

出題者： 大石 知広

※今回はおまけ問題なので演習・宿題には含まれません（提出不要）。腕試しがしたい人は挑戦してみてください。解答と解説は次回に配布します。

問 01B-1 次の不定積分を求めよ。

- (1) $\int 3(x^3+2)x^2 dx$ (2) $\int \sin^2 x \cos x dx$
(3) $\int \frac{dx}{x \log x}$ (4) $\int \frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1} dx$
(5) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$ (6) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$

問 01B-2 次の不定積分を求めよ。

- (1) $\int (5\sin x - 4\cos x) dx$
(2) $\int \left(\frac{3}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sin^2 x} \right) dx$
(3) $\int \left(\frac{1}{\tan x} + 2 \right) \sin x dx$

問 01B-3 次の不定積分を求めよ。

- (1) $\int x\sqrt{x^2-3} dx$ (2) $\int \frac{x}{\sqrt{4-3x^2}} dx$
(3) $\int \cos^4 x \sin x dx$
(4) $\int (x-2)(x^2-4x+5)^7 dx$
(5) $\int x e^{-2x^2+1} dx$ (6) $\int \frac{dx}{x \log x}$

(以下、解答用紙)

出題者： 大石 知広

※今回はおまけ問題なので演習・宿題には含まれません（提出不要）。腕試しがしたい人は挑戦してみてください。解答と解説は次回に配布します。

問 01B-1 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int 3(x^3+2)x^2 dx$ (2) $\int \sin^2 x \cos x dx$

(3) $\int \frac{dx}{x \log x}$ (4) $\int \frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1} dx$

(5) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$ (6) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$

解答 C は積分定数とする。

(1) $\frac{1}{2}(x^3+2)^2 + C$ (2) $\frac{1}{3}\sin^3 x + C$

(3) $\log|\log x| + C$

(4) $\frac{1}{3}\log|x^3+3x^2+1| + C$

(5) $\log(1+\sin x) + C$ (6) $\log(e^x + e^{-x}) + C$

解説 C は積分定数とする。

(1) $x^3+2=t$ とおくと $3x^2 dx = dt$
 $\int 3(x^3+2)x^2 dx = \int t dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}(x^3+2)^2 + C$

(2) $\sin x = t$ とおくと $\cos x dx = dt$
 $\int \sin^2 x \cos x dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

(3) $\log x = t$ とおくと $\frac{1}{x} dx = dt$
 $\int \frac{dx}{x \log x} = \int \frac{1}{t} dt = \log|t| + C = \log|\log x| + C$

(4) $\int \frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1} dx = \int \frac{(x^3+3x^2+1)'}{x^3+3x^2+1} \cdot \frac{1}{3} dx$
 $= \frac{1}{3}\log|x^3+3x^2+1| + C$

(5) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx = \int \frac{(1+\sin x)'}{1+\sin x} dx$
 $= \log(1+\sin x) + C$

(6) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{(e^x + e^{-x})'}{e^x + e^{-x}} dx$
 $= \log(e^x + e^{-x}) + C$

問 01B-2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (5\sin x - 4\cos x) dx$

(2) $\int \left(\frac{3}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sin^2 x} \right) dx$

(3) $\int \left(\frac{1}{\tan x} + 2 \right) \sin x dx$

解答 C は積分定数とする。

(1) $-5\cos x - 4\sin x + C$

(2) $3\tan x + \frac{2}{\tan x} + C$

(3) $\sin x - 2\cos x + C$

解説 C は積分定数とする。

(1) $\int (5\sin x - 4\cos x) dx = -5\cos x - 4\sin x + C$

(2) $\int \left(\frac{3}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sin^2 x} \right) dx = 3\tan x + \frac{2}{\tan x} + C$

(3) $\int \left(\frac{1}{\tan x} + 2 \right) \sin x dx = \int (\cos x + 2\sin x) dx$
 $= \sin x - 2\cos x + C$

問 01B-3 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x\sqrt{x^2-3} dx$ (2) $\int \frac{x}{\sqrt{4-3x^2}} dx$

(3) $\int \cos^4 x \sin x dx$

(4) $\int (x-2)(x^2-4x+5)^7 dx$

(5) $\int xe^{-2x^2+1} dx$ (6) $\int \frac{dx}{x \log x}$

(以下、解答用紙)

解答 C は積分定数とする。

(1) $\frac{1}{3}(x^2-3)\sqrt{x^2-3} + C$

(2) $-\frac{\sqrt{4-3x^2}}{3} + C$ (3) $-\frac{\cos^5 x}{5} + C$

(4) $\frac{(x^2-4x+5)^8}{16} + C$ (5) $-\frac{e^{-2x^2+1}}{4} + C$

(6) $\log|\log x| + C$

解説 C は積分定数とする。

(1) $x^2-3=u$ とおくと $2x dx = du$

$\int x\sqrt{x^2-3} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} \cdot 2x dx$

$= \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{1}{3}(x^2-3)\sqrt{x^2-3} + C$

$$(2) \quad 4-3x^2=u \text{ とおくと } -6xdx=du$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{4-3x^2}} dx = -\frac{1}{6} \int \frac{-6x}{\sqrt{4-3x^2}} dx$$

$$= -\frac{1}{6} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{6} \int u^{-\frac{1}{2}} du$$

$$= -\frac{1}{6} \cdot 2u^{\frac{1}{2}} + C = -\frac{\sqrt{4-3x^2}}{3} + C$$

$$(3) \quad \cos x = u \text{ とおくと } -\sin x dx = du$$

$$\int \cos^4 x \sin x dx = -\int \cos^4 x (-\sin x) dx$$

$$= -\int u^4 du = -\frac{u^5}{5} + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + C$$

$$(4) \quad x^2-4x+5=u \text{ とおくと } (2x-4)dx=du$$

$$\int (x-2)(x^2-4x+5)^7 dx$$

$$= \frac{1}{2} \int u^7 du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^8}{8} + C = \frac{(x^2-4x+5)^8}{16} + C$$

$$(5) \quad -2x^2+1=u \text{ とおくと } -4xdx=du$$

$$\int x e^{-2x^2+1} dx = -\frac{1}{4} \int e^{-2x^2+1} \cdot (-4x) dx$$

$$= -\frac{1}{4} \int e^u du = -\frac{1}{4} e^u + C$$

$$= -\frac{e^{-2x^2+1}}{4} + C$$

$$(6) \quad \log x = u \text{ とおくと } \frac{1}{x} dx = du$$

$$\int \frac{dx}{x \log x} = \int \frac{du}{u} = \log |u| + C = \log |\log x| + C$$

出題者＝大石知広

締め切り＝2025/04/22（火）授業開始時

その際に自己採点も行う。

解答はA4サイズのレポート用紙にまとめること。

ページ数の制限はない。

問02-01 次の不定積分を求めよ。

- (1) $\int x \sin 2x dx$ (2) $\int x \cos 3x dx$
- (3) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$ (4) $\int x \log(x-2) dx$
- (5) $\int x^3 \log x dx$ (6) $\int (2x-1)e^x dx$
- (7) $\int x e^{-3x} dx$ (8) $\int \log(x+2) dx$
- (9) $\int \log(1-x) dx$

問02-02 次の不定積分を求めよ。

- (1) $\int x \cos 2x dx$ (2) $\int x \sin 3x dx$
- (3) $\int \frac{2x}{\cos^2 x} dx$

問02-03 次の不定積分を求めよ。

- (1) $\int x e^x dx$ (2) $\int x e^{-2x} dx$
- (3) $\int (2x-1)e^{2x} dx$ (4) $\int x^2 \log x dx$
- (5) $\int (x-1)^3 \log(x-1) dx$ (6) $\int \log 2x dx$
- (7) $\int \log(3-x) dx$

