

since: August 28, 2015
last update: 2017-04-09 23:59

2016 年度秋学期 素粒子概論

[立教大学理学部物理学科 3 年生対象選択科目]

木村 哲士 tetsuji.kimura_at_keio.jp

概要

授業の目標

自然界における物質の基本的構成要素である素粒子とそれらの相互作用の諸性質を学ぶ。

授業の内容

自然界におけるあらゆる物質の根源はなにか？20 世紀前半の量子力学の発展の下、多くの科学者がこの問いに対する答えを求めてきた。その成果の一つが、ヒッグス粒子の発見 (2012 年 7 月) である。この発見は、自然界は「対称性とその破れ」という概念で理解できることを意味する。これは基礎物理学における大変な成果である。この講義では、素粒子物理の基礎的な手法を紹介し、ヒッグス粒子を含む現在の素粒子物理の概論を学ぶ。そして冒頭に述べた問いに対する見解を模索する。

成績評価方法・基準

平常点 (レポート 40%)、期末試験 (60%) を総合して成績評価を行う。

授業計画

1. 素粒子物理の概観
2. 解析力学と場の理論
3. 対称性
4. 電磁気力の量子論について
5. 弱い力と強い力
6. ヤン-ミルズ理論について
7. 対称性の自発的破れ
8. 素粒子標準模型について
9. 素粒子と重力の統一へ向けて

目次

0	反省点	3
1	素粒子物理の概観	4
2	数式の記法や計算ルールなど	5
3	解析力学と場の理論	9
3.1	解析力学	9
3.2	場の理論	10
4	対称性	14
4.1	世の中の対称性	15
4.2	Lie 群をいくつか: $U(1)$, $U(N)$, $O(N)$, $SO(1,3)$	16
4.3	場の理論と対称性	17
5	電磁気力の量子論について	21
5.1	量子電磁力学	21
5.2	相互作用とファインマンダイアグラム	23
6	弱い力と強い力	25
6.1	弱い力	27
6.2	強い力	29
7	対称性の自発的破れ	32
7.1	大域的対称性の自発的破れ	32
7.2	Higgs 機構	36
8	ヤン-ミルズ理論入門	39
8.1	$SU(2)$ ゲージ理論	39
8.2	$SU(N)$ ゲージ理論	43
9	素粒子標準模型について	45
9.1	ゲージ場と Higgs 場	45
9.2	レプトン部分	47
9.3	クォーク部分	48
9.4	素粒子標準模型	49

0 反省点

初回授業をアウトリーチ用スライドで行うのはよし。

その後の最初の板書では、アインシュタインの縮約ルールや、場に対する微分など、計算ルールそのものを1コマまるまるやるべし。

手を動かして計算させ、Higgs 機構を追えることを主たる目的とさせるために、計算の約束などを最初に見せる。

変分原理などはその次で良い。

授業の進め方は、板書しながら話をして、板書が一通り終わったら、もう一度同じことを説明する。学生が板書で手一杯なので、2回目の説明で頭を使ってもらうため。

1 素粒子物理の概観

立教大学における、学部3年生向けの「概論」は

原子核概論 物性概論 宇宙物理概論 素粒子概論

の4つ。それぞれが大学院で研究する「現代物理学」の根幹を担っている。特に素粒子概論は、宇宙を構成する全ての物質の最小単位「素粒子」を理解しようとする分野である。そこでは、

- 基本中の基本となる物質の単位(素粒子)は何か？
- 基本単位となる素粒子同士には、どのような力(相互作用)が働くか？

を追究する。とても極端な言い方をすれば、「原子核」「物性」「宇宙物理」で登場する物質や力は全て「素粒子」から理解できるともいう。それくらい基礎的な分野。

例えば、「原子」はかつて素粒子と思われいた。名前がその名残りを留めている。この原子やその集合体・複合体である「分子」は、物性・化学などで中心的だったりする。しかし原子は「原子核」と「電子」に分離できる。さらに原子核は「陽子」と「中性子」(そしてたまに「中間子」など)に分離できる。素粒子・原子核物理では、これらをさらに「クォーク」まで分離することができる、という考え方の下で研究が進んでいる。実際に陽子などはそれが基本単位ではないことが知られている。一方の宇宙では、ざっと想像すれば「太陽」「月」「木星」などのような天体を扱う。しかしそれだけでなく「銀河」「ブラックホール」や「宇宙線」、そして「宇宙の大きさ」をも扱う。そこでも、実は素粒子の振る舞いが登場する！非常に小さな物質の性質が、非常に大きな物体に影響する！

素粒子の性質は、全ての物理現象にそのまま、もしくは形を変えて、どこにでも登場する。

この授業では、全ての物質が持っている(様に見える)「質量」について、その起源などを考えて行こうと思います。特に、2012年のノーベル物理学賞になった「ヒッグス粒子」の存在について一緒に考えていこうと思います。

2 数式の記法や計算ルールなど

- 素粒子物理学で用いる数学的道具

素粒子物理学は基本的に高エネルギー領域の物理なので、ニュートン力学よりも「(特殊) 相対論」で記述する。そして相対論と相性の良い力学形式は、解析力学、特に「ラグランジュ形式での解析力学」である。そして対象とする物理は、「対称性」という概念を全面的に用いるので、「群論とその表現」が重要になる。例えば群論は、量子力学でスピンとその合成を学ぶ際に登場する。この授業でも、少し後の方で対称性とそれを数学的に扱うための群論に触れる。

素粒子物理学では、力学変数はすべて「場」というもので記述される。例えば「電場 $\vec{E}(x)$ 」「磁場 $\vec{B}(x)$ 」はその典型的な例である。「場」 $\varphi(x)$ は、全時空に広がったものであり、エネルギーを運ぶ。なので、解析力学では場 $\varphi(x)$ を用いる。このような理論体系を「場の理論」「場の量子論」と呼ぶ。

量子力学では「波動関数 $\psi(x)$ 」なるものが登場するが、それとはちょっと違う。また量子力学では「演算子 $\hat{x}, \hat{p} = -i\hbar\partial$ 」とその「期待値 $\langle x \rangle, \langle p \rangle$ 」という概念が登場した。古典力学では「演算子」と「期待値」はほとんど同じであったが、量子力学では決定的に異なる概念として登場する。場の理論では、場 $\varphi(x)$ が演算子である。一方 x などは単なる変数に格下げされる。

- アインシュタインの縮約ルール

現代の量子物理学や相対論では、ベクトルなどの物理的自由度を表す記号がたくさん登場する。多くの場合、それらは「添字」をたくさん持っている。表記を簡単にするために、ここでは次の略記を用いよう。例えば3次元空間のベクトル \vec{A}, \vec{B} を用意しよう。これらベクトルの成分は A^i, B^i の様に表示する。この添字 $i = 1, 2, 3$ はそれぞれ x, y, z 方向を意味しているのだが、「 x, y, z 」と明確に書かずに、抽象的に「1,2,3」と表すことが頻繁にある。そして注意すべきは、「 $1 = x, 2 = y, 3 = z$ 」といった対応関係は特にない場合がほとんどである。さて、ベクトルのこれまでの表記を、簡略化したもので表しておこう：

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3 = \sum_{i=1}^3 A^i B^i \\ &\equiv A^i B^i.\end{aligned}\tag{2.1}$$

この様に、添字の記号 i が二回続いて、それが和の演算を意味するときには、頻繁に和記号 $\sum_{i=1}^3$ を省略する。

● 特殊相対論ミニマム

(特殊)相対論的なベクトルを扱う時には、もう少し工夫が必要になる。相対論では、時間空間の座標を

$$x^\mu = (ct, \vec{x}) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (2.2)$$

などの様に(上付き添字で)表すことが標準的になる($ct = x^0$)。特に、時間方向と空間方向を一度に扱っていることが重要である。さて、相対論的なベクトルについての「内積」も頻繁に登場するのだが、それをどうやって記述するか。相対論では「ローレンツ変換」というものがあった¹。このローレンツ変換に対して「不変」な形式で x^μ と y^μ の内積を定義したいとすれば、内積は次の様に与える:

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu &= x^\mu (\eta_{\mu\nu} y^\nu) = x^\mu y_\mu \\ &= (\eta_{\mu\nu} x^\mu) y^\nu = x_\nu y^\nu \\ &= x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3. \end{aligned} \quad (2.3)$$

ここで $\eta_{\mu\nu}$ とは時間空間の「計量」と呼ばれるテンソルである。そして早速、アインシュタインの縮約ルールを用いている。

計量 $\eta_{\mu\nu}$ は、時空間の2点の距離を測るときに必要であり、次の様に与えられる:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \eta_{00} & \eta_{01} & \eta_{02} & \eta_{03} \\ \eta_{10} & \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{20} & \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{30} & \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.4a)$$

$$\eta_{\mu\nu} = +\eta_{\nu\mu}. \quad (2.4b)$$

素朴には行列に見える。事実、テンソルを「行列で表現した」という意味である。右辺で空白にしている成分はゼロである。ゼロをたくさん書くと見づらいので省略した。これを用いて、ある点 q^μ から別の点 x^μ までの「相対論的な意味での距離」 L を次の様に内積を用いて定義する:

$$\begin{aligned} L^2 &\equiv \eta_{\mu\nu} (x^\mu - q^\mu)(x^\nu - q^\nu) \\ &= (x^0 - q^0)^2 - (x^1 - q^1)^2 - (x^2 - q^2)^2 - (x^3 - q^3)^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

ここで、 L^2 は一般に実数全体をとることができる。 $L^2 > 0$, $L^2 = 0$, $L^2 < 0$ をそれぞれ「時間的」「光的」「空間的」という。 $L^2 \geq 0$ の場合には次の様にできる:

$$L = \sqrt{\eta_{\mu\nu} (x^\mu - q^\mu)(x^\nu - q^\nu)}$$

¹ローレンツ変換によって時間や空間が伸び縮みしたりしたのが、アインシュタインが発見したもっとも大きな時空の変革であった。

$$= \sqrt{(x^0 - q^0)^2 - (x^1 - q^1)^2 - (x^2 - q^2)^2 - (x^3 - q^3)^2}. \quad (2.6)$$

$L^2 < 0$ の時、 L は虚数となる。(特殊) 相対論では、この L^2 が不変量である。

ある座標系 A から見て、ある現象が $x^\mu = (ct, x^1, x^2, x^3)$ で起こったといい、別の座標系 B から見ると、 $x'^\mu = (ct', x'^1, x'^2, x'^3)$ で起こったという。そして B は A の視点では $\vec{u} = (u, 0, 0)$ という一定速度で動いている。この時、次が成立する:

$$L^2 = (ct)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (ct')^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2 = L'^2, \quad (2.7a)$$

$$x^2 = x'^2, \quad x^3 = x'^3, \quad (2.7b)$$

$$ct = \gamma(ct' + \beta x'^1), \quad x^1 = \gamma(x'^1 + \beta ct'), \quad (2.7c)$$

$$\beta = \frac{u}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (2.7d)$$

運動量空間でも同様の不変量が議論できる。 $x^\mu = (ct, x^1, x^2, x^3)$ の共役運動量は $p^\mu = (E/c, p^1, p^2, p^3)$ である ($E/c = p^0$ とも書く):

$$\frac{E^2}{c^2} - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 = \frac{E'^2}{c^2} - (p'^1)^2 - (p'^2)^2 - (p'^3)^2 = m_0^2 c^2, \quad (2.8a)$$

$$p^2 = p'^2, \quad p^3 = p'^3, \quad (2.8b)$$

$$E = \gamma(E' + \beta p'^1 c). \quad (2.8c)$$

さて、座標系 B においてある粒子が制止している現象を考えよう。このとき、 $p'^1 = p'^2 = p'^3 = 0$ であり $E' = m_0 c^2$ である。よってこの粒子は静止質量 m_0 を持つ。この粒子を座標系 A から見ると、それは一定速度 $\vec{u} = (u, 0, 0)$ で動いている。そのため、座標系 A から見た粒子の運動量とエネルギーは

$$p^1 c = \gamma(p'^1 c + \beta E') = \beta \gamma E', \quad E = \gamma(E' + \beta p'^1 c) = \gamma E', \quad (2.9)$$

である。つまり、 $E = \gamma m_0 c^2 \equiv m c^2$ である。これより、静止質量 m_0 の粒子は、速度 $\vec{u} = (u, 0, 0)$ で動くと質量 $m = \gamma m_0$ を獲得している。さらに $u \rightarrow c$ になれば $\gamma \rightarrow \infty$ になり、光速に近くなれば質量 m が発散する。

ややこしいが、結局言いたいのは、 c^2 が不変であり、さらに L^2 や $m_0^2 c^2$ が相対論的に不変であり、他の量はすべて座標系によって変わる (変換される) ということである。

- 微分

素粒子物理学では、「場の理論」という道具を用いて物理現象を追究する。ここで「場」とは、これまで電磁気学で学んだような「電場」や「磁場」の類である。これを一般化して、電子などの物質も「場」として扱う。正確には、「電子の場」が時間空間全体に広がっていて、ある場所でそれがエネルギー的に「励起」したものを「粒子としての電子」と認識する。

このような場を用いて物理を解析するため、場を時間空間の座標 $x^\mu = (t, \vec{x})$ の関数として扱う。例えば電場は $\vec{E}(x)$ として、時間空間座標を変数に持つ関数（しかもベクトルの）として扱っていたことを思い出そう。

ある場 $\varphi(x)$ というのが存在したとき、これがどのような増減をするか、などを調べる必要がある。そのため、場 $\varphi(x)$ を時間空間座標 x^μ で微分することが多い:

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu \varphi(x). \quad (2.10)$$

このような表記をこれから多く使用する。

さらに場の理論では、場 $\varphi(x)$ を「変数」として扱う「汎関数」が頻繁に登場する。特に次のような形式の汎関数が中心的に登場する:

$$\mathcal{L}[\varphi(x)] = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi(x) \partial^\mu \varphi(x) - \frac{m^2}{2} \varphi^2(x). \quad (2.11)$$

これは後々に登場する「Lagrangian 密度」と呼ばれる基本的な量である。右辺第一項は、場を x^μ で微分して、さらに内積をとっている。第二項は場の 2 乗 $\varphi^2(x) = (\varphi(x))^2$ である。この Lagrangian 密度を、「場 $\varphi(x)$ で微分する」という操作も登場する。数学的に言えば、これは「汎関数 $\mathcal{L}[\varphi(x)]$ を $\varphi(x)$ で汎関数微分する」ということに相当する。このような操作を、これから授業を通じて実践する。

3 解析力学と場の理論

3.1 解析力学

- 最小作用原理、Lagrangian L 、Euler-Lagrange 方程式、Hamiltonian H

「物理は、変数 $A(t)$ がほんの少し変わっても、 $L(A(t), \dot{A}(t))$ は変わらない」:

$$\begin{aligned} 0 = \delta L(A(t), \dot{A}(t)) &= \frac{\partial L}{\partial A} \delta A + \frac{\partial L}{\partial \dot{A}} \delta \dot{A} \\ &= \left[\frac{\partial L}{\partial A} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{A}} \right] \delta A + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{A}} \delta A \right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\rightarrow 0 = \frac{\partial L}{\partial A} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{A}}. \quad (3.2)$$

