7　ハドロン物理学概観

7.1　ハドロンの種類と分類

- **ハドロン**：強い相互作用をする粒子（メソンとバリオン）の総称
  - 強い相互作用によるクォークとグルーオンの自己束縛系
  - **バリオン**（重粒子）：陽子 p、中性子 n などのフェルミオン、クォーク模型では 3 クォーク系（qqq）
  - **メソン**（中間子）：π 中間子などのボソン、クォーク模型ではクォーク・反クォーク対（$\bar{q}q$）
  - 約 300 種以上が観測されている（表 6 に例を示す）
  - **保存量子数**で種類が分類される
- ハドロンを分類する量子数
  - バリオン数 B：クォークの位相変換に対する粒子数、バリオンは $B = 1$、メソンは $B = 0$
  - スピン J：空間回転に対する変換性、バリオンは半整数 $(1/2, 3/2, \cdots)$、メソンは整数（$0, 1, 2, \ldots$）
  - 固有パリティ P：空間反転に対する変換性、$+$ または $-$
通常スピンとパリティを J^P のように表記する
  - **フレーバー**：アイソスピン I、ストレンジネス S、チャーム C、ボトム B、トップ T
クォークのフレーバーに起因する量子数
- 同じ量子数でも基底状態や励起状態が存在 $\Rightarrow$ 質量で励起状態を指定する
- 励起状態は一般に強い相互作用による崩壊に対して不安定 $\Rightarrow$ 有限の崩壊幅を持つ

表 6: ハドロンの性質の例。基底状態の質量は Particle Data Group (`http://pdg.lbl.gov`) による値を平均し 1 MeV 以下を四捨五入した。励起状態の質量、崩壊幅は Breit-Wigner Mass、Width の中心値を示した。

	B	J^P	I	S	C	アイソスピン多重項の粒子	質量 [MeV]	崩壊幅 [MeV]
N	1	$1/2^+$	1/2	0	0	p, n	939	-
Λ	1	$1/2^+$	0	-1	0	Λ	1116	-
Σ	1	$1/2^+$	1	-1	0	$\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$	1193	-
Ξ	1	$1/2^+$	1/2	-2	0	Ξ^0, Ξ^-	1318	-
$N(1440)$	1	$1/2^+$	1/2	0	0	$N^+(1440), N^0(1440)$	~ 1440	~ 350
$N(1535)$	1	$1/2^-$	1/2	0	0	$N^+(1535), N^0(1535)$	~ 1530	~ 150
$\Delta(1232)$	1	$3/2^+$	3/2	0	0	$\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-$	~ 1232	~ 117
Λ_c	1	$1/2^+$	0	0	$+1$	Λ_c^+	~ 2286	-
π	0	0^-	1	0	0	π^+, π^0, π^-	138	-
K	0	0^-	1/2	$+1$	0	$K^+,\ K^0$	496	-
$\bar{K}$	0	0^-	1/2	-1	0	$\bar{K}^0,\ K^-$	496	-
η	0	0^-	0	0	0	η	548	-
ρ	0	1^-	1	0	0	ρ^+, ρ^0, ρ^-	~ 775	~ 148
D	0	0^-	1/2	0	$+1$	D^+, D^0	1867	-

7.2　ハドロン反応と量子数の保存

- アイソスピン多重項：アイソスピン I の状態には $2I+1$ 個の状態が含まれる
  例）$N(I=1/2)=\{p,n\}$

- 多重項の粒子は右肩に電荷 Q を表示して区別
  例）$\pi(I=1)=\{\pi^+,\pi^0,\pi^-\}$
  （+2 は ++ と表記）

- ゲルマン西島の法則（3 フレーバーの場合)：電荷とフレーバー量子数の関係

$$Q = I_3 + \frac{B+S}{2} = I_3 + \frac{Y}{2} \tag{134}$$

  ハイパーチャージ：$Y=B+S$
  一般のフレーバーの場合は Y にチャーム、ボトム、トップを加える
  例）π^+ は $Q=+1$、$B=0$、$S=0$ なので

