int d^2\theta (\tilde{s}_1 \tilde{\Phi}_1) + (\text{h.c.}) \right\} + \left\{ \sqrt{2} \int d^2\tilde{\theta} (\tilde{t}_1 \tilde{\Sigma}_1) + (\text{h.c.}) \right\} \\ &\quad + \left\{ \sqrt{2} \int d^2\theta (\tilde{s}_2 \tilde{\Phi}_2) + (\text{h.c.}) \right\} + \left\{ \sqrt{2} \int d^2\tilde{\theta} (\tilde{t}_2 \tilde{\Sigma}_2) + (\text{h.c.}) \right\} \\ &\quad + \left\{ \sqrt{2} \int d^2\theta (\tilde{s}_3 \tilde{\Phi}_3) + (\text{h.c.}) \right\} + \left\{ \sqrt{2} \int d^2\tilde{\theta} (\tilde{t}_3 \tilde{\Sigma}_3) + (\text{h.c.}) \right\} \\ &\quad + \left\{ \frac{\sqrt{2}}{3} \int d^2\theta \left[-\Psi(\tilde{\Phi}_1 + \tilde{\Phi}_2 + \tilde{\Phi}_3) \right] + (\text{h.c.}) \right\} + \left\{ \frac{\sqrt{2}}{3} \int d^2\tilde{\theta} \left[-\Theta(\tilde{\Sigma}_1 + \tilde{\Sigma}_2 + \tilde{\Sigma}_3) \right] + (\text{h.c.}) \right\} \\ &= \sum_{a=1}^3 \frac{1}{\tilde{e}_a^2} \int d^4\theta \left\{ -|\tilde{\Sigma}_a|^2 + |\tilde{\Phi}_a|^2 \right\} \\ &\quad + \sum_{a=1}^3 \left\{ \sqrt{2} \int d^2\theta \left[\left(\tilde{s}_a - \frac{1}{3}\Psi \right) \tilde{\Phi}_a \right] + (\text{h.c.}) \right\} + \sum_{a=1}^3 \left\{ \sqrt{2} \int d^2\tilde{\theta} \left[\left(\tilde{t}_a - \frac{1}{3}\Theta \right) \tilde{\Sigma}_a \right] + (\text{h.c.}) \right\}.\end{aligned}\tag{I.8b}$$

最後に、厳密に [20] に合わせたいと言うならば、neutral HM と sigma model coupling constant をそれぞれ

$$\frac{1}{3}(\Psi, \Theta) = (\tilde{\Psi}, \tilde{\Theta}), \quad \frac{9}{g^2} = \frac{1}{\tilde{g}^2},\tag{I.8c}$$

のように再定義すれば良い。

References

- [1] T. Kimura and S. Sasaki, “*Gauged linear sigma model for exotic five-brane*,” Nucl. Phys. B **876** (2013) 493 [arXiv:1304.4061 [hep-th]].
- [2] T. Kimura and S. Sasaki, “*Worldsheet instanton corrections to 5_2^2 -brane geometry*,” JHEP **1308** (2013) 126 arXiv:1305.4439 [hep-th].
- [3] T. Kimura and S. Sasaki, “*Worldsheet description of exotic five-brane with two gauged isometries*,” JHEP **1403** (2014) 128 [arXiv:1310.6163 [hep-th]].
- [4] T. Kimura and M. Yata, “*Gauged linear sigma model with F-term for A-type ALE space*,” PTEP **2014** (2014) 7, 073B01 [arXiv:1402.5580 [hep-th]].
- [5] T. Kimura, S. Sasaki and M. Yata, “*World-volume effective actions of exotic five-branes*,” JHEP **1407** (2014) 127 [arXiv:1404.5442 [hep-th]].
- [6] T. Kimura and M. Yata, “*T-duality transformation of gauged linear sigma model with F-term*,” Nucl. Phys. B **887** (2014) 136 [arXiv:1406.0087 [hep-th]].
- [7] T. Kimura, “*Notes on two-dimensional supersymmetry*,” TK-NOTE/05-09.
- [8] T. Kimura, “*Defect five-branes: single- vs multi-centered, NLSM vs GLSM descriptions*,” TK-NOTE/13-04.
- [9] T. Kimura, “*GLSM for bound states of five-branes*,” TK-NOTE/13-07.
- [10] T. Kimura, “*Non-abelian GLSM for five-branes*,” TK-NOTE/13-08.
- [11] T. Kimura, “*Worldsheet description of five-branes with two gauged isometries*,” TK-NOTE/13-09.
- [12] T. Kimura, “*Worldsheet description of five-branes with two gauged isometries, vol.2: analysis of single-centered system*,” TK-NOTE/13-10.
- [13] T. Kimura, “*GLSM for defect five-branes: a short summary*,” TK-NOTE/13-11.
- [14] T. Kimura, “*Worldsheet description of five-branes with two gauged isometries, vol.3: additional coupling constants*,” TK-NOTE/13-13.
- [15] J. de Boer and M. Shigemori, “*Exotic branes and non-geometric backgrounds*,” Phys. Rev. Lett. **104** (2010) 251603 [arXiv:1004.2521 [hep-th]].
- [16] J. de Boer and M. Shigemori, “*Exotic branes in string theory*,” Phys. Rept. **532** (2013) 65 [arXiv:1209.6056 [hep-th]].
- [17] N. Kaloper and R. C. Myers, “*The $O(dd)$ story of massive supergravity*,” JHEP **9905** (1999) 010 [hep-th/9901045].