両端を天井にひっつけて垂らしたひもを想像してみると良い。

L を「運動エネルギー T - ポテンシャルエネルギー V 」と設定すれば、 $\delta L = 0$ が、(ニュートンの) 運動方程式を与えてくれる。

こんな厄介な L を用いて回りくどいこととして、何がうれしいの？

→ 場の理論では、運動方程式はなかなか作れない。しかし L (特に V) は対称性から構築できる強みがある。(T は高々2階微分までしか含まない2次の項とするのが普通。)

力学系

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x). \quad (3.3)$$

運動方程式、正準運動量 p , Hamiltonian H はここから出せる:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right\} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} m x \ddot{x} \right) - \frac{\partial V(x)}{\partial x} \\ &= -m \ddot{x} - \frac{\partial V(x)}{\partial x}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}, \quad (3.5)$$

$$H(x, p) = p \dot{x} - L = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad \text{ルジャンドル変換.} \quad (3.6)$$

量子力学で普段用いる Hamiltonian は、この H のこと。

$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ を選べば、これは一次元調和振動子の系を与えている。

3.2 場の理論

この世界には、時間空間の全域に広がっている「場」が存在している。

「場」とは、波の性質を持っているものである。

例：電場・磁場はマクスウェル方程式 $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \rightarrow \square A_\mu = 0$ という波動方程式に従う。

量子力学では、光は『波』と『粒子』の性質を持つ (光量子仮説)。電子など物質も、『粒子』と『波』の性質を持つ。

量子論的な素粒子物理では、物質も「場」として考える
(それ以前、物質はどのように扱っていたか？考えてみると良いかもしれない)

物質「場」を考えて、『波』の性質を持たせる。一方で、『個数』としての性質も、量子化された「場」は持つことができる。→ 調和振動子展開！

3.2.1 量子力学の調和振動子

量子力学で登場した調和振動子の Hamiltonian H と Schrödinger 方程式、それに対応する Lagrangian L は²

$$[x, p] = i\hbar, \quad p = -i\hbar \frac{d}{dx}, \quad (3.7)$$

$$H\psi(x) = E\psi(x), \quad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \quad (3.8)$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}. \quad (3.9)$$

このエネルギー固有値 E_n は

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

x, p を、新しい演算子 a, a^\dagger で次のように書いてみる:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger), \quad p = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (a - a^\dagger), \quad (3.11)$$

$$\rightarrow a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} p, \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x - i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} p. \quad (3.12)$$

²演算子を表す記号 “ $\hat{}$ ” は省略。

これは次を満たす:

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad [a, a] = 0 = [a^\dagger, a^\dagger], \quad (3.13)$$

$$N \equiv a^\dagger a, \quad H = \frac{1}{2}(aa^\dagger + a^\dagger a)\hbar\omega = \left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad (3.14)$$

$$\rightarrow [N, a] = -a, \quad [N, a^\dagger] = +a^\dagger, \quad [H, N] = 0. \quad (3.15)$$

- $[H, N] = 0$ なので、エネルギー固有状態は、個数演算子 N の固有状態でもある。そして、 n が N の固有値である。
- a^\dagger, a は、それぞれ「生成演算子」「消滅演算子」であり、それぞれが、個数を「一つ増やす」、「一つ減らす」演算を行う。

k 個の調和振動子を考えるときは、Hamiltonian H は

$$H = \sum_{i=1}^k \left[\frac{1}{2m} p_i^2 + \frac{m}{2} \omega_i^2 x_i^2 \right], \quad L = \sum_{i=1}^k \left[\frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 - \frac{1}{2} m \omega_i^2 x_i^2 \right], \quad (3.16)$$

$$[x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}, \quad [x_i, x_j] = 0 = [p_i, p_j]. \quad (3.17)$$

a, a^\dagger も拡張されて

$$a_i = \sqrt{\frac{m\omega_i}{2\hbar}} x_i + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega_i}} p_i, \quad a_j^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega_j}{2\hbar}} x_j - i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega_j}} p_j, \quad (3.18)$$

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [a_i, a_j] = 0 = [a_i^\dagger, a_j^\dagger], \quad N_i = a_i^\dagger a_i \quad (3.19)$$

$$H = \sum_{i=1}^k \left(N_i + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_i. \quad (3.20)$$

3.2.2 自由場の理論: 無限個の調和振動子の集合

基本的に「自由場の理論」とその「摂動論」。
 量子力学なので、場の不確定性関係を導入。
 (場の量子化、もしくは第二量子化と呼ぶ。)
 相互作用項 V は対称性を課した上で自然に定まる。
 (量子力学では、適宜自分で与えていた。)

量子力学の調和振動子で用いた演算子を、「場」の理論の演算子に書き換えていく³:

$$x_i(t) \rightarrow \phi(t, \vec{x}), \quad p_i(t) = m\dot{x}_i(t) \rightarrow \pi(t, \vec{x}) = \dot{\phi}(t, \vec{x}), \quad \delta_{ij} \rightarrow \delta^3(\vec{x} - \vec{y}),$$

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 + \frac{\mu^2}{2\hbar^2}\phi^2 \right], \quad L = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 - \frac{\mu^2}{2\hbar^2}\phi^2 \right].$$

これらを用いて「場の量子化」を次で導入する (同時刻交換関係):

$$[\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] = i\hbar \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad [\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})] = 0 = [\pi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})]. \quad (3.21)$$

Lagrangian L を時間で積分した

$$S = \int dt L, \quad (3.22)$$

を作用積分 (もしくは作用) という。作用積分 S から、Euler-Lagrange 方程式 (つまり運動方程式) が得られる:

$$0 = \delta S = \int dt \int d^3x \left[\dot{\phi}(\delta\dot{\phi}) - \vec{\nabla}\phi \cdot (\vec{\nabla}\delta\phi) - \frac{\mu^2}{\hbar^2}\phi(\delta\phi) \right]$$

$$= \int d^4x \left[-\ddot{\phi} + \vec{\nabla}^2\phi - \frac{\mu^2}{\hbar^2}\phi \right] \delta\phi + \int d^4x \left[\frac{\partial}{\partial t}(\dot{\phi}\delta\phi) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\phi\delta\phi) \right], \quad (3.23)$$

$$\therefore 0 = \left(\frac{d^2}{dt^2} - \vec{\nabla}^2 + \frac{\mu^2}{\hbar^2} \right) \phi = \left(\square + \frac{\mu^2}{\hbar^2} \right) \phi. \quad (3.24)$$

これを Klein-Gordon 方程式という。なお、場の理論では時間や空間の境界条件は自明とすることが多い。

位置表示 (t, \vec{x}) から運動量表示 (t, \vec{p}) に書きかえて (Fourier 変換)、エネルギーや個数の話を構築しよう:

$$\phi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \tilde{\phi}(t, \vec{p}). \quad (3.25)$$

³光速 $c = 1$ とする。

これを Klein-Gordon 方程式に代入すると、

$$0 = \ddot{\tilde{\phi}} + \frac{(\vec{p}^2 + \mu^2)}{\hbar^2} \tilde{\phi} = \ddot{\tilde{\phi}} + \omega^2 \tilde{\phi}, \quad (3.26)$$

つまり、 $\tilde{\phi}(t, \vec{p})$ は調和振動子の方程式そのものになっている ($E^2 = \vec{p}^2 + \mu^2$, $E = \hbar\omega$)。

これまで何も指定していないが、 $\phi(t, \vec{x})$ が実数場としよう。もしくはエルミート場 ($\phi^\dagger = \phi$) と言っても良い。この時 Klein-Gordon 方程式を満たす $\tilde{\phi}(t, \vec{p})$ は

$$\tilde{\phi}(t, \vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left[e^{-i\omega t} a(\vec{p}) + e^{+i\omega t} a^\dagger(\vec{p}) \right]. \quad (3.27)$$

これから、 $\phi(t, \vec{x})$, $\pi(t, \vec{x})$ を書き換えられる:

$$\phi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \left[e^{-i\omega t} a(\vec{p}) + e^{+i\omega t} a^\dagger(\vec{p}) \right], \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \pi(t, \vec{x}) &= \dot{\phi}(t, \vec{x}) \\ &= -i \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \sqrt{\frac{\omega}{2}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \left[e^{-i\omega t} a(\vec{p}) - e^{+i\omega t} a^\dagger(\vec{p}) \right]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

この $a(\vec{p})$, $a^\dagger(\vec{p})$ は、場の量子化の定義 $[\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] = i\hbar\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$ から、

$$[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{q})] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}), \quad \text{他の交換関係はゼロ}, \quad (3.30)$$

とできるため、「消滅演算子」「生成演算子」と見做すことができる。

ここまでは「自由場の量子論」であった。Klein-Gordon 方程式に相互作用が入っていない。相互作用は次のようにして導入する:

$$\begin{aligned} L &= \int d^3x \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla}\phi)^2 - \frac{\mu^2}{2\hbar^2} \phi^2 - \mathcal{V}(\phi) \right] \\ &= \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\mu^2}{2\hbar^2} \phi^2 - \mathcal{V}(\phi) \right]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

この $\mathcal{V}(\phi)$ の形状は、対称性で決めていく。

ついでに言えば、場の理論では L よりも \mathcal{L} (Lagrangian 密度) を主に用いる:

$$L = \int d^3x \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\mu^2}{2\hbar^2} \phi^2 - \mathcal{V}(\phi). \quad (3.32)$$

そしてこれ以後、 $\hbar = 1$ 。

4 対称性

概要

- 世の中の対称性：並進、回転、ローレンツ、etc.

スカラー、ベクトル、テンソル(変換(主にローレンツ変換)の下でどのように振る舞うか)

- 対称性を表す便利な数学：群論

特に素粒子物理では次の3種がよく用いられる：

- 位相変換群 $U(1)$ (電荷などはこれに従う)
- ユニタリー群 $U(N)$ (主に内部空間回転に伴う)
- 直交群 $O(N)$ (主に内部空間回転に伴う)

- 変換の生成子もしくは保存電荷

例： Hamiltonian H は「時間推進演算子」 $t \rightarrow t + \delta t$

運動量演算子 \vec{P} は「空間推進演算子」 $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \delta \vec{x}$

空間回転の演算子 M は、角運動量演算子によって与えられる

内部空間回転の演算子 Q は、電荷演算子などで与えられる

Charge conjugate, Parity flip, Time reversal = CPT

特に CPT 以外は連続変換の対称性である。 H, \vec{P}, M, Q は変換の生成子(正準変換生成子)であり、保存電荷とも呼ぶ(charge の訳が「電荷」になっている)。Hamiltonian が Lagrangian から記述できたように、 \vec{P}, M, Q も Lagrangian から記述できる (Noether の定理)。

□ 全ての場は、対称性の保存電荷の固有値でラベルされる。つまり、対称性を用いて、物質場 $\psi(x)$ に「色」をつけていく。すなわち、「電子」「ニュートリノ」「陽子」などの違いをつけていく。

電子とは、
スピノール場で、Fermi-Dirac 統計に従い、
電荷 -1 : スピン $1/2$: カイラリティ -1 : $SU(2)$ 弱電荷 $-1/2$: $SU(3)$ カラー電荷 0 。
(厳密にいうとこの表現は少々怪しい。本当は「weak hypercharge」で表現すべきだが。)

4.1 世の中の対称性

対称性とは、

物事を「ある方向にずらす」操作を施しても、
物事の見方が変わらない

もう少し物理の言葉で表現すると...

(時間 t , 空間 \vec{x} をずらして) 場 $\phi(t, \vec{x})$ がずれても、
作用 S は不変、物理法則 $\delta S = 0$ は不変 (もしくは共変)

この「ずらす」操作を「変換する」という。場の理論では、変換とそれが生み出す対称性は、群論 (Lie 群論: 回転の一般化) で記述される。

ある Lie 群の変換の下で	{	不変 → スカラー
		線形 → ベクトル
		双線形 → 2階のテンソル

空間回転やローレンツ変換の下での「スカラー」「ベクトル」などの言葉が馴染み深い。

素粒子物理では、ヒッグス場はスカラー、電磁場のベクトルポテンシャルはベクトル、電磁場や時空の計量はテンソルとして登場する。その他、物質場は「スピノール」によって記述される。

コメント

変換性による場の区別の他に、スピンと統計による区別も重要である。Bose-Einstein 統計に従う「可換な粒子 (場)」を Boson、Fermi-Dirac 統計に従う「反可換な粒子 (場)」を Fermion と呼ぶ。物理的な場を考えると、物質場は Fermion であり、ゲージ場やヒッグス場は Boson である。非物理的な ghost 場は、その限りではない。そして、この Boson と Fermion を理論の枠内で入れ替える「対称性」も、現代の素粒子理論では重要である。それを「超対称性」という。

4.2 Lie 群をいくつか： $U(1)$, $U(N)$, $O(N)$, $SO(1, 3)$

そもそも「集合 $G = \{x, y, z, \dots\}$ が群をなす」とは次をみたすもの：

演算 \circ において	1. 積の結合則	$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$	が成り立つ
	2. 単位元 e の存在	$e \circ x = x \circ e = x$	
	3. 逆元 x^{-1} の存在	$x^{-1} \circ x = x \circ x^{-1} = e$	

そして一般に $x \circ y \neq y \circ x$ である

素粒子物理で主に登場する Lie 群は次の通り：

$U(1)$ 位相変換群	名前の通り複素数の位相を変化させる $Z \rightarrow Z' = e^{i\theta} Z$
$U(N)$ ユニタリー群	複素 N 成分ベクトルを複素 N 成分ベクトルに写す一次変換群 $Z_i \in \mathbb{C}, \vec{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_N)^T \rightarrow \vec{Z}' = M\vec{Z}, M^\dagger = (M^*)^T = M^{-1}$ $\vec{Z}^* \cdot \vec{W} = Z_1^* W_1 + Z_2^* W_2 + \dots + Z_N^* W_N$ を不変に保つ
$O(N)$ 直交群	実 N 成分ベクトルを実 N 成分ベクトルに写す一次変換群 $X_i \in \mathbb{R}, \vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)^T \rightarrow \vec{X}' = M\vec{X}, M^T = M^{-1}$ $\vec{X} \cdot \vec{Y} = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \dots + X_N Y_N$ を不変に保つ
$SO(1, 3)$ 擬特殊直交群	もしくはローレンツ群 $O(N)$ と似てるが、実 $(1+3)$ 成分ベクトルの内積の定義が異なる $\vec{X} \cdot \vec{Y} = X_1 Y_1 - X_2 Y_2 - X_3 Y_3 - X_4 Y_4$ を不変に保つ

4.3 場の理論と対称性

4.3.1 場の理論あれこれ

場の理論は基本的に次の Lagrangian (密度) の積分である作用から出発する:

$$S = \int dt L(t) = \int d^4x \mathcal{L}(t, \vec{x}), \quad \text{時空の計量} = \text{diag.}(+, -, -, -). \quad (4.1)$$

