益川さんの宿題:
宇宙定数問題

素粒子論のこの 50 年、そして未来
ー益川さんを偲んでー
March 12-13, 2022 @京大基研

九後 太一

益川さんとの研究上の関わり

- 益川さんは（幻の修士論文の）superviser
- M1の終わり(1972.3)から,修士論文への指導として、個人ゼミ 't Hooftのくりこみの論文

  → R_ξ ゲージの発見（藤川-Lee-三田preprintが先に出た）

- 小林-益川（1972）の議論が目の前で行われていた！

  → 未熟で議論に加われず　　幻のKKM論文

- 益川さんとは共著論文がない。
- 折に触れて益川さんからの「宿題」と思った事に対する、

  回答できたこと、未だ出来てないこと、についてお話したい

益川-中島(1974)

Spontaneous Symmetry Breaking in Vector-Gluon Model, PTP 52 (1974) 1326-1354

- くり込み可能模型で
  Dynamical Chiral Symmetry Breaking

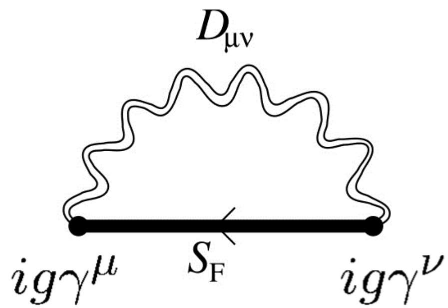
- Chiral WT identity

$$(p-q)^{\mu}\Gamma_{5\mu} = iS_{\mathrm{F}}^{-1}(p)\gamma_5 + i\gamma_5 S_{\mathrm{F}}^{-1}(q)$$

consistentな近似 for $\Gamma_{5\mu}$ and S_{F}

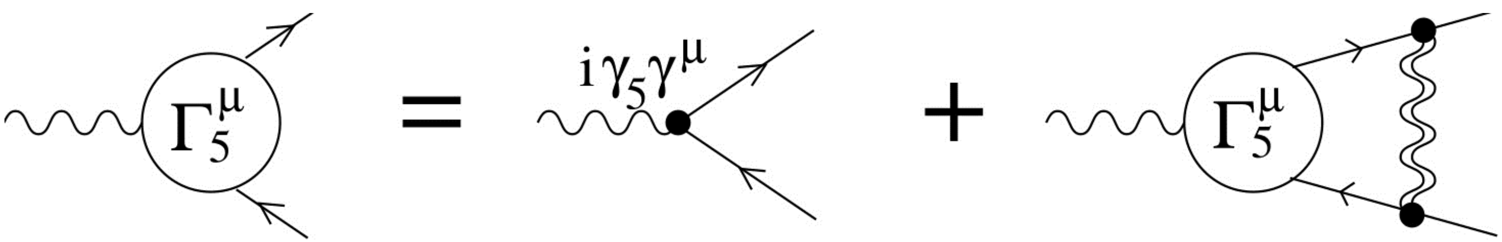
Schwinger-Dyson eq. for S_F :

$$iS_F^{-1} = i\not{\partial} + \not{A} - i$$



$$\Big|_{A_\mu=0}$$

Bethe-Salpeter eq. for $\Gamma_{5\mu}$:



→ Mutually consistent : they satisify chiral WT identity

- Fukuda-Kugo

Schwinger-Dyson Equation for Massless Vector Theory and Absence of Fermion Pole,'' NPB117 (1976), 250-264.

- Massless gluon, Landau gauge
- 微分方程式
- Critical coupling : $\alpha_{\rm cr} = \pi/3$