- [18] E. Witten, “*Phases of $\mathcal{N} = 2$ theories in two dimensions*,” Nucl. Phys. B **403** (1993) 159, [arXiv:hep-th/9301042].
- [19] K. Hori, S. Katz, A. Klemm, R. Pandharipande, R. Thomas, C. Vafa, R. Vakil and E. Zaslow, “*Mirror symmetry*,” Clay Mathematics Monographs vol. 1 (2003), American Mathematical Society.
- [20] D. Tong, “*NS5-branes, T-duality and worldsheet instantons*,” JHEP **0207** (2002) 013 [hep-th/0204186].
- [21] J. A. Harvey and S. Jensen, “*Worldsheet instanton corrections to the Kaluza-Klein monopole*,” JHEP **0510** (2005) 028 [hep-th/0507204].
- [22] K. Okuyama, “*Linear sigma models of H and KK monopoles*,” JHEP **0508** (2005) 089 [hep-th/0508097].
- [23] M. Roček and E. P. Verlinde, “*Duality, quotients, and currents*,” Nucl. Phys. B **373** (1992) 630 [hep-th/9110053].
- [24] C. M. Hull, “*Global aspects of T-duality, gauged sigma models and T-folds*,” JHEP **0710** (2007) 057 [hep-th/0604178].
- [25] B. R. Greene, A. D. Shapere, C. Vafa and S. -T. Yau, “*Stringy cosmic strings and noncompact Calabi-Yau manifolds*,” Nucl. Phys. B **337** (1990) 1.
- [26] L. Alvarez-Gaume and S. F. Hassan, “*Introduction to S-duality in $N = 2$ supersymmetric gauge theories: a pedagogical review of the work of Seiberg and Witten*,” Fortsch. Phys. **45** (1997) 159 [hep-th/9701069].
- [27] 村上公一, “ $\mathcal{N} = 1$ 及び $\mathcal{N} = 2$ 超対称性理論の duality,” 素粒子論研究 **93(2)** (1996) 159 (修士論文).
- [28] N. J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindstrom and M. Rocek, “*Hyperkähler Metrics and Supersymmetry*,” Commun. Math. Phys. **108** (1987) 535.
- [29] M. R. Douglas and G. W. Moore, “*D-branes, quivers, and ALE instantons*,” hep-th/9603167.
- [30] C. V. Johnson and R. C. Myers, “*Aspects of type IIB theory on ALE spaces*,” Phys. Rev. D **55** (1997) 6382 [hep-th/9610140].
- [31] A. Hanany and E. Witten, “*Type IIB superstrings, BPS monopoles, and three-dimensional gauge dynamics*,” Nucl. Phys. B **492** (1997) 152 [hep-th/9611230].
- [32] A. Giveon and D. Kutasov, “*Brane dynamics and gauge theory*,” Rev. Mod. Phys. **71** (1999) 983 [hep-th/9802067].
- [33] G. W. Gibbons, P. Rychenkova and R. Goto, “*HyperKähler quotient construction of BPS monopole moduli spaces*,” Commun. Math. Phys. **186** (1997) 585 [hep-th/9608085].

- [34] T. Kimura, Mathematica file “Curvature_conjugateKK5_141023.nb”
- [35] T. Kimura, Mathematica file “Curvature_conjugateAK5_141023.nb”
- [36] S. A. Cherkis and A. Kapustin, “*Nahm transform for periodic monopoles and $\mathcal{N} = 2$ super Yang-Mills theory*,” Commun. Math. Phys. **218** (2001) 333 [hep-th/0006050].
- [37] S. A. Cherkis and A. Kapustin, “*Hyperkähler metrics from periodic monopoles*,” Phys. Rev. D **65** (2002) 084015 [hep-th/0109141].
- [38] T. Kimura, “*Defect (p, q) five-branes*,” Nucl. Phys. B **893** (2015) 1 [arXiv:1410.8403 [hep-th]].
- [39] T. Kimura, S. Sasaki and M. Yata, “*Hyper-Kähler with torsion, T-duality, and defect (p, q) five-branes*,” arXiv:1411.3457 [hep-th].
- [40] M. Yata, “2体系 defect braneとそのモノドロミー行列の計算,” 2014年8月18日版.
- [41] M. Hamanaka, “Hyper-Kähler幾何の数理と物理,” 素粒子論研究 **119** (2012) 4C.
- [42] S. Hellerman, J. McGreevy and B. Williams, “*Geometric constructions of nongeometric string theories*,” JHEP **0401** (2004) 024 [hep-th/0208174].
- [43] J. A. Harvey, D. Kutasov and S. Lee, “*Comments on quantum Higgs vacua*,” arXiv:1406.6000 [hep-th].
- [44] J. A. Harvey, S. Lee and S. Murthy, “*Elliptic genera of ALE and ALF manifolds from gauged linear sigma models*,” arXiv:1406.6342 [hep-th].
- [45] D. Cassani, “*Reducing democratic type II supergravity on $SU(3) \times SU(3)$ structures*,” JHEP **0806** (2008) 027 [arXiv:0804.0595 [hep-th]].
- [46] 今村洋介, “超重力理論についてのノート,” 2007年9月版,
<http://imapyon.la.coocan.jp/note/sugra.pdf>.