\mathcal{L} は Lagrangian 密度と呼ばれるローレンツ不変量。 L は 3 次元回転でのスカラーであったが、4 次元ローレンツ変換ではスカラーではなかった。以後、 (t, \vec{x}) を単に x (もしくは $x^\mu = (t, \vec{x})$) と書く。

- 実スカラー場の理論 (スピン 0 の粒子を表す Klein-Gordon 場の理論):

$$\mathcal{L}(\varphi(x)) = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \mathcal{V}(\varphi). \quad (4.2)$$

- 複素スカラー場の理論 (スピン 0 の粒子を表す複素 Klein-Gordon 場の理論):

$$\mathcal{L}(\phi(x), \phi^\dagger(x)) = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \mathcal{V}(\phi, \phi^\dagger). \quad (4.3)$$

- ベクトル場の理論 (スピン 1 の粒子を表す Proca 場の理論):

$$\mathcal{L}(U_\mu(x)) = -\frac{1}{4} (\partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu) (\partial^\mu U^\nu - \partial^\nu U^\mu) + \frac{1}{2} m^2 U_\mu U^\mu - \mathcal{V}(U_\mu). \quad (4.4)$$

- スピノール場の理論 (スピン 1/2 の粒子を表す Dirac 場の理論):

$$\mathcal{L}(\psi(x), \bar{\psi}(x)) = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - \mathcal{V}(\psi, \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0. \quad (4.5)$$

相互作用項 \mathcal{V} は対称性 (と繰り込み可能性とアノマリー) から決める。

- アインシュタインの一般相対論は、実対称テンソル場 $g_{\mu\nu}$ の非線形 Lagrangian (Einstein-Hilbert 作用) から始まる:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}(g_{\mu\nu}(x)), \quad \mathcal{L}(g_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} R, \quad R = g^{\mu\nu} R^\rho{}_{\mu\rho\nu}, \quad (4.6)$$

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = -(\partial_\rho \Gamma^\mu_{\sigma\nu} - \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\rho\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} - \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\nu}) \quad (\text{Riemann テンソル}), \quad (4.7)$$

$$\Gamma^\mu_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\rho g_{\nu\sigma} + \partial_\sigma g_{\rho\nu} - \partial_\nu g_{\rho\sigma}) \quad (\text{アフィン接続}). \quad (4.8)$$

d^4x が一般座標変換に対して不変 (スカラー) になっていない。そのため、 $d^4x \rightarrow d^4x \sqrt{-g}$ ($g = \det(g_{\mu\nu})$) に置き換えなければならない。(なお、換率が存在する空間ではアフィン接続は計量だけでは記述できないが、物質場がないときは換率はないとしてよい。)

4.3.2 大域的変換

- 実スカラー場の理論 $\mathcal{L}(\varphi)$ にはどのような対称性を課することができるか?

$$\varphi(x) \rightarrow -\varphi(x) : \quad \text{if } \mathcal{V}(-\varphi) = \mathcal{V}(\varphi), \quad (4.9)$$

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + \alpha : \quad \text{if } m = 0, \quad \mathcal{V}(\varphi + \alpha) = \mathcal{V}(\varphi). \quad (4.10)$$

α は任意の定数 : 「大域的対称性」の変換パラメータ。

一つ目の変換におけるポテンシャルの例は $\mathcal{V}(\varphi) = \frac{g_4}{4!}\varphi^4 + \frac{g_6}{6!}\varphi^6 + \dots$ 。

- 複素スカラー場の理論 $\mathcal{L}(\phi, \phi^\dagger)$ にはどのような対称性を課することができるか?

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\theta} \phi(x) : \quad \text{if } \mathcal{V}(e^{i\theta}\phi, e^{-i\theta}\phi^\dagger) = \mathcal{V}(\phi, \phi^\dagger), \quad (4.11)$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \alpha : \quad \text{if } m = 0, \quad \mathcal{V}(\phi + \alpha, \phi^\dagger + \alpha^\dagger) = \mathcal{V}(\phi, \phi^\dagger). \quad (4.12)$$

θ, α は任意の定数 : 「大域的対称性」の変換パラメータ。

一つ目の変換におけるポテンシャルの例は $\mathcal{V}(\phi, \phi^\dagger) = (\phi^\dagger\phi)^2$ 。

- ベクトル場の理論 $\mathcal{L}(U_\mu)$ にはどのような対称性を課することができるか?

$$U_\mu(x) \rightarrow -U_\mu(x) : \quad \text{if } \mathcal{V}(-U_\mu) = \mathcal{V}(U_\mu), \quad (4.13)$$

$$U_\mu(x) \rightarrow U_\mu(x) + \lambda_\mu : \quad \text{if } m = 0, \quad \mathcal{V}(U_\mu + \lambda_\mu) = \mathcal{V}(U_\mu), \quad (4.14)$$

$$U_\mu(x) \rightarrow \Lambda_\mu^\nu U_\nu(x) : \quad \text{if } \mathcal{V}(\Lambda_\mu^\nu U_\nu) = \mathcal{V}(U_\mu) \text{ with } x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu. \quad (4.15)$$

$\lambda_\mu, \Lambda^\mu_\nu$ ($\Lambda^\mu_\nu \Lambda_\mu^\rho = \delta_\nu^\rho$) は任意の定数 : 「大域的対称性」の変換パラメータ。

一つ目の変換におけるポテンシャルの例は $\mathcal{V}(U_\mu) = (U_\mu U^\mu)^2$ 。

上の変換は全て大域的。全ての x で一斉に場を「共通のパラメータ」で変換する。

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\theta}\phi(x), \quad \phi(x') \rightarrow e^{i\theta}\phi(x'), \quad \phi(x'') \rightarrow e^{i\theta}\phi(x''), \dots$$

かなり不自然な操作!

4.3.3 局所的変換：ゲージ対称性

複素スカラー場の理論の局所変換

まずは複素スカラー場の理論 $\mathcal{L}(\phi, \phi^\dagger)$ を見てみよう⁴。位相変換パラメータ θ を、場所に依存するパラメータ $\theta(x)$ に置き換える：

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\theta(x)} \phi(x) \quad \text{with} \quad \mathcal{V}(e^{i\theta(x)}\phi, e^{-i\theta(x)}\phi^\dagger) = \mathcal{V}(\phi, \phi^\dagger). \quad (4.16)$$

この時 $\mathcal{L}(\phi, \phi^\dagger)$ (特に微分項) は、不変ではない！

$$\mathcal{L}(\phi, \phi^\dagger) = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \mathcal{V}(\phi, \phi^\dagger), \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e^{i\theta(x)}\phi, e^{-i\theta(x)}\phi^\dagger) &= \partial_\mu (e^{-i\theta(x)}\phi^\dagger) \partial^\mu (e^{i\theta(x)}\phi) - m^2 (e^{-i\theta(x)}\phi^\dagger)(e^{i\theta(x)}\phi) - \mathcal{V}(e^{i\theta(x)}\phi, e^{-i\theta(x)}\phi^\dagger) \\ &= \mathcal{L}(\phi, \phi^\dagger) + (\phi^\dagger \phi) \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - i(\phi^\dagger \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^\dagger) \partial^\mu \theta. \end{aligned} \quad (4.18)$$

「大域的対称性」が「局所的対称性」に格上げされると、不変ではない！

ズレを吸収するベクトルゲージ場 A_μ を用意した「共変微分」を導入する：

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu - iA_\mu. \quad (4.19)$$

そして、ズレを「 A_μ のゲージ変換 $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda(x)$ 」⁵ で吸収させる：

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - iA_\mu \phi, \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} D_\mu \phi &\rightarrow \partial_\mu (e^{i\theta(x)}\phi) - i(A_\mu + \partial_\mu \lambda)(e^{i\theta(x)}\phi) \\ &= e^{i\theta(x)} \left[\partial_\mu \phi + i\partial_\mu \theta \phi - iA_\mu \phi - i\partial_\mu \lambda \phi \right] \\ &= e^{i\theta(x)} \left[D_\mu \phi + i\phi \partial_\mu (\theta - \lambda) \right]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

λ は任意なので、 $\lambda = \theta$ とすれば良い。そうすれば、共変微分 $D_\mu \phi$ は、 ϕ と同じ(共変)な変換に従うことになる：

$$\phi \rightarrow e^{i\theta(x)} \phi, \quad D_\mu \phi \rightarrow e^{i\theta(x)} D_\mu \phi. \quad (4.22)$$

これを用いて、「共変化された理論」が得られる：

$$\mathcal{L}(\phi, \phi^\dagger) = D_\mu \phi^\dagger D^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \mathcal{V}(\phi, \phi^\dagger). \quad (4.23)$$

この共変化された理論は、局所的な位相変換の下で不変になる！

⁴実スカラー場の理論の並進変換などは素粒子標準模型では登場しないが、超重力理論では頻繁に登場する。また、符号反転変換は連続変換ではないのでここでは触れない。

⁵電磁気学でのベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルの性質を思い出せ。

実ベクトル場の理論の局所変換

実ベクトル場の理論 $\mathcal{L}(U_\mu)$ の変換 $U_\mu \rightarrow U_\mu + \lambda_\mu$ の局所変換化についても吟味しよう⁶。

ここでは、大域的ですら $m = 0$ である必要があった。そしてさらに簡単のため、 $\mathcal{V}(U_\mu) = 0$ の場合を考える⁷。そして局所パラメータ $\lambda_\mu(x)$ を用いて変換する:

$$\mathcal{L}(U_\mu) = -\frac{1}{4}(\partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu)(\partial^\mu U^\nu - \partial^\nu U^\mu), \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(U_\mu + \lambda_\mu(x)) &= -\frac{1}{4}\left[(\partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu) + (\partial_\mu \lambda_\nu - \partial_\nu \lambda_\mu)\right]\left[(\partial^\mu U^\nu - \partial^\nu U^\mu) + (\partial^\mu \lambda^\nu - \partial^\nu \lambda^\mu)\right] \\ &= \mathcal{L}(U_\mu) - \frac{1}{2}(\partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu)(\partial^\mu \lambda^\nu - \partial^\nu \lambda^\mu) \\ &\quad - \frac{1}{4}(\partial_\mu \lambda_\nu - \partial_\nu \lambda_\mu)(\partial^\mu \lambda^\nu - \partial^\nu \lambda^\mu). \end{aligned} \quad (4.25)$$

これが不変 $\mathcal{L}(U_\mu + \lambda_\mu(x)) = \mathcal{L}(U_\mu)$ になるには、次が満たされている必要がある:

$$\partial_\mu \lambda_\nu - \partial_\nu \lambda_\mu = 0. \quad (4.26)$$

この解は、ベクトル解析の知識を使うと求められて、

$$\lambda_\mu = \partial_\mu \lambda^1(x) + \lambda_\mu^2, \quad (4.27)$$

となる。 $\lambda^1(x)$ は任意のスカラー。 λ_μ^2 は任意の定数ベクトル。定数ベクトルは大域変換の一部なので取り除く。

$\mathcal{L}(U_\mu)$ は、 $U_\mu \rightarrow U_\mu + \partial_\mu \lambda^1(x)$ の下で不変になる! さらにこの U_μ の変換則は、複素スカラー場の理論の共変化で導入したベクトルゲージ場 A_μ の変換則そのものである!

⁶ $U_\mu \rightarrow \Lambda_\mu^\nu U_\nu$ の局所変換化は、一般座標変換に連動するため、重力理論のゲージ場であるアフィン接続を用いる必要がある。

⁷ $\mathcal{V}(U_\mu + \lambda_\mu) = \mathcal{V}(U_\mu)$ となるポテンシャルを実際に作ることはできるのか?

5 電磁気力の量子論について

基本的に「電子と光」の場の量子論
 電子場 $\psi(x)$ の対称性を「ゲージ化」
 ゲージ対称性は $U(1)$
 (「無限大」の脅威とその除去) ← 朝永振一郎のノーベル賞受賞対象

5.1 量子電磁力学

量子電磁力学

「 $U(1)$ ゲージ場 $A_\mu(x)$ 」 + 「Dirac 場 $\psi(x)$ 」 + 「 $\mathcal{V} = 0$ 」

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi,$$

$$F_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - ie A_\mu \psi,$$

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$$

ここで「 e 」はゲージ結合定数。

運動方程式は変分原理で与えられたことを思い出す:

$$A_\mu: \quad 0 = \partial_\nu F^{\nu\mu} + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad (5.1)$$

$$\psi: \quad 0 = (i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi. \quad (5.2)$$

Lagrangian は $\psi(x)$ の運動項として 1 階微分しか含んでいないため、 $\psi(x)$ についての運動方程式を得たい場合は $\bar{\psi}$ について変分を実行すれば良い。これは簡便法であるが、実際にこれで正しい結果を導ける。ただし、 $\psi(x)$ は反可換な場であるので、変分 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}$ を実行するとき、左微分なのか右微分なのか、自分で設定する必要がある。一度左微分だと決めたら、ずっと左微分をすること。それから、ゲージ場 A_μ で変分をするとき、次を用いることになる:

$$\frac{\partial(\partial_\rho A_\sigma)}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = \delta_\rho^\nu \delta_\sigma^\mu, \quad F^{\rho\sigma} \delta_\rho^\nu \delta_\sigma^\mu = F^{\nu\mu}. \quad (5.3)$$

電場 $\vec{E} = (E^1, E^2, E^3)$ 、磁場 $\vec{B} = (B^1, B^2, B^3)$ と「場の強さ $F_{\mu\nu}$ 」の関係は次の通りだったことを思い出す:

$$(F^{01}, F^{02}, F^{03}) = (E^1, E^2, E^3), \quad (F^{23}, F^{31}, F^{12}) = (B^1, B^2, B^3), \quad (5.4)$$

$$F^{0i} = E^i, \quad F^{ij} = +\varepsilon^{ijk} B_k. \quad (5.5)$$

ここで

$$\varepsilon^{123} = \varepsilon^{231} = \varepsilon^{312} = +1, \quad \varepsilon^{132} = \varepsilon^{213} = \varepsilon^{321} = -1, \quad \varepsilon^{ijk} = \varepsilon_{ijk}, \quad (5.6)$$

という反対称テンソル ε^{ijk} を用いた。これを用いると、 $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ の運動方程式は次のようになる:

$$0 = \partial_i F^{i0} + e j^0 \quad \rightarrow \quad 0 = -\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + e\rho, \quad (5.7)$$

$$0 = \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} + e j^i \quad \rightarrow \quad 0 = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times \vec{B} + e\vec{j}, \quad (5.8)$$

$$\text{但し } e j^\mu = e(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = (e\rho, e\vec{j}). \quad (5.9)$$

つまり、「ガウスの法則」と「アンペールの法則」が得られる。なお、ベクトル解析で登場した次の等式を用いている:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \partial_i E^i, \quad (\vec{\nabla} \times \vec{B})^i = \varepsilon^{ijk} \partial_j B_k. \quad (5.10)$$

ついでに、「磁束保存則 $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ 」と「ファラデーの法則 $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 」は、ビアンキ恒等式

$$0 = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma}, \quad (5.11)$$

から得られる。

なお、今後はこの授業では Dirac 場を (可換な) 複素スカラー場に置き換えた理論を考える場合が度々登場する:

$$\mathcal{L}_{\text{scalar QED}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi, \quad D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - ie A_\mu \phi. \quad (5.12)$$

