§4 カイラル摂動論

4.1 $\bar{K}N$ 相互作用と $\Lambda(1405)$

$\bar{K}$ 中間子 ($s\bar{u}, s\bar{d}$, $J^P=0^-$) の性質

① 他の $S=-1$ メソンより軽い ($m_{\bar{K}} \sim 0.5\, m_{\bar{K}^*}$)

← NG ボソン (カイラル対称性の SSB)

② π より有意に重い ($m_{\bar{K}} \sim 3.5\, m_\pi$)

← s クォーク $m_{NG}^2 \propto m_q$ (explicit な破れ)

① と ② の競合 ⇒ 強い $\bar{K}N$ 相関 ⇒ $\Lambda(1405)$ の動的生成

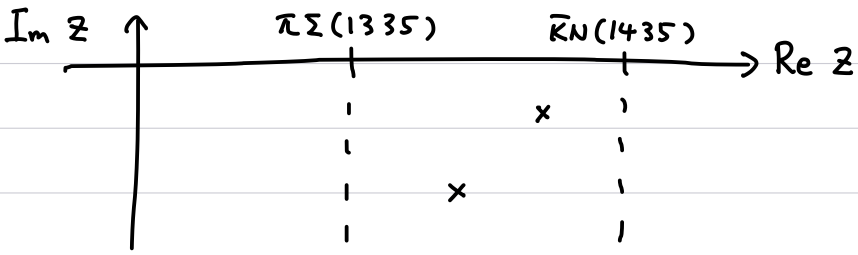
$\Lambda(1405)$ の現状

最新の [PDG] (2018 版) は極の位置を記載

(mass, width より前, 4つのグループの解析)

[IHW 2011] の結果 (中心値)

	$\mathrm{Re}\, z$ [MeV]	$-2\,\mathrm{Im}\, z$ [MeV]
High-mass pole	1424	52
Low-mass pole	1381	162



なぜ2つの極? どのような解析? → §5

4.2 カイラル対称性 [Scherer-Schindler, HJ 2012, HHSYY 2017]

QCDラグランジアンで $m_u, m_d, m_s \to 0$

$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{q} i \not{\partial} q$, $q = (u, d, s)^T$

右手, 左手クォークと射影演算子

$P_{\substack{R\\L}} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$, $q_{\substack{R\\L}} = P_{\substack{R\\L}} q$

$\Rightarrow$ $\mathcal{L}_{QCD} = \bar{q}_R i \not{\partial} q_R + \bar{q}_L i \not{\partial} q_L$ 右と左が分離

- カイラル変換

$q_R \to R q_R$, $R = \exp\{i\theta_R^a T^a\} \in SU(3)_R$ $T^a = \frac{\lambda^a}{2}$

$q_L \to L q_L$, $L = \exp\{i\theta_L^a T^a\} \in SU(3)_L$

の下で $\mathcal{L}_{QCD}$ は不変。

カイラル対称性 $G = SU(3)_R \otimes SU(3)_L$

注) Gの元は $g = (R, L)$ と2つの要素で指定される。

生成子は Right : $(T^a, 0)$, Left : $(0, T^a)$

- Vector, Axial vector 変換

Vector : $\theta_R^a = \theta_L^a = \theta_V^a$ LとRを同じ向き

Axial : $\theta_R^a = -\theta_L^a = \theta_A^a$ LとRを反対向き

生成子は Vector : (T^a, T^a), Axial : $(T^a, -T^a)$

Vector 変換はGの部分群 $SU(3)_V$

注) Axial 変換は演算の積で閉じないので $SU(3)_A$ と書かない

自発的破れ

$\bar{q}q$ はカイラル不変でない

$$\bar{q}q = \bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L \xrightarrow{g} \bar{q}_L L^\dagger R q_R + \bar{q}_R R^\dagger L q_L \neq \bar{q}q$$

