

§ 2 散乱振幅の性質

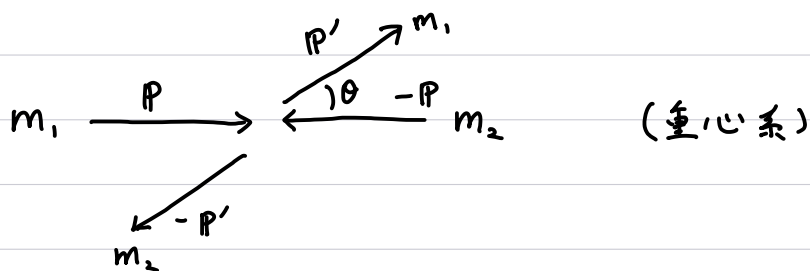
2.1 準備 [Taylor]

- 区別できる2粒子系の散乱
- 内部自由度(スピンなど)なし
- 弾性散乱(始状態 = 終状態)
- 空間3次元, 非相対論的, $c=1$
- 短距離相互作用 ($V(r)$ が $|r| \rightarrow \infty$ で十分はやく消える。クーロンは×)
- 回転対称性

$$\Leftrightarrow \text{球対称ポテンシャル } V(r) \Leftrightarrow [\hat{H}, \hat{L}] = 0$$

$\uparrow$ 角運動量

散乱のキネマティクス



弾性散乱: $|p| = |p'| \equiv p$, エネルギー $E_p = \frac{p^2}{2\mu}$ (E と書くことも)

換算質量 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ 散乱角 $\cos \theta = \frac{p \cdot p'}{p^2}$

散乱状態は E_p (または p) と θ で特徴づけられる。

・球面調和関数の性質

$$\sum_m Y_\ell^m(\hat{p}')^* Y_\ell^m(\hat{p}) = \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell(\cos\theta)$$

・Eで積分 $\rightarrow \delta(E_p - E_{p'}) \rightarrow p' = p$ とおきかえ

$$= \frac{1}{\mu p} \delta(E_{p'} - E_p) \sum_\ell [S_\ell(E_p) - 1] \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell(\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{4\pi\mu p} \delta(E_{p'} - E_p) \sum_\ell (2\ell+1) [S_\ell(E_p) - 1] P_\ell(\cos\theta)$$

左辺の定義と比較すると

$$f(E_p, \theta) = \frac{1}{2i p} \sum_\ell (2\ell+1) [S_\ell(E_p) - 1] P_\ell(\cos\theta)$$

右辺の ℓ の和は角度依存性の部分波展開。左辺も同様に

$$f(E_p, \theta) = \sum_\ell (2\ell+1) f_\ell(E_p) P_\ell(\cos\theta)$$

$$\Rightarrow f_\ell(E_p) = \frac{S_\ell(E_p) - 1}{2i p} \quad \text{—— (4)}$$

↑
部分波 ℓ の散乱振幅

S, δ, f は部分波ごとに E のみの関数。

2.2 ユニタリー性と散乱断面積

S 行列: 系(状態ベクトル)の時間発展

確率(状態ベクトルのノルム)の保存 $\rightarrow S$ 行列はユニタリー

$$\hat{S}^\dagger \hat{S} = \hat{1} \Leftrightarrow S_\ell^*(E) S_\ell(E) = 1$$

$$\Leftrightarrow \exp\{2i(\delta_\ell(E) - \delta_\ell^*(E))\} = 1$$

位相差 $\delta_\ell(E)$ は実数 (ただし $E \in \mathbb{R}$ で)