これは前回の「複素スカラー場の理論」と「実ベクトル場の理論」にそれぞれ局所対称性を課して、ベクトルゲージ場を実ベクトル場と同一視したもの。

5.2 相互作用とファインマンダイアグラム

場の理論は、運動方程式を導き出すことが目的ではない。多くの粒子の相互作用を一気に記述することが目的である。

そのとき記述の根幹は、次の様な「自由場の理論における調和振動子的な記述」である！

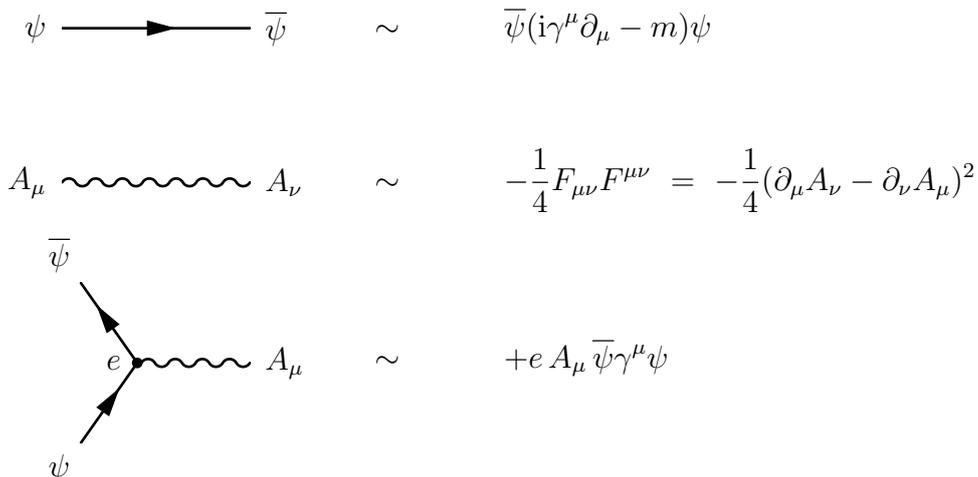
$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \left[e^{-i\omega t} a(\vec{p}) + e^{+i\omega t} a^\dagger(\vec{p}) \right]. \quad (5.13)$$

ここで $a^\dagger(\vec{p})$ と $a(\vec{p})$ が、場の演算子の中にある「粒子」として考えて良かった。(調和振動子における「エネルギー励起・消滅」は場の理論での「粒子の生成・消滅」に対応する。)

ちなみに「自由場」とは、以前にも言ったが「相互作用していない場」である。上の \mathcal{L}_{QED} は相互作用している！しかし「結合定数 e 」が非常に小さいと考えておけば、 $\psi(x), A_\mu(x)$ は「自由場」と見なせて、理論を近似展開 (結合定数 e のべき展開：摂動展開) しても良いことになる！

Lagrangian 密度 \mathcal{L}_{QED} の各項は、そのまま場の相互作用の形態を示している：

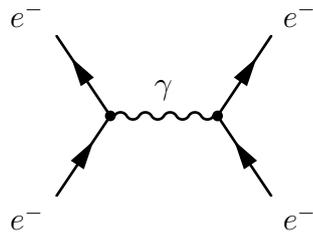
$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QED}} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \\ &= -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \end{aligned} \quad (5.14)$$



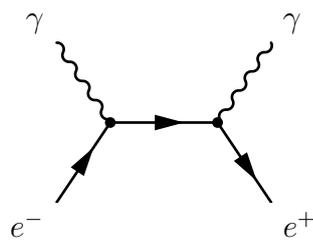
これを組み合わせて、電子とゲージ場 (光子) の相互作用が全部記述できる。この図一つ一つの「Fourier 変換」を用意すると、粒子の相互作用 (散乱) が全部定量的に計算できる。

この図とその組み合わせを「ファインマンダイアグラム」という。

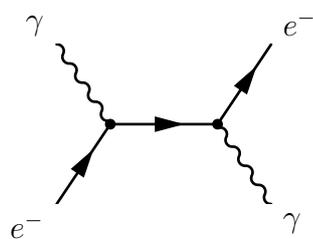
ファインマンダイアグラムの例をいくつか紹介する (摂動の2次、つまり e^2 のオーダー):



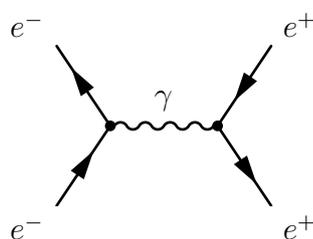
電子電子散乱



電子陽電子対消滅



電子光子散乱 (Compton 散乱)



電子陽電子散乱 (Bhabha 散乱)

クラインと仁科は、ファインマンダイアグラムが登場する前にコンプトン散乱にあるような「電子光子散乱」について計算した (クライン=仁科公式:1929年)。それは相対論的量子力学の最初の計算公式であったが、この散乱の計算に彼らは一ヶ月を要した (らしい)。ファインマンダイアグラムが発明されてからは、誰でも簡単に正しい公式を導出できるようになった。

6 弱い力と強い力

様々な「素」粒子

20 世紀に入ると、物質の基本単位となる粒子が次々と発見されていった。あるものは素粒子とみなされたり、あるものはさらに基本的な粒子で構成される複合粒子として見直された。ここでは、言葉の整理のために、簡単に「素」粒子の名前の上での分類をしておく。

粒子発見の歴史と逆行するが、2016 年時点で基礎的だと思われる素粒子は次の様に分類される。まずはゲージ場など力の素粒子は次の通り ($eV =$ 電子ボルトはエネルギーの単位だが、相対論的に光速 $c = 1$ としているので、このまま質量の単位として使う):

	表記	スピン	質量 [GeV = $10^9 eV$]	平均寿命 [s]
光子	γ	1	0	安定
グルーオン	g	1	0	(単独で観測されず)
W ボソン	W^\pm	1	80.41	3.20×10^{-25}
Z ボソン	Z	1	91.19	2.64×10^{-25}
Higgs ボソン	H	0	126	(2012 年 7 月に発見)

続いて、電子など軽い粒子「レプトン (Lepton)」は次の通り：

	表記	電荷	スピン	質量 [MeV = $10^6 eV$]	平均寿命 [s]
電子	e^-	-1	1/2	0.511	安定
μ 粒子	μ^-	-1	1/2	105.66	2.20×10^{-6}
τ 粒子	τ^-	-1	1/2	1777.05	2.90×10^{-13}
電子ニュートリノ	ν_e	0	1/2	$\leq 15 \times 10^{-6}$	安定?
μ ニュートリノ	ν_μ	0	1/2	< 0.17	安定?
τ ニュートリノ	ν_τ	0	1/2	< 18.2	安定?

原子核を構成する粒子「クォーク (Quark)」は次の通り：

	表記	電荷	スピン	質量	備考
アップ・クォーク	u	+2/3	1/2	1.5 ~ 5 MeV	
ダウン・クォーク	d	-1/3	1/2	3 ~ 9 MeV	
ストレンジ・クォーク	s	-1/3	1/2	60 ~ 170 MeV	ストレンジ量子数 = -1
チャーム・クォーク	c	+2/3	1/2	1.1 ~ 1.4 GeV	チャーム量子数 = 1
ボトム・クォーク	b	-1/3	1/2	4.1 ~ 4.4 GeV	ボトム量子数 = -1
トップ・クォーク	t	+2/3	1/2	174 GeV	トップ量子数 = 1

クォークは単体では摘出できない。その代わり複合粒子「ハドロン (Hadron)」として現実世界に存在する。ハドロンはさらに「バリオン (Baryon)」や「メソン (Meson)」に種類が分割される。バリオンは陽子や中性子など直接原子核の構造物となっているもので、クォーク 3 体でできている。メソンは核力を伝える粒子で、バリオン同士を行き来する。これはクォークと反クォークの 2 体でできている。この分類の下では粒子は 200 を越える種類が加速器実験などで発見されている。

バリオンの代表例は次の様な複合粒子である:

記号	構成	電荷	スピン	質量 [MeV]	平均寿命 [s]
p^+	uud	+1	1/2	938	安定
n^0	udd	0	1/2	939	887
Λ^0	uds	0	1/2	1115	2.63×10^{-10}
Σ^+	uus	+1	1/2	1189	7.99×10^{-11}
Σ^0	uds	0	1/2	1192	7.4×10^{-20}
Σ^-	dds	-1	1/2	1197	1.48×10^{-10}
Ξ^0	uss	0	1/2	1315	2.90×10^{-10}
Ξ^-	dss	-1	1/2	1321	1.64×10^{-10}

メソンの代表例は次である:

記号	構成	電荷	スピン	質量 [MeV]	平均寿命 [s]
π^+	$u\bar{d}$	+1	0	139.57	2.60×10^{-8}
π^-	$d\bar{u}$	-1	0	139.57	2.60×10^{-8}
π^0	$u\bar{u}, d\bar{d}$	0	0	134.98	8.4×10^{-17}
K^+	$u\bar{s}$	+1	0	493.68	1.24×10^{-8}
K^-	$s\bar{u}$	-1	0	493.68	1.24×10^{-8}
K^0	$d\bar{s}$	0	0	497.67	8.93×10^{-11} , etc.
η^0	$u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}$	0	0	547.30	5.58×10^{-19}

以後、簡単に歴史を紹介するが、そこで登場する粒子の名前は上で分類された言葉を用いる。当時の呼び名で話を展開すると見通しが悪い。

6.1 弱い力

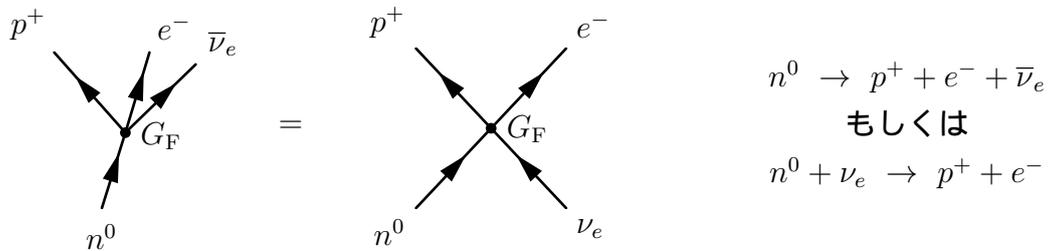
中性子の発見とその崩壊が発端
 中性子が陽子と電子になるが、エネルギーが反応の前後で保存してない？
 エネルギー保存則の危機と破れかぶれのアイデア：新粒子ニュートリノの導入
 さらに厄介なことに、弱い力の下ではパリティが保存していない！
 弱い力の理論は、量子電磁力学との統一理論が確立するまでずっと不明瞭。

中性子を眺めていると、887 秒 (15 分弱) で陽子と電子に「崩壊」してしまう。ところが、崩壊前の中性子の全エネルギーと、崩壊後の陽子と電子の全エネルギーが釣り合っていないことが観測で分かってきた。

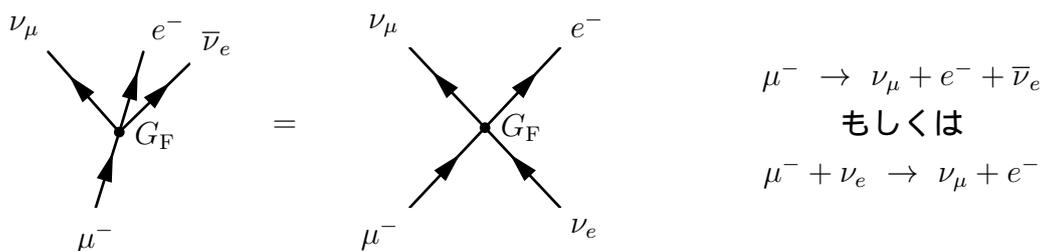
量子力学ではエネルギー保存則も成り立っていないのかと絶望する状況に追い込まれていたが、W. Pauli が仮想粒子「ニュートリノ」を導入すれば、問題が回避できるだろうと(しぶしぶ)提案した。

このニュートリノは、スピンの $1/2$ で電荷を持たない粒子である。質量は非常に小さく、21 世紀に入るまではゼロ質量として扱ってきた。2016 年現在でも、ニュートリノの質量値は不明である。

さて、ニュートリノ ν_e を導入すれば、中性子が崩壊する過程を比較的正しく記述できると E. Fermi が提案した。その様子をファインマンダイアグラムで記述すると次の通り：



ニュートリノを放出する弱い力の相互作用は、陽子や中性子といった「ハドロン」と呼ばれる粒子だけでなく、電子など「レプトン」だけでできている物理系でも生じる。例えば、電子やミュー粒子 μ^- (電子とほとんど同じ性質を持つ素粒子) の 4 体散乱も同様：



この理論は、量子電磁力学を真似て構築されたが、物質場同士が直接相互作用する点で異なる。この相互作用は「フェルミの4点相互作用」と呼ばれる。時代が下ると、この4点相互作用は基本的な相互作用ではなくなり、改変されることになるが、しばらくはこの理論でも実験をよく再現した。

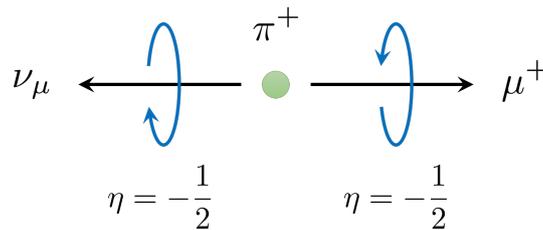
弱い力によって登場したニュートリノは、電氣的に中性なスピン 1/2 の粒子である。さらに厄介なことに、ニュートリノは質量が(ほとんど)ゼロである⁸。このことで、これまでの物理においてほとんど暗黙の了解だった「パリティの保存」が成立していない現象が見出せるのではないかと考えられる様になった。事実、弱い力の存在のため、この世界は「パリティが保存しない」ことが見て取れる。詳細は、参考文献 [51] や [52] に譲るが、とにかく弱い力は、それまでの物理的常識と思われていた概念が次々に破られていくとても奇妙な力であった。

この弱い力は Fermi の 4 体相互作用から始まり、現在では「 $SU(2) \times U(1)$ ゲージ理論による電弱統一理論」として確立している。弱い力単独での理論ではなく、電磁気力とどうしても「統一された」理論にならざるを得ない。

$\eta = \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} > 0$
右巻き

$\eta = \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} < 0$
左巻き

	粒子	t	\vec{x}	\vec{p}	\vec{s}	η
荷電共役 C	反粒子	t	\vec{x}	\vec{p}	\vec{s}	η
パリティ変換 P	粒子	t	$-\vec{x}$	$-\vec{p}$	\vec{s}	$-\eta$
時間反転 T	粒子	$-t$	\vec{x}	$-\vec{p}$	$-\vec{s}$	η