QCD真空：カイラル凝縮

$$\langle 0|\bar{q}q|0\rangle \equiv \langle \bar{q}q\rangle \neq 0$$

$\bar{q}q$ は $SU(3)_V$ の下で不変 $(R=L=V)$

∴ 対称性の自発的破れ(SSB)

$$SU(3)_R \otimes SU(3)_L \longrightarrow SU(3)_V$$

南部ゴールドストーンの定理：破れた生成子の数の零質量粒子

π (π^+, π^-, π^0), K $(K^-, \bar{K}^0, K^+, K^0)$, η

注) $SU(3)_V$ は自発的に破れない (Vafa-Witten)

explicit な破れ

クォーク質量項は explicit に(ラグランジアンレベルで)対称性を破る。

"破り方" を明確にするために、外場を導入

$$\mathcal{L}_{ext} = \bar{q}(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{スカラー}}}{s} - i\gamma_5 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{擬スカラー}}}{p})q$$

$s + ip \equiv \mathcal{M}$ と定義すると $\mathcal{L} = \bar{q}_L \mathcal{M}^\dagger q_R + \bar{q}_R \mathcal{M} q_L$

仮に $\mathcal{M} \xrightarrow{g} R\mathcal{M}L^\dagger$ と変換するなら $\mathcal{L}_{ext}$ は g 不変.

$\mathcal{M} = \mathrm{diag}(m_u, m_d, m_s)$ とすると explicit に対称性を破る。

$\boxed{問4}$ Gell-Mann-Oakes-Renner (GMOR) 関係式 (2 flavor, $m_u=m_d=\hat{m}$)

- $\langle 0|A^\mu_a(x)|\pi_b(p)\rangle = ip^\mu f_\pi e^{-ipx}\delta_{ab}$ ：NG定理 ($\hat{m}=0$)

結合定数

- $\langle 0|P_a(x)|\pi_b(p)\rangle = Z e^{-ipx}\delta_{ab}$

$$A^\mu_a = \bar{q}\gamma^\mu\gamma_5\frac{\tau_a}{2}q \quad , \quad P_a = \bar{q}i\gamma_5\tau_a q$$

- $\partial_\mu A^\mu_a = \hat{m}P_a$ ：Noetherの定理 ($\hat{m}\neq 0$)

以上を用いて $m_\pi^2 f_\pi^2 = -\hat{m}\langle\bar{q}q\rangle + \mathcal{O}(\hat{m}^2)$ を導け。

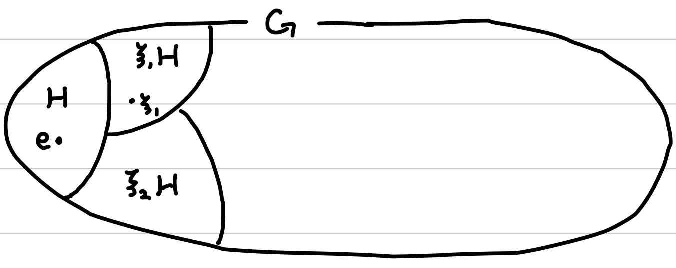
$\hat{m}=0$でのカイラル凝縮

4.3 非線形表現 [CCWZ1969]

SSB： $G\to H$, $G=SU(3)_R\otimes SU(3)_L$, $H=SU(3)_V$

SSBを前提してNG場$\phi(x)$の変換性を決め
カイラル不変なラグランジアンを構成する。

商空間 G/H ：Hでの変換を同一視した「Gの元の集合」を元(Coset)とする集合



代表元ξ： Coset ξHを指定するGの元。

ξはHに入らないGの元：破れた生成子で生成される

→ ξをNG場$\phi(x)$でパラメトライズできる：$\xi(\phi)$

→ $\phi(x)$のgでの変換性をξの変換性を用いて決定：$\xi(\phi)\xrightarrow{g}\xi(\phi')$

・パラメトリゼーション

$\xi(\phi)$は破れた対称性で生成されるので

$\xi = \left(\exp\{i\theta_A^a T^a\}, \exp\{-i\theta_A^a T^a\} \right)$ の形

$\Rightarrow \ u(\phi) \equiv \exp\{i\phi/\sqrt{2}f\}$, $\phi = \sum_{a=1}^{8} \frac{\lambda_a}{\sqrt{2}}\phi_a$ として