散乱断面積

$$\frac{d\sigma(E)}{d\Omega} = |f(E, \theta)|^2$$

$$\sigma(E) = \int d\Omega |f(E, \theta)|^2$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\cos\theta \sum_{l,m} (2l+1)(2m+1) f_l^*(E) f_m(E) P_l(\cos\theta) P_m(\cos\theta)$$

$$= 2\pi \sum_{l,m} (2l+1)(2m+1) f_l^*(E) f_m(E) \frac{2}{2l+1} \delta_{lm}$$

$$= \sum_l 4\pi (2l+1) |f_l(E)|^2$$

$$= \sum_l 4\pi (2l+1) \left| \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2ip} \right|^2 \quad \leftarrow (4)$$

$$= \sum_l \frac{4\pi(2l+1)}{p^2} \left| \frac{e^{i\delta_l} - e^{-i\delta_l}}{2i} \right|^2$$

$$= \sum_l \frac{2\pi(2l+1)}{\mu E} \sin^2 \delta_l(E) \quad \left(E = \frac{p^2}{2\mu} \right)$$

$$\equiv \sum_l \sigma_l(E) \quad \leftarrow \text{部分波 } l \text{ の断面積}$$

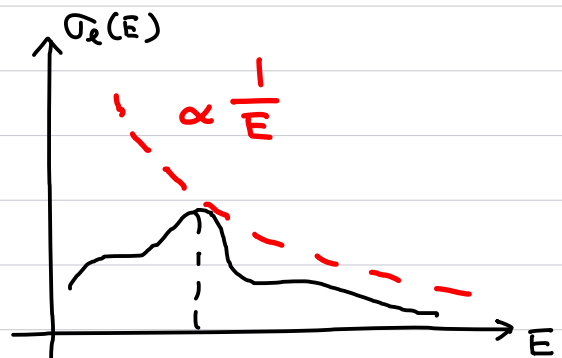
S 行列のユニタリ性

$$\Rightarrow \delta_l(E) \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \delta_l(E) \leq 1$$

$$\Rightarrow \sigma_l(E) \leq \frac{2\pi(2l+1)}{\mu E}$$

ユニタリ限界



等号成立 (断面積最大) は

$$\sin \delta_l(E) = 1 \quad \Rightarrow \quad \delta_l(E) = \frac{\pi}{2} (+n\pi) \quad \text{共鳴?}$$

2.3 散乱振幅の極としての共鳴

- 動径シュレディンガー方程式の regular solution: $\phi_{\ell,p}(r)$

角運動量 ℓ , 運動量 p の散乱解で

$$\frac{\phi_{\ell,p}(r)}{\hat{j}_{\ell}(pr)} \rightarrow 1 \quad (r \rightarrow 0) \quad \text{--- (5)}$$

と規格化されたもの。

注) Riccati-Bessel 関数 $\hat{j}_{\ell}(z) = z j_{\ell}(z)$ ↙ 球ベッセル関数

注) (5) は $r \rightarrow 0$ で波動関数が消え, かつ微分が $\hat{j}_{\ell}(pr)$ に一致する条件。

- regular solution の $r \rightarrow \infty$ での漸近形

$$\phi_{\ell,p}(r) \rightarrow \frac{i}{2} \left[\underline{f_{\ell}(p)} \hat{h}_{\ell}^{-}(pr) - f_{\ell}(-p) \hat{h}_{\ell}^{+}(pr) \right]$$

ヨスト (Jost) 関数, 内向きの波の振幅

注) Riccati-Hankel 関数

$$\hat{h}_{\ell}^{\pm}(z) = z \underline{h_{\ell}^{\pm}(z)}$$

球ハンケル関数,

$$= \exp \left\{ \pm i(z - \ell\pi/2) \right\} [1 + O(z^{-1})] \quad z \rightarrow \infty$$

- p が小さい時の展開

$$f_{\ell}(p) = 1 + \underbrace{[\alpha_{\ell} + \beta_{\ell} p^2 + O(p^4)]}_{p \text{ の偶数ベキ}} + i \underbrace{[\gamma_{\ell} p^{2\ell+1} + O(p^{2\ell+3})]}_{p \text{ の奇数ベキ}} \quad \text{--- (6)}$$

$$\Rightarrow [f_{\ell}(p)]^* = f_{\ell}(-p^*) \quad \text{--- (7)}$$

具体例

s 波 ($l=0$) の場合

$$\hat{j}_0(pr) = \sin(pr), \quad \hat{h}_0^\pm(pr) = \exp\{\pm i pr\}$$

§ 1.2 の井戸型ポテンシャル問題を 3次元の $l=0$ と考える: $\psi(r) \propto \phi_{0,p}(r)$

計算した解(1)は, $r \rightarrow 0$ で

$$\psi(r) \rightarrow \sin(kr) = kr + O(r^3)$$

(5) の規格化は $\phi_{0,p}(r) \rightarrow \sin(pr) = pr + O(r^3)$ なので

regular solution は

$$\phi_{0,p}(r) = \frac{p}{k} \psi(r)$$

$r \rightarrow \infty$ の漸近形は

$$\phi_{0,p}(r) \rightarrow \frac{p}{k} \left[A^-(p) \underbrace{e^{-ipr}}_{\hat{h}_0^-(pr)} + A^+(p) e^{+ipr} \right] \quad \leftarrow (2)$$