問02-04 次の不定積分を求めよ。部分積分を2回使うことになる。

- (1) $\int x^2 \sin x dx$ (2) $\int x^2 e^{-x} dx$

出題者＝大石知広

締め切り＝2025/04/22（火）授業開始時

その際に自己採点も行う。

解答はA4サイズのレポート用紙にまとめること。

ページ数の制限はない。

問02-01 次の不定積分を求めよ。

- (1) $\int x \sin 2x dx$ (2) $\int x \cos 3x dx$
 (3) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$ (4) $\int x \log(x-2) dx$
 (5) $\int x^3 \log x dx$ (6) $\int (2x-1)e^x dx$
 (7) $\int x e^{-3x} dx$ (8) $\int \log(x+2) dx$
 (9) $\int \log(1-x) dx$

〔解答〕 C は積分定数とする。

- (1) $-\frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$ (2) $\frac{1}{3}x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + C$
 (3) $x \tan x + \log|\cos x| + C$ (4) $\frac{1}{2}(x^2-4)\log(x-2) - \frac{1}{4}x^2 - x + C$
 (5) $\frac{1}{16}x^4(4\log x - 1) + C$ (6) $(2x-3)e^x + C$ (7) $-\frac{1}{9}(3x+1)e^{-3x} + C$
 (8) $(x+2)\log(x+2) - x + C$ (9) $(x-1)\log(1-x) - x + C$

〔解説〕

 C は積分定数とする。

- (1) $\int x \sin 2x dx = \int x \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right)' dx = -\frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx$
 $= -\frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$
 (2) $\int x \cos 3x dx = \int x \left(\frac{1}{3} \sin 3x\right)' dx = \frac{1}{3}x \sin 3x - \frac{1}{3} \int \sin 3x dx$
 $= \frac{1}{3}x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + C$
 (3) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = \int x (\tan x)' dx = x \tan x - \int \tan x dx$
 $= x \tan x + \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = x \tan x + \log|\cos x| + C$
 (4) $\int x \log(x-2) dx = \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \log(x-2) dx = \frac{1}{2}x^2 \log(x-2) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x-2} dx$
 $= \frac{1}{2}x^2 \log(x-2) - \frac{1}{2} \int \left(x+2+\frac{4}{x-2}\right) dx$
 $= \frac{1}{2}x^2 \log(x-2) - \frac{1}{4}x^2 - x - 2\log(x-2) + C$
 $= \frac{1}{2}(x^2-4)\log(x-2) - \frac{1}{4}x^2 - x + C$
 (5) $\int x^3 \log x dx = \int \left(\frac{x^4}{4}\right)' \log x dx = \frac{x^4}{4} \log x - \frac{1}{4} \int x^3 dx$
 $= \frac{x^4}{4} \log x - \frac{1}{16}x^4 + C = \frac{1}{16}x^4(4\log x - 1) + C$
 (6) $\int (2x-1)e^x dx = \int (2x-1)(e^x)' dx = (2x-1)e^x - 2 \int e^x dx$
 $= (2x-1)e^x - 2e^x + C = (2x-3)e^x + C$
 (7) $\int x e^{-3x} dx = \int x \left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)' dx = -\frac{1}{3}x e^{-3x} + \frac{1}{3} \int e^{-3x} dx$
 $= \frac{1}{3} \left(-x e^{-3x} - \frac{1}{3}e^{-3x}\right) + C = -\frac{1}{9}(3x+1)e^{-3x} + C$
 (8) $\int \log(x+2) dx = \int (x+2)' \log(x+2) dx = (x+2)\log(x+2) - \int dx$
 $= (x+2)\log(x+2) - x + C$

$$(9) \int \log(1-x) dx = \int (x-1)' \log(1-x) dx = (x-1)\log(1-x) - \int dx$$

$$= (x-1)\log(1-x) - x + C$$

問02-02 次の不定積分を求めよ。

- (1) $\int x \cos 2x dx$ (2) $\int x \sin 3x dx$
 (3) $\int \frac{2x}{\cos^2 x} dx$

〔解答〕 C は積分定数とする。

- (1) $\frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$ (2) $-\frac{x}{3} \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x + C$
 (3) $2x \tan x + 2\log|\cos x| + C$

〔解説〕

 C は積分定数とする。

- (1) $\int x \cos 2x dx = \int x \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)' dx = \frac{x}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx$
 $= \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$
 (2) $\int x \sin 3x dx = \int x \left(-\frac{\cos 3x}{3}\right)' dx = -\frac{x}{3} \cos 3x + \frac{1}{3} \int \cos 3x dx$
 $= -\frac{x}{3} \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x + C$
 (3) $\int \frac{2x}{\cos^2 x} dx = \int 2x (\tan x)' dx = 2x \tan x - 2 \int \tan x dx = 2x \tan x - 2 \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$
 $= 2x \tan x - 2 \int \left\{-\frac{(\cos x)'}{\cos x}\right\} dx = 2x \tan x + 2\log|\cos x| + C$

問02-03 次の不定積分を求めよ。

- (1) $\int x e^x dx$ (2) $\int x e^{-2x} dx$
 (3) $\int (2x-1)e^{2x} dx$ (4) $\int x^2 \log x dx$
 (5) $\int (x-1)^3 \log(x-1) dx$ (6) $\int \log 2x dx$
 (7) $\int \log(3-x) dx$

〔解答〕 C は積分定数とする。

- (1) $(x-1)e^x + C$ (2) $-\frac{2x+1}{4}e^{-2x} + C$ (3) $(x-1)e^{2x} + C$
 (4) $\frac{x^3}{3} \log x - \frac{1}{9}x^3 + C$ (5) $\frac{(x-1)^4}{4} \log(x-1) - \frac{1}{16}(x-1)^4 + C$
 (6) $x \log 2x - x + C$ (7) $(x-3)\log(3-x) - x + C$

〔解説〕

 C は積分定数とする。

- (1) $\int x e^x dx = \int x (e^x)' dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$
 (2) $\int x e^{-2x} dx = \int x \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)' dx = -\frac{x}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx$
 $= -\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C = -\frac{2x+1}{4}e^{-2x} + C$
 (3) $\int (2x-1)e^{2x} dx = \int (2x-1) \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' dx = \frac{2x-1}{2}e^{2x} - \int 2 \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) dx$
 $= \frac{2x-1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + C = (x-1)e^{2x} + C$
 (4) $\int x^2 \log x dx = \int \left(\frac{x^3}{3}\right)' \log x dx = \frac{x^3}{3} \log x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \log x - \frac{1}{3} \int x^2 dx$
 $= \frac{x^3}{3} \log x - \frac{1}{9}x^3 + C$

$$\begin{aligned}
(5) \quad \int (x-1)^3 \log(x-1) dx &= \int \left\{ \frac{(x-1)^4}{4} \right\}' \log(x-1) dx \\
&= \frac{(x-1)^4}{4} \log(x-1) - \int \frac{(x-1)^4}{4} \cdot \frac{1}{x-1} dx \\
&= \frac{(x-1)^4}{4} \log(x-1) - \frac{1}{4} \int (x-1)^3 dx \\
&= \frac{(x-1)^4}{4} \log(x-1) - \frac{1}{16} (x-1)^4 + C \\
(6) \quad \int \log 2x dx &= \int (x)' \log 2x dx = x \log 2x - \int x \cdot \frac{2}{2x} dx = x \log 2x - \int dx \\
&= x \log 2x - x + C \\
(7) \quad \int \log(3-x) dx &= \int (x-3)' \log(3-x) dx = (x-3) \log(3-x) - \int (x-3) \cdot \frac{-1}{3-x} dx \\
&= (x-3) \log(3-x) - \int dx = (x-3) \log(3-x) - x + C
\end{aligned}$$