3×3 行列

$\xi(\phi) = \left(u(\phi), u^{+}(\phi) \right)$

・変換性

代表元ξのg変換の一意的な分解 $g\xi = \xi' h$

変換後とみなす

$\xi(\phi) \xrightarrow{g} \xi(\phi') = g\,\xi(\phi)\,h^{-1}(\phi, g)$

変換gと"座標"ϕに依存

成分表示

$\left(u(\phi), u^{+}(\phi) \right) \xrightarrow{g} (R, L) \left(u(\phi), u^{+}(\phi) \right) \left(V^{+}(\phi, g), V^{+}(\phi, g) \right)$

$u(\phi) \xrightarrow{g} R\,u(\phi)\,V^{+}(\phi, g) = V(\phi, g)\,u(\phi)\,L^{+}$ —— (11)

$u^{+}(\phi) \xrightarrow{g} L\,u^{+}(\phi)\,V^{+}(\phi, g)$

ϕの変換性は($V(\phi, g)$を通じて)非線形

ラグランジアンの構成要素

Maurer-Cartan 1-form $\alpha_\mu = \frac{1}{i}\xi^{-1}\partial_\mu \xi$

GのLie代数の元：HのLie代数(∥成分)とそれ以外(⊥成分)に分解

$\alpha_{\mu\parallel} = \frac{1}{2i}\left[u^{+}\partial_\mu u + u\partial_\mu u^{+}\right] = -\frac{i}{4f^2}\left(\phi\partial_\mu\phi - \partial_\mu\phi\cdot\phi\right) + \mathcal{O}(\phi^4)$ 偶数次

—— (12)

$\alpha_{\mu\perp} = \frac{1}{2i}\left[u^{+}\partial_\mu u - u\partial_\mu u^{+}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}f}\partial_\mu\phi + \mathcal{O}(\phi^3)$ 奇数次

それぞれ Vector, Axial カレントに対応。

・変換性 ← (11)

$$\alpha_{\mu\parallel} \xrightarrow{g} V\alpha_{\mu\parallel}V^\dagger + \frac{1}{i}V\partial_\mu V^\dagger$$

← $V(\phi(x), g)$

$$\alpha_{\mu\perp} \xrightarrow{g} V\alpha_{\mu\perp}V^\dagger$$

注) α_μ の変換性は L, R を含まない

ϕ 以外の場(バリオンなど)は H の線形表元:

$$\psi \xrightarrow{g} D(V(\phi,g))\psi$$

この場合 $\partial_\mu\phi$ は共変でない → $\alpha_{\mu\parallel}$ を使って共変微分にする。

4.4 カイラルラグランジアン

- $\alpha_{\mu\parallel}$, $\alpha_{\mu\perp}$ を用いてg不変な構造
- 微分の数の少ないもの:低エネルギー

$$\mathrm{Tr}(\alpha_{\mu\perp}\alpha^\mu{}_\perp) \xrightarrow{g} \mathrm{Tr}(V\alpha_{\mu\perp}V^\dagger V\alpha^\mu{}_\perp V^\dagger) = \mathrm{Tr}(\alpha_{\mu\perp}\alpha^\mu{}_\perp)$$

$$\mathcal{L}_2 = C\,\mathrm{Tr}(\alpha_{\mu\perp}\alpha^\mu{}_\perp)$$

↑ 低エネルギー定数, 対称性のみで(一般には)決まらない。

この項の場合(ϕ の2次の項は)

$$= C\,\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{\sqrt{2}f}\partial_\mu\phi\,\frac{1}{\sqrt{2}f}\partial^\mu\phi\right)$$

$$= \frac{C}{2f^2}\mathrm{Tr}\left(\frac{\lambda_a}{\sqrt{2}}\partial_\mu\phi_a\,\frac{\lambda_b}{\sqrt{2}}\partial^\mu\phi_b\right)$$

$$= \frac{C}{2f^2}\partial_\mu\phi_a\partial^\mu\phi_b\,\frac{1}{2}\,2\delta_{ab} = \frac{C}{2f^2}\partial_\mu\phi_a\partial^\mu\phi^a$$ より

