# §1 共鳴状態の基礎

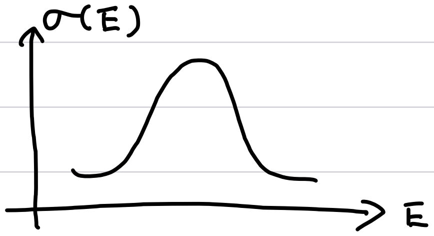
## 1.1 共鳴状態とは？ [Moiseyev]

量子力学的に形成される準安定な"状態"。
時間がたつと崩壊する。

シュレディンガー方程式は時間反転対称。自発的破れ？

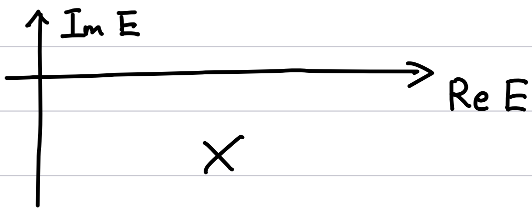
## 様々な特徴づけ

- スペクトル，散乱断面積のピーク




- 位相差 (phase shift) が $\pi/2$ を切る


- 散乱振幅の極



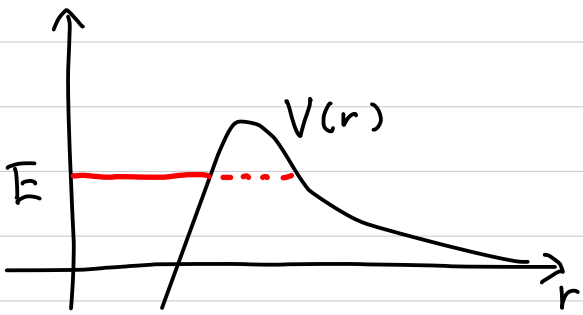

- ハミルトニアンの(複素エネルギー)固有状態

これらの関係は？

# 形状共鳴とフェッシュバッハ共鳴

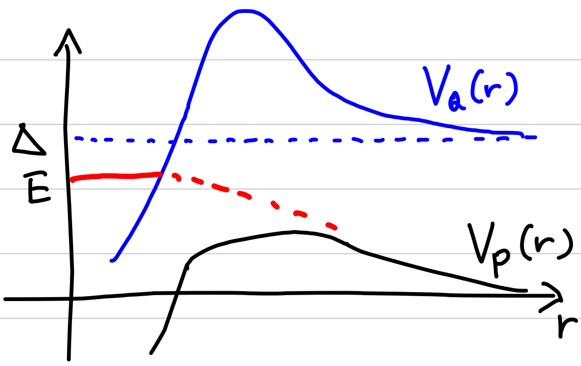
(1) 形状共鳴 (shape resonance)

- 1チャンネル散乱問題
- ポテンシャル ～ 短距離引力 ＋ 斥力障壁
- エネルギー $E>0$
- トンネル効果により不安定




(2) フェッシュバッハ共鳴 (Feshbach resonance)

- チャンネル結合散乱問題。P: 崩壊チャンネル, Q: closedチャンネル
- Pの閾値を $E=0$ として、Qの閾値が $E=\Delta>0$
- Qチャンネルの束縛状態が $0<E<\Delta$ に存在
- $Q \to P$ 遷移により不安定




(1)と(2)は起源が別。区別できるか？ どのように？

→ハドロンの複合性 [Hyodo 2013b]

## 1.2 ハミルトニアンの固有状態としての共鳴

[Gamow 1928]：原子核のα崩壊を記述するために

$$E = E_0 + i\frac{h\lambda}{4\pi}$$

とエネルギーの虚部を手で導入

$$\Psi(t) \propto \exp(-iEt)$$
$$= \exp(-iE_0 t)\underbrace{\exp\left(\frac{h}{4\pi}\lambda t\right)}_{\lambda<0 \text{ なら } t \text{ とともに減衰}}$$

(*) エルミート演算子($\hat{A}$など、厳密には自己共役)の固有値は実数

矛盾？ ⟵ $\hat{A}$の作用する空間(定義域)を指定していないため。

$$\langle A^\dagger \Psi, \Psi\rangle = \langle \Psi, A\Psi\rangle \qquad \Psi \in D(A)$$