パイ中間子 π^+ の崩壊。 ν_μ の直接観測は難しいが、電荷を持つ μ^+ は観測できる。

そして $\eta(\mu^+) = \eta(\nu_\mu) = -\frac{1}{2}$ のみが観測される。

$\eta(\mu^+) = \eta(\nu_\mu) = +\frac{1}{2}$ が観測されないので、パリティが破れている。

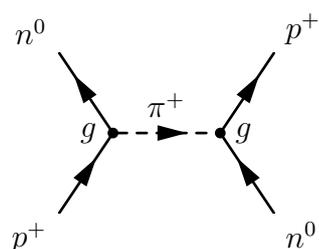
⁸2016 年現在ですら、ニュートリノの質量ははっきり分かっていない。ただ、ゼロではないようだということとは「ニュートリノ振動」という現象の存在が実験で確実になったので、質量があることは確定している。

6.2 強い力

もともとは湯川の間生子論: 陽子と中性子を狭い所に閉じ込めておく力
 たくさんのハドロンを簡単に記述できないものか?
 クォーク・パートン模型と $SU(3)$ 対称性のゲージ理論 (量子色力学) として確立

1930年代になると、実験で原子核の中が見えるようになってきた。原子核は正の電荷を帯びた単体ではなく、陽子と中性子の複合体であることが分かってきた。しかし同時に疑問も生じてくる:「原子核という狭い空間に、正に帯電した陽子と中性の中生子がどうやって閉じ込められているのだろうか?」

湯川秀樹は、原子核の大きさくらいにのみ力の範囲が及び、電磁気力ではない新しい力「核力」を伝える仮想粒子を考えた。当時既に量子電磁力学は出現していた。電子と電子の相互作用は、互いに光子を投げ合うことで成立していた。これを真似て、陽子と中性子は、質量を持つ粒子「中間子」を投げ合うことで相互作用していると、湯川は「仮定」した。その概念を現代的なファインマンダイアグラムで書くと次の様になっている:



核力は π 中間子のやりとり
 (QED の電子電子散乱を真似る)

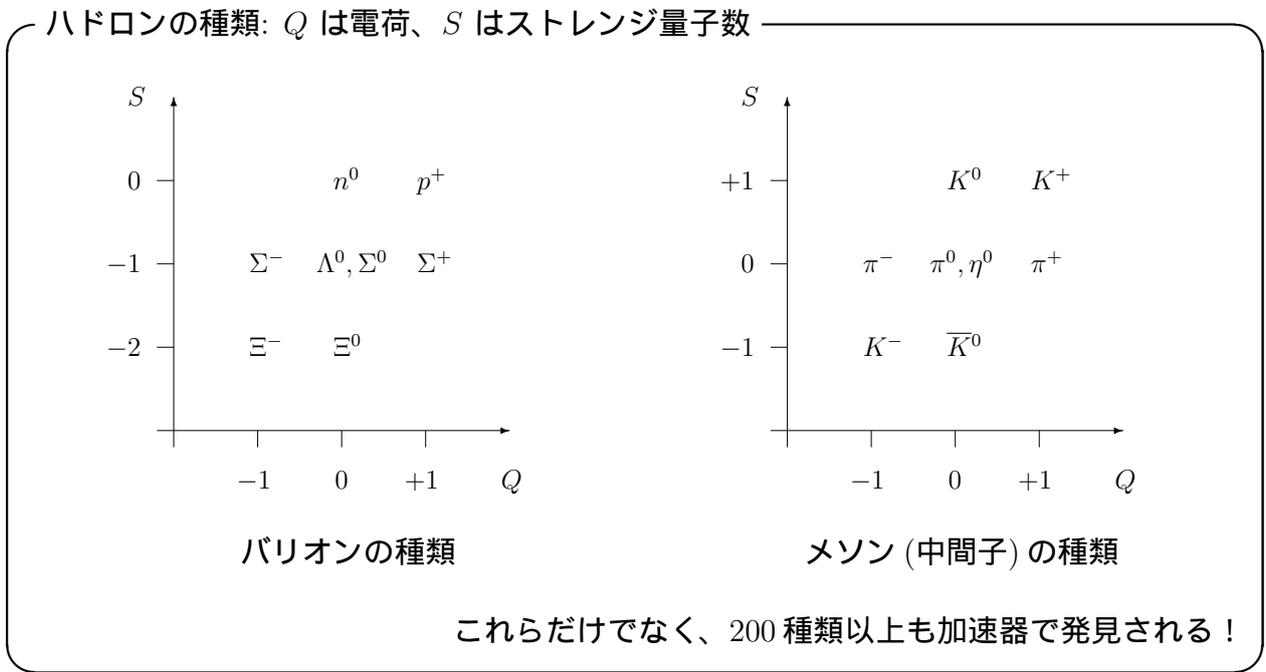
これ以後、1930年代は新しい現象を説明するために「新しい概念の粒子を仮定する」時代になった。弱い力ではニュートリノが、強い力では中間子が、「実験観測では見つからないにも関わらず導入された」⁹。この大胆な発想はその後の素粒子物理の世界観を飛躍的に広げることになる。

1935年に湯川秀樹が導入した「 π 中間子」は、1947年についに発見される。湯川はこの業績で1949年にめでたくノーベル物理学賞を受賞する。日本人初のノーベル賞であった。

さて、原子核の中の力についてこれで一応の理解を得られたかと思われた。しかし実験技術が進み、高エネルギーでの粒子散乱を人間がコントロール出来るようになってくると、次から次へと「新しい粒子」が発見されていくことになる。大きく分けて「陽子や中性子の様なバリオン」と「湯川の π 中間子の様なメソン」が、どんどんと見つかっていくのである。これまで「電荷」「スピン」だけで粒子の量子数を分類して来たが、それでは粒子の性質を特定

⁹ ついでにいえば、相対論的場の量子論を構築した1920年代後半に、P. Dirac が陽電子という「反粒子」の存在を仮定したのが、そもそものブレイクスルーであった。

できなくなってきた。新たな量子数を導入しなければならなくなってきた。それを「ストレンジ量子数」という(この名前が、当時の素粒子物理の混乱を物語っているようである)。ストレンジ量子数を用いて、バリオンやメソンを分類すると、代表的なものは次のようになる:



こんな状態では、これまで「素粒子」だと思っていた陽子や中性子が、素粒子だと思えなくなってしまう。これらバリオンやメソンは基本的ではないのではないかと M. Gell-Mann は考え、これより基礎的な粒子「クォーク」を仮定した。へんてこなことにクォークは整数の電荷を持たず、分数である。しかも「カラー」という量子数を持つ。

一方坂田昌一は、「陽子と中性子とラムダ粒子 (Λ^0) が基本粒子で、他の粒子はこれら 3 つの複合状態、もしくは重ね合わせである」というアイデアを提唱した。これを「坂田模型」という。

クォーク模型と坂田模型のどちらが自然界を記述する良い模型なのかが追究された。現在では、クォーク模型が確立している。やはり陽子などバリオンやメソンは素粒子ではなく、クォークで出来ていることが分かってきた。陽子に電子を衝突させて、内部構造を調べたら、「つぶつぶ」が見えてきたからである。ただし、クォークだけではない。他にも「グルーオン」もつぶつぶとして見えている。R.P. Feynman はクォーク模型と似ているようで異なる「パートン模型」を提案した(パートンとはそのまま「parton」である。部分粒子とでも言うべきか)。

バリオンやメソンを記述するさらに基礎的な「クォーク・パートン」の理論的振る舞いを整理すると、これらも電磁気学のようなゲージ理論で記述できるということが、1970 年代ご

ろによろやく確立する。その先駆的な提唱者は南部陽一郎である。この強い力は湯川の核力から始まり、現在は「 $SU(3)$ ゲージ理論による量子色力学 (QCD)」として確立している。

ここの話の詳細もこのレジюмеでは割愛する。参考文献 [51] [52] や、他に啓蒙書 [53] [54] を眺めてみることを勧める。

参考文献

- [51] 原康夫, 稲見武夫, 青木健一郎 著, 「素粒子物理学」(朝倉書店).
- [52] W.N. コッティンガム, D.A. グリーンウッド (樺沢宇紀 訳), 「素粒子標準模型入門」(丸善出版).
- [53] 南部陽一郎 著, 「クォーク 第2版」(講談社ブルーバックス).
- [54] 大栗博司 著, 「強い力と弱い力」(幻冬舎新書).

7 対称性の自発的破れ

対称性を用いて理論が許す相互作用を制限してきた。
 しかし、対称性が強すぎて、世の中はこれまたつまらないものになってしまう。
 実際には、この世界は対称性が見えていない場合が多い。
 南部陽一郎は、磁性体の振る舞いをヒントに、場の理論に対称性の破れを導入。
 ゼロ質量の粒子が登場したり、ゼロ質量だったゲージ場が質量を持ったりする！
 この概念は現在の素粒子物理では頻繁に用いられる重要なものである。

7.1 大域的対称性の自発的破れ

もっとも簡単な模型 (Goldstone 模型) を考えよう。複素スカラー場 $\phi(x)$ の理論は次の様に記述できたことを思い出す：

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \kappa m^2 \phi^* \phi - \mathcal{V}(\phi, \phi^*). \quad (7.1)$$

ここでちょっと細工しておいた。 κ は実数定数である。この Lagrangian 密度が大域的対称性 $\phi \rightarrow e^{i\theta} \phi$ の下で不変であるとするれば、相互作用項 $\mathcal{V}(\phi, \phi^*)$ は例えば次の場合を考えてよい：

$$\mathcal{V}(\phi, \phi^*) = \frac{\lambda}{2} (\phi^* \phi)^2, \quad \lambda > 0. \quad (7.2)$$

$\lambda = 0$ の時は相互作用がない場合であり、複素スカラー場 $\phi(x)$ の運動方程式は Klein-Gordon 方程式になる。 $\lambda \neq 0$ は、それから摂動が加わったものと解釈できる。ここでもし $\lambda < 0$ とすると、この Lagrangian 密度から得られる Hamiltonian 密度の固有値 (つまりエネルギー密度) がいくらでも負に大きくなってしまふ。これは $\lambda < 0$ の理論は不安定であることを意味する。従って、通常は上記の様に $\lambda \geq 0$ と設定する。

場の理論は、質量項と相互作用項を合わせたポテンシャルの極小値をまず探しだし、その点を「真空」と定める。量子論的な場は、その真空上の値 (真空期待値) からの揺らぎとして扱われる。前節までの様々な理論における場は、実は全て「ポテンシャルの原点」が極小値であり、その時の真空期待値は全部ゼロであった。ファインマンダイアグラムなどで登場する場の伝搬や相互作用の様子は、全てこの「真空期待値からの揺らぎ」である。

実は、真空期待値は、一般にゼロとは限らない。ゼロでなかったら、一体何が起こるのか、次で調べてみよう。

さて、ここでちょっと細工した κ について考えよう。 κ の大きさは m^2 の再定義で吸収されてしまうので、実質的には次の3通りだけが考えられる：

$$\kappa = 1, \quad \kappa = 0, \quad \kappa = -1. \quad (7.3)$$

$\kappa = 1$ の場合は、通常のように「質量が $\sqrt{m^2}$ の複素スカラー場」である¹⁰。 $\kappa = 0$ の時はゼロ質量複素スカラー場である。 $\kappa = -1$ の時は、他の場合と全く様子が異なってくる。

様子の変遷を見るために、質量項と相互作用項をまとめてポテンシャルと呼ぼう。そしてポテンシャルの形状を眺めよう：

$$V(\phi, \phi^*) = \kappa m^2 \phi^* \phi + \frac{\lambda}{2} (\phi^* \phi)^2. \quad (7.4)$$

$\kappa = 1, 0$ の場合の $V(\phi, \phi^*)$ の形状は次のようになる：

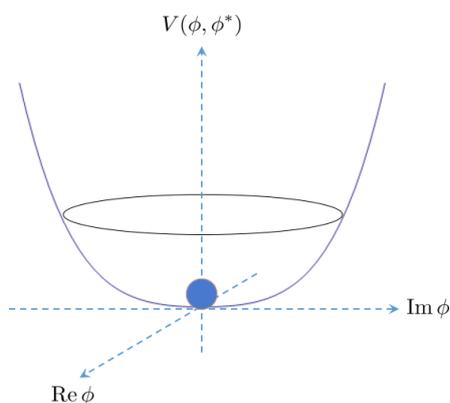


図 7.1 :

$\kappa = 1, 0$ の場合の V の形状と真空 (青丸)

青丸は理論が持つ最小エネルギーの点。つまり真空を表す。

$\kappa = -1$ の場合の $V(\phi, \phi^*)$ の形状は次のようになる：

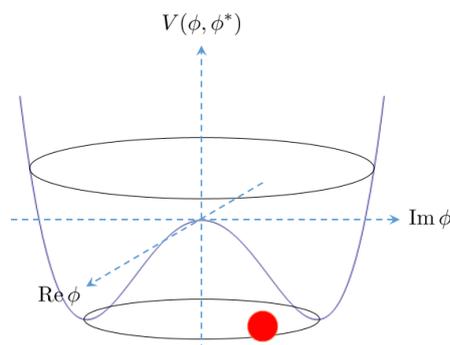


図 7.2 :

$\kappa = -1$ の場合の V の形状と真空 (赤丸)

赤丸は理論が持つ最小エネルギーの点。つまり真空を表す。この時の赤丸 (真空) は、ポテンシャルの底の円周上であればどこにあっても同等である。

¹⁰ $\lambda = 0$ で運動方程式を見ると $0 = (-\square - \kappa m^2)\phi$ である。運動量表示にすると、これを満たす場は $p^2 = \kappa m^2$ である。 $m \neq 0$ の場合は静止系が存在して、静止エネルギーは $E = \sqrt{\kappa m^2}$ となる。

もう少し定量的に解析してみよう。 $\kappa = 1, 0$ の場合と $\kappa = -1$ の場合でポテンシャル $V(\phi, \phi^*)$ の極小値を求める。 $\phi = |\phi|e^{i\theta}$ と表記すると、 $V(\phi, \phi^*)$ は位相 θ に依存していないので、 $|\phi|$ を用いて極値を考察すれば良い:

$$V(\phi, \phi^*) = \kappa m^2 \phi^* \phi + \frac{\lambda}{2} (\phi^* \phi)^2 = \kappa m^2 |\phi|^2 + \frac{\lambda}{2} |\phi|^4, \quad (7.5)$$

$$0 = \frac{\partial V(\phi, \phi^*)}{\partial |\phi|} = 2|\phi| (\lambda |\phi|^2 + \kappa m^2). \quad (7.6)$$

$|\phi| \geq 0, \lambda \geq 0, m^2 \geq 0$ なので、 $\kappa = 1, 0$ の場合は

$$|\phi| = 0, \quad (7.7)$$

のときだけが極値を持つ。そして $V(\phi, \phi^*)$ は下に凸なので、 $|\phi| = 0$ のとき、つまり $\phi = 0$ の時に最小となり、 $V = 0$ となっている。一方で $\kappa = -1$ の時、 $|\phi| = 0$ 以外にも

$$|\phi| = \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}, \quad (7.8)$$

でも極値を持つ。そしてこの値の時は、 $|\phi| = 0$ のときよりも V の値が低い:

$$|\phi| = 0, \quad V = 0, \quad (7.9)$$

$$|\phi| = \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}, \quad V = -\frac{m^4}{2\lambda} \leq 0. \quad (7.10)$$

すなわち、 $\kappa = -1$ の時の真空は、 $|\phi| = \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}$ の時に実現されている。

さて、 κ の値によって真空が異なることをみた。次は対称性がどうなっているのかを見てみよう。ここでいう対称性は、複素スカラー場 ϕ の位相についての大域的変換に対する対称性である:

$$\phi(x) = |\phi(x)| e^{i\theta(x)}, \quad \theta(x) \rightarrow \theta'(x) = \theta(x) + \alpha. \quad (7.11)$$

この位相変換対称性は、上記の図では縦軸の回りでの回転対称性に相当する。 $\kappa = 1, 0$ の場合の真空は図の青丸 ($|\phi| = 0$) だった。その点における軸回転は対称であり、回転させても回転させる前と変化はない。しかし、 $\kappa = -1$ の場合は違う。この場合の真空は赤丸である。赤丸は原点からずれたところに位置している。この赤丸について、縦軸に沿って回転を施すと、図が変化してしまう。つまりこの赤丸上で実現される真空は、回転対称性を持っていない!

