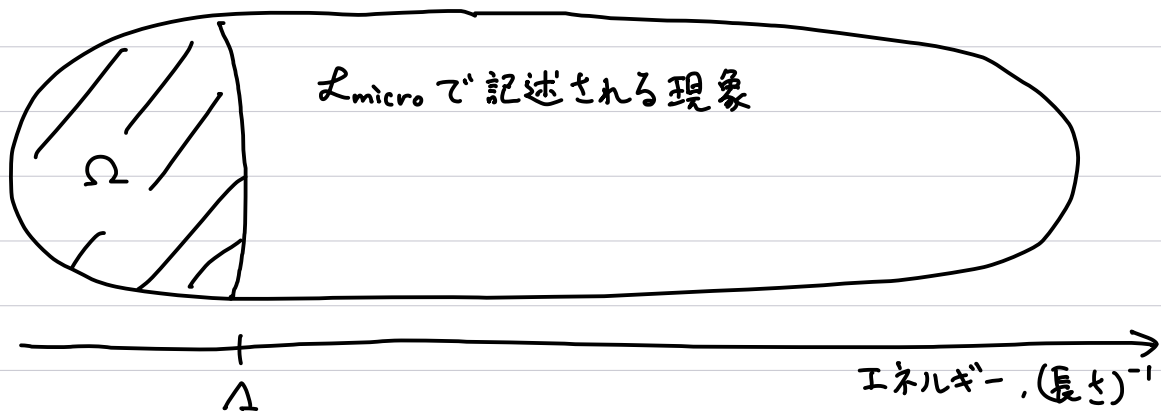


§3 接触相互作用の有効場の理論

3.1 有効場の理論

ある微視的(基礎的)な場の量子論 $\mathcal{L}_{\text{micro}}$ を考える。



Ω : 低エネルギー / 長波長の現象

Λ : UV カットオフ, EFT の適用限界

有効場の理論 (Effective Field Theory, EFT)

- $\mathcal{L}_{\text{micro}}$ と同じ Ω を記述する。
- システムティックに精密化できる。

例1: 電磁相互作用

$\mathcal{L}_{\text{micro}} = \mathcal{L}_{\text{QED}}$: 光子, 電子 光子に比べ“重い”

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} &= \mathcal{L}_{\text{EH}} : \text{光子} \quad [\text{HE 1936}] \quad \Lambda \sim m_e \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + C_1 (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2 + C_2 (F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu})^2 + \dots \end{aligned}$$

光子の散乱

$$\text{QED から計算: } C_1 = \frac{\alpha^2}{90 m_e^4}, \quad C_2 = \frac{7\alpha^2}{360 m_e^4}$$

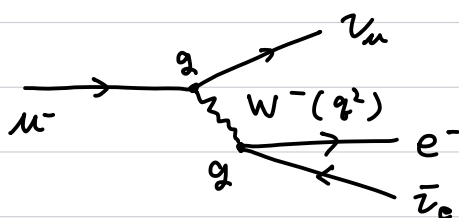
例2: 弱い相互作用

$\mathcal{L}_{\text{micro}} = \mathcal{L}_{\text{ws}} : \text{レプトン, } \underline{W^\pm, Z \text{ ボソン}}$ レプトンに比べ“重い”

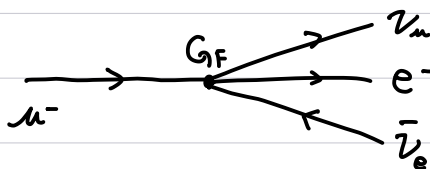
$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{FB}} : \text{レプトン}$

$$\Lambda \sim m_{W,Z}$$

μ^- 崩壊



$$\propto \frac{g^2}{q^2 - m_W^2} = -\frac{g^2}{m_W^2} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{q^2}{m_W^2}\right)\right)$$



$$\propto G_F \sim \left(-\frac{g^2}{m_W^2}\right)$$

強い相互作用の場合

低エネルギーで $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$ は計算できない

低エネルギーでの自由度はハドロンキクーク, グループオン $\in \mathcal{L}_{\text{QCD}}$

“定理” [Weinberg 1979]

$\mathcal{L}_{\text{micro}}$ の対称性と矛盾しない最も一般的な $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ は $\mathcal{L}_{\text{micro}}$ の有効的な記述を与える。

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}(q, A_\mu^a) \xrightarrow{\text{対称性}} \mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{CHPT}}(M, B) \quad \text{カイラル摂動論}$$