$$I_3 = +1 \tag{135}$$

- 強い相互作用：バリオン数 B、アイソスピンの第 3 成分 I_3、ストレンジネス S、チャーム C が保存

$$\pi^- + p \to K^0 + \Lambda \tag{136}$$

  B：$0+1\to 0+1$
  S：$0+0\to +1-1$
  C：$0+0\to 0+0$
  I_3：$-1+1/2\to -1/2+0$

- 弱い相互作用では必ずしも保存しない（レプトンの量子数は数えない）

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e \tag{137}$$

  B：$1\to 1$
  S：$0\to 0$
  C：$0\to 0$
  I_3：$-1/2\to +1/2$（保存していない）

問題 7.1
1) 以下の粒子について、アイソスピンの第 3 成分 I_3 を計算せよ。
a) π^-,　b) K^-,　c) Σ^0,　d) Δ^{++},　e) D^+
2) 以下の反応の前後での量子数を調べ、強い相互作用と弱い相互作用に分類せよ。
a) $\pi^+ n \to \pi^0 p$,　b) $K^- p \to \pi^0\Sigma^0$　c) $D^+ n \to \pi^0\Lambda_c^+$,
d) $K^0 \to \pi^+\pi^-$,　e) $\Delta^{++} \to \pi^+ p$　f) $D^+ \to K^0\pi^+\pi^0$

7.3　強い相互作用の基本自由度

- **クォーク、グルーオン**：強い相互作用をする素粒子

- 量子色力学（QCD）のラグランジアン（繰り返してある添字は和をとる）

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}} = -\frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu}_a + \bar{q}_{\alpha,f}(i\gamma^\mu D^{\alpha\beta}_\mu - m_f\delta^{\alpha\beta})q_{\beta,f} \tag{138}$$

  $\bar{q}_{\alpha,f}$, $q_{\beta,f}$：クォーク場
  $G^a_{\mu\nu}$：グルーオン場からなる field strength

- **カラー**：クォーク、グルーオンが持つ内部自由度、色電荷
  クォーク：３自由度（$\alpha = 1,2,3$、SU(3) の基本表現）
  グルーオン：８自由度（$a = 1,2,\cdots,8$、SU(3) の随伴表現）

- **カラーの閉じ込め**：ハドロンはカラー白色（色電荷中性）のみが存在

- フレーバー：クォークの持つ内部自由度 $f = u,d,s,c,b,t$
  u：アップ、d：ダウン、s：ストレンジ、c：チャーム、b：ボトム、t：トップ

- グルーオンはフレーバーを持たない
  ⇒ 強い相互作用ではクォークのフレーバーは変化しない（フレーバー量子数の保存）

- 弱い相互作用はクォークのフレーバーを変化させる（$d \to u + e^- + \bar{\nu}_e$）
  トップクォークはハドロンを作らない（Cabibbo favored weak decay）

- スピン、パリティ
  クォーク：$J^P = 1/2^+$（パリティは定義）
  グルーオン：$J^P = 1^-$

- 電荷：素電荷 e の分数倍になる（表 7 参照）

- 質量 m_f：ヒッグス機構によりフレーバーごとに異なる質量
  幅広いスケールに分布（数 MeV から 1.7×10^5 MeV）

表 7: クォークの量子数と質量。質量は $\overline{\mathrm{MS}}$ 繰り込みでスケール $\mu \sim 2$ GeV での値、Particle Data Group (`http://pdg.lbl.gov`) による。