(*)が成立するのはヒルベルト空間(～二乗可積分な関数空間 $L^2(\mathbb{R}^d)$)

$$\int |\psi(r)|^2 dr < \infty$$

定義域を拡張すれば、同じ演算子$\hat{A}$はエルミートでなくなり
複素固有値を持つことができる。

- 二乗可積分でない波動関数の例

平面波 $\psi(r) \sim e^{\pm ipr}$,　$p \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(r)|^2 dr = \int_{-\infty}^{\infty} 1\, dr = \infty$$

共鳴状態～崩壊を通じて散乱波と結合

⇒ 波動関数は同様に二乗可積分でない。

# 具体的な共鳴の例

• シュレディンガー方程式 ($\hbar=1$, $m=1$)

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2}+V(r)\right)\psi(r)=E\psi(r)$$

注）この単位系では物理量は長さの次元で表現される。

エネルギー = (長さ)$^{-2}$, 運動量 = (長さ)$^{-1}$

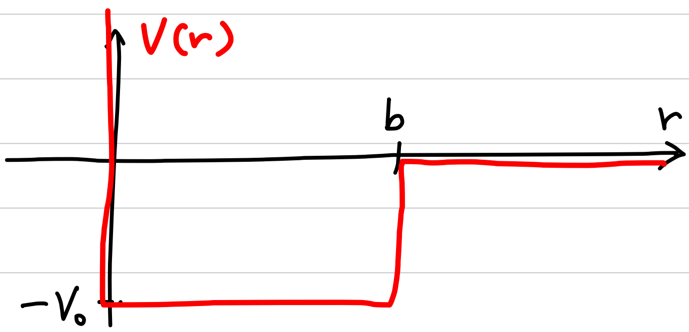
注）$r \geq 0$ のみを考えることで球対称3次元ポテンシャルの動径方向に対応。(s波)

$\psi(r) \sim \psi_{3次元}(r)/r$

• 引力井戸型ポテンシャル

$$V(r)=\begin{cases}-V_0 & 0\leq r\leq b\\ 0 & b<r\end{cases}$$

$V_0>0$




• 散乱解（連続スペクトル）

$$\begin{cases}\psi(r)\propto e^{\pm ipr} \quad \text{for} \quad b<r, \quad p=\sqrt{2E}\\ \psi(r)\propto e^{\pm ikr} \quad \text{for} \quad 0\leq r\leq b, \quad k=\sqrt{2(E+V_0)}\\ \text{境界条件：} \ \psi(r=0)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \psi(r)=\begin{cases}\sin(kr) & 0\leq r\leq b\\ A^-(p)e^{-ipr}+A^+(p)e^{ipr} & b<r\end{cases} \quad \text{———} \ (1)$$

注）散乱解は規格化できない（$r\to\infty$ で 0 にならないので）

ここでは $0\leq r\leq b$ の $\psi(r)$ の振幅を1に規格化してある。

注）$A^{\pm}(p)$ は $\psi(r)$ と $\psi'(r)$ の $r=b$ での連続性で決める。

# 離散固有状態

$r \to \infty$ での境界条件が必要。

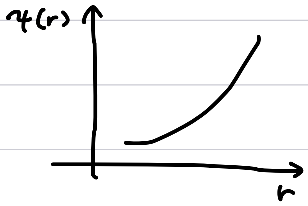
・束縛状態の解

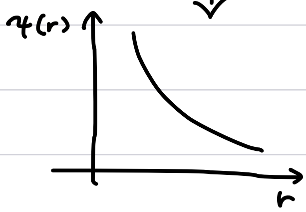
固有エネルギーは $E<0$。固有運動量 $p = \sqrt{2E}$ は純虚数。

$$p = ik \quad , \quad k>0$$

とおくと，$r>b$ の波動関数は

$$\psi(r) = A^- \cancel{e^{+kr}} + A^+ e^{-kr}$$





$r \to \infty$ の境界条件：$\psi(r)$ が二乗可積分

$p = ik$ で書くと $\underbrace{e^{-ipr}}_{\text{内向きの波}}$ が消え $\underbrace{e^{+ipr}}_{\text{外向きの波}}$ のみになる条件。

⇒ 離散固有状態の条件は $r \to \infty$ で外向きの波のみ ⇔ $A^-(p) = 0$

**問 1**　$A^\pm(p)$ の具体形が

$$A^\pm(p) = \frac{1}{2}\left[\sin(kb) \mp i\frac{k}{p}\cos(kb)\right]e^{\mp ipb} \qquad (2)$$