最も一般的な $\mathcal{L}_{\text{CHPT}}$ は無限個の項を含む $\rightarrow$ “重要性” に応じて並べる。

$$\mathcal{L}_{\text{CHPT}} = \underbrace{\mathcal{L}^{(\text{LO})}}_{\text{精密化}} + \mathcal{L}^{(\text{NLO})} + \dots$$

精密化

くわしくは § 4 で

3.2 ゼロレンジ模型 [BK2 2008]

- 散乱長 a_0 が 相互作用距離 R よりも大きい系

$$f(p) = \frac{1}{-1/a_0 - ip} \quad (s\text{-波})$$

例 1) 核子

$$a_0(^1S_0) \simeq 20 \text{ fm}$$

$$\gg R \sim \frac{1}{m_\pi} \sim 1 \text{ fm}$$

$$a_0(^3S_1) \simeq -4 \text{ fm}$$

$$\mathcal{L}_{\text{micro}} = \mathcal{L}_{NN} \text{ (または } \mathcal{L}_{\text{aco}} \text{)}$$

例 2) ^4He 原子

$$a_0 \simeq 200 \text{ [Bohr radius]} \gg R \sim 10 \text{ [Bohr radius]}$$

$$\mathcal{L}_{\text{micro}} = \mathcal{L}_{\text{udw}}$$

低エネルギー極限はどちらも 同じ $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ で記述できる。

ラグランジアン

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \underbrace{\psi^\dagger \left(i \partial_t + \frac{\nabla^2}{2m} \right) \psi}_{\text{運動項}} - \underbrace{\frac{\lambda_0}{4} (\psi^\dagger \psi)^2}_{\text{相互作用項}}$$

$\psi(t, \mathbf{x})$: ボソン場

m : ボソンの質量

λ_0 : (bare) 結合定数

$$[\psi(t, \mathbf{x}), \psi(t, \mathbf{x}')] = 0$$

$$[\psi(t, \mathbf{x}), \psi^\dagger(t, \mathbf{x}')] = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

相互作用

$$\mathcal{L}_{\text{int}} \sim -\mathcal{H}_{\text{int}} \sim -(\text{エネルギー})$$

$\lambda_0 > 0$: エネルギーを上げる $\Rightarrow$ 斥力

$\lambda_0 < 0$: エネルギーを下げる $\Rightarrow$ 引力

・対称性

空間, 時間並進, 空間回転, パリティ,

ガリレイ変換

$$\psi(t, \mathbf{x}) \longrightarrow \exp\left(i\mathbf{m} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} - \frac{i}{2} m v^2 t\right) \psi(t, \mathbf{x} - \mathbf{v}t)$$

位相変換

$$\psi(t, \mathbf{x}) \rightarrow e^{i\theta} \psi(t, \mathbf{x})$$

対応する保存電荷は

$$N = \int d^3x \psi^\dagger \psi \quad : \text{粒子数}$$

$\rightarrow \mathcal{L}_{\text{int}}$ は粒子数を変えない

物理量の計算

1) ファインマン則を導出

2) 全ての可能な図を足し上げる

(通常は不可能だが今回はできる)

2') 摂動計算を行う

(2) ができない場合など)

ファインマン則

- プロパゲーター

$$\xrightarrow{\omega, \mathbf{k}} = iG(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{\omega - \mathbf{k}^2/2m + i0^+}$$