別の言い方も出来る。 $\kappa = -1$ の理論において、複素スカラー場 $\phi(x)$ が原点 $\phi = 0$ 上にあるとき、揺らぎの方向はポテンシャルに沿って坂を転げ落ちる方向のみ。そのため、場の揺らぎは必ず不安定である。そしていつかは坂を転がり落ちる。転がり落ちると安定になる

が、「どちらの方向に転がるか」は、転がってみないとわからない。転がる前は回転対称性は存在したが、転がった瞬間「特定の方向に」向かって転がってしまう。この特定の方向は、自発的に (勝手に) 選ばれる。

これを「対称性が破れた」という。さらに正確に言えば、Lagrangian 密度自身には、 κ の値が何であろうとも対称性があつたにも関わらずその理論の真空には対称性がない。このような場合には、「**対称性が自発的に破れた**」と言う。

図 7.2 の様な真空上ではどのような物理が実現できるだろうか? そのためには複素スカラー場 $\phi(x)$ のこの真空の上での様子を調べれば良い。図 7.2 での真空 (赤丸) は、ポテンシャルの底のある一点で定まっているが、実は底であればどこでも良い。そのため真空を

$$\text{Re } \phi = \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}, \quad \text{Im } \phi = 0, \quad (7.12)$$

の点に選んだとしよう。この真空での複素スカラー場 $\phi(x)$ の「真空期待値」 $\langle \phi(x) \rangle$ は

$$\langle \phi(x) \rangle \equiv \langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle = \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{2}}v, \quad (7.13)$$

である ($|\Omega\rangle$ はポテンシャルの底における真空状態)¹¹。そしてこの真空での複素スカラー場 $\phi(x)$ を、次の様書き直す:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[v + \psi(x) + i\chi(x) \right]. \quad (7.14)$$

ここで $\psi(x)$ と $\chi(x)$ は「実スカラー場」である。これを $\kappa = -1$ での Lagrangian 密度に代入すると、理論が次の様書き換えられる:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + m^2 \phi^* \phi - \frac{\lambda}{2} (\phi^* \phi)^2 \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \psi)^2 - \frac{1}{2} (2m^2) \psi^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 \\ &\quad - \sqrt{\frac{m^2 \lambda}{2}} \psi (\psi^2 + \chi^2) - \frac{\lambda}{8} (\psi^2 + \chi^2)^2 - V(v), \end{aligned} \quad (7.15)$$

$$V(v) = -\frac{1}{2} m^2 v^2 + \frac{\lambda}{8} (v^2)^2 = -\frac{m^4}{2\lambda}. \quad (7.16)$$

この形から読み取れるのは、「 $\psi(x)$ は質量 $\sqrt{2m^2}$ を獲得」する一方、「 $\chi(x)$ は**ゼロ質量**」となることである。 $\psi(x)$ は図 7.2 のポテンシャルの壁を登ろうとする場であり、 $\chi(x)$ はポテンシャルの底に沿って動こうとする場である。(大域的) 対称性が自発的に破れた場合には、ポテンシャルの底に沿って動こうとするゼロ質量の場が**必ず**発現する! このゼロ質量場を「南部-Goldstone 場」と言う。

¹¹ ついでに言えば、図 7.1 の青丸上での場の真空期待値は、ポテンシャルの底では $|\phi| = 0$ であるため、 $\langle \phi(x) \rangle = 0$ となる。

7.2 Higgs 機構

大域的対称性の自発的破れでは、ゼロ質量の粒子が必ず登場した。この粒子はポテンシャルの底に沿って運動する粒子であり、ポテンシャルの壁を感じない。そのためにゼロ質量であることが納得できる。

局所的対称性についての場合を考えてみよう。今度はまた違った物理が見えてくる。

ここでも、複素スカラー場 $\phi(x)$ を用意する。この位相変換が局所の変換である場合、ゲージ場 $A_\mu(x)$ を導入すれば、理論が変換の下で不変であることを勉強した。局所の変換で不変な Lagrangian 密度は次のようになる:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - \kappa m^2\phi^*\phi - \mathcal{V}(\phi, \phi^*), \quad (7.17)$$

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi, \quad (7.18)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (7.19)$$

$$\mathcal{V}(\phi, \phi^*) = \frac{\lambda}{2}(\phi^*\phi)^2. \quad (7.20)$$

ここでも複素スカラー場 $\phi(x)$ の質量項の前に定数 κ を挿入しておいた。また、相互作用項 $\mathcal{V}(\phi, \phi^*)$ もゲージ不変なまま導入できるので追加しておいた。局所の変換 (ゲージ変換) ではそれぞれの場は次の様に変換される:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{ie\theta(x)}\phi(x), \quad (7.21)$$

$$D_\mu\phi(x) \rightarrow (D_\mu\phi(x))' = e^{ie\theta(x)}D_\mu\phi(x), \quad (7.22)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\theta(x), \quad (7.23)$$

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow F'_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}(x). \quad (7.24)$$

さて、複素スカラー場の質量項と相互作用項を合わせたものをポテンシャル

$$V(\phi, \phi^*) = \kappa m^2\phi^*\phi + \frac{\lambda}{2}(\phi^*\phi)^2, \quad (7.25)$$

と呼ぼう。この形状は、 ($\kappa = 1, 0$) や  ($\kappa = -1$) と同じである。

ここでも $\kappa = -1$ の場合を詳細に考える。複素スカラー場がポテンシャルの底に落ちたとき、再び対称性が破れてしまう。ここで真空を $(\text{Re}\phi, \text{Im}\phi) = (\frac{v}{\sqrt{2}}, 0)$ の場所を選ぼう。複素スカラー場の真空期待値 $\langle\phi(x)\rangle$ は次のようになる:

$$\langle\phi(x)\rangle \equiv \langle\Omega|\phi(x)|\Omega\rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}. \quad (7.26)$$

この真空の上での複素スカラー場を、次の様に書いてみよう (技術的な理由により、大域的対称性の場合と少し変える) :

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \rho(x)) e^{i\pi(x)/v}. \quad (7.27)$$

ここで $\rho(x)$, $\pi(x)$ は実スカラー場である。これを Lagrangian 密度に代入して、 $\rho(x)$ と $\pi(x)$ の理論に書き換えよう :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) + m^2\phi^*\phi - \mathcal{V}(\phi, \phi^*) \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}M^2\left(1 + \frac{e}{M}\rho\right)^2\left(A_\mu - \frac{1}{M}\partial_\mu\pi\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)^2 - \frac{1}{2}(2m^2)\rho^2 - \sqrt{\frac{m^2\lambda}{2}}\rho^3 - \frac{\lambda}{8}\rho^4 - V(v), \end{aligned} \quad (7.28)$$

$$M = ev = \sqrt{\frac{2m^2e^2}{\lambda}}, \quad (7.29)$$

$$V(v) = -\frac{1}{2}m^2v^2 + \frac{\lambda}{8}(v^2)^2 = -\frac{m^4}{2\lambda}. \quad (7.30)$$

(板書では $V(v)$ 右辺の赤文字部分を書き損じていました。すみません。) この形状は、大域的対称性の自発的破れの場合とは少し異なっている。この実スカラー場 $\pi(x)$ は元々の複素スカラー場 $\phi(x)$ の位相方向の場である。これはポテンシャルの底に沿って運動する場そのものであり、大域的対称性の自発的破れで用いた実スカラー場 $\chi(x)$ と同じ役割を果たす。そのため、 $\pi(x)$ もゼロ質量場、すなわち南部-Goldstone 場として Lagrangian 密度に登場する。しかしこの $\pi(x)$ は単独で登場するというよりは、常にゲージ場と $A_\mu - \frac{1}{M}\partial_\mu\pi$ という組み合わせで登場する。そこでこの組み合わせを新たに

$$U_\mu(x) = A_\mu - \frac{1}{M}\partial_\mu\pi, \quad (7.31)$$

として表記しなおしてみると、状況がよく分かる。まず、ゲージ場の運動項は

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu(U_\nu + \frac{1}{M}\partial_\nu\pi) - \partial_\nu(U_\mu + \frac{1}{M}\partial_\mu\pi) = \partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu, \quad (7.32)$$

となっている。つまり A_μ の運動項と U_μ の運動項は全く同じである。Lagrangian 密度は

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu)^2 + \frac{1}{2}M^2\left(1 + \frac{e}{M}\rho\right)^2 U_\mu U^\mu \\ &\quad + \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)^2 - \frac{1}{2}(2m^2)\rho^2 - \sqrt{\frac{m^2\lambda}{2}}\rho^3 - \frac{\lambda}{8}\rho^4 - V(v), \end{aligned} \quad (7.33)$$

$$\text{ただし } (\partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu)^2 \equiv (\partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu)(\partial^\mu U^\nu - \partial^\nu U^\mu),$$

となる。これは、「質量 $\sqrt{2m^2}$ の実スカラー場 $\rho(x)$ 」と「質量 M の実ベクトル場 $U_\mu(x)$ 」が互いに相互作用する理論になっている。この理論には局所変換対称性 (ゲージ対称性) はもはや存在していない! そしてゼロ質量だったベクトルゲージ場 $A_\mu(x)$ が、南部-Goldstone 場を「吸い込んで」、質量を持つベクトル場 $U_\mu(x)$ に変身している!

この考察で分かったことは、対称性が自発的に破れると、ゲージ場が必ず有質量ベクトル場に変化することである。このような変化を引き起こすメカニズムを「Higgs 機構」と呼び、この状態を引き起こした $\phi(x)$ を「Higgs 場」と呼ぶ。 $\kappa = -1$ の時の最初の Lagrangian 密度で記述される模型を「 $U(1)$ Higgs 模型」とでも呼んでおこう。

この現象は、 $U(1)$ ゲージ理論 (量子電磁力学) には用いられないが、弱い力をきちんと説明するときに驚異的な威力を発揮した。具体的には S. Weinberg と A. Salam による「電弱統一理論」で用いられた。

Higgs 機構の主な物理現象は、「ゲージ対称性からゼロ質量でならないベクトルゲージ場」という理論的要請と、「現実には光子以外のゼロ質量ベクトル場が観測されていない」という実験事実をうまくつなげる役割を果たした。同時にこの Higgs 場と結合する場は質量を持つという現象も得られたが、これははっきり言えば「おまけ」みたいなもの。

模型のまとめ

- Goldstone 模型 (大域的な $U(1)$ 位相変換の自発的破れについての模型) :

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) + m^2 \phi^* \phi - \frac{\lambda}{2} (\phi^* \phi)^2, \quad \lambda > 0. \quad (7.34)$$

真空上では、ゼロ質量の場が必ず登場する。

- $U(1)$ Higgs 模型 (局所的な $U(1)$ ゲージ理論についての自発的対称性の破れの模型) :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) + m^2 \phi^* \phi - \frac{\lambda}{2} (\phi^* \phi)^2, \quad \lambda > 0, \quad (7.35)$$

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - ie A_\mu \phi, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (7.36)$$

真空上ではゼロ質量の場が登場するが、それはゲージ場に「食べられ」てしまう。これにより、ゼロ質量ベクトルゲージ場は、有質量ベクトル場になる。

8 ヤン-ミルズ理論入門

一般的な $SU(N)$ 群でゲージ理論を構築する。
 ゲージ場は全部ゼロ質量。これは困る (観測できるゼロ質量粒子は光子のみ)。
 $U(1)$ 群のゲージ理論は「電磁気力」を記述していた。
 $SU(2)$ 群のゲージ理論は「弱い力」を記述する (正確には少し違うが)。
 $SU(3)$ 群のゲージ理論は「強い力」を記述する。

8.1 $SU(2)$ ゲージ理論

複素場がふたつ $\phi_1(x), \phi_2(x)$ ある理論を考えよう。これを縦ベクトルのように並べて次の様に記述する:

$$\vec{\phi}(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{\phi}^\dagger(x) = (\phi_1^\dagger(x), \phi_2^\dagger(x)), \quad (8.1)$$

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \vec{\phi})^\dagger (\partial^\mu \vec{\phi}) - m^2 \vec{\phi}^\dagger \vec{\phi}. \quad (8.2)$$

但し $\vec{\phi}^\dagger$ は $\vec{\phi}$ のエルミート共役の意味。

ここで、複素場 ϕ_1, ϕ_2 それぞれの位相変換を考えても良いが、 ϕ_1 と ϕ_2 を混ぜる一次変換まで、変換を拡大して考えてみよう:

$$\vec{\phi} \rightarrow \vec{\phi}' = U \vec{\phi}, \quad \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (8.3)$$

$$\vec{\phi}^\dagger \rightarrow (\vec{\phi}')^\dagger = \vec{\phi}^\dagger U^\dagger, \quad U^\dagger U = 1, \quad \det U = 1. \quad (8.4)$$

U は 2×2 の複素行列。この行列は、 $U^\dagger = U^{-1}$ であるためにユニタリー行列であり、Pauli 行列を基底として一般に次の様に記述できる:

$$(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \left(\frac{1}{2}\sigma_1, \frac{1}{2}\sigma_2, \frac{1}{2}\sigma_3 \right), \quad (8.5)$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (8.6)$$

$$U = \exp[ig(\alpha_1\tau_1 + \alpha_2\tau_2 + \alpha_3\tau_3)] \equiv \exp[ig\alpha_i\tau_i]. \quad (8.7)$$

ここで α_i は任意の実数 ($i = 1, 2, 3$)。 g は結合定数と呼ばれるもの。

$$[\tau_i, \tau_j] = i\varepsilon_{ijk}\tau_k, \quad i = 1, 2, 3, \quad (8.8a)$$

$$1 = \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{132} = -\varepsilon_{213} = -\varepsilon_{321}. \quad (8.8b)$$

