Hyper-Kähler with Torsion, T-duality, and Defect (p,q) Five-branes

arXiv:1410.8403, 1411.3457

木村哲士

(東京工業大学)

佐々木 伸 (北里大学), 矢田 雅哉 (KEK)

(arXiv:1304.4061, 1305.4439, 1310.6163, 1402.5580, 1404.5442, 1406.0087)

いろんな5ブレーンのいろんな状態を記述したい

D5, NS5, KK5, 5^2_2, 5^2_3, ...,

etc.

エキゾチックブレーン の「単体としての記述」はあまりよくない

エキゾチックブレーンを含む5ブレーンの「混成」状態を記述したい

参考例

dyon; (p,q)-string, (p,q) five-brane, (p,q) seven-brane, ...,

(これらは S-duality 由来の $SL(2,\mathbb{Z})$ モノドロミー変換で出現)

そしてゆくゆくは「大域的に良いエキゾチックブレーンの記述」を構築する

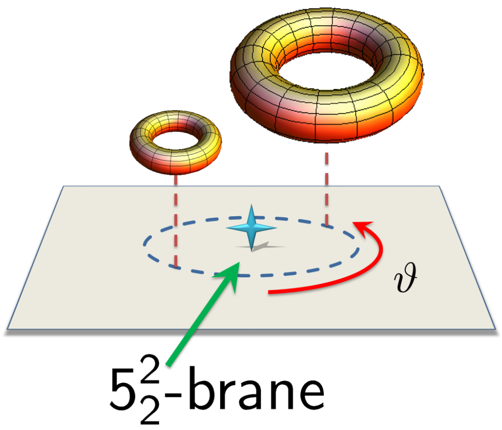
(D7ブレーンのときは... modular J 関数)

Defect (p, q) five-brane

NS5ブレーン(codim.2)　と　5^2_2ブレーンの混成系

やはり $SL(2,\mathbb{Z})$ モノドロミー変換を用いる

ただし今回は　$O(2,2;\mathbb{Z}) \simeq SL(2,\mathbb{Z})_\tau \times SL(2,\mathbb{Z})_\rho$　:　T-duality 由来



$$ds^2_{\mathrm{NS5}} = dx^2_{012345} + H\{(d\varrho)^2 + \varrho^2(d\vartheta)^2\} + H\{(dx^8)^2 + (dx^9)^2\}$$

$$B_{89} = \vartheta \qquad e^{2\phi} = H = 1 + \log\frac{\Lambda}{\varrho}$$

τ = i : complex modulus of two-torus T^2_{89}

ρ = $B_{89} + \mathrm{i}\sqrt{\det G_{mn}}$: fields on two-torus T^2_{89}

= $\vartheta + \mathrm{i}H$

原点を中心に一周回る ($\vartheta = 0 \to 2\pi$) と、ρ は変化する (τ は不変)

$$\rho \to \rho + 2\pi = \frac{1\cdot\rho + 2\pi}{0\cdot\rho + 1} \quad \to \quad \Omega^{\mathrm{NS5}}_{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & 2\pi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(cf.) 5^2_2ブレーンは $\Omega^{\mathrm{E}}_{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\pi & 1 \end{pmatrix}$

$\Omega_{\tau,\rho}$ を $SL(2,\mathbb{Z})_{\tau,\rho}$ 変換

$$\Omega_\rho \ \to \ \widetilde{\Omega}_\rho \ \equiv \ U^{-1}\Omega_\rho U, \qquad U \ = \ \begin{pmatrix} s & r \\ q & p \end{pmatrix}, \qquad sp - qr = 1$$

$$\widetilde{\Omega}_\rho \ = \ \begin{pmatrix} 1 + 2\pi pq & 2\pi p^2 \\ -2\pi q^2 & 1 - 2\pi pq \end{pmatrix}$$

$\Omega_\rho^{\mathrm{NS5}}$ や Ω_ρ^{E} と比較すると

$\widetilde{\Omega}_\rho$ は p 個の NS5 と q 個の 5^2_2 の系のモノドロミーである、と認識できる

(dyon の出現と同じ要領)

$\widetilde{\Omega}_\rho$ の情報を運ぶ ρ を U^{-1} で構築できる (τ は不変)

$$U^{-1} \ = \ \begin{pmatrix} p & -r \\ -q & s \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\rho} \ \equiv \ \frac{p\rho - r}{-q\rho + s} \ \equiv \ \widetilde{B}_{89} + \mathrm{i}\sqrt{\det \widetilde{G}_{mn}}$$

$$G_{mn} = \frac{\rho_2}{\tau_2}\begin{pmatrix} 1 & \tau_1 \\ \tau_1 & |\tau|^2 \end{pmatrix}, \qquad B_{89} = \rho_1, \qquad e^{2\phi} = \rho_2$$