となり、$A^-(p)=0$ の条件が

$$\tan\left[\sqrt{p^2+2V_0}\cdot b\right] = -i\frac{\sqrt{p^2+2V_0}}{p} \qquad (3)$$

となることを示せ。束縛状態を少なくとも1つ持つ条件が

$$V_0 \geq \frac{\pi^2}{8b^2}$$

であることを示せ。

# 共鳴解

束縛解は(3)の $p$ が純虚数の解 ⟷ 物理的な運動量 $p$ は実で正。

⇒ 束縛解は(3)の解析接続から得られる解。

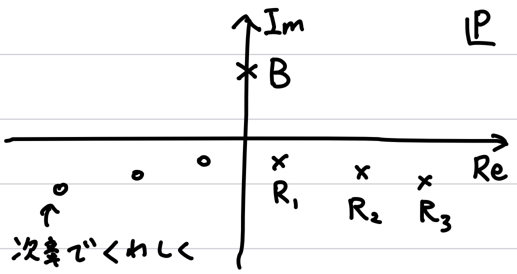
共鳴解：(3)を<u>複素</u> $p$ に解析接続して得られる解。

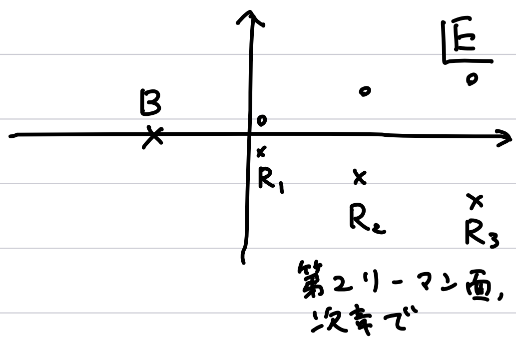
引力井戸型の場合，共鳴解は無限個存在。

• $V_0 = 10\ b^{-2}$ の場合

| | $p\ [b^{-1}]$ | $E = p^2/2\ [b^{-2}]$ |
|---|---|---|
| 束縛状態 B | $+3.68i$ | $-6.78$ |
| 第1共鳴 $R_1$ | $1.06 - 1.02i$ | $0.05 - 1.08i$ |
| 第2 〃 $R_2$ | $6.29 - 1.41i$ | $18.8 - 8.86i$ |
| 第3 〃 $R_3$ | $9.90 - 1.69i$ | $47.6 - 16.8i$ |

$1/|A^-(p)|$ を複素 $p$ 平面でプロットすると極(pole)としてあらわれる。

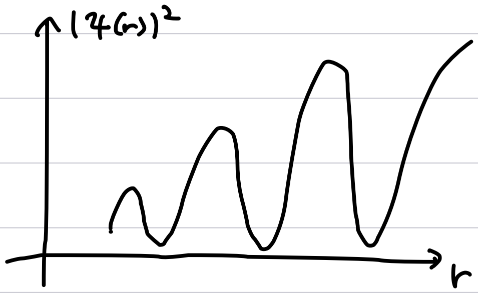



固有運動量の虚部が負

$p = p_R - i p_I \quad , \quad p_R, p_I > 0$

$$\psi(r) \to e^{ipr} = \underbrace{e^{ip_R r}}_{\text{振動}}\ \underbrace{e^{+p_I r}}_{\text{発散}}$$



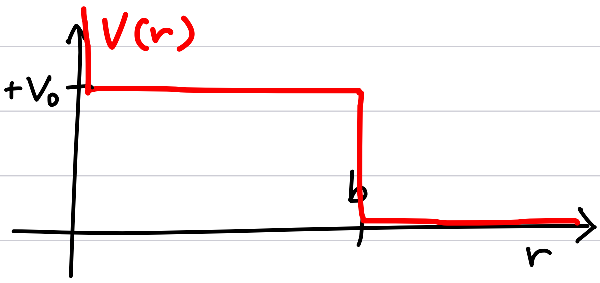

$r \to \infty$ で増大、共鳴の波動関数は二乗可積分でない。

# 1.3 共鳴状態と波動関数の局在

複素固有値の観測への影響

→実験で調べられる実エネルギーでの共鳴現象

斥力井戸型ポテンシャル[TH2018]




