# 益川さんの思い出–マヨラナ粒子のCP等–

藤川　和男

東大/理研

**益川さんとは1976年から1980年まで原子核研究所で同僚であった:**

このころの益川さんの（および私的な）背景;

1974年秋　charm 発見
1975年1月　日大研究会　6元模型の現象論を議論　(←牧先生から益川さんたちの論文)
1975年夏　Pakvasa-Sugawaraの論文(K中間子)
　　　Maianiが6元模型でのCPの破れの論文
1975年秋、　DESYでJ. EllisがCPのセミナー（小林・益川への言及無し）
1976年の春、DESYで　A. Paisがセミナー「小林・益川の定理」

他方、1975年の夏に1.8GeVのheavy leptonの現象論　(藤川・河本)　Pearl のU-particleをheavy　lepton と解釈。レプトンの第3世代。

## 益川さんの思い出

私は個人的には、日本国内で研究するにはどうすればよいかという研究方法とか態度のようなものを益川さんから学んだ(海外での研究方法とは少し異なる)

例えば、

Phys. Lett. Bに注意深く目を通す(益川さんは勉強家)

(ゼミ等での印象では) 論文は文献学的に徹底的に読み解く

**当時は益川さんは宇都宮大学におられた中島日出雄さんと共同研究をしておられた**

研究の進捗状況は大部分は中島さんから聞いた

一言でいうと延々と議論するが論文はなかなか書かないという印象であった（このスタイルは私には真似ができないものではあった）

**益川さんと中島さんは、Gribovの問題というものに取り組んでおられた**

これを簡単に説明すると

$$\boldsymbol{f(\omega) = \partial_\mu A_\mu^\omega(x)}$$

において　$\boldsymbol{A_\mu^\omega(x)}$は、任意のゲージ場$\boldsymbol{A_\mu(x)}$のゲージパラメター$\boldsymbol{\omega(x)}$を用いたゲージ変換。Abelianゲージ場だと、これはゲージ場の併進になり運動は簡単だが　non-Abelianだと併進と回転の重ね合わせになり複雑になる。

具体的には、Landau gaugeだと、$\boldsymbol{f(\omega) = 0}$を解くことになるが複数個の解が一般に存在する（Gribovの問題）。

基本的には、このようなことが滅多に起こらなければ問題ないが、益川・中島はこのようなことは、generic な場で起こり得るということを示した。

この成果は益川さんの Tokyo Conference での「英語の」講演につながった( August 23-30, 1978)

益川さんは、自分の名前がよくない( 敏英は英語に敏感）と冗談を言っておられたが、私見では英語は日本人の平均であり、英語の知識は非常に高かった（中島さんの原稿を添削していた）。完璧な英語が必要と思いこんでおられたのがまずかった。

何かの雑談の折に、「助手という名称はよくない。何故なら、子供が幼稚園とかに言って、お父さんが何をしているのと聞かれた時に、”助手”というのはよくない」　というような意見も言っておられた。(益川さんは30代半ばまで助手であった）

論文に関しても、本当は一人で書ければよかったというようなことも私に漏らされたこともありましたが、私見では、益川さんが自分で論文を書かなかったことが、本質をついた考え抜かれ精選された質の高い比較的少数の論文を書くことにつながったと思っています。

例えば、益川・中島の拘束系の力学の扱いの論文は、S.Weinberg の
Lectures on Quantum Mechanics　(2015)
において数少ない引用文献の一つとして脚注に引用されている。

南部先生も基礎研の研究会で、「さすがは益川さん」というようなコメントを昔されたのを記憶していますが、益川さんの見識とか洞察は、一流の人にはよく分かり共鳴するところがあるのでしょう。

益川さんは1980年に核研を離れて基礎研の教授になられた。　私も短期間だが1990年ごろに基礎研に滞在したので（益川さんは理学部へ移っておられたが)、時々キャンパスでお会いした。その後も、学会とか研究会等で立ち話をする機会があった。

比較的晩年に京都産業大学の教授をされていて、ノーベル賞受賞の前ごろは、体調が万全では無かったこともあり、大学の講義がかなり負担で、(日大での）藤川さんはどうですか、というようなことを聞かれたこともあった。

確か、大津に山荘を作られ好きな音楽を聞いて読書をしているというようなことも教えて頂いた。益川さんの音楽の知識はすごいものがあり、また数学が好きで、この数学への志向は益川さんの論文に独特な香りを与えている。