ヨスト関数の定義より

$$\frac{i}{2} f_0(p) = \frac{p}{k} A^-(p)$$

$$f_0(p) = \left[\cos(kb) - i \frac{p}{k} \sin(kb) \right] e^{ipb}$$

問 2

以下を確認せよ。

・ このヨスト関数が展開(6)に従う。

・ 外向きの波の係数が $-\frac{i}{2} f_0(-p)$ となる。

ヨスト関数のゼロと散乱振幅の極

§ 1 より、ハミルトニアン H の離散固有値 (複素 p)

↑

遠方で内向きの波が消え外向きのみ ($A^-(p) = 0$)

散乱理論の言葉では、ヨスト関数のゼロ点 $f_e(p) = 0$

・ S 行列

入射波 (内向き) がどれだけ散乱 (外向き) されるか

$$S_e(p) = \frac{\text{外向きの振幅}}{\text{内向きの振幅}} = \frac{f_e(-p)}{f_e(p)}$$

$\Rightarrow$ 離散固有値は S 行列の極

注) (7) よりユニタリ-性が従う

$$\begin{aligned} S_e^*(p) S_e(p) &= \frac{f_e^*(-p)}{f_e^*(p)} \frac{f_e(-p)}{f_e(p)} \\ &= \frac{f_e(p^*)}{f_e(-p^*)} \frac{f_e(-p)}{f_e(p)} \\ &= 1 \quad (p \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

逆に、 $p \notin \mathbb{R}$ では S 行列はユニタリ-でない

・ 散乱振幅

$$(4) \text{ より } f_e(p) = \frac{S_e(p) - 1}{2ip} = \frac{f_e(-p) - f_e(p)}{2ip f_e(p)} \quad (8)$$

$\Rightarrow$ 離散固有値は散乱振幅の極

固有エネルギーとリーマン面

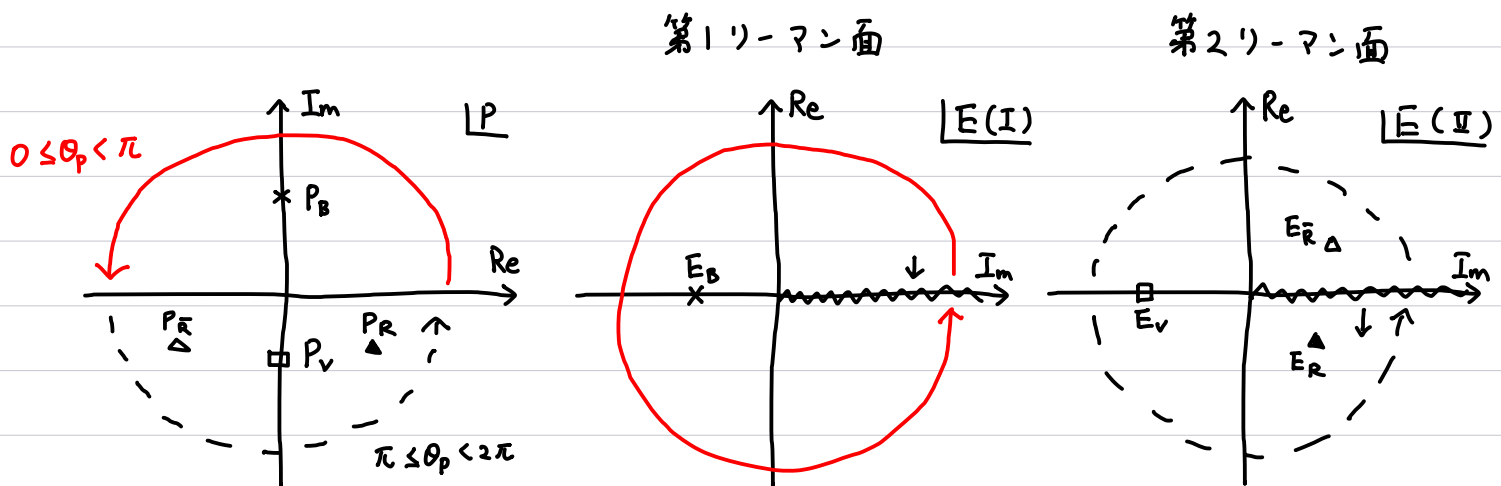
複素 P を考えるとき, $P = |P|e^{i\theta_P}$ とすると