ε_{ijk} は添字について完全反対称な実数であり、「構造定数」と呼ばれる。

任意の実数 α_i が座標依存する局所変換 ($\alpha_i(x)$) の時、Lagrangian 密度の運動項はやはり不変ではなくなってしまうので、微分を次の様に「共変微分」に書き換える:

$$\partial_\mu \vec{\phi} \rightarrow D_\mu \vec{\phi} = \partial_\mu \vec{\phi} - ig(A_\mu^i \tau_i) \vec{\phi}, \quad (8.9)$$

$$(\partial_\mu \vec{\phi})^\dagger \rightarrow (D_\mu \vec{\phi})^\dagger = (\partial_\mu \vec{\phi})^\dagger + ig\vec{\phi}^\dagger (A_\mu^i \tau_i)^\dagger. \quad (8.10)$$

A_μ^i は新しく導入された実ベクトルゲージ場である ($i = 1, 2, 3$)。 τ_i は自己エルミートであるため、 $(A_\mu^i \tau_i)^\dagger = A_\mu^i \tau_i$ である。

ゲージ場 A_μ^i の局所変換は電磁場のそれとは大きく異なるが、作り方は同じ。 $D_\mu \vec{\phi}$ が $\vec{\phi}$ と同じ局所変換をすると要請して、 A_μ^i の変換ルールを求める:

$$\vec{\phi} \rightarrow \vec{\phi}' = U \vec{\phi}, \quad D_\mu \vec{\phi} \rightarrow (D_\mu \vec{\phi})' = U D_\mu \vec{\phi}, \quad (8.11)$$

$$\therefore A_\mu^i \tau_i \rightarrow (A_\mu^i)' \tau_i = U (A_\mu^i \tau_i) U^{-1} - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^{-1}. \quad (8.12)$$

第 2 項は $(\partial_\mu U) U^{-1} = -U \partial_\mu U^{-1}$ を用いた表記も時々見かける。

もう少し具体的に表現しよう。そのために無限小変換 (α_i が非常に小さい) で考えよう:

$$U = \exp[ig\alpha_i \tau_i] = 1 + ig\alpha_i \tau_i + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (8.13)$$

これにより、次の様になる:

$$\begin{aligned} U(A_\mu^i \tau_i) U^{-1} &= [1 + ig\alpha_j \tau_j] (A_\mu^i \tau_i) [1 - ig\alpha_k \tau_k] \\ &= A_\mu^i \tau_i + ig\alpha_j A_\mu^i (\tau_j \tau_i - \tau_i \tau_j) + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &= A_\mu^i \tau_i + g \varepsilon_{ijk} A_\mu^i \alpha_j \tau_k + \mathcal{O}(\alpha^2), \end{aligned} \quad (8.14)$$

$$\begin{aligned} -\frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^{-1} &= -\frac{i}{g} \partial_\mu (1 + ig\alpha_j \tau_j) (1 - ig\alpha_k \tau_k) \\ &= (\partial_\mu \alpha_j) \tau_j (1 - ig\alpha_k \tau_k) \\ &= (\partial_\mu \alpha_i) \tau_i + \mathcal{O}(\alpha^2), \end{aligned} \quad (8.15)$$

$$\begin{aligned} \therefore (A_\mu^i)' \tau_i &= A_\mu^i \tau_i + (\partial_\mu \alpha_i) \tau_i + g \varepsilon_{ijk} A_\mu^i \alpha_j \tau_k + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &= A_\mu^i \tau_i + (D_\mu \alpha)_i \tau_i + \mathcal{O}(\alpha^2), \end{aligned} \quad (8.16)$$

$$(D_\mu \alpha)_i \equiv \partial_\mu \alpha_i + g \varepsilon_{ijk} A_\mu^j \alpha_k. \quad (8.17)$$

最後に、ゲージ場 A_μ^i の運動項を追加する。電磁場での $F_{\mu\nu}$ の作り方を真似る:

$$[D_\mu, D_\nu]\vec{\phi} \equiv -ig(F_{\mu\nu}^i \tau_i)\vec{\phi}, \quad (8.18)$$

$$\therefore F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g \varepsilon_{ijk} A_\mu^j A_\nu^k. \quad (8.19)$$

これを「場の強さ」という。これはゲージ共変である:

$$F_{\mu\nu}^i \tau_i \rightarrow (F_{\mu\nu}^i)' \tau_i = U(F_{\mu\nu}^i \tau_i)U^{-1}. \quad (8.20)$$

これを用いて運動項を定義する:

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu}. \quad (8.21)$$

これはゲージ不変になっている。そしてゲージ対称性を保つために、 A_μ^i の質量項 $-\frac{1}{2}m^2 A_\mu^i A^{i\mu}$ はゼロ。

まとめて、 $\vec{\phi}$ と A_μ^i のゲージ不変な Lagrangian 密度は次の様になる:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SU(2)} &= \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_g \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} + (D_\mu \vec{\phi})^\dagger (D^\mu \vec{\phi}) - m^2 \vec{\phi}^\dagger \vec{\phi}. \end{aligned} \quad (8.22)$$

これを $SU(2)$ 群のゲージ理論、もしくは短く $SU(2)$ ゲージ理論と言う。特に $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ の部分を「 $SU(2)$ ヤン-ミルズ理論」とも言う。

$SU(2)$ ゲージ理論は、 $U(1)$ ゲージ理論 (電磁気学) と比べて決定的に異なる部分がある。それは、ゲージ場 A_μ^i が複素場と結合するだけでなく、ゲージ場自身とも結合することである。Lagrangian 密度から、相互作用の様子を見ることができる。その様子をファインマンダイアグラムで表現しておこう¹² :

$$\begin{aligned}
 \phi_i \longrightarrow \phi_i^* &\sim (\partial_\mu \phi_i)^* (\partial^\mu \phi_i) - m^2 \phi_i^* \phi_i \\
 A_\mu^i \text{ wavy} A_\nu^i &\sim -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i)^2 \\
 \begin{array}{l} \phi_i^* \\ \nearrow \\ g \\ \phi_j \\ \searrow \end{array} A_\mu^k &\sim g (\tau_k)_{ij} A_\mu^k \partial^\mu \phi_i^* \phi_j \\
 \begin{array}{l} \phi_l^* \\ \nearrow \\ g^2 \\ \phi_k \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} A_\mu^i \\ A_\nu^j \end{array} &\sim (g A_\mu^i \tau_i \vec{\phi}^\dagger) (g A_\nu^j \tau_j \vec{\phi}) \\
 A_\mu^i \text{ wavy} A_\nu^k &\sim g \varepsilon_{ijk} \partial^\mu A^{k\nu} (A_\mu^i A_\nu^j) \\
 \begin{array}{l} A_\mu^i \\ \searrow \\ g^2 \\ A_\nu^j \end{array} \begin{array}{l} A^{m\nu} \\ A^{l\mu} \end{array} &\sim (g \varepsilon_{ijk} A_\mu^i A_\nu^j) (g \varepsilon_{lmk} A^{l\mu} A^{m\nu})
 \end{aligned}$$

¹²複素場 $\vec{\phi}(x)$ の代わりにスピノール場を用いる場合、 $AA\phi^*\phi$ に相当する 4 つめのファインマンダイアグラムは存在しない。

8.2 $SU(N)$ ゲージ理論

$SU(2)$ ゲージ理論が構築できたら、 $SU(N)$ ゲージ理論への拡張は容易である。

N 個の複素場 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ を次の様に並べて Lagrangian 密度を作る:

$$\vec{\phi}(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_N(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{\phi}^\dagger(x) = \left(\phi_1^\dagger(x), \phi_2^\dagger(x), \dots, \phi_N^\dagger(x) \right), \quad (8.23)$$

$$\mathcal{L}_g = (D_\mu \vec{\phi})^\dagger (D^\mu \vec{\phi}) - m^2 \vec{\phi}^\dagger \vec{\phi}, \quad (8.24)$$

$$D_\mu \vec{\phi} = \partial_\mu \vec{\phi} - ig(A_\mu^i T_i) \vec{\phi}, \quad [T_i, T_j] = if_{ijk} T_k. \quad (8.25)$$

既にあらかじめゲージ化しておいた。ここで T^i は $N \times N$ のエルミート行列。 f_{ijk} は添字について完全反対称な実数であり、「構造定数」と呼ばれる。

$\vec{\phi}$ と $D_\mu \vec{\phi}$ は同じ局所変換に従う:

$$\vec{\phi} \rightarrow \vec{\phi}' = U \vec{\phi}, \quad \vec{\phi}^\dagger \rightarrow (\vec{\phi}')^\dagger = \vec{\phi}^\dagger U^\dagger, \quad (8.26)$$

$$D_\mu \vec{\phi} \rightarrow (D_\mu \vec{\phi})' = U D_\mu \vec{\phi}, \quad (D_\mu \vec{\phi})^\dagger \rightarrow ((D_\mu \vec{\phi})')^\dagger = (D_\mu \vec{\phi})^\dagger U^\dagger, \quad (8.27)$$

$$U^\dagger U = 1, \quad U^\dagger = U^{-1}, \quad \det U = 1, \quad (8.28)$$

$$A_\mu^i T_i \rightarrow (A_\mu^i)' T_i = U(A_\mu^i T_i) U^{-1} - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^{-1}. \quad (8.29)$$

ここで U は $N \times N$ のユニタリー行列であり、 T^i を用いて次の様に記述する:

$$U = \exp[ig \alpha_i T_i], \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (8.30)$$

g は結合定数。 α_i は局所変換を表す実数パラメータ。この変換パラメータが非常に小さい時の、無限小局所変換を考えて、ゲージ場のより具体的な変換則を記述する:

$$(A_\mu^i)' T_i = A_\mu^i T_i + (D_\mu \alpha)_i T_i + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (8.31)$$

$$(D_\mu \alpha)_i = \partial_\mu \alpha_i + g f_{ijk} A_\mu^j \alpha_k. \quad (8.32)$$

ゲージ場の場の強さを、共変微分で定義する:

$$[D_\mu, D_\nu] \vec{\phi} \equiv -ig(F_{\mu\nu}^i T_i) \vec{\phi}, \quad (8.33)$$

$$\therefore F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g f_{ijk} A_\mu^j A_\nu^k. \quad (8.34)$$

これもゲージ共変である:

$$F_{\mu\nu}^i T_i \rightarrow (F_{\mu\nu}^i)' T_i = U(F_{\mu\nu}^i T_i) U^{-1}. \quad (8.35)$$

ゲージ場の運動項はこの場の強さを用いて定義される:

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu}. \quad (8.36)$$

これはゲージ不変である。そしてゲージ対称性を保つために、 A_μ^i の質量項 $-\frac{1}{2}m^2 A_\mu^i A^{i\mu}$ はゼロ。

以上をまとめて、 $SU(N)$ ゲージ理論の Lagrangian 密度が得られる:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SU(N)} &= \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_g \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} + (D_\mu \vec{\phi})^\dagger (D^\mu \vec{\phi}) - m^2 \vec{\phi}^\dagger \vec{\phi}. \end{aligned} \quad (8.37)$$

特に $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ の部分を「 $SU(N)$ ヤン-ミルズ理論」とも言う。

9 素粒子標準模型について

世の中にはゼロ質量のゲージ場は電磁場しかないので、
 弱い力を記述するゲージ場がゼロ質量では困る！重いゲージ場が存在して欲しい。
 しかし素朴に質量を与えると、ゲージ対称性が理論に導入できない。
 →「対称性とその自発的破れ」という概念によって矛盾を克服！

9.1 ゲージ場と Higgs 場

S. Weinberg はレプトン (ニュートリノや電子) についてのゲージ理論を構築した。その際、実は弱い力 ($SU(2)$ 局所的対称性) と電磁気力 ($U(1)$ 局所的対称性) が「どうしても統一的に記述」せざるを得ない、ということに気づいた。一方で強い力 ($SU(3)$ 局所的対称性) は他とは統一されず、そのまま与えられる。

まずは、統一されてしまう $SU(2)_W$ 局所的対称性と $U(1)_Y$ 局所的対称性を担うそれぞれのゲージ場

$$SU(2)_W: \quad \vec{A}_\mu = (A_\mu^1, A_\mu^2, A_\mu^3), \quad (9.1)$$

$$U(1)_Y: \quad B_\mu, \quad (9.2)$$

を導入して、これらの Lagrangian を記述しよう:

$$\mathcal{L}_{\text{gauge2,1}} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu + g \vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu)^2 - \frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2. \quad (9.3)$$

ここで $\vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu$ は、 $\vec{A}_\mu = (A_\mu^1, A_\mu^2, A_\mu^3)$ と $\vec{A}_\nu = (A_\nu^1, A_\nu^2, A_\nu^3)$ の外積 (ベクトル積) である。 $U(1)_Y$ というのは、電磁気力を与える $U(1)_{\text{EM}}$ とは少し異なっている。

同様に、 $SU(3)_C$ 局所対称性を担うゲージ場の Lagrangian を記述しよう:

$$SU(3)_C: \quad \vec{G}_\mu = (G_\mu^1, G_\mu^2, G_\mu^3, G_\mu^4, G_\mu^5, G_\mu^6, G_\mu^7, G_\mu^8), \quad (9.4)$$

$$\mathcal{L}_{\text{gauge3}} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu \vec{G}_\nu - \partial_\nu \vec{G}_\mu + g_c \vec{G}_\mu \times \vec{G}_\nu)^2. \quad (9.5)$$

さて、Higgs 場 Φ を導入して $SU(2)_W$ のゲージ場に質量を与える (Higgs 機構)。この Higgs 場は 2 成分 (ϕ_1, ϕ_2) 持っていて、

$$\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (9.6)$$

となるように設定する。そんな Higgs 場の Lagrangian は次のとおり:

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) + m^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{\lambda}{2} (\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad (9.7)$$

$$D_\mu \Phi = \left(\partial_\mu - \frac{i}{2} g' B_\mu - \frac{i}{2} g \vec{\tau} \cdot \vec{A}_\mu \right) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (9.8)$$

$$\vec{\tau} = (\tau^1, \tau^2, \tau^3) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \quad (9.9)$$

Higgs 場の真空期待値 $\langle \Phi \rangle$ が

$$\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} \langle \phi_1 \rangle \\ \langle \phi_2 \rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad \frac{v}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}, \quad (9.10)$$

となるとき、ゲージ場は質量を持つことを「Higgs 機構」で学んだので、適用しよう。ゲージ場の質量は $(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi)$ の微分以外の項から登場する:

$$\begin{aligned} (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) &\sim \left(0, \frac{v}{\sqrt{2}} \right) \left[\frac{i}{2} g' B_\mu + \frac{i}{2} g \vec{\tau} \cdot \vec{A}_\mu \right] \cdot \left[-\frac{i}{2} g' B^\mu - \frac{i}{2} g \vec{\tau} \cdot \vec{A}^\mu \right] \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{g^2 v^2}{8} \{ (A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2 \} + \frac{v^2}{8} (g' B_\mu - g A_\mu^3)^2. \end{aligned} \quad (9.11)$$

さて、次の様に表示を変えよう:

$$W_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 - i A_\mu^2), \quad W_\mu^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 + i A_\mu^2), \quad (9.12)$$