運動項の規格化: $C = f^2$

注) $\mathcal{L}$ は ϕ^4, ϕ^6, … の相互作用項を含んでおり
結合定数が f で決まっている。← カイラル対称性

よく使われる表示

$$U(\phi)=[u(\phi)]^2=\exp[i\sqrt{2}\phi/f]$$

$$U(\phi)\xrightarrow{g}RU(\phi)L^\dagger$$

$$\mathcal{L}=\frac{f^2}{4}\mathrm{Tr}[\partial_\mu U\partial^\mu U^\dagger]$$

クォーク質量項

$\mathcal{L}_{eff}$ も $\mathcal{L}_{QCD}$ と同じように対称性を破る。

$M\to RML^\dagger$ で不変なラグランジアン

$$\mathrm{Tr}(MU^\dagger+UM^\dagger)\xrightarrow{g}\mathrm{Tr}(RML^\dagger LU^\dagger R+RUL^\dagger LM^\dagger R)$$

$$=\mathrm{Tr}(MU^\dagger+UM^\dagger)$$

パリティのため

低エネルギー定数 B を用いて $\chi=2BM$ とし

$$\mathcal{L}_\chi=\frac{f^2}{4}\mathrm{Tr}(\chi U^\dagger+U\chi^\dagger)$$

Bの決定（2flavor，質量 $\hat{m}$ の場合）

$$\mathcal{L}_{QCD}=-\hat{m}\bar{q}q\implies\langle\bar{q}q\rangle=-\frac{\partial\langle0|\mathcal{L}_{QCD}|0\rangle}{\partial\hat{m}}$$

$\mathcal{L}_\chi$ の ϕ を含まない項（$U=U^\dagger=1$）は

$$=\frac{f^2}{4}\mathrm{Tr}\left[2B\begin{pmatrix}\hat{m}&\\&\hat{m}\end{pmatrix}+2B\begin{pmatrix}\hat{m}&\\&\hat{m}\end{pmatrix}\right]=2Bf^2\hat{m}$$

$$\langle\bar{q}q\rangle=-\frac{\partial\langle0|\mathcal{L}_\chi|0\rangle}{\partial\hat{m}}=-2Bf^2$$

$$\Rightarrow B=-\frac{\langle\bar{q}q\rangle}{2f^2}$$

$\mathcal{L}_\chi$ の ϕ^2 の項：π の質量項 ⟵ GMORが成立

バリオン場

3 flavor の基底状態バリオンは 8重項 → adjoint 表現

$$B = \sum_{a=1}^{8} B_a \frac{\lambda_a}{\sqrt{2}}$$

$$B \xrightarrow{g} V(\phi, g)\, B\, V^\dagger(\phi, g), \qquad \bar{B} \xrightarrow{g} V \bar{B} V^\dagger$$

共変微分

$$D_\mu B \equiv \partial_\mu B + [i\alpha_{\mu\parallel}, B]$$

$$D_\mu B \xrightarrow{g} V D_\mu B V^\dagger$$

微分の一次までで最も一般的なラグランジアン

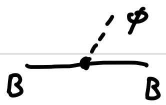
$$\mathcal{L}_B = \mathrm{Tr}\left[\bar{B}(i\not{D} - M_0)B - D\left(\bar{B}\gamma^\mu\gamma_5\{\alpha_{\mu\perp}, B\}\right) - F\left(\bar{B}\gamma^\mu\gamma_5[\alpha_{\mu\perp}, B]\right)\right]$$

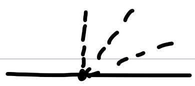
注) 質量項 M_0 は g 不変

- $\alpha_{\mu\perp}$ の項

D, F は低エネルギー定数で軸性電荷を表す。実験で決定する。

2 flavor のとき, F+D = g_A 1つ

$\alpha_{\mu\perp}$ が ϕ の奇数次なので 

\+  + ----

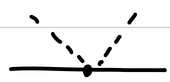
湯川結合

- 共変微分の項の ϕ の2次

ワインバーグ友沢項 [Weinberg 1966, Tomozawa 1966]

$$\mathcal{L}_{WT} = \mathrm{Tr}\left(\bar{B}\, i\gamma^\mu [i\alpha_{\mu\parallel}, B]\right)$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\bar{B}\gamma^\mu \frac{i}{4f^2}[\phi \overleftrightarrow{\partial_\mu} \phi, B]\right) \leftarrow (12)$$



§5でくわしく。

§4のまとめ

- カイラル対称性, 自発的, explicit な破れ
- 有効ラグランジアン ← 非線形表現
- メソン場のラグランジアン

  GMOR関係式を自動的に満たす
- バリオン場の導入, WT項