問02-04 次の不定積分を求めよ。部分積分を2回使うことになる。

$$(1) \quad \int x^2 \sin x dx \qquad (2) \quad \int x^2 e^{-x} dx$$

【解答】 C は積分定数とする。

$$(1) \quad (2-x^2)\cos x + 2x\sin x + C \qquad (2) \quad -(x^2+2x+2)e^{-x} + C$$

解説

C は積分定数とする。

$$\begin{aligned}
(1) \quad \int x^2 \sin x dx &= \int x^2 (-\cos x)' dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx \\
&= -x^2 \cos x + 2 \int x (\sin x)' dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x dx \\
&= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C \\
&= (2-x^2) \cos x + 2x \sin x + C \\
(2) \quad \int x^2 e^{-x} dx &= \int x^2 (-e^{-x})' dx = -x^2 e^{-x} + \int 2x e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2 \int x (-e^{-x})' dx \\
&= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C \\
&= -(x^2 + 2x + 2) e^{-x} + C
\end{aligned}$$

出題者＝大石知広

締め切り＝2025/04/29（火）の授業開始時。世間様は祝日ですが、ウチは普通に授業をやります。提出の直前に自己採点も行います。

解答はA4サイズのレポート用紙にまとめること。
ページ数の制限はない。

問03-01 （復習＋α）部分積分を2回用いることで、次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int e^x \cos x \, dx \quad (2) \int e^{-x} \sin x \, dx$$

$$(3) \int \sin(\log x) \, dx$$

ヒント＝どの場合でも部分積分を2回使うことで、
与式＝（いろいろな関数）－与式
→ 与式＝（いろいろな関数）／2
という形に帰着できる。

問03-02 （復習＋α） $x + \sqrt{x^2 + 1} = t$ の置き換えを利用して、不定積分 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ を求めよ。

問03-03 $\frac{x+3}{x(x-1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$ が成り立つように、定数 a, b, c の値を定めよ。また、不定積分 $\int \frac{x+3}{x(x-1)^2} dx$ を求めよ。

問03-04 次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int \frac{3x^2 - 2x}{(x+2)(x-1)^2} dx \quad (2) \int \frac{dx}{x(x^2 + 1)}$$

問03-05 次の不定積分を求めよ。ヒント＝まず

分子 ＝ 分母×定数または関数 ＋ 余り
と変形し、第一項は分母で割り切って普通の不定積分にかける。余りの項には部分分数分解のテクニックを使用する。

$$(1) \int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} dx \quad (2) \int \frac{x^4}{x^2 - 1} dx$$

$$(3) \int \frac{x^3}{x^2 - 4} dx$$

問03-06 $\tan \frac{x}{2} = t$ とおき、不定積分

$$\int \frac{dx}{\sin x - 1}$$
 を求めよ。

問03-07 次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int \frac{dx}{1 + \tan x} \quad (2) \int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x}$$

おまけ課題03-X

※解答は必須ではない。

これまで（第01～03週）に様々な不定積分の解法について学習した。学習した内容を活かして、自分なりに問題を作問してみよ。ただし以下の条件を満たすこと。

（1）解答時間は10～20分を目安とする。

（2）答えが数学的に矛盾無く決まること。

（3）学習した内容の一部と、よく関連した問題であること。

なお、良問は中間または期末テストに採用される可能性がある。つまり、自分の作った問題が採用されれば、少なくとも自分は確実に（以下略）。

出題者＝大石知広

締め切り＝2025/04/29（火）の授業開始時。

問03-01 （復習＋α）部分積分を2回用いることで、次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int e^x \cos x \, dx \quad (2) \int e^{-x} \sin x \, dx$$

$$(3) \int \sin(\log x) \, dx$$

ヒント＝どの場合でも部分積分を2回使うことで、
与式＝（いろいろな関数）－与式
→ 与式＝（いろいろな関数）／2
という形に帰着できる。

【解答】 C は積分定数とする。

$$(1) \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C \quad (2) -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) + C$$

$$(3) \frac{1}{2} x [\sin(\log x) - \cos(\log x)] + C$$

【解説】

C は積分定数とする。

$$(1) \int e^x \cos x \, dx = \int (e^x)' \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx \\ = e^x \cos x + \int (e^x)' \sin x \, dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$\text{よって} \quad \int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C$$

$$(2) \int e^{-x} \sin x \, dx = \int (-e^{-x})' \sin x \, dx = -e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x \, dx \\ = -e^{-x} \sin x + \int (-e^{-x})' \cos x \, dx \\ = -e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x \, dx$$

$$\text{よって} \quad \int e^{-x} \sin x \, dx = -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) + C$$

$$(3) \int \sin(\log x) \, dx = \int (x)' \sin(\log x) \, dx = x \sin(\log x) - \int \cos(\log x) \, dx \\ = x \sin(\log x) - \int (x)' \cos(\log x) \, dx \\ = x \sin(\log x) - x \cos(\log x) - \int \sin(\log x) \, dx$$

$$\text{よって} \quad \int \sin(\log x) \, dx = \frac{1}{2} x [\sin(\log x) - \cos(\log x)] + C$$

問03-02 （復習＋α） $x + \sqrt{x^2 + 1} = t$ の置き換えを

利用して、不定積分 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \, dx$ を求めよ。

【解答】 $\log(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C$ (C は積分定数)

【解説】

$$x + \sqrt{x^2 + 1} = t \text{ とおくと} \quad \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) dx = dt$$

$$\text{すなわち} \quad \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = dt \quad \text{よって} \quad \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \frac{1}{t} dt$$

$$\text{したがって} \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int \frac{1}{t} dt = \log|t| + C = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C$$

(C は積分定数)

【注意】 $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x|$ であるから $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$

問03-03 $\frac{x+3}{x(x-1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$ が成り立つように、定数 a, b, c の値を定めよ。また、不定積分 $\int \frac{x+3}{x(x-1)^2} \, dx$ を求めよ。

【解答】 $a=3, b=-3, c=4; 3\log\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{4}{x-1} + C$ (C は積分定数)

【解説】

等式の両辺に $x(x-1)^2$ を掛けて

$$x+3 = a(x-1)^2 + bx(x-1) + cx$$

右辺を x について整理すると

$$x+3 = (a+b)x^2 - (2a+b-c)x + a$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$a+b=0, \quad 2a+b-c=-1, \quad a=3$$

これらを解くと $a=3, b=-3, c=4$

$$\text{よって} \quad \int \frac{x+3}{x(x-1)^2} dx = \int \left\{ \frac{3}{x} - \frac{3}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} \right\} dx \\ = 3\log|x| - 3\log|x-1| - \frac{4}{x-1} + C \\ = 3\log\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{4}{x-1} + C \quad (C \text{ はいずれも積分定数})$$

問03-04 次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int \frac{3x^2 - 2x}{(x+2)(x-1)^2} \, dx \quad (2) \int \frac{dx}{x(x^2 + 1)}$$

【解答】 C は積分定数とする。

$$(1) \frac{16}{9} \log|x+2| + \frac{11}{9} \log|x-1| - \frac{1}{3(x-1)} + C \quad (2) \frac{1}{2} \log \frac{x^2}{x^2 + 1} + C$$

【解説】

C は積分定数とする。

$$(1) \frac{3x^2 - 2x}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} \text{ とおく。}$$