	Q	I_3	S	C	B	T	質量
u	$+2/3$	$+1/2$	0	0	0	0	$2.2^{+0.5}_{-0.4}$ MeV
d	$-1/3$	$-1/2$	0	0	0	0	$4.7^{+0.5}_{-0.3}$ MeV
s	$-1/3$	0	-1	0	0	0	95^{+9}_{-3} MeV
c	$+2/3$	0	0	$+1$	0	0	$1.275^{+0.025}_{-0.035}$ GeV
b	$-1/3$	0	0	0	-1	0	$4.18^{+0.04}_{-0.03}$ GeV
t	$+2/3$	0	0	0	0	$+1$	173.0 ± 0.4 GeV

8　群論と SU(3) 対称性

8.1　変換と対称性

- 物理系の**変換**：状態 $|\,\psi\,\rangle$（波動関数）に対して行う操作

  – **連続的**変換：微小変化がある変換
  例）空間回転

$$|\,\psi(\boldsymbol{r})\,\rangle \to R|\,\psi(\boldsymbol{r})\,\rangle = |\,\psi(\boldsymbol{r}')\,\rangle \tag{139}$$

  z 軸周りの角度 θ の回転の場合

$$\boldsymbol{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \\ z \end{pmatrix} \tag{140}$$

  – **離散的**変換：微小変化がなく離散的な値のみの変換
  例）パリティ変換：

$$|\,\psi(\boldsymbol{r})\,\rangle \to P|\,\psi(\boldsymbol{r})\,\rangle = |\,\psi(-\boldsymbol{r})\,\rangle \tag{141}$$

- 確率密度を保存するには、変換は状態の規格化を不変に保つ必要がある
  $|\,\psi\,\rangle \to U|\,\psi\,\rangle$ のとき、$\langle\,\psi\,| \to \langle\,\psi\,|U^\dagger$ なので

$$\langle\,\psi\,|\,\psi\,\rangle \to \langle\,\psi\,|U^\dagger U|\,\psi\,\rangle = \langle\,\psi\,|\,\psi\,\rangle \tag{142}$$

  つまり変換は**ユニタリー演算子**で表現する必要がある

$$U^\dagger U = 1 \quad \Leftrightarrow \quad U^\dagger = U^{-1} \tag{143}$$

- **対称性**：物理系を不変（＝同じ物理法則が成り立つ）に保つ変換
  量子力学の場合、物理法則はシュレディンガー方程式で記述される

$$H|\,\psi\,\rangle = E|\,\psi\,\rangle \tag{144}$$

  変換後の状態 $U|\,\psi\,\rangle$ が同じシュレディンガー方程式に従うとすると

$$HU|\,\psi\,\rangle = EU|\,\psi\,\rangle \tag{145}$$

  両辺に $U^\dagger$ を作用させると、$U^\dagger U = 1$ なので

$$U^\dagger HU|\,\psi\,\rangle = E|\,\psi\,\rangle = H|\,\psi\,\rangle \tag{146}$$

  これが任意の状態 $|\,\psi\,\rangle$ に対して成立するには

$$U^\dagger HU = H \quad \Leftrightarrow \quad [H, U] = 0 \tag{147}$$

- 対称性の破れ：ハミルトニアンに式 (147) を満たさない項が存在する場合

- **保存則**：連続対称性には対応する保存量が存在する
  例）回転対称性 $\Rightarrow$ 角運動量の保存
  例）並進対称性 $\Rightarrow$ 運動量の保存