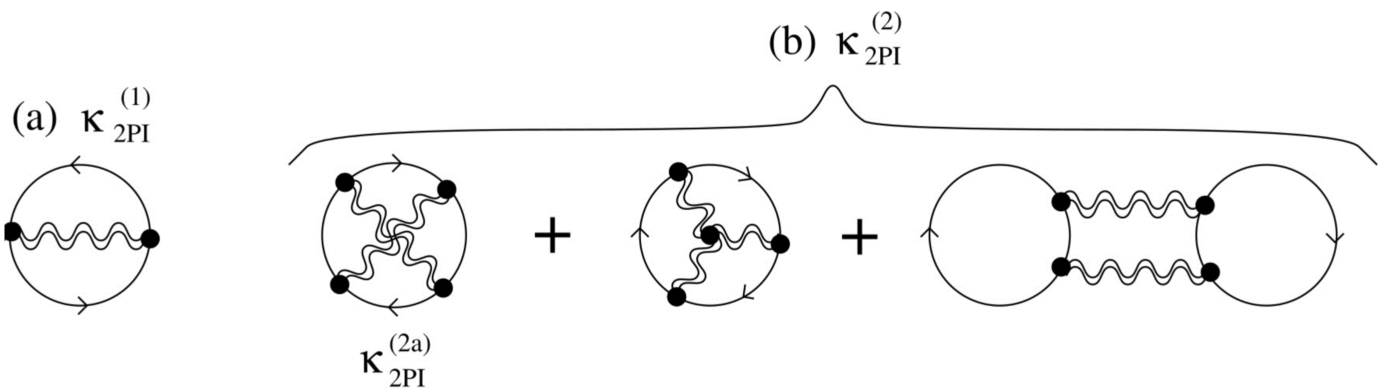
- Bando-Harada-Kugo

``External gauge invariance and anomaly in BS vertices and bound states,'' PTP 91 (1994) 927-948.

Mutually consistent SD and BS eqs for $S_{\rm F}$ and $\Gamma_{5\mu}$

外場A中のS_Fのeffective Action

$$i\Gamma[S_\mathsf{F}, A]$$
$$= -\mathsf{Tr}\,\mathsf{Ln}S_\mathsf{F} + \mathsf{Tr}\left(i(\partial\!\!\!/ - iA\!\!\!/)S_\mathsf{F}\right) + \mathcal{K}_{\mathsf{2PI}}[S_\mathsf{F}]$$

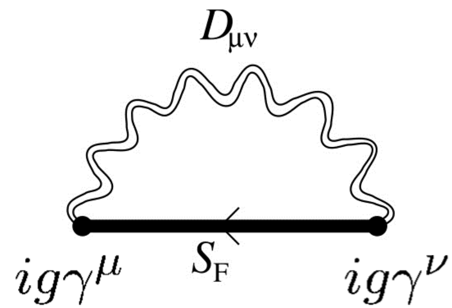


SD eq for S_F : $\left.\dfrac{\delta\Gamma}{\delta S_\mathsf{F}}\right|_{A=0}$

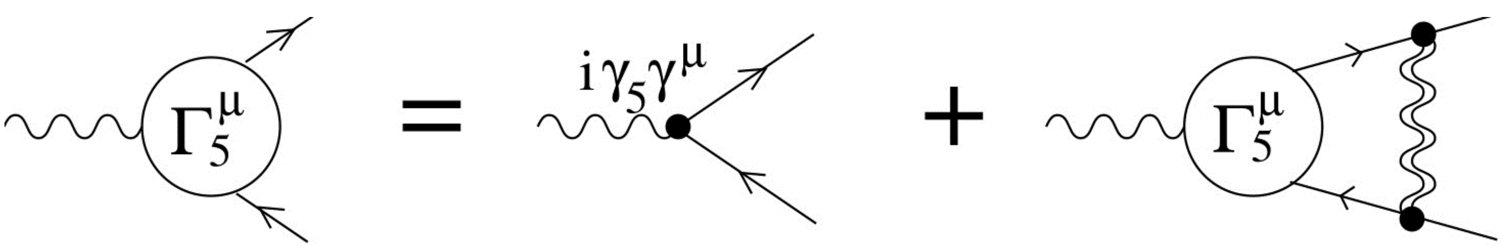
BS eq for current vertex $\Gamma_{5\mu}$: $\left.\dfrac{\delta\Gamma}{\delta S_\mathsf{F}\delta A_{5\mu}}\right|_{A=0}$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta S_{\mathrm{F}}} \;: \qquad \text{with } \mathcal{K}_{\mathrm{2PI}} = \mathcal{K}_{\mathrm{2PI}}^{(1)} \text{ の近似}$$

$$i S_{\mathrm{F}}^{-1} = i \not{\partial} + \not{A} - i$$

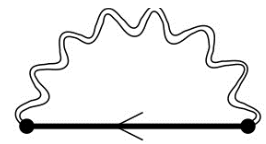


$$\left.\frac{\delta \Gamma}{\delta S_{\mathrm{F}} \delta A_{5\mu}}\right|_{A=0} \;:$$