両辺に $(x+2)(x-1)^2$ を掛けて

$$3x^2 - 2x = a(x-1)^2 + b(x-1)(x+2) + c(x+2)$$

右辺を x について整理すると

$$3x^2 - 2x = (a+b)x^2 + (-2a+b+c)x + a-2b+2c$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$a+b=3, \quad -2a+b+c=-2, \quad a-2b+2c=0$$

これらを解くと

$$a = \frac{16}{9}, \quad b = \frac{11}{9}, \quad c = \frac{1}{3}$$

よって

$$\text{与式} = \int \left\{ \frac{16}{9(x+2)} + \frac{11}{9(x-1)} + \frac{1}{3(x-1)^2} \right\} dx \\ = \frac{16}{9} \log|x+2| + \frac{11}{9} \log|x-1| - \frac{1}{3(x-1)} + C$$

問03-05 次の不定積分を求めよ。ヒント＝まず

分子 ＝ 分母×定数または関数 ＋ 余り

と変形し、第一項は分母で割り切って普通の不定積分にかける。余りの項には部分分数分解のテクニックを使用する。

$$(1) \int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \, dx \quad (2) \int \frac{x^4}{x^2 - 1} \, dx$$

$$(3) \int \frac{x^3}{x^2-4} dx$$

【解答】 C は積分定数とする。

$$(1) x + \frac{1}{2} \log(x^2+1) + C \quad (2) \frac{1}{3}x^3 + x + \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

$$(3) \frac{1}{2}x^2 + 2\log|x^2-4| + C$$

【解説】

C は積分定数とする。

$$(1) \int \frac{x^2+x+1}{x^2+1} dx = \int \left(1 + \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \int \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} \right\} dx$$

$$= x + \frac{1}{2} \log(x^2+1) + C$$

$$(2) \int \frac{x^4}{x^2-1} dx = \int \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2-1} \right) dx = \frac{1}{3}x^3 + x + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + x + \frac{1}{2}(\log|x-1| - \log|x+1|) + C$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + x + \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

$$(3) \int \frac{x^3}{x^2-4} dx = \int \left(x + \frac{4x}{x^2-4} \right) dx = \int \left\{ x + 2 \cdot \frac{(x^2-4)'}{x^2-4} \right\} dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 2\log|x^2-4| + C$$

問03-06 $\tan \frac{x}{2} = t$ とおき，不定積分

$$\int \frac{dx}{\sin x - 1}$$

【解答】 $\frac{2}{\tan \frac{x}{2} - 1} + C$ (C は積分定数)

【解説】

$$\tan \frac{x}{2} = t \text{ とおくと } \sin x = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2\tan \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$= 2\tan \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\text{また, } \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} dx = dt \text{ から}$$

$$dx = \frac{2}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} dt \quad \text{すなわち} \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\text{よって } \int \frac{dx}{\sin x - 1} = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} - 1} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = - \int \frac{2}{(t-1)^2} dt$$

$$= \frac{2}{t-1} + C = \frac{2}{\tan \frac{x}{2} - 1} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

問03-07 次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int \frac{dx}{1+\tan x} \quad (2) \int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$$

【解答】 C は積分定数とする。

$$(1) \frac{1}{2}(x + \log|\cos x + \sin x|) + C$$

$$(2) \frac{1}{5} \log \left| 2\tan \frac{x}{2} + 1 \right| - \frac{1}{5} \log \left| \tan \frac{x}{2} - 2 \right| + C$$

$$\left(= \frac{1}{5} \log \left| \frac{2-2\cos x + \sin x}{1-\cos x - 2\sin x} \right| + C \right)$$

【解説】

C は積分定数とする。

$$(1) \tan x = t \text{ とおくと } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + t^2$$

$$\text{よって } \int \frac{dx}{1+\tan x} = \int \frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \int \left\{ \frac{1}{2(t+1)} - \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2(t^2+1)} \right\} dt$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \log|t+1| - \frac{1}{2} \log|1+t^2| + \int \frac{1}{t^2+1} dt \right\} + C$$

$$= \frac{1}{4} \log \left| \frac{(1+t)^2}{1+t^2} \right| + \frac{1}{2}x + C = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \log \left| \frac{(1+\tan x)^2}{1+\tan^2 x} \right| + C$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \log |\cos^2 x (1+\tan x)^2| + C$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \log |(\cos x + \sin x)^2| + C$$

$$= \frac{1}{2}(x + \log|\sin x + \cos x|) + C$$

$$(2) \tan \frac{x}{2} = t \text{ とおくと}$$

$$\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2\tan \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\text{また, } \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) dx = dt \text{ から } dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\text{よって } \int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x} = \int \frac{1}{3 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 4 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{3t+2-2t^2} dt$$

$$= - \int \frac{1}{(t-2)(2t+1)} dt = -\frac{1}{5} \int \left(\frac{1}{t-2} - \frac{2}{2t+1} \right) dt$$

$$= -\frac{1}{5} \log|t-2| + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \log|2t+1| + C$$

$$= \frac{1}{5} \log|2t+1| - \frac{1}{5} \log|t-2| + C$$

$$= \frac{1}{5} \log \left| 2\tan \frac{x}{2} + 1 \right| - \frac{1}{5} \log \left| \tan \frac{x}{2} - 2 \right| + C$$

【参考】 $\frac{1}{5} \log \left| 2\tan \frac{x}{2} + 1 \right| - \frac{1}{5} \log \left| \tan \frac{x}{2} - 2 \right| = \frac{1}{5} \log \left| \frac{2-2\cos x + \sin x}{1-\cos x - 2\sin x} \right|$ を示す。

$$\frac{1}{5} \log \left| 2\tan \frac{x}{2} + 1 \right| - \frac{1}{5} \log \left| \tan \frac{x}{2} - 2 \right|$$

$$= \frac{1}{5} \log \left| \frac{2\tan \frac{x}{2} + 1}{\tan \frac{x}{2} - 2} \right|$$

$$= \frac{1}{5} \log \left| \frac{2 \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} + 1}{\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} - 2} \right|$$

$$= \frac{1}{5} \log \left| \frac{2\sin^2 \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} - 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \right| \quad \leftarrow \text{分母・分子に } \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \text{ を掛ける}$$

$$= \frac{1}{5} \log \left| \frac{1 - \cos x + \frac{1}{2} \sin x}{\frac{1 - \cos x}{2} - \sin x} \right|$$

$$= \frac{1}{5} \log \left| \frac{2-2\cos x + \sin x}{1-\cos x - 2\sin x} \right|$$

おまけ課題03-X → 省略。

【解説】

出題者＝大石知広

締め切り＝2025/05/20（火）の授業開始時。解答はA4サイズのレポート用紙にまとめること。ページ数の制限はない。

問05－01 （微分積分学の基本定理の応用）以下の関数を x について微分せよ。

$$(1) f(x) = \int_1^{x-3} (x-3-p) \log p \, dp$$

$$(2) g(x) = \int_{x^2}^0 (x^2-s) e^s \, ds$$

問05－02 （基本的な定積分）次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_1^3 4x^3 \, dx \quad (2) \int_1^4 \sqrt{x} \, dx \quad (3) \int_1^4 x^{-\frac{3}{2}} \, dx$$

$$(4) \int_e^{e^2} \frac{dx}{x} \quad (5) \int_2^{e+1} \frac{dy}{1-y} \quad (6) \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta$$

$$(7) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt \quad (8) \int_0^{\log 2} e^{3x} \, dx \quad (9) \int_1^2 2^x \, dx$$