- 頂点

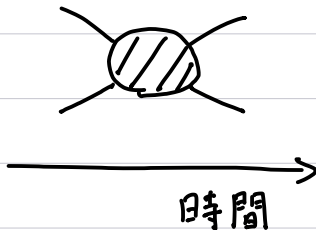
$$\text{X} = -i\lambda_0$$

注) プロパゲーターは正エネルギー成分のみ → 時間方向へ進む

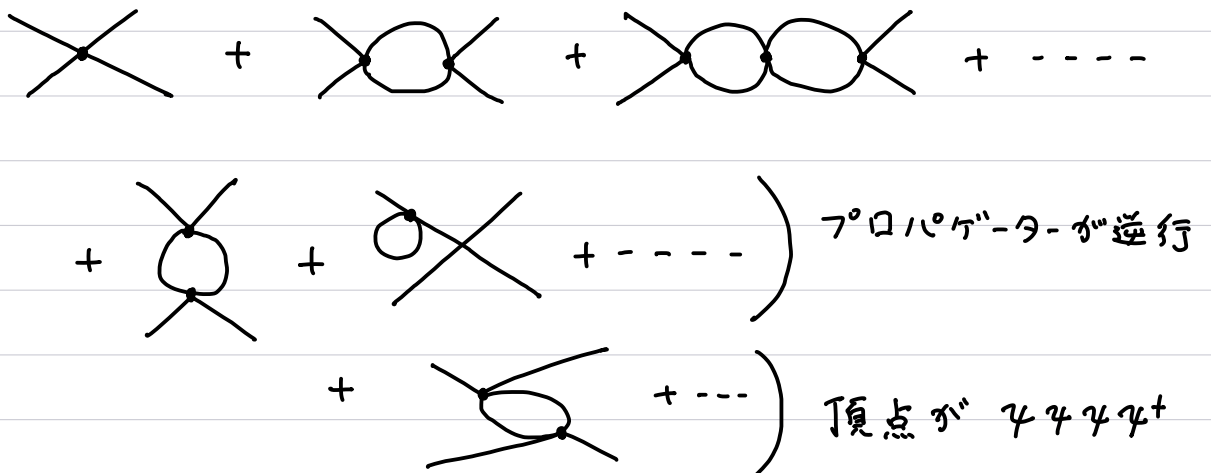
注) 頂点は運動量表示で定数 → 座標表示でδ関数

3.3 ボソン 2体散乱 (N=2)

- 4点関数 (2 in, 2 out)



- 可能な diagram



結局残るのは

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 1} &= \lambda_0 \text{Diagram 2} + \lambda_0^2 \text{Diagram 3} + \lambda_0^3 \text{Diagram 4} + \dots \\
 &= \text{Diagram 2} + \text{Diagram 5}
 \end{aligned}$$

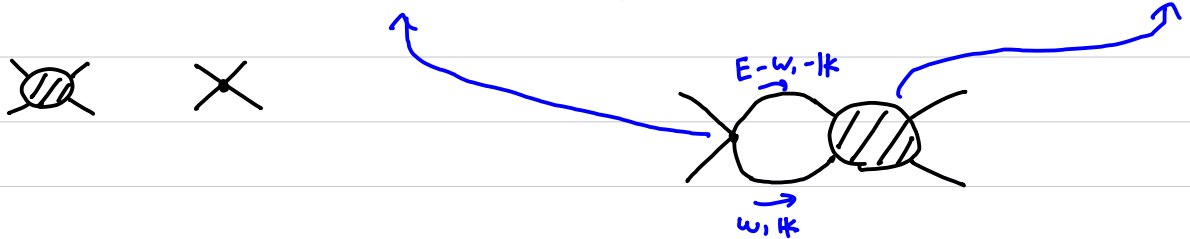
~ リッポマン・シュウイングー 方程式

- このEFTでは exact な4点関数, 近似なし
- 異なる $(\lambda_0)^n$ の項が無限次まで足されている。
 $\Rightarrow$ 非摂動的な散乱振幅
- λ_0 が小さいとして摂動すると $\text{Diagram 1} = \text{Diagram 2}$

振幅の計算

2体の重心系, エネルギー E

$$iA(E) = -i\lambda_0 - i\lambda_0 \frac{1}{2} \int \frac{d\omega d^3k}{(2\pi)^4} iG(\omega, k) iG(E-\omega, -k) iA(E)$$



- ループの積分はUV発散

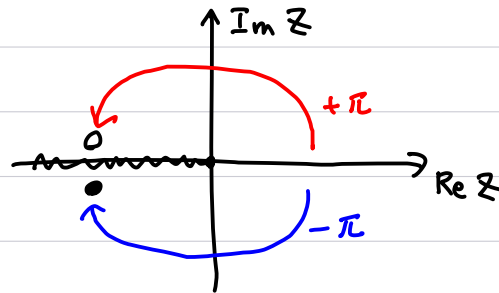
~ 3次元の関数ポテンシャル問題と同じ

$|k|$ 積分にカットオフ Λ を導入すると

$$A(E) = \left[-\frac{1}{\lambda_0} - \frac{m}{4\pi^2} \left(\Lambda - \sqrt{-mE - i0^+} \arctan \frac{\Lambda}{\sqrt{-mE - i0^+}} \right) \right]^{-1} \quad (11)$$

- $\sqrt{-mE - i0^+}$ について

関数 $\sqrt{z}$ は実軸負 ($\text{Re } z < 0, \text{Im } z = 0$) の領域で虚部を持つ
 $\Rightarrow$ カットがある。 $z=0$ が branch point