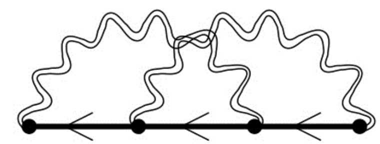


$$\frac{\delta\Gamma}{\delta S_\mathsf{F}} \; : \qquad \text{with } \mathcal{K}_{\mathsf{2PI}} = \mathcal{K}^{(1)}_{\mathsf{2PI}} + \mathcal{K}^{(2a)}_{\mathsf{2PI}}$$

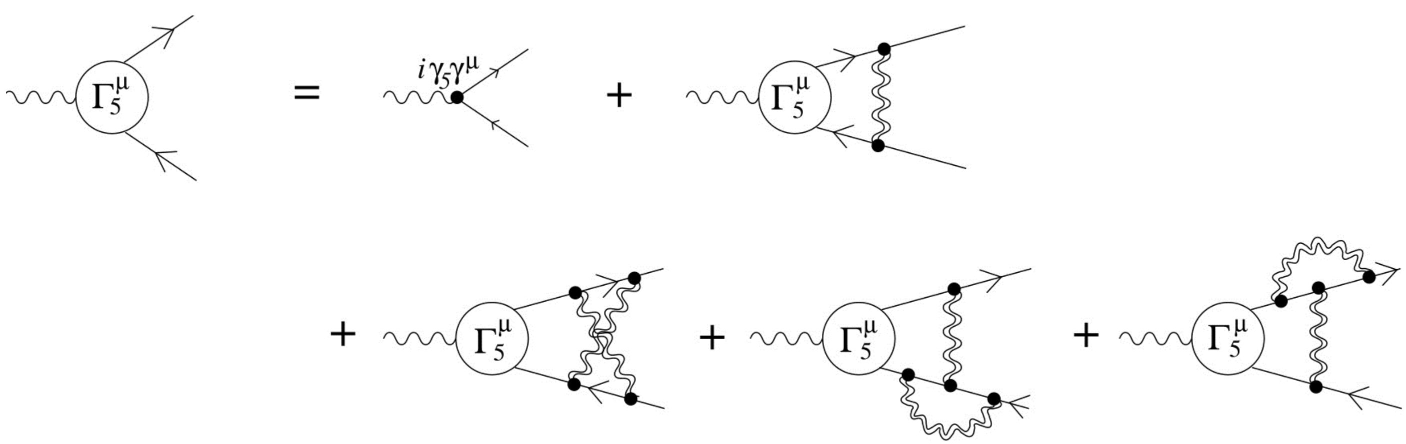
$$i\, S_\mathrm{F}^{-1}[A] \; = \; i\,\not\partial \; + \; \not A \; - \; i$$



$$-\; i$$



$$\left.\frac{\delta\Gamma}{\delta S_\mathsf{F}\,\delta A_{5\mu}}\right|_{A=0} \; :$$



有限温度のゲージ理論

- Bernard rule（1974）

FP ghostの温度Green関数： periodic in $0 \le t \le i\beta$

- 益川 suggests

This rule must be for quantity with P_0: projection onto physical subspace

$$Z(\beta) = \mathrm{Tr}\left(P_0\, e^{-\beta H}\right), \text{ or } \langle \mathcal{O} \rangle_\beta = \mathrm{Tr}\left(P_0\, e^{-\beta H} \mathcal{O}\right)$$

- → Hata-Kugo (1980)

``An Operator Formalism of Statistical Mechanics of Gauge Theory in Covariant Gauges," PRD21 (1980), 3333

proved

$$\mathrm{Tr}\left(P_0\, e^{-\beta H}\right) = \mathrm{Tr}\left((-1)^{N_{\mathrm{FP}}} e^{-\beta H}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} P_0 + P_{\geq 1} = 1 \\ P_{\geq 1} = \{Q_\mathrm{B},\, \exists R\} \end{array}\right\} \rightarrow \ P_0 = 1 - \{Q_\mathrm{B},\, R\}$$

(Fujikawa noticed this BRS-exact form first)