問05－03 （三角関数の定積分）次の定積分を求めよ。場合によっては三角関数の和積公式や積和公式も利用するとよい。

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x + \cos 3x) \, dx \quad (2) \int_\pi^{3\pi} \cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \, dx$$

$$(3) \int_1^2 \sin\left(\frac{2}{3}\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \, dt \quad (4) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \, dx$$

$$(5) \int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 2x \, dx \quad (6) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \, dx$$

問題05－04 （置換積分法による定積分）次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_0^2 x(x^2+1)^3 \, dx \quad (2) \int_1^2 \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2+1} \, dx$$

$$(3) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \quad (4) \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \log x}$$

$$(5) \int_0^1 \frac{2e^x}{e^x+1} \, dx \quad (6) \int_0^1 x^2 e^{x^3} \, dx$$

$$(7) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2-\cos x} \, dx \quad (8) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x) \sin x \, dx$$

問05－05 定積分 $\int_0^\pi (1-a\sin x - b\sin 2x)^2 \, dx$ を最小にする定

数 a, b の値を求めよ。三角関数の和積公式や積和公式も利用するとよい。

出題者=大石知広

締め切り=2025/05/20 (火) の授業開始時。解答はA4サイズのレポート用紙にまとめること。ページ数の制限はない。

(解説)

(青字解説文)

問05-01 (微分積分学の基本定理の応用) 以下の関数を x について微分せよ。

$$(1) f(x) = \int_1^{x-3} (x-3-p) \log p \, dp$$

$$(2) g(x) = \int_{x^2}^0 (x^2-s) e^s \, ds$$

(解説)

(1)

$$f(x) = (x-3) \int_1^{x-3} \log p \, dp - \int_1^{x-3} p \log p \, dp,$$

↓

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{df}{dx} = \frac{d(x-3)}{dx} \frac{df}{d(x-3)} \\ &= \int_1^{x-3} \log p \, dp + (x-3) \log(x-3) - (x-3) \log(x-3) \\ &\quad \text{※第二項と第三項は相殺。} \\ &= \left[p \log p - p \right]_{p=1}^{p=x-3} = \{(x-3) \log(x-3) - (x-3)\} - \{0-1\} \\ &= (x-3) \log(x-3) - x + 4 \end{aligned}$$

(2)

$$g(x) = (-1) \int_0^{x^2} (x^2-s) e^s \, ds = -x^2 \int_0^{x^2} e^s \, ds + \int_0^{x^2} s e^s \, ds,$$

↓

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{dg}{dx} = \frac{d(x^2)}{dx} \frac{dg}{d(x^2)} = 2x \left\{ - \int_0^{x^2} e^s \, ds - x^2 e^{x^2} + x^2 e^{x^2} \right\} \\ &\quad \text{※第二項と第三項は相殺。} \\ &= 2x \left[-e^s \right]_{s=0}^{s=x^2} = 2x \{-e^{x^2} - 1\} = 2x(1 - e^{x^2}) \end{aligned}$$

問05-02 (基本的な定積分) 次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_1^3 4x^3 \, dx \quad (2) \int_1^4 \sqrt{x} \, dx \quad (3) \int_1^4 x^{-\frac{3}{2}} \, dx$$

$$(4) \int_e^{e^2} \frac{dx}{x} \quad (5) \int_2^{e+1} \frac{dy}{1-y} \quad (6) \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta$$

$$(7) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt \quad (8) \int_0^{\log 2} e^{3x} \, dx \quad (9) \int_1^2 2^x \, dx$$

(解説)

$$(1) \int_1^3 4x^3 \, dx = \left[x^4 \right]_1^3 = 81 - 1 = 80$$

$$(2) \int_1^4 \sqrt{x} \, dx = \left[\frac{2}{3} x \sqrt{x} \right]_1^4 = \frac{2}{3} (8 - 1) = \frac{14}{3}$$

$$(3) \int_1^4 x^{-\frac{3}{2}} \, dx = \left[-2x^{-\frac{1}{2}} \right]_1^4 = -2 \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = 1$$

$$(4) \int_e^{e^2} \frac{dx}{x} = \left[\log x \right]_e^{e^2} = 2 - 1 = 1$$

$$(5) \int_2^{e+1} \frac{dy}{1-y} = \left[-\log |1-y| \right]_2^{e+1} = -\log e = -1$$

$$(6) \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta = \left[-\cos \theta \right]_0^\pi = -(-1 - 1) = 2$$

$$(7) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = \left[\sin t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - (-1) = 2$$

$$(8) \int_0^{\log 2} e^{3x} \, dx = \left[\frac{1}{3} e^{3x} \right]_0^{\log 2} = \frac{1}{3} (e^{3 \log 2} - 1) = \frac{1}{3} (8 - 1) = \frac{7}{3}$$

$$(9) \int_1^2 2^x \, dx = \left[\frac{2^x}{\log 2} \right]_1^2 = \frac{4-2}{\log 2} = \frac{2}{\log 2}$$

問05-03 (三角関数の定積分) 次の定積分を求めよ。場合によっては三角関数の和積公式や積和公式も利用するとよい。

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x + \cos 3x) \, dx \quad (2) \int_\pi^{3\pi} \cos \left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \, dx$$

$$(3) \int_1^2 \sin \left(\frac{2}{3} \pi t + \frac{\pi}{4} \right) \, dt \quad (4) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \, dx$$

$$(5) \int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 2x \, dx \quad (6) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \, dx$$

(解説)

$$\begin{aligned} (1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x + \cos 3x) \, dx &= \left[-\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \sin 3x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$(2) \int_\pi^{3\pi} \cos \left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \, dx = \left[4 \sin \left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \right]_\pi^{3\pi} = 4$$

$$\begin{aligned} (3) \int_1^2 \sin \left(\frac{2}{3} \pi t + \frac{\pi}{4} \right) \, dt &= \left[-\frac{3}{2\pi} \cos \left(\frac{2}{3} \pi t + \frac{\pi}{4} \right) \right]_1^2 = \\ &= -\frac{3}{2\pi} \left(\cos \frac{19}{12} \pi - \cos \frac{11}{12} \pi \right) \\ &= -\frac{3}{2\pi} \left(-2 \sin \frac{5}{4} \pi \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{3}{\pi} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{3\sqrt{6}}{4\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 2x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{2} (1 - \cos 4x) \, dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{8}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$(6) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \left[\tan x - x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

問題05-04 (置換積分法による定積分) 次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_0^2 x(x^2+1)^3 dx \quad (2) \int_1^2 \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2+1} dx$$

$$(3) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (4) \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \log x}$$

$$(5) \int_0^1 \frac{2e^x}{e^x+1} dx \quad (6) \int_0^1 x^2 e^{x^3} dx$$

$$(7) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2-\cos x} dx \quad (8) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x) \sin x dx$$

(解説)

$$(1) x^2+1=t \text{ とおくと } 2xdx=dt$$

$$\int_0^2 x(x^2+1)^3 dx = \int_1^5 t^3 \cdot \frac{1}{2} dt = \left[\frac{1}{8} t^4 \right]_1^5 = \frac{625-1}{8} = 78$$

x	$0 \rightarrow 2$
t	$1 \rightarrow 5$

$$(2) x^3-3x^2+1=t \text{ とおくと}$$

$$3(x^2-2x)dx=dt$$

$$\int_1^2 \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2+1} dx = \int_{-1}^{-3} \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{3} dt = \left[\frac{1}{3} \log |t| \right]_{-1}^{-3} = \frac{1}{3} \log 3$$

x	$1 \rightarrow 2$
t	$-1 \rightarrow -3$

$$(3) \sqrt{1-x^2}=t \text{ とおくと}$$

$$1-x^2=t^2, \quad -xdx=tdt$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{4}{t} \cdot (-t) dt = 4 \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 dt = 4 \left[t \right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 = 4 - 2\sqrt{3}$$

x	$0 \rightarrow \frac{1}{2}$
t	$1 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$(4) \log x = t \text{ とおくと } \frac{1}{x} dx = dt$$