このシンポジウムの本題にもどると、この50年の日本の素粒子物理での大きな発展と言えば、CPの破れの問題とニュートリノの問題がある。

ニュートリノに関係して、益川さんとの最後の物理に関する会話にもなった京産大益川塾と日大の合同セミナーで小生が話した - Majorana ニュートリノのCP等 - を説明したい。

## Majoranaニュートリノの性質：

標準模型ではMajoranaニュートリノは

$$\psi(x) = \nu_L(x) + C\overline{\nu_L}^T(x),$$
$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

の形で現れる。すなわち、Weyl粒子の重ね合わせでMajoranaが定義される。

Majoranaの定義は、Clifford代数の表現論から $C = i\gamma^2\gamma^0$ として

$$\psi(x) = C\overline{\psi}^T(x)$$

で与えられる。

ここで、奇妙なのは、上のMajorana粒子のC変換の定義では

$$\nu_L(x) \to C\overline{\nu_L}^T(x), \quad C\overline{\nu_L}^T(x) \to \nu_L(x)$$

したがって、多くの教科書では$\nu_L(x)$のcharge conjugation は

$$\nu_L(x) \to C\overline{\nu_L}^T(x)$$

と書かれている。（我々はpseudo-Cと呼んだ）。

演算子形式では

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\nu_L(x)\mathcal{C}^\dagger &= (\frac{1-\gamma_5}{2})\mathcal{C}\nu_L(x)\mathcal{C}^\dagger \\ &= (\frac{1-\gamma_5}{2})C\overline{\nu_L}^T(x) = 0.\end{aligned}$$

他方、chiral fermion のcharge conjugation は

$$\nu_L(x) \to C\overline{\nu_R}^T(x)$$

で与えられる（$d = 4$では）。

すなわち、Majorana　ニュートリノの定義 $\psi(x) = \nu_L(x) + C\overline{\nu_L}^T(x)$ と　chiral　fermion のC変換則 $\nu_L(x) \rightarrow C\overline{\nu_R}^T(x)$ の折り合いをどうつけるかというのが問題である。

この問題に関して、私が試みたのは

1.　真空の定義を変える。すなわち、Bogoliubov変換とかPauli-Gursey変換を考える。この描像では、電荷とかchiralityではなく、charge conjugation Cが真空に凝縮するという描像になる。$\longrightarrow$ “Bogoliubov quasi-particle”

2.　もう一つの可能性としては、(標準模型の一般化での）Majoranaニュートリノは Cでは定義されずCPでのみ定義されるという立場。

3世代のシーソー模型

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& \overline{\nu}_L(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\nu_L(x) + \overline{\nu}_R(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\nu_R(x)\\ &- \overline{\nu}_L(x)m_D\nu_R(x)\\ &- (1/2)\nu_L^T(x)Cm_L\nu_L(x)\\ &- (1/2)\nu_R^T(x)Cm_R\nu_R(x) + h.c.\end{aligned}$$

ここで

$m_D$=$3 \times 3$ complex Dirac mass matrix

$m_L$,$m_R$ = $3 \times 3$ symmetric and generally complex Majorana mass matrices.

この模型はPを破る。したがってCPをよくするとCを破る。これはMajoranaに反する。

We write the mass term as

$$(-2)\mathcal{L}_{mass} = \begin{pmatrix} \overline{\nu_R} & \overline{\nu_R^C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_R & m_D \\ m_D^T & m_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^C \\ \nu_L \end{pmatrix}$$

where

$$\nu_L^C \equiv C\overline{\nu_R}^T, \quad \nu_R^C \equiv C\overline{\nu_L}^T$$

Diagonalize the *complex symmetric* mass matrix using a $6\times6$ unitary matrix (**Autonne-Takagi factorization**)

$$U^T \begin{pmatrix} m_R & m_D \\ m_D^T & m_L \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & -M_2 \end{pmatrix},$$

where $M_1$ and $M_2$ are $3\times3$ real diagonal matrices.