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\left(P_0\, e^{-\beta H}\right) &= \mathrm{Tr}\left(P_0\,(-1)^{N_\mathrm{FP}} e^{-\beta H}\right) \\ &= \mathrm{Tr}\left((-1)^{N_\mathrm{FP}} e^{-\beta H}\right) - \underline{\mathrm{Tr}\left(\{Q_\mathrm{B},\, R\}(-1)^{N_\mathrm{FP}} e^{-\beta H}\right)} \end{aligned}$$

- But the second term vanishes:

$$\begin{aligned} \text{第2項} &= \mathrm{Tr}\left(R\,(-1)^{N_\mathrm{FP}} e^{-\beta H} Q_\mathrm{B}\right) + \mathrm{Tr}\left(R\, Q_\mathrm{B}\,(-1)^{N_\mathrm{FP}} e^{-\beta H}\right) \\ &= \mathrm{Tr}\left(R\,\{(-1)^{N_\mathrm{FP}},\, Q_\mathrm{B}\}\, e^{-\beta H} Q_\mathrm{B}\right) = 0 \end{aligned}$$

since $N_\mathrm{FP}\, Q_\mathrm{B} = Q_\mathrm{B}\,(N_\mathrm{FP} + 1)$. Thus it is proved.

超対称理論での非線形表現

対称性G→Hに破れた時の低エネルギー有効理論
effective Lagrangian

- BKMU:（坂東-蔵本-益川-上原）

``Nonlinear Realization in Supersymmetric Theories,''
PTP72 (1984), 313 and 1207.

Kaehler potential の具体的構成法

- → IKK:（伊藤-九後-国友）

``Supersymmetric Nonlinear Realization for Arbitrary Kahlerian Coset Space G/H,'' NP B263 (1986), 295-308.

G/H がKahler manifold の場合の、BKMU 構成法の完全性証明

CCWZ 構成法 と BKMU構成法 のあらわな関係

宇宙定数問題 or 時空の理論

- Maskawa once said:

「ミクロな時空は、Hawkingの言うspace-time foamのような、マクロな時空とはかなり違うものではないか」

- 湯川流解釈:時空概念の根本的変革が必要
- 朝永流解釈:マクロ時空からミクロ時空への変化を調べれば良い。(特に宇宙定数)

宇宙定数の$\Lambda = V(\phi, \lambda)$ running

- 観測するエネルギースケールμに応じて、見える宇宙定数が変化？
- → くり込み群方程式(RGE)！

- M=100GeV → $\Lambda = (100\mathrm{GeV})^4$:EWscale
- M=100MeV → $\Lambda = (100\mathrm{MeV})^4$:Chiral SSB

Nonsense idea!, because RGE says

$$\frac{d}{d\mu}V(\phi, \lambda; \mu) = \left(\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda} + \gamma(\lambda)\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)V(\phi, \lambda; \mu) = 0$$

N.B. Classical and Quantum Vacuum Energy

Classical Potential Energy **Quantum Vacuum Energy**

$$V(\phi_c) \quad \simeq \quad \sum_{\boldsymbol{k},s} \frac{1}{2}\hbar\omega_{\boldsymbol{k}} - \sum_{\boldsymbol{k},s} \hbar E_{\boldsymbol{k}}$$

Finite , Vac. Cond. Energy
Spont. Sym. Breaking

Infinite , No control

These are nearly the same, as is seen in the Nambu--Jona-Lasinio model;
The potential energy V(φ) of composite boson comes from the 1-loop diagram of the fermion.
くり込みにも注意。 → V だけ議論する

「Λ=0が選ばれる」二つの立場

- Dynamical mechanism が存在する

  宇宙定数の計算可能性 → scale invariance が必要

  しかしquantum scale inv. も十分ではない

- 手で置く as

くり込み条件 in GR (General Relativity) $\simeq$ 初期値／境界条件 in UG (unimodular Gravity)