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \log x} = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \left[\log t \right]_1^2 = \log 2$$

x	$e \rightarrow e^2$
t	$1 \rightarrow 2$

$$(5) e^x+1=t \text{ とおくと } e^x dx = dt$$

$$\int_0^1 \frac{2e^x}{e^x+1} dx = \int_2^{e+1} \frac{2}{t} dt = \left[2 \log t \right]_2^{e+1} = 2 \log \frac{e+1}{2}$$

x	$0 \rightarrow 1$
t	$2 \rightarrow e+1$

$$(6) x^3=t \text{ とおくと } 3x^2 dx = dt$$

$$\int_0^1 x^2 e^{x^3} dx = \int_0^1 e^t \cdot \frac{1}{3} dt = \left[\frac{1}{3} e^t \right]_0^1 = \frac{1}{3}(e-1)$$

x	$0 \rightarrow 1$
t	$0 \rightarrow 1$

$$(7) 2-\cos x = t \text{ とおくと } \sin x dx = dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2-\cos x} dx = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \left[\log t \right]_1^2 = \log 2$$

x	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$1 \rightarrow 2$

$$(8) \cos x = t \text{ とおくと } -\sin x dx = dt$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x) \sin x dx \\ &= -\int_1^0 (1-t^2) dt = \int_0^1 (1-t^2) dt \\ &= \left[t - \frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

x	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$1 \rightarrow 0$

問05-05 定積分 $\int_0^{\pi} (1-a \sin x - b \sin 2x)^2 dx$ を最小にする定数 a, b の値を求めよ。三角関数の和積公式や積和公式も利用するとよい。

(解説)

$$f(x) = (1-a \sin x - b \sin 2x)^2 \text{ とおく。}$$

$$f(x) = 1 + a^2 \sin^2 x + b^2 \sin^2 2x - 2a \sin x - 2b \sin 2x + 2ab \sin x \sin 2x$$

$$\int_0^{\pi} dx = \pi$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 2x dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = \left[-\cos x \right]_0^{\pi} = 2$$

$$\int_0^{\pi} \sin 2x dx = \left[-\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\pi} = 0$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin x \sin 2x dx &= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos 3x - \cos x) dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} \sin 3x - \sin x \right]_0^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

よって

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = \pi + \frac{\pi}{2} (a^2 + b^2) - 4a = \frac{\pi}{2} \left(a - \frac{4}{\pi} \right)^2 + \frac{\pi}{2} b^2 + \pi - \frac{8}{\pi}$$

したがって、 $a = \frac{4}{\pi}$ 、 $b = 0$ のとき最小になる。

出題者=大石知広

締め切り=2025/05/27 (火) の授業開始時。解答はA4サイズのレポート用紙にまとめること。ページ数の制限はない。

問06-01 (置換積分の復習+α)

(1) $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ であることを証明せよ。

(2) 上式を利用して、定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$ を求めよ。

ヒント: $f(x) = \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}$ とおく。

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ であるから

$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$ が言える。

問06-02 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 3x dx$

(2) $\int_1^2 x e^{\frac{x}{2}} dx$

(3) $\int_1^{e^2} \log x dx$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1) \sin x dx$

(5) $\int_{-4}^{-3} \log(x+5) dx$

(6) $\int_1^e x^2 \log x dx$

問06-03 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^1 x e^{-3x^2} dx$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x dx$

問06-04 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^e \frac{\log x}{x^2} dx$

(2) $\int_{-1}^1 x^2 e^{2x} dx$

(3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$

問06-05 (部分積分の2回利用による原形回帰) 次の定積分を求めよ。

(1) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$

(2) $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x dx$

問06-06 (おまけ)

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ とする。ただし n は3以上の整数である。

(1) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ でもあることを証明せよ。

(2) 部分積分を用いて次式を証明せよ。

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

※おまけなので解答は必須ではない。

出題者=大石知広

締め切り=2025/05/27 (火) の授業開始時。解答はA4サイズのレポート用紙にまとめること。ページ数の制限はない。

(解説)

(青字解説文)

問06-01 (置換積分の復習+α)

(1) $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ であることを証明せよ。(2) 上式を利用して、定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$ を求めよ。ヒント: $f(x) = \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}$ とおく。 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ であるから $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$ が言える。

(解説)

証明: $t = a - x$ で置換積分すれば、 $dx = -dt$ であるから、

$$\int_0^a f(a-x) dx = \int_{t=a}^{t=0} f(t)(-dt) = \int_0^a f(t) dt = \int_0^a f(x) dx$$

となり、証明終了。

 $f(x) = \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}$ とおく。 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ であるから

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$$

$$\text{よって} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right\} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{\cos x + \sin x} + \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx \text{ であるから} \quad 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{よって} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{\pi}{4}$$

問06-02 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 3x dx$

(2) $\int_1^2 x e^{\frac{x}{2}} dx$

(3) $\int_1^{e^2} \log x dx$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1) \sin x dx$

(5) $\int_{-4}^{-3} \log(x+5) dx$

(6) $\int_1^e x^2 \log x dx$

(解説)

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 3x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\frac{\sin 3x}{3} \right)' dx$

$$= \left[\frac{x \sin 3x}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{3} dx$$

$$= -\frac{\pi}{6} + \left[\frac{\cos 3x}{9} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{6} - \frac{1}{9}$$

(2) $\int_1^2 x e^{\frac{x}{2}} dx = \int_1^2 x (2e^{\frac{x}{2}})' dx = \left[2x e^{\frac{x}{2}} \right]_1^2 - 2 \int_1^2 e^{\frac{x}{2}} dx$

$$= (4e - 2\sqrt{e}) - 4 \left[e^{\frac{x}{2}} \right]_1^2 = 4e - 2\sqrt{e} - 4(e - \sqrt{e}) = 2\sqrt{e}$$

(3) $\int_1^{e^2} \log x dx = \int_1^{e^2} (x)' \log x dx = \left[x \log x \right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x \cdot \frac{1}{x} dx$

$$= 2e^2 - \left[x \right]_1^{e^2} = 2e^2 - (e^2 - 1) = e^2 + 1$$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1) \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1) (-\cos x)' dx$

$$= \left[-(x-1) \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

$$= -1 + \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -1 + 1 = 0$$

(5) $\int_{-4}^{-3} \log(x+5) dx = \int_{-4}^{-3} (x+5)' \log(x+5) dx$

$$= \left[(x+5) \log(x+5) \right]_{-4}^{-3} - \int_{-4}^{-3} (x+5) \cdot \frac{1}{x+5} dx$$

$$= 2 \log 2 - \left[x \right]_{-4}^{-3} = 2 \log 2 - 1$$

(6) $\int_1^e x^2 \log x dx = \int_1^e \left(\frac{x^3}{3} \right)' \log x dx$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \log x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^3}{3} - \int_1^e \frac{x^2}{3} dx$$

$$= \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9} \right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{9}(e^3 - 1) = \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}$$

問06-03 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^1 x e^{-3x^2} dx$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x dx$

(解説)

(1) 奇関数の対称定積分なのでゼロ。

(2) 同上。

問06-04 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^e \frac{\log x}{x^2} dx$