$$E_P = \frac{P^2}{2\mu} = \frac{|P|^2}{2\mu} e^{2i\theta_P} \equiv |E_P| e^{i\theta_E}$$

- θ_P が $0 \rightarrow 2\pi$ のとき θ_E は $0 \rightarrow 4\pi$
- P と $-P$ (θ_P と $\theta_P + \pi$) は同じ E_P に写像される。

$\Rightarrow P$ の複素関数 ($S_E(P)$, $f_E(P)$) は
複素 E の 2 枚のリーマン面上で定義される。

- 複素 P , E 平面



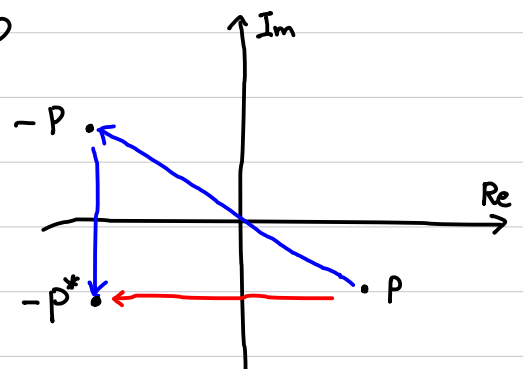
E 平面の実軸上に cut (branch point は $E=0$)

(7) より

$$f_E(P) = 0 \iff f_E(-P^*) = [f_E(P)]^* = 0$$

P が解なら $-P^*$ も解

$\curvearrowright$ 虚軸に対して対称



(i) $p = -p^*$ の場合 (虚軸上の解)

・束縛状態 (Bound state, B) $\times$

$$\operatorname{Re}[p_B] = 0, \operatorname{Im}[p_B] > 0$$

エネルギー E_B は実で 負 (第1リーマン面)

・仮想状態 (Virtual state, V) $\square$

$$\operatorname{Re}[p_V] = 0, \operatorname{Im}[p_V] < 0$$

エネルギー E_V は実で 負 (第2リーマン面)

注) 極の留数は負 $\rightarrow$ 物理的な自由度ではない? [Hyodo 2013a]

(ii) $p \neq -p^*$ の場合

解は p の下半面 (E の第2リーマン面) にのみ存在

$\leftarrow$ 上半面は $\operatorname{Im}[p] > 0$ なので波動関数は遠方で収束,
つまり2乗可積分。この場合ハミルトニアンは実固有値の
束縛状態のみを解に持ち得る。

・共鳴状態 (Resonance, R) $\blacktriangle$

$$\operatorname{Re}[p_R] > 0, \operatorname{Im}[p_R] < 0$$

エネルギーは第2リーマン面で $\operatorname{Re}[E_R] > 0$

・Anti-resonance ($\bar{R}$) $\triangle$

$$\operatorname{Re}[p_{\bar{R}}] < 0, \operatorname{Im}[p_{\bar{R}}] < 0$$

必ず共鳴と対になっている。

時間とともに増大する解 (共鳴の“共役”) [HSNP 2008]