$$V(r) = \begin{cases} +V_0 & 0 \le r \le b \\ 0 & b < r \end{cases}$$

引力の解で $V_0 \to -V_0$ とすればよい。

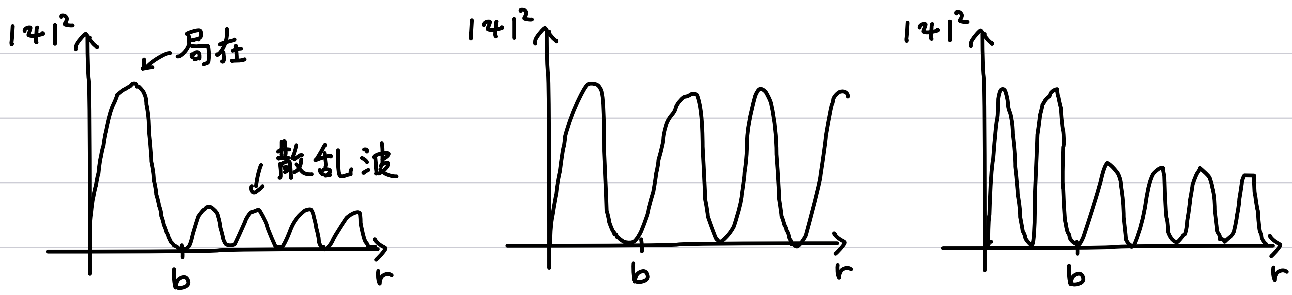
注）引力の解は特殊な例なので局在を見るのには不適当

$$\tan\left[\sqrt{p^2 - 2V_0}\, b\right] = -i \frac{\sqrt{p^2 - 2V_0}}{p}$$

束縛解はない。共鳴解は $E > V_0$ の領域に無限個存在。

| $V_0 = 10 b^{-2}$ のとき | $P\ [b^{-1}]$ | $E = P^2/2\ [b^{-2}]$ |
|---|---|---|
| 第1共鳴 $R_1$ | $5.37 - 0.36i$ | $14.4 - 1.9i$ |
| 第2共鳴 $R_2$ | $7.56 - 0.92i$ | $28.2 - 6.9i$ |

波動関数のふるまい




$E = 14.4 b^{-2}$　　$E = 21 b^{-2}$　　$E = 28.2 b^{-2}$

- $E \sim \mathrm{Re}[E_{Res}]$ のとき波動関数は $r<b$ に局在する。
- 共鳴から離れると平面波に近くなる。

## 局在の定量化

相互作用領域と外側との $\psi(r)$ の振幅の比を調べる。

$$\psi(r) = \begin{cases} \sin(kr) & 0 \le r \le b \\ \underbrace{C}_{\text{振幅}} \sin(pr + \underbrace{\delta}_{\text{位相差(phase shift)}}) & b < r \end{cases}$$

$r=b$ での連続の条件

$$\begin{cases} \sin(kb) = C \sin(pb+\delta) & \text{——①} \\ k\cos(kb) = pC\cos(pb+\delta) & \text{——②} \end{cases}$$

$①^2 + (②/p)^2$

$$C^2 = \sin^2(kb) + \frac{k^2}{p^2}\cos^2(kb) = 1 + \left(\frac{k^2}{p^2} - 1\right)\cos^2(kb)$$

$p = \sqrt{2E}$, $k = \sqrt{2(E-V_0)}$ で $V_0 > 0$ なので $k < p$

$\Rightarrow$ $C^2 \le 1$ （振幅は外側で小さくなる）

- 局在率
$$R \equiv \frac{1}{C^2} = \begin{cases} 3.05 & (E = 14.4\, b^{-2},\ 共鳴1) \\ 1.00 & (E = 21\, b^{-2}) \\ 1.49 & (E = 28.2\, b^{-2},\ 共鳴2) \end{cases}$$

- 虚部の小さい共鳴の方がより局在している。

## §1のまとめ

- 離散固有状態 ← 遠方で外向きの波のみ
- 共鳴：ハミルトニアンの複素エネルギー固有状態
  （束縛と同じ，$p$ の解析接続）
- 共鳴の波動関数 $\begin{cases} r \to \infty \text{ で発散（複素 } p\text{）} \\ r \le b \text{ に局在（実 } p\text{）} \end{cases}$