(2) $\int_{-1}^1 x^2 e^{2x} dx$

(3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$

(解説)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \int_1^e \frac{\log x}{x^2} dx &= \int_1^e \left(-\frac{1}{x}\right)' \log x dx \\
 &= \left[-\frac{1}{x} \log x\right]_1^e - \int_1^e \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= -\frac{1}{e} - \int_1^e \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = -\frac{1}{e} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^e \\
 &= -\frac{1}{e} - \left(\frac{1}{e} - 1\right) = 1 - \frac{2}{e} \\
 (2) \quad \int_{-1}^1 x^2 e^{2x} dx &= \int_{-1}^1 x^2 \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' dx = \left[\frac{x^2 e^{2x}}{2}\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 x e^{2x} dx \\
 &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \int_{-1}^1 x \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' dx \\
 &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \left(\left[\frac{x e^{2x}}{2}\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{e^{2x}}{2} dx\right) \\
 &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \left(\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2e^2}\right) + \left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_{-1}^1 \\
 &= -\frac{1}{e^2} + \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4e^2}\right) = \frac{e^2}{4} - \frac{5}{4e^2}
 \end{aligned}$$

(3) $x^2 \cos x$ は偶関数である。

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (\sin x)' dx \\
 &= 2 \left[x^2 \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin x dx \\
 &= \frac{\pi^2}{2} - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x (-\cos x)' dx \\
 &= \frac{\pi^2}{2} - 4 \left(\left[-x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \right) \\
 &= \frac{\pi^2}{2} - 4 \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{2} - 4
 \end{aligned}$$

問06-05 (部分積分の2回利用による原形回帰) 次の定積分を求めよ。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx \\
 (2) \quad J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x dx
 \end{aligned}$$

(解説)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x)' \sin x dx \\
 &= \left[e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx \\
 &= e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x)' \cos x dx \\
 &= e^{\frac{\pi}{2}} - \left[e^x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx \\
 &= e^{\frac{\pi}{2}} + 1 - I
 \end{aligned}$$

$$\text{すなわち} \quad I = e^{\frac{\pi}{2}} + 1 - I \quad \text{よって} \quad I = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-e^{-x})' \cos x dx \\
 &= \left[-e^{-x} \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin x dx \\
 &= 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-e^{-x})' \sin x dx \\
 &= 1 - \left[-e^{-x} \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x dx \\
 &= 1 + e^{-\frac{\pi}{2}} - J
 \end{aligned}$$

$$\text{すなわち} \quad J = 1 + e^{-\frac{\pi}{2}} - J \quad \text{よって} \quad J = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}} + 1}{2}$$

問06-06 (おまけ)

 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ とする。ただし n は3以上の整数である。

$$(1) \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \text{ でもあることを証明せよ。}$$

(2) 部分積分を用いて次式を証明せよ。

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

※おまけなので解答は必須ではない。

(解説)

おまけなので省略。

出題者＝大石知広

締め切り＝無し。提出の必要も無し。

中間試験直前の演習なので、各自でしっかり取り組んでください。

これまでの演習も活用してください。

問07-01 次の不定積分を求めよ。変数名にも注意。

(1) $\int (x+1)^3 dx$

(2) $\int \sqrt[3]{6p+7} dp$

(3) $\int \sin \frac{2\pi}{3} t dt$

(4) $\int \cos(3t+2) dt$

(5) $\int \frac{2}{1-3x} dx$

(6) $\int \frac{dx}{(5x+3)^3}$

(7) $\int e^{2x-1} dx$

(8) $\int 2^{5x+2} dx$

(9) $\int 3^{1-p} dp$

問07-02 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{(x+1)^2}{x-1} dx$

(2) $\int \frac{x^2+3x+4}{x+2} dx$

(3) $\int \frac{x^3}{x-1} dx$

問07-03 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x^2 \cos x dx$

(2) $\int (x^2-1)e^x dx$

問07-04 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x \sqrt[3]{1+x} dx$

(2) $\int \sin x \cos^4 x dx$

(3) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$

(4) $\int (2x+1)e^{x^2+x+5} dx$

(5) $\int \frac{e^{2x}}{(e^x+2)^2} dx$

(6) $\int \frac{\log x}{x(\log x-1)^2} dx$

問07-05 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^0 (x+2)\sqrt{3x+4} dx$

(2) $\int_0^4 \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} dx$

(3) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$

(4) $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

(5) $\int_1^2 \frac{dx}{e^x-1}$

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$

問07-06 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^1 x(x-1)^4 dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+2)\cos x dx$

(3) $\int_1^2 x^4 \log x dx$

問07-07

(1) $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$ であることを示せ。

(2) (1)を利用して、定積分 $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$ を求めよ。

出題者＝大石知広

締め切り＝無し。提出の必要も無し。

中間試験直前の演習なので、各自でしっかり取り組んでください。
これまでの演習も活用してください。

解説

(青字解説文)

問07-01 次の不定積分を求めよ。変数名にも注意。

- (1) $\int (x+1)^3 dx$
- (2) $\int \sqrt[3]{6p+7} dp$
- (3) $\int \sin \frac{2\pi}{3} t dt$
- (4) $\int \cos(3t+2) dt$
- (5) $\int \frac{2}{1-3x} dx$
- (6) $\int \frac{dx}{(5x+3)^3}$
- (7) $\int e^{2x-1} dx$
- (8) $\int 2^{5x+2} dx$
- (9) $\int 3^{1-p} dp$

解説

Cは積分定数とする。

- (1) $\int (x+1)^3 dx = \frac{1}{4}(x+1)^4 + C$
- (2) $\int \sqrt[3]{6x+7} dx = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4}(6x+7)^{\frac{4}{3}} + C = \frac{1}{8}(6x+7)\sqrt[3]{6x+7} + C$
- (3) $\int \sin \frac{2\pi}{3} t dt = \frac{3}{2\pi} \left(-\cos \frac{2\pi}{3} t \right) + C = -\frac{3}{2\pi} \cos \frac{2\pi}{3} t + C$
- (4) $\int \cos(3t+2) dt = \frac{1}{3} \sin(3t+2) + C$
- (5) $\int \frac{2}{1-3x} dx = 2 \cdot \frac{1}{-3} \log|1-3x| + C = -\frac{2}{3} \log|1-3x| + C$
- (6) $\int \frac{dx}{(5x+3)^3} = \frac{1}{5} \cdot \left\{ -\frac{1}{2(5x+3)^2} \right\} + C = -\frac{1}{10(5x+3)^2} + C$
- (7) $\int e^{2x-1} dx = \frac{1}{2} e^{2x-1} + C$
- (8) $\int 2^{5x+2} dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{2^{5x+2}}{\log 2} + C = \frac{2^{5x+2}}{5 \log 2} + C$
- (9) $\int 3^{1-x} dx = \frac{1}{-1} \cdot \frac{3^{1-x}}{\log 3} + C = -\frac{3^{1-x}}{\log 3} + C$

問07-02 次の不定積分を求めよ。

- (1) $\int \frac{(x+1)^2}{x-1} dx$
- (2) $\int \frac{x^2+3x+4}{x+2} dx$
- (3) $\int \frac{x^3}{x-1} dx$

解説

Cは積分定数とする。

- (1) $\int \frac{(x+1)^2}{x-1} dx = \int \left(x+3 + \frac{4}{x-1} \right) dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4 \log|x-1| + C$
- (2) $\int \frac{x^2+3x+4}{x+2} dx = \int \left(x+1 + \frac{2}{x+2} \right) dx = \frac{1}{2}x^2 + x + 2 \log|x+2| + C$
- (3) $\int \frac{x^3}{x-1} dx = \int \left(x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \log|x-1| + C$