宇宙定数項のくり込み

平坦背景場上の重力理論

$\simeq$ 人間原理 in String理論

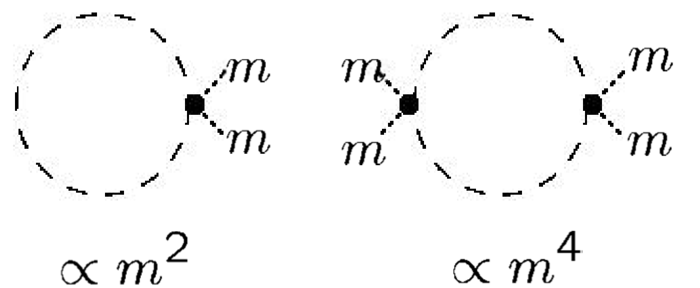
Dynamical mechanism が存在する approachの困難

- Classical scale invariance (SI) が必要：

If a dimensionful parameter exists,

$\exists m \quad \rightarrow \quad m^4$ term appears in vacuum energy

→ CC counterterm should exists → CC :free parameter



- Anomaly → Quantum SI renormalization

- Quantum SI renormalization （Englert et al)

n次元時空で、全ての結合定数をdilaton場σを用いて次元0にする。

$$\int d^n x \sqrt{-g}\, \sigma^2 R \qquad [\sigma] = \frac{n-2}{2}$$

SI prescription

$$\lambda \left(\phi^\dagger(x)\phi(x)\right)^2 \quad \rightarrow \quad \lambda \left[\sigma(x)^{\frac{2}{n-2}}\right]^{4-n} \left(\phi^\dagger(x)\phi(x)\right)^2$$

$$y\, \bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(x) \quad \rightarrow \quad y \left[\sigma(x)^{\frac{2}{n-2}}\right]^{\frac{4-n}{2}} \bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(x)\,.$$

- くりこみ可能性は壊すが、量子論的にもscale不変
- Even in quantum SI renormalization, however,
- 量子補正が結合定数のsuperfine tuningを要求

The potential takes the form

$$V(\phi,\sigma) = \sigma^4 W(x), \qquad x := \phi^2/\sigma^2$$

停留性条件: $O(\varepsilon^2) \simeq O(10^{-64})$

$$\frac{\partial}{\partial\phi} \propto W'(x) = 0 \qquad \rightarrow \text{ determines the direction } \langle x\rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma} \propto 4W(x) - 2xW'(x) = 0 \qquad \rightarrow \text{ constraint on coupling constants}$$

- Hierachy $\varepsilon = \frac{\langle\phi^2\rangle}{\langle\sigma^2\rangle} = \left(\frac{10^2\mathrm{GeV}}{10^{18}\mathrm{GeV}}\right)^2 = 10^{-32}$
- Stability of hierarchy : OK
- W(x)=0 は $O(\varepsilon^2) \simeq O(10^{-64})$ の精度で満たせる。
- しかし、これはVの値としては、 $\sim (100\mathrm{GeV})^4$
- $\Lambda_0 \sim (1\,\mathrm{meV})^4 \sim 10^{-56} \times (100\mathrm{GeV})^4$ を満たすには、

結合定数を56桁の精度でのsuperfine tuningが必要

- 結局、scale invarianceだけでは、potentialのflatness が保証されない。ので、無理にそれを実現するために、結合定数のsuperfine tuningが必要になった。
- Flat directionの存在を保証する

  更なる対称性ないし機構が必要。

手で置く approach

くり込み条件 in GR (General Relativity) $\simeq$ 初期値／境界条件 in UG (unimodular Gravity)

宇宙定数項のくり込み

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}(R - 2\Lambda)$$

平坦背景場上の重力理論

$$\sqrt{-g}\,R + \lambda(\sqrt{-g} - 1)$$

- GRでは、CC項 Λ のsuperfine tuning
- UGでは、multiplier場λ(x)のsuperfine tuning
- しかし、Psychologicalには、UGの方が

「EMテンソルのTrace 部分、$T_{\mu\nu} \propto g_{\mu\nu}$ に比例する様になった部分、は重力場とdecoupleする」

と言えて、自然な感じではある。

Unimodular gauge固定したGRとUnimodular Gravity

Kugo, Nakayama, Ohta ``BRST quantization of general relativity in unimodular gauge and unimodular gravity,'' PR D104 (2021) no.12, 126021

- GRとUGは、量子論的にも、おそらく、物理的内容は同じ。
- ただ、UGの方は、

「重力は、potentialの停留値（vacuum energy)に結合しない」

- という定式化なので、平坦時空を選ぶことに対する心理的負担は軽い。

→ 益川さん、未だ宿題に満足すべき回答が出来ていません。