8.2 群論の基礎

- 対称性変換は**群**（group）という数学的構造で表現される
- 群の定義：積の演算が定義された集合 $G = \{g_1, g_2, \cdots\}$ で以下の性質を満たすもの
  - 積の演算で閉じる（積の結果が群の要素になる）：$g_1 g_2 \in G$
  - 結合則を満たす：$(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$
  - 単位元 e が存在：任意の g に対し $ge = eg = g$
  - 逆元 g^{-1} が存在：$gg^{-1} = g^{-1}g = e$
- 例）z 軸まわりの回転 R_θ
  積 $R_{\theta_1} R_{\theta_2}$ は角度 θ_2 の回転の後に角度 θ_1 の回転をすると定義
  - 積の演算で閉じる：$R_{\theta_1} R_{\theta_2} = R_{\theta_1+\theta_2}$
  - 結合則を満たす：$(R_{\theta_1} R_{\theta_2}) R_{\theta_3} = R_{\theta_1} (R_{\theta_2} R_{\theta_3})$
  - 単位元 e：回転しない操作（角度 $\theta = 0$ の回転）、$R_{\theta=0}$
  - 逆元 R_θ^{-1}：逆向きの回転（角度 $-\theta$ の回転）、$R_{-\theta}$
- 以下ではリー群と呼ばれる種類の連続的変換を考える
- 変換パラメーター θ の連続的変換は、エルミート演算子 T を用いて表現できる

$$U(\theta) = \exp\{-i\theta T\} \equiv 1 - i\theta T + \frac{(-i\theta T)^2}{2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\theta T)^n}{n!} \tag{148}$$

$$T = T^\dagger \tag{149}$$

変換パラメーターが複数 $\theta^1, \theta^2, \cdots, \theta^n$ ある場合（a について 1 から n の和をとる）

$$U(\theta^1, \theta^2, \cdots) = \exp\{-i\theta^a T^a\} \tag{150}$$

$$T^a = (T^a)^\dagger \tag{151}$$

例：3 次元空間の一般の回転は 3 つの自由度（回転軸の方向とその周りの回転角）で指定される

- **無限小変換**：変換パラメーター $\theta^a \ll 1$ のとき、

$$U \simeq 1 - i\theta^a T^a \tag{152}$$

T^a：群の**生成子**（generator）
連続的変換の場合、群の要素 $g_1, g_2, \cdots$ は無限個（回転角は任意の実数）だが生成子は有限個

- 生成子間の交換関係

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \tag{153}$$

f^{abc}：群の**構造定数**（structure constant）
有限パラメーターの変換は無限小変換の積み重ねで記述できるので、構造定数が群の構造を決める

- 変換 U が対称性であるとき、式 (147) より

$$[H, T^a] = 0 \tag{154}$$

T^a がハミルトニアンと交換
$\Rightarrow$ 付随する物理量が保存する

- 例） 3次元回転対称性の場合、生成子は角運動量演算子 $J^a (a = 1, 2, 3)$ で

$$[J^a, J^b] = i\epsilon^{abc} J^c \tag{155}$$

つまり構造定数は完全反対称テンソル ϵ^{abc}

問題 8.1
1) z 軸周りの角度 θ の回転は、角運動量演算子 J_z を用いて

$$R_\theta = \exp\{-i\theta J_z\}$$

と表される。このとき $R_{\theta_1} R_{\theta_2} = R_{\theta_1+\theta_2}$ を示せ。ただし演算子 X、Y に関する公式

$$e^X e^Y = \exp\left\{X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}([X, [X, Y]] + [Y, [Y, X]]) + \cdots\right\}$$

を使う（$\cdots$ の項は全て $[X, Y]$ を含む)。
2) 繰り返し添字の付け替えを利用して次の式を示せ。

$$[\theta^a T^a, \theta^b T^b] = \theta^a \theta^b [T^a, T^b] = 0$$

3) 演算子の指数関数の定義 (149) を用いて

$$[\exp\{-i\theta^a T^a\}]^\dagger = \exp\{i\theta^a [T^a]^\dagger\}$$

となることをを示せ。
4) T^a がエルミート（式 (151) を満たす）のとき、$U = \exp\{-i\theta^a T^a\}$ がユニタリーになる（式 (143) を満たす）ことを示せ。
5) 式 (154) を示せ。ただし演算子 X、Y に関する公式

$$e^Y X e^{-Y} = X + [Y, X] + \frac{1}{2!}[Y, [Y, X]] + \cdots$$

を使う（$\cdots$ の項は全て $[Y, X]$ を含む)。