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g A_\mu^3 - g' B_\mu \\ g' A_\mu^3 + g B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}, \quad (9.13)$$

$$\cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (9.14)$$

この「角度 θ_W 」は Weinberg 角と呼ばれる。これを用いれば次のようになる:

$$\frac{g^2 v^2}{8} \{ (A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2 \} + \frac{v^2}{8} (g' B_\mu - g A_\mu^3)^2 = M_W^2 W_\mu^\dagger W^\mu + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu + 0 \cdot A_\mu A^\mu, \quad (9.15)$$

$$M_W^2 = \frac{1}{4} g^2 v^2, \quad M_Z^2 = \frac{1}{4} (g^2 + g'^2) v^2 = \frac{M_W^2}{\cos^2 \theta_W}. \quad (9.16)$$

この「質量を持ったゲージ場」 W_μ と Z_μ が弱い力を担っている。一方でゲージ場 A_μ はゼロ質量であり、これが電磁気力を担う。

9.2 レプトン部分

「レプトン族」(電子とニュートリノ)の Lagrangian を記述しよう¹³。まず、弱い力に対して電子とニュートリノは同等であり、

$$L_e = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \quad L_\mu = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \quad L_\tau = \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L, \quad (9.17)$$

$$R_e = e_R, \quad R_\mu = \mu_R, \quad R_\tau = \tau_R, \quad (9.18)$$

という表記を導入する。ただしここで L_i というのは「左手系のレプトン」、 R_i は「右手系のレプトン」である。弱い力の紹介で触れた様に、「右手系のニュートリノ」は存在しないので、「右手系は電子のみ」である。

これらを用いて、レプトンの Lagrangian を具体的に記述する:

$$\mathcal{L}_{\text{lepton}}^{\text{kin}} = \sum_{j=e,\mu,\tau} \left[\bar{L}_j (i\gamma^\mu) \left(\partial_\mu + \frac{i}{2} g' B_\mu - \frac{i}{2} g \vec{\tau} \cdot \vec{A}_\mu \right) L_j + \bar{R}_j (i\gamma^\mu) (\partial_\mu + i g' B_\mu) R_j \right], \quad (9.19)$$

$$\mathcal{L}_{\text{lepton}}^{\text{mass}} = - \sum_{j=e,\mu,\tau} f_j \left[\bar{L}_j \Phi R_j + \bar{R}_j \Phi^\dagger L_j \right]. \quad (9.20)$$

添字 j は「世代」(電子、ミュー粒子、タウ粒子それぞれのペア)を表す。これらレプトンは、ゲージ場 B_μ および \vec{A}_μ (もしくは W_μ, Z_μ, A_μ) と結合し、さらに Higgs 場とも結合する。ただし、 $SU(3)_C$ のゲージ場 \vec{G}_μ とは結合していないことに注意。そして係数 f_j は「湯川結合定数」と呼ばれている。

上を見ると、レプトンの Lagrangian にも最初は質量項がない。そのためすべてのレプトンはゼロ質量である。Higgs 場 Φ が真空期待値を持ったときに、 $\mathcal{L}_{\text{lepton}}^{\text{mass}}$ から質量が登場する:

$$m_e = \frac{f_e}{v} = \frac{f_e}{2M_W}, \quad m_\mu = \frac{f_\mu}{v} = \frac{f_\mu}{2M_W}, \quad m_\tau = \frac{f_\tau}{v} = \frac{f_\tau}{2M_W}. \quad (9.21)$$

なお、ニュートリノは (S. Weinberg の提唱した模型そのものでは) ゼロ質量のままである。さらに、理論的には電子の質量と W_μ や Z_μ の質量は関係があることになる。湯川結合定数 f_e, f_μ, f_τ が実験によって測定されると、 M_W と M_Z の理論値は

$$M_W \simeq 77.4 \text{ GeV}, \quad M_Z \simeq 88.3 \text{ GeV}, \quad (9.22)$$

となる。1983 年に Rubbia らが発見した W_μ と Z_μ の質量は、実験値で

$$M_W = 80.22 \pm 0.26 \text{ GeV}, \quad M_Z = 91.17 \pm 0.02 \text{ GeV}, \quad (9.23)$$

であったので、ゲージ理論と実験が非常に良く一致している。理論値に量子補正を加えるとさらに一致が良くなる。

¹³この授業では物質場を司るスピノール場についてはほとんど学んでいないので、天下り的な記述になってしまう。

9.3 クォーク部分

クォークは陽子や中性子を構成する「現時点での基本単位」と考えられる粒子である。クォークは、電磁気力・弱い力・強い力をすべて感じる。そのため、クォークの Lagrangian はレプトンのそれより若干複雑である。

まずはクォークの表記として次を導入する:

$$L_u = \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L, \quad L_c = \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L, \quad L_t = \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L, \quad (9.24)$$

$$R_u = u_R, \quad R_c = c_R, \quad R_t = t_R, \quad (9.25)$$

$$R_d = d_R, \quad R_s = s_R, \quad R_b = b_R. \quad (9.26)$$

ここでけったいなのは、 L_u, L_c, L_t の下成分は、次の様になっていることである:

$$q'_F = \sum_{f=u,c,t} U_{Ff} q_f. \quad (9.27)$$

これは質量固有状態 q_f が「フレーバー固有状態」 q'_F とはユニタリー回転 U_{Ff} を受けた分だけずれているということである。このずれの重要性をここでじっくりやっている余裕はないが、端的に言えば、このユニタリー回転という余計な操作が、この宇宙の「CP 対称性の破れ」を与えている。この行列は

$$U = \begin{pmatrix} U_{ud} & U_{us} & U_{ub} \\ U_{cd} & U_{cs} & U_{cb} \\ U_{td} & U_{ts} & U_{tb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 c_3 & s_1 s_3 \\ -s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 e^{i\delta} \\ -s_1 s_2 & c_1 s_2 c_3 + c_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 e^{i\delta} \end{pmatrix}, \quad (9.28)$$

$$c_i = \cos \theta_i, \quad s_i = \sin \theta_i, \quad (9.29)$$

として小林誠と益川敏英によって 1973 年に提唱された (2008 年にノーベル物理学賞)。

これを用いてクォークの Lagrangian を記述する:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{quark}}^{\text{kin}} &= \sum_F \bar{L}_F (i\gamma^\mu) \left(\partial_\mu - \frac{i}{2} g_c \vec{\lambda} \cdot \vec{G}_\mu - \frac{i}{6} g' B_\mu - \frac{i}{2} g \vec{\tau} \cdot \vec{A}_\mu \right) L_F \\ &+ \sum_F \bar{R}_F (i\gamma^\mu) \left(\partial_\mu - \frac{i}{2} g_c \vec{\lambda} \cdot \vec{G}_\mu - \frac{2i}{3} g' B_\mu \right) R_F \\ &+ \sum_f \bar{R}_f (i\gamma^\mu) \left(\partial_\mu - \frac{i}{2} g_c \vec{\lambda} \cdot \vec{G}_\mu + \frac{i}{3} g' B_\mu \right) R_f, \end{aligned} \quad (9.30)$$

$$\mathcal{L}_{\text{quark}}^{\text{mass}} = - \sum_f f_f \left[\bar{L}_f \Phi R_f + \bar{R}_f \Phi^\dagger L_f \right] - \sum_F f_F \left[\bar{L}_F (i\tau^2 \Phi) R_F + \bar{R}_F (i\tau^2 \Phi)^\dagger L_F \right], \quad (9.31)$$

$$L_F = \begin{pmatrix} q_F \\ q'_F = U_{Ff} q_f \end{pmatrix}_L. \quad (9.32)$$

9.4 素粒子標準模型

さて、以上で「ゲージ場と Higgs 場」「レプトン部分」「クォーク部分」それぞれの Lagrangian を与えた。これら全体の和

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Standard Model}} = & \mathcal{L}_{\text{gauge}2,1} + \mathcal{L}_{\text{gauge}3} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} \\ & + \mathcal{L}_{\text{lepton}}^{\text{kin}} + \mathcal{L}_{\text{lepton}}^{\text{mass}} + \mathcal{L}_{\text{quark}}^{\text{kin}} + \mathcal{L}_{\text{quark}}^{\text{mass}}, \end{aligned} \quad (9.33)$$

が、2016 年現在で実験結果を極めてよく再現する理論模型であるため、「標準模型」と呼ばれている。ただし難点がある。

標準模型と呼ばれるこれは、何故こんなにも複雑なのか？

それは現在答えられない。そして素粒子物理学者は、この「複雑な標準模型」は、より基礎的でより簡潔な理論があると信じて、理論的もしくは実験的にその存在を追究している。

参考文献

- [1] 原康夫, 稲見武夫, 青木健一郎 著, 「素粒子物理学」(朝倉書店).
- [2] 高橋康, 柏太郎 著, 「量子場を学ぶための場の解析力学入門 増補第 2 版」(講談社サイエンティフィック).
- [3] 風間洋一 著, 「相対性理論入門講義」(培風館).
- [4] W.N. コッティンガム, D.A. グリーンウッド (樺沢宇紀 訳), 「素粒子標準模型入門」(丸善出版).
- [5] 南部陽一郎 著, 「クォーク 第 2 版」(講談社ブルーバックス).
- [6] 大栗博司 著, 「強い力と弱い力」(幻冬舎新書).

2016年度後期 素粒子概論 レポート問題

- 提出期限：2017年1月16日(月)の授業中。それ以後は一切受け付けない。
- 各自でA4レポート用紙を用意し、手書きでレポートを作成すること。
- 学生番号・氏名をはっきり記載すること。
- 用語はCHORUSに掲載しているレジユメを参照すること。

[1] $U(1)$ ゲージ場の Lagrangian 密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

から、 $A_\mu(x)$ についての変分原理もしくは Euler-Lagrange 方程式を用いて、物質がない場合の「ガウスの法則」と「アンペールの法則」を導け。

なお計算過程を書くこと。結果だけ記載の場合はゼロ点とする。

[2] Goldstone 模型 (下記参照) で大域的対称性の破れを議論する。複素スカラー場を

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \psi(x) + i\chi(x)],$$

で書き直した時の Lagrangian 密度 \mathcal{L} を導出し、ゼロ質量の場 (南部-Goldstone 場)が登場することを示せ。

なお計算過程を書くこと。結果だけ記載の場合はゼロ点とする。

Goldstone 模型:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^*(\partial^\mu \phi) + m^2 \phi^* \phi - \frac{\lambda}{2}(\phi^* \phi)^2, \quad \lambda > 0.$$

以上。

2016 年度秋学期 素粒子概論 (CB136) 試験問題

担当者：木村 哲士

2017 年 1 月 30 日 (月) 5 時限 [80 分間]

- [1] 現在素粒子だと考えられている粒子について知っている情報 (名称・スピン・質量 (単位付き) など) を記載せよ。

- [2] 次の $U(1)$ ゲージ理論を考える:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi - \frac{\lambda}{2}(\phi^*\phi)^2,$$

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x), \quad D_\mu\phi(x) = \partial_\mu\phi(x) - ieA_\mu(x)\phi(x).$$

複素スカラー場 $\phi(x)$ とその共変微分 $D_\mu\phi(x)$ は次のゲージ変換をする:

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow (\phi(x))' = e^{ie\theta(x)}\phi(x), \\ D_\mu\phi(x) &\rightarrow (D_\mu\phi(x))' = e^{ie\theta(x)}D_\mu\phi(x). \end{aligned}$$

以下の問いに答えよ。(計算過程を書くこと。)

- (a) ゲージ場 $A_\mu(x)$ の変換則を与えよ。
 (b) 場の強さ $F_{\mu\nu}(x)$ の変換則を与えよ。
 (c) Lagrangian 密度 \mathcal{L} がゲージ変換の下で不変であることを示せ。
- [3] 次の $U(1)$ Higgs 模型を考える:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) + m^2\phi^*\phi - \frac{\lambda}{2}(\phi^*\phi)^2, \quad \lambda > 0,$$

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x), \quad D_\mu\phi(x) = \partial_\mu\phi(x) - ieA_\mu(x)\phi(x),$$

ポテンシャル $V = \frac{\lambda}{2}(\phi^*\phi)^2 - m^2\phi^*\phi$ の最小値を与える複素スカラー場の絶対値 (真空状態 $|\Omega\rangle$ における真空期待値) を

$$\langle\phi(x)\rangle = \langle\Omega|\phi(x)|\Omega\rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad v > 0,$$

とする。

以下の問いに答えよ。(計算過程を書くこと。)

- (a) v を λ と m で表せ。
 (b) $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \rho(x))e^{i\pi(x)/v}$ を Lagrangian 密度 \mathcal{L} に代入して、ゲージ場 $A_\mu(x)$ が質量項を獲得することを示せ。

以上。

2016年度秋学期 素粒子概論 (CB136) 追試問題

担当者：木村 哲士

- [1] 物質場と相互作用していない $U(1)$ ゲージ場の Lagrangian 密度を考える:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x),$$

以下の問いに答えよ。(結果のみ記載は不可。)

- (a) $A_\mu(x)$ についての運動方程式からガウスの法則を導け。
 (b) 同様にアンペールの法則を導け。

- [2] $SU(2)_W$ ゲージ場 $\vec{A}_\mu = (A_\mu^1, A_\mu^2, A_\mu^3)^T$ 、 $U(1)_Y$ ゲージ場 B_μ と $SU(2)$ Higgs 場 $\Phi = (\phi_1, \phi_2)^T$ の理論を考える:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}}, \\ \mathcal{L}_{\text{gauge}} &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu + g\vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu)^2 - \frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2, \\ \mathcal{L}_{\text{Higgs}} &= (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) + m^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{\lambda}{2}(\Phi^\dagger \Phi)^2. \end{aligned}$$

ここで $D_\mu \Phi$ は Higgs 場に対する $SU(2)_W \times U(1)_Y$ ゲージ共変微分である ($\vec{\tau} = (\tau^1, \tau^2, \tau^3)^T$ は Pauli 行列):

$$D_\mu \Phi = \left(\partial_\mu - \frac{i}{2}g\vec{A}_\mu \cdot \vec{\tau} - \frac{i}{2}g'B_\mu \right) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}.$$

- (a) ポテンシャル $V = \frac{\lambda}{2}(\Phi^\dagger \Phi)^2 - m^2 \Phi^\dagger \Phi$ の極値を求め、真空期待値を $\langle \Phi \rangle = (0, \frac{v}{\sqrt{2}})^T$ としたとき、 v を m と λ で表せ (結果のみ記載は不可)。
 (b) 期待値 $\langle \Phi \rangle$ においてゲージ場はどのように質量を獲得するかを具体的に書き下せ (結果のみ記載は不可)。
 (c) ゲージ場 \vec{A}_μ と B_μ を次の様に組み直す:

$$\begin{aligned} W_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 - iA_\mu^2), \quad W_\mu^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 + iA_\mu^2), \\ \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} gA_\mu^3 - g'B_\mu \\ g'A_\mu^3 + gB_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

このとき、問 (b) で得られた 2 次の項を書き直し、 W_μ, Z_μ, A_μ それぞれの質量の 2 乗 M_W^2, M_Z^2, M_A^2 を v, g, g' を用いて具体的に書き下せ (結果のみ記載は不可)。同時にこれら質量の大小関係を評価せよ。

以上。