2.4 理想的な共鳴現象

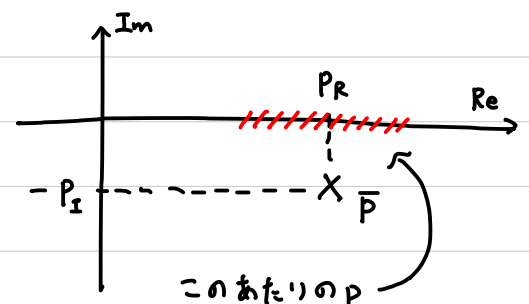
複素平面の共鳴極が実際の散乱に与える影響を考える。

$$\bar{P} = P_R - i P_I, \quad P_R > 0, P_I > 0$$

に極があるとする。

$\bar{P}$ の近くの運動量 $P \in \mathbb{R}$ について、ヨスト関数を $\bar{P}$ のまわりで展開

$$\begin{aligned} f_e(P) &= \underbrace{f_e(\bar{P})}_{=0} + \left. \frac{df_e}{dP} \right|_{\bar{P}} (P - \bar{P}) + \dots \\ &\approx f'_e(\bar{P}) \cdot (P - \bar{P}) \quad \text{--- (9)} \end{aligned}$$



位相差は

$$\delta_e(P) = \frac{1}{2} \arg S_e(P)$$

$$= \frac{1}{2} \arg \frac{f_e(-P)}{f_e(P)}$$

$$= \frac{1}{2} \arg \frac{[f_e(P^*)]^*}{f_e(P)} \quad \leftarrow (7)$$

$$= \frac{1}{2} \arg \frac{[f_e(P)]^*}{f_e(P)} \quad \leftarrow P \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{2} (-2 \arg f_e(P)) \quad \left(\frac{z^*}{z} = \frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}} = e^{-2i\theta} \right)$$

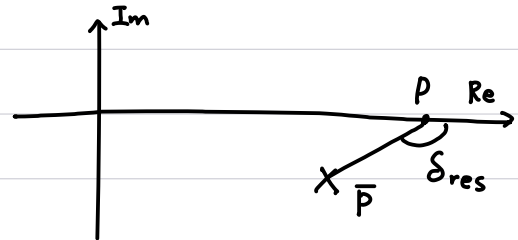
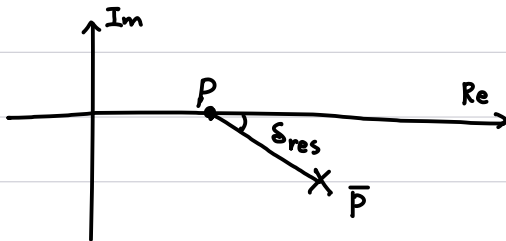
$$= -\arg f_e(P)$$

$$\approx -\arg f'_e(\bar{P}) - \arg(P - \bar{P}) \quad \leftarrow (9)$$

$$\equiv \underbrace{\delta_{e,BG}}_{\text{バックグラウンド}} + \underbrace{\delta_{e,res}(P)}_{\text{共鳴}}$$

共鳴の近くの P で、位相差の P 依存性は

$$\delta_{\text{res}}(P) = -\arg(P - \bar{P})$$



P とともに急速に増加する。

$$\text{もし } \begin{cases} \cdot (9) \text{ の近似が OK} \\ \cdot \delta_{\text{BG}} \approx 0 \end{cases}$$

であれば、 $P = \text{Re}[\bar{P}] = P_R$ で位相差は $\delta_e(P) = \frac{\pi}{2}$

注) (9) の近似を厳密にすると

$$\delta_e(P) = \underbrace{\delta_{e,\text{BG}}(P)} + \delta_{e,\text{res}}(P)$$

幅の狭い (P_i が小さい) 共鳴では一般に (9) は良い近似

注) (9) が良くても δ_{BG} は必ずしも小さくない。

$$\text{このとき } P = P_R \text{ で } \delta_e(P) = \frac{\pi}{2} + \underline{\underline{\delta_{\text{BG}}}} \quad \text{不定性}$$

エネルギー E の関数としての散乱振幅

$$\bar{E} = \frac{\bar{P}^2}{2\mu} \equiv E_R - \frac{i}{2} \Gamma_R$$

ヨスト関数 $f_e(E) = C(E) \cdot (E - \bar{E})$ を (8) に代入

$$f_e(E) = \frac{f_e(-P) - f_e(P)}{2iP f_e(P)} = Z(E) \cdot \frac{1}{E - E_R + \frac{i}{2}\Gamma_R} = \underbrace{\frac{Z(\bar{E})}{E - E_R + \frac{i}{2}\Gamma_R}}_{\text{Breit-Wigner}} + f_{e,\text{BG}}(E)$$