$r > 0$ としたとき, $\sqrt{-r}$ は不定

$$0 \text{ の場合: } \sqrt{-r + i0^+} = \sqrt{r} e^{+i\pi/2} = e^{i\pi/2} \sqrt{r} = +i\sqrt{r}$$

$$0 \text{ の場合: } \sqrt{-r - i0^+} = \sqrt{r} e^{-i\pi/2} = e^{-i\pi/2} \sqrt{r} = -i\sqrt{r}$$

$$\text{よって } E = p^2/2\mu, \quad \mu = m m / (m+m) = m/2 \text{ より}$$

$$\sqrt{-mE - i0^+} = -i\sqrt{m|E|} = -i\sqrt{|p^2|} = -ip$$

- カットが Λ より十分小さい運動量 $p \ll \Lambda$ では

$$\arctan\left(\frac{\Lambda}{-ip}\right) \sim \frac{\pi}{2} + \theta\left(\frac{p}{\Lambda}\right)$$

となるので, (11)は

$$A(E) \sim \left[-\frac{1}{\lambda_0} - \frac{m}{4\pi^2} \Lambda - ip \frac{m}{8\pi} \right]^{-1}$$

散乱振幅は

$$f(E) = \frac{m}{8\pi} A(E_p) = \frac{1}{\underbrace{-\frac{8\pi}{m} \left(\frac{1}{\lambda_0} + \frac{m}{4\pi^2} \Lambda \right)}_{\text{定数} = -\frac{1}{a_0}} - ip} \quad \text{散乱長}$$

注) 角度によらない $\rightarrow$ s 波散乱のみ

ユニタリ-性

散乱振幅の比較

$$f_{NP}(E_p) = \frac{1}{-1/a_0 - i\bar{p}} \quad ; \quad \text{非摂動的} \quad \text{///} = \times + \text{---} + \dots$$

$$f_p(E_p) = \frac{m}{8\pi} \lambda_0 \equiv C \quad ; \quad \text{摂動的} \quad \text{///} = \times$$

関係式 $f(p) = [S(p) - 1] / (2i\bar{p})$ を用いると, S 行列は

$$\begin{aligned} S_{NP}(p) &= 2i\bar{p} f_{NP}(p) + 1 \\ &= \frac{2i\bar{p}}{-1/a_0 - i\bar{p}} + 1 \\ &= \frac{-1/a_0 - i\bar{p} + 2i\bar{p}}{-1/a_0 - i\bar{p}} \\ &= \frac{-1/a_0 + i\bar{p}}{-1/a_0 - i\bar{p}} \end{aligned}$$

 $p \in \mathbb{R}$ に対して

$$S_{NP}(p) S_{NP}^*(p) = \frac{-1/a_0 + i\bar{p}}{-1/a_0 - i\bar{p}} \frac{-1/a_0 - i\bar{p}}{-1/a_0 + i\bar{p}} = 1$$

非摂動振幅はユニタリ-性を満たす。

$$S_p(p) = 2i\bar{p} C + 1$$

$$S_p(p) S_p^*(p) = (2i\bar{p} C + 1)(-2i\bar{p} C + 1)$$

$$= 1 + 4C^2 p^2 \leftarrow \text{ユニタリ-でない!}$$

一般に摂動計算 (Born 近似など) はユニタリ-性を破る。

注) ユニタリ-性から光学定理を導出して示せる。

注) $f = \text{const} \Rightarrow \sigma \propto |f|^2 = \text{const.}$ より ユニタリ-性限界に依拠。

くりこみ

物理量である散乱長 a_0 は Λ に依存しない。

$$\lambda_0(\Lambda) = \left(1 - \frac{2}{\pi} a_0 \Lambda\right)^{-1} \frac{8\pi}{m} a_0$$

と結合定数を決めれば a_0 , $f(E)$ は Λ 非依存

問 3 無次元結合定数 $\hat{\lambda}(\Lambda) = \frac{m}{4\pi^2} \Lambda \lambda_0(\Lambda)$ のくりこみ群方程式が

$$\hat{\lambda}^* = 0, -1$$

に固定点を持つことを示せ。

$$a_0 = \frac{m}{8\pi} \left(\frac{1}{\lambda_0} + \frac{m}{4\pi^2} \Lambda \right)^{-1}$$

$$= \frac{\pi \hat{\lambda}(\Lambda)}{2\Lambda} \left(1 + \hat{\lambda}(\Lambda) \right)^{-1}$$

より $\lambda^* = 0$ は $a_0 = 0$: 相互作用なし, trivial

$\lambda^* = -1$ は $a_0 = \pm\infty$: ユニタリ-極限, nontrivial
 $\uparrow$
 -1 に上から/下から近づく

§ 3 のまとめ

- 有効場の理論 $\simeq$ 低エネルギー-物理の記述
 $\uparrow$
 対称性

• 接触相互作用 EFT $\rightarrow f(p) = \frac{1}{-1/a_0 - \lambda p}$

ユニタリ-な散乱振幅