We thus have

$$(-2)\mathcal{L}_{mass} = \left( \overline{\tilde{\nu}_R}\ \overline{\tilde{\nu}_R^C} \right) \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & -M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_L^C \\ \tilde{\nu}_L \end{pmatrix}$$

where we defined

$$\begin{pmatrix} \nu_L^C \\ \nu_L \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_L^C \\ \tilde{\nu}_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_R \\ \nu_R^C \end{pmatrix} = U^\star \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_R \\ \tilde{\nu}_R^C \end{pmatrix}$$

**Conventionally**, one defines

$$\psi_+(x) = \tilde{\nu}_R + \tilde{\nu}_L^C = \tilde{\nu}_R + C\overline{\tilde{\nu}_R}^T,$$
$$\psi_-(x) = \tilde{\nu}_L - \tilde{\nu}_R^C = \tilde{\nu}_L - C\overline{\tilde{\nu}_L}^T$$

and one obtains

$$\mathcal{L} = (1/2)\{\overline{\psi_+}(x) i \not\partial \psi_+(x) + \overline{\psi_-}(x) i \not\partial \psi_-(x$$
$$- (1/2)\{\overline{\psi_+} M_1 \psi_+ + \overline{\psi_-} M_2 \psi_-\}$$

**Generalized Pauli-Gursey transformation:** *Arbitrary* $\boldsymbol{6 \times 6}$ element of $\boldsymbol{U(6)}$ and canonical transformation,

$$\begin{pmatrix} \nu_L^C \\ \nu_L \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_L^C \\ \tilde{\nu}_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_R \\ \nu_R^C \end{pmatrix} = U^\star \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_R \\ \tilde{\nu}_R^C \end{pmatrix} \tag{4}$$

正準変換ではあるが真空を変える。

We thus consider a further $\boldsymbol{6 \times 6}$ real generalized Pauli-Gursey transformation $\boldsymbol{O}$ by

$$\begin{pmatrix} \tilde{\nu}_L^C \\ \tilde{\nu}_L \end{pmatrix} = O \begin{pmatrix} N_L^C \\ N_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_R \\ \tilde{\nu}_R^C \end{pmatrix} = O \begin{pmatrix} N_R \\ N_R^C \end{pmatrix}$$

Choosing a specific $\boldsymbol{6 \times 6}$ orthogonal transformation

$$O = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

where $\mathbf{1}$ stands for a $\mathbf{3} \times \mathbf{3}$ unit matrix,
we have

$$\boldsymbol{\mathcal{L} = (1/2)\{\overline{N}(x) i \not\partial N(x) + \overline{N^C}(x) i \not\partial N^C(x)\}}$$

$$\boldsymbol{- (1/4)\{\overline{N}(M_1 + M_2) N + \overline{N^C}(M_1 + M_2) N^C\}}$$

$$\boldsymbol{- (1/4)\{\overline{N}(M_1 - M_2) N^C + \overline{N^C}(M_1 - M_2) N\}.}$$

**Only the Dirac-type particles** $\boldsymbol{N(x)}$ and $\boldsymbol{N^C(x)}$ with well-defined C, P and CP, and $\boldsymbol{\gamma_5}$ disappears.　これはクオークでの小林・益川の対応物。

We now make a renaming of variables

$$\psi_+(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N(x) + N^C(x)),$$
$$\psi_-(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N(x) - N^C(x)),$$

and we obtain

$$\mathcal{L} = (1/2)\{\overline{\psi_+}(x)i\ \partial\!\!\!/\psi_+(x) + \overline{\psi_-}(x)i\ \partial\!\!\!/\psi_-(x$$
$$- (1/2)\{\overline{\psi_+}M_1\psi_+ + \overline{\psi_-}M_2\psi_-\}.$$

We find the proper transformation laws of $\psi_\pm(x)$ induced by those of $N$ and $N^C$. For $M_1 \neq M_2$ the lepton number is broken.

*One can define Majorana fermions naturally by a suitable choice of generalized Pauli-Gursey (or Bogoliubov) transformation in the seesaw model.*

シーソー機構の本質(一つの見方)：

二つのあまり差が無い大きな質量　$M_1$ と $M_2$ を考える。この時小さな質量を $m = M_1 - M_2$ として, 大きな質量を $M = M_1 + M_2$ とするのがシーソー機構である。

$$m = \frac{M_1^2 - M_2^2}{M}.$$

参考文献：


KF and A. Tureanu, Phys. Lett. B767 (2017) 199.

KF and A. Tureanu, Eur. Phys. J. C79 (2019) 752.

KF, Phys. Lett. B789 (2019) 76.

KF, Eur. Phys. J. C80 (2020) 285.

最後に, 第2、第3の ”益川” をどうして育てるか？

”自分の物理のスタイルを確立し、後は努力”

”世界の流れには注意を払う、しかし流されない”