・ 極の位置は一意的で近似や δ_{BG} の不定性がない。

2.5 有効レンジ展開

低エネルギーでの散乱振幅の性質：(4)より

$$\begin{aligned}
 f_\ell(p) &= \frac{S_\ell(p) - 1}{2ip} \\
 &= \frac{e^{2i\delta_\ell(p)} - 1}{2ip} \\
 &= \frac{e^{i\delta_\ell(p)} - e^{-i\delta_\ell(p)}}{2i} \frac{1}{e^{-i\delta_\ell(p)} p} \\
 &= \sin \delta_\ell(p) \frac{1}{[\cos \delta_\ell(p) - i \sin \delta_\ell(p)] p} \\
 &= \frac{1}{p \cot \delta_\ell(p) - ip} \\
 &= \frac{p^{2\ell}}{p^{2\ell+1} \cot \delta_\ell(p) - ip^{2\ell+1}}
 \end{aligned}$$

ヨスト関数を用いて $p \rightarrow 0$ の性質を調べる。(6)より

$$f_\ell(p) \equiv F_\ell(p^2) + ip G_\ell(p^2)$$

$$F_\ell(p^2) \sim \mathcal{O}(p^0), \quad G_\ell(p^2) \sim \mathcal{O}(p^{2\ell}) \quad \text{for } p \rightarrow 0$$

$$f_\ell(-p) - f_\ell(p) = F_\ell(p^2) - ip G_\ell(p^2) - F_\ell(p^2) - ip G_\ell(p^2) = -2ip G_\ell(p^2)$$

となるので、(8)より

$$\begin{aligned}
 f_\ell(p) &= \frac{f_\ell(-p) - f_\ell(p)}{2ip f_\ell(p)} \\
 &= \frac{-2ip G_\ell(p^2)}{2ip [F_\ell(p^2) + ip G_\ell(p^2)]} \\
 &= \frac{p^{2\ell}}{-p^{2\ell} F(p^2)/G(p^2) - ip^{2\ell+1}}
 \end{aligned}$$

2つの表式を比較

$$p^{2l+1} \cot \delta_l(p) = -p^{2l} F_l(p^2)/G(p^2) \quad \text{--- (10)}$$

右辺は p^2 (つまりエネルギー E) の関数で、 $p \rightarrow 0$ で $O(p^0)$

$\Rightarrow p^2$ でテイラー展開

$$p^{2l+1} \cot \delta_l(p) = -\frac{1}{a_l} + \frac{r_l}{2} p^2 + O(p^4)$$

S-wave ($l=0$) の場合

$$f_0(p) = \frac{1}{-\frac{1}{a_0} + \frac{r_0}{2} p^2 + O(p^4) - ip}$$

$\uparrow$
 散乱長

$\nwarrow$
 有効レンジ ($\sim$ 相互作用距離)

注) 散乱長の符号が異なる定義もある。

注) 有効レンジは負になることもある。

注) (10) は極を持ちうる (CDD 極, [CDD 1965])

この場合テイラー展開ではなく Padé 近似が有効 [KH 2017]

・低エネルギー散乱

p の高次項は効かないので、leading order では

$$f_0(p) = \frac{1}{-\frac{1}{a_0} - ip} \Rightarrow \text{極を } p = \frac{i}{a_0} \text{ に持つ}$$

$a_0 > 0$ のとき: 上半面の極 $\Rightarrow$ 束縛状態

$a_0 < 0$ のとき: 下半面の極 $\Rightarrow$ virtual 状態

$$\text{どちらもエネルギーは } E = -\frac{1}{2\mu a_0^2}$$

§ 2 のまとめ

- S 行列, 位相差, 散乱振幅
- 散乱振幅の極 $\longleftrightarrow$ 共鳴状態
(束縛, virtual, i -マン面, ...)
- 極が散乱に与える影響 (Breit-Wigner)
- 有効レンジ展開: 低エネルギー散乱