$\rho = \rho_1 + \mathrm{i}\rho_2, \ \tau = \tau_1 + \mathrm{i}\tau_2$

U 変換後の $\widetilde{\rho}$ から読み取れる情報は...

$$\widetilde{G}_{mn} = \frac{H}{s^2 - 2qs\,\vartheta + q^2 K}\delta_{mn} \xrightarrow{pq\neq 0 \ \text{case}} \frac{H}{q^2 K}\delta_{mn}$$

$$\widetilde{B}_{89} = \frac{-rs + (ps+qr)\vartheta - pqK}{s^2 - 2qs\vartheta + q^2 K} \xrightarrow{pq\neq 0 \ \text{case}} -\frac{p}{q} - \frac{\vartheta}{q^2 K}$$

$$e^{2\widetilde{\phi}} = \frac{H}{s^2 - 2qs\vartheta + q^2 K} \xrightarrow{pq\neq 0 \ \text{case}} \frac{H}{q^2 K}$$

$K = H^2 + \vartheta^2$

background field configuration of defect (p, q) five-brane

応用 Taub-NUT 空間上に NS5ブレーンがある系で遊んでみよう

Hyper-Kähler geometry with torsion (HKT) (の 8-方向をコンパクト化したもの)

$$
\begin{aligned}
ds^2_{\mathrm{TN}} &= dx^2_{012345} + H_\alpha \big\{ (d\varrho)^2 + \varrho^2 (d\vartheta)^2 + (dx^8)^2 \big\} + \frac{1}{H_\alpha} \big[dx^9 - V_\alpha \, dx^8 \big]^2 \\
B_{89} &= 0 \, , \qquad e^{2\phi} = 0 \\
H_\alpha &= 1 + \alpha \log(\Lambda/\varrho) \, , \qquad V_\alpha = \alpha \vartheta
\end{aligned}
$$

$$\downarrow$$

$$
\begin{aligned}
ds^2_{\mathrm{HKT}} &= dx^2_{012345} + H_\alpha H_\beta \big\{ (d\varrho)^2 + \varrho^2 (d\vartheta)^2 + (dx^8)^2 \big\} + \frac{H_\beta}{H_\alpha} \big[dx^9 - V_\alpha \, dx^8 \big]^2 \\
B_{89} &= V_\beta \, , \qquad e^{2\phi} = H_\beta \\
H_\alpha &= 1 + \alpha \log(\Lambda/\varrho) \, , \qquad V_\alpha = \alpha \vartheta \\
H_\beta &= 1 + \beta \log(\Lambda/\varrho) \, , \qquad V_\beta = \beta \vartheta
\end{aligned}
$$

HKT (の8-方向をコンパクト化したもの)では $\boldsymbol{\tau}$ と $\boldsymbol{\rho}$ の両方が非自明

$$\boldsymbol{\tau} \;=\; \frac{-\mathbf{1}}{\boldsymbol{V_\alpha} + \mathbf{i}\boldsymbol{H_\alpha}}\,, \qquad \boldsymbol{\rho} \;=\; \boldsymbol{V_\beta} + \mathbf{i}\boldsymbol{H_\beta}$$

原点を中心に一周回る ($\boldsymbol{\vartheta} = \mathbf{0} \to \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}$) とモノドロミー変換を受ける

$$\boldsymbol{\tau} \;\to\; \boldsymbol{\tau}' \;=\; \frac{\boldsymbol{\tau}}{-\mathbf{2}\boldsymbol{\pi\alpha} + \mathbf{1}} \qquad \boldsymbol{\Omega_\tau} \;=\; \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{2}\boldsymbol{\pi\alpha} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\rho} \;\to\; \boldsymbol{\rho}' \;=\; \boldsymbol{\rho} + \mathbf{2}\boldsymbol{\pi\beta} \qquad \boldsymbol{\Omega_\rho} \;=\; \begin{pmatrix} \mathbf{1} & +\mathbf{2}\boldsymbol{\pi\beta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\Omega_{\tau,\rho}}$ について $\boldsymbol{SL(2,\mathbb{Z})}$ 変換を実行しよう

$\Omega_{\tau,\rho}$ について $SL(2,\mathbb{Z})$ 変換を実行しよう

$$\Omega_\tau \to \widetilde{\Omega}_\tau \equiv U'^{-1}\Omega_\tau U' \qquad U' \equiv \begin{pmatrix} s' & r' \\ q' & p' \end{pmatrix} \qquad s'p' - q'r' = 1$$

$$\Omega_\rho \to \widetilde{\Omega}_\rho \equiv U^{-1}\Omega_\rho U \qquad U \equiv \begin{pmatrix} s & r \\ q & p \end{pmatrix} \qquad sp - qr = 1$$

$$\widetilde{\Omega}_\tau = \begin{pmatrix} 1 + 2\pi\alpha r's' & 2\pi\alpha r'^2 \\ -2\pi\alpha s'^2 & 1 - 2\pi\alpha r's' \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{\Omega}_\rho = \begin{pmatrix} 1 + 2\pi\beta pq & 2\pi\beta p^2 \\ -2\pi\beta q^2 & 1 - 2\pi\beta pq \end{pmatrix}$$

defect (p,q) five-brane がある特殊な ALG 空間に乗った系

(r' 個の KK5 と s' 個の anti-KK5 が作る「つぶれた」Taub-NUT 空間)

$$\widetilde{\tau} = \frac{p'\tau - r'}{-q'\tau + s'}, \qquad \widetilde{\rho} = \frac{p\rho - r}{-q\rho + s}$$

これらから計量 + B場 + ディラトンの配位を読み取ると ...

$$ds^2 = dx^2_{012345} + H_\alpha H_\beta \big\{ (d\varrho)^2 + \varrho^2 (d\vartheta)^2 \big\} + \widetilde{\lambda}_2 \widetilde{\rho}_2 (dx^8)^2 + \frac{\widetilde{\rho}_2}{\widetilde{\lambda}_2} \big[dx^9 - \widetilde{\lambda}_1 \, dx^8 \big]^2$$

$$\widetilde{B}_{89} = \widetilde{\rho}_1 , \qquad e^{2\widetilde{\phi}} = \widetilde{\rho}_2$$

$$\widetilde{\lambda} \equiv -\frac{1}{\widetilde{\tau}} = \widetilde{\lambda}_1 + i\widetilde{\lambda}_2$$

$$\widetilde{\lambda}_1 = \frac{s'}{r'} - \frac{V_\alpha}{r'^2 K_\alpha} \qquad \widetilde{\lambda}_2 = \frac{H_\alpha}{r'^2 K_\alpha}$$

$$\widetilde{\rho}_1 = -\frac{p}{q} - \frac{V_\beta}{q^2 K_\beta} \qquad \widetilde{\rho}_2 = \frac{H_\beta}{q^2 K_\beta}$$

($pq \neq 0, r's' \neq 0$ としておく)

defect (p,q) five-brane がある特殊な ALG 空間に乗った系

(r' 個の KK5 と s' 個の anti-KK5 が作る「つぶれた」Taub-NUT 空間)

- T-duality に由来する $SL(2,\mathbb{Z})$ 変換を施して混成系を作る
- defect (p,q) five-brane の背景計量 + B場 + ディラトン
- Taub-NUT 空間に NS5ブレーンが乗った系 = HKT
- HKT についても $SL(2,\mathbb{Z})$ 変換
- 特殊な ALG 空間の上に乗る defect (p,q) five-brane の記述

今回の知識 (local description) を集めて、

エキゾチックブレーンの多体系の global description を得る

cf.) S. Hellerman, J. McGreevy, B. Williams hep-th/0208174

Thanks

Appendix

4D asymptotic geometry is locally T^k-fibration over $\mathbb{R}^{4-k}$

	k	harmonic function	
ALE	(1)	$\dfrac{1}{\lvert\vec{x}\rvert}$	$\mathbb{C}^2/\Gamma$ with ADE-singularities
ALF	1	$A + \dfrac{1}{\lvert\vec{x}\rvert}$	Taub-NUT
ALG	2	$A + B \log \lvert\varrho\rvert$	exotic objects such as D7, 5^2_2, etc.
ALH	3	$A + B\lvert r\rvert$	linear potential

S.A. Cherkis and A. Kapustin hep-th/0006050, hep-th/0109141

Defect (p,q) five-brane の作り方

1. NS5ブレーン(codim.2)の計量を用意

2. $SL(2,\mathbb{Z})_\tau \times SL(2,\mathbb{Z})_\rho$ それぞれの modulus τ, ρ を計量から読み取る

3. τ, ρ それぞれのモノドロミー変換行列 $\Omega_{\tau,\rho}$ を構成

4. $\Omega_{\tau,\rho}$ を $SL(2,\mathbb{Z})_{\tau,\rho}$ 変換して p 個のNS5 + q 個の 5^2_2 系のモノドロミー行列を構成

5. τ, ρ それぞれにも対応する $SL(2,\mathbb{Z})_{\tau,\rho}$ 変換

$\downarrow$

defect (p,q) five-brane の計量(+ B場 + ディラトン)が実現