問07-03 次の不定積分を求めよ。

- (1) $\int x^2 \cos x dx$
- (2) $\int (x^2-1)e^x dx$

解説

Cは積分定数とする。

- (1) $\int x^2 \cos x dx = \int x^2 (\sin x)' dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx$
 $= x^2 \sin x - 2 \int x (-\cos x)' dx = x^2 \sin x + 2 \left(x \cos x - \int \cos x dx \right)$
 $= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$
- (2) $\int (x^2-1)e^x dx = \int (x^2-1)(e^x)' dx = (x^2-1)e^x - \int 2xe^x dx$
 $= (x^2-1)e^x - 2 \int x(e^x)' dx = (x^2-1)e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right)$
 $= (x^2-1)e^x - 2xe^x + 2e^x + C = (x^2-2x+1)e^x + C$

問07-04 次の不定積分を求めよ。

- (1) $\int x \sqrt[3]{1+x} dx$
- (2) $\int \sin x \cos^4 x dx$
- (3) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$
- (4) $\int (2x+1)e^{x^2+x+5} dx$
- (5) $\int \frac{e^{2x}}{(e^x+2)^2} dx$
- (6) $\int \frac{\log x}{x(\log x-1)^2} dx$

解説

Cは積分定数とする。

- (1) $\sqrt[3]{1+x} = t$ とおくと $x = t^3 - 1, dx = 3t^2 dt$
 $\int x \sqrt[3]{1+x} dx = \int (t^3-1)t \cdot 3t^2 dt = 3 \int (t^6-t^3) dt = 3 \left(\frac{1}{7}t^7 - \frac{1}{4}t^4 \right) + C$
 $= \frac{3}{28}t^4(4t^3-7) + C = \frac{3}{28}(4x-3)(1+x)\sqrt[3]{1+x} + C$
- (2) $\cos x = t$ とおくと $-\sin x dx = dt$
 $\int \sin x \cos^4 x dx = -\int t^4 dt = -\frac{1}{5}t^5 + C = -\frac{1}{5}\cos^5 x + C$
- (3) $\frac{1}{\cos^4 x} = (1+\tan^2 x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$
 $\tan x = t$ とおくと $\frac{1}{\cos^2 x} dx = dt$
 $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int (1+t^2) dt = t + \frac{1}{3}t^3 + C = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$
- (4) $x^2+x+5 = t$ とおくと $(2x+1)dx = dt$
 $\int (2x+1)e^{x^2+x+5} dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{x^2+x+5} + C$
- (5) $e^x+2 = t$ とおくと $e^x dx = dt$
 $\int \frac{e^{2x}}{(e^x+2)^2} dx = \int \frac{t-2}{t^2} dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} \right) dt = \log|t| + \frac{2}{t} + C$
 $= \log(e^x+2) + \frac{2}{e^x+2} + C$
- (6) $\log x - 1 = t$ とおくと $\frac{1}{x} dx = dt$
 $\int \frac{\log x}{x(\log x-1)^2} dx = \int \frac{t+1}{t^2} dt = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \right) dt = \log|t| - \frac{1}{t} + C$
 $= \log|\log x - 1| - \frac{1}{\log x - 1} + C$

問07-05 次の定積分を求めよ。

- (1) $\int_{-1}^0 (x+2)\sqrt{3x+4} dx$
- (2) $\int_0^4 \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} dx$
- (3) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$
- (4) $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$
- (5) $\int_1^2 \frac{dx}{e^x-1}$
- (6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$

解説

(1) $3x+4=t$ とおくと $x=\frac{1}{3}t-\frac{4}{3}$, $dx=\frac{1}{3}dt$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 (x+2)\sqrt{3x+4} dx &= \int_1^4 \left(\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}\right) \sqrt{t} \cdot \frac{1}{3} dt \\ &= \frac{1}{9} \int_1^4 (t\sqrt{t} + 2\sqrt{t}) dt = \frac{1}{9} \left[\frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{64}{5} + \frac{32}{3} \right) - \left(\frac{2}{5} + \frac{4}{3} \right) = \frac{326}{135}\end{aligned}$$

(2) $\sqrt{x+1}=t$ とおくと $x=t^2-1$, $dx=2tdt$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} dx &= \int_1^{\sqrt{5}} \frac{(t^2-1)^2}{t} \cdot 2tdt = 2 \int_1^{\sqrt{5}} (t^4 - 2t^2 + 1) dt \\ &= 2 \left[\frac{1}{5} t^5 - \frac{2}{3} t^3 + t \right]_1^{\sqrt{5}} = 2 \left\{ \left(5\sqrt{5} - \frac{10\sqrt{5}}{3} + \sqrt{5} \right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 \right) \right\} \\ &= \frac{16}{15} (5\sqrt{5} - 1)\end{aligned}$$

(3) $\sqrt{1+x^2}=t$ とおくと $x^2=t^2-1$, $xdx=tdt$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2-1}{t} \cdot tdt = \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1) dt \\ &= \left[\frac{1}{3} t^3 - t \right]_1^{\sqrt{2}} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \sqrt{2} \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \\ &= \frac{2-\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

(4) $\sqrt{x+1}=t$ とおくと $x=t^2-1$, $dx=2tdt$

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} &= \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{(t^2-1)t} \cdot 2tdt = \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \left[\log \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right]_{\sqrt{2}}^2 = \log \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right) \\ &= \log \frac{3+2\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

(5) $e^x=t$ とおくと $x=\log t$, $dx=\frac{1}{t}dt$

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{dx}{e^x-1} &= \int_e^{e^2} \frac{1}{t-1} \cdot \frac{1}{t} dt = \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt \\ &= \left[\log \frac{t-1}{t} \right]_e^{e^2} = \log \left(\frac{e^2-1}{e^2} \cdot \frac{e}{e-1} \right) \\ &= \log \frac{e+1}{e}\end{aligned}$$

(6) $\cos x=t$ とおくと $-\sin x dx=dt$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \cdot \sin x dx \\ &= \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1-t^2}{t^2} \cdot (-1) dt = \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) dt \\ &= \left[t + \frac{1}{t} \right]_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \right) - 2 \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2\end{aligned}$$

問07-06 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^1 x(x-1)^4 dx$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+2)\cos x dx$

(3) $\int_1^2 x^4 \log x dx$

(解説)

(1) $\int_0^1 x(x-1)^4 dx = \int_0^1 x \left(\frac{(x-1)^5}{5} \right)' dx = \left[x \cdot \frac{(x-1)^5}{5} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(x-1)^5}{5} dx$
 $= 0 - \frac{1}{5 \cdot 6} \left[(x-1)^6 \right]_0^1 = \frac{1}{30}$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+2)\cos x dx = \left[(x+2)\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right) + \left[\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + 1$

(3) $\int_1^2 x^4 \log x dx = \left[\frac{x^5}{5} \log x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^4}{5} dx = \frac{32}{5} \log 2 - \left[\frac{x^5}{25} \right]_1^2 = \frac{32}{5} \log 2 - \frac{31}{25}$

x	$-1 \rightarrow 0$
t	$1 \rightarrow 4$

x	$0 \rightarrow 4$
t	$1 \rightarrow \sqrt{5}$

x	$0 \rightarrow 1$
t	$1 \rightarrow \sqrt{2}$

x	$1 \rightarrow 3$
t	$\sqrt{2} \rightarrow 2$

x	$1 \rightarrow 2$
t	$e \rightarrow e^2$

x	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$
t	$1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$

問07-07

(1) $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$ であることを示せ。

(2) (1)を利用して、定積分 $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ を求めよ。

(解説)

(1) $I = \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx$ とする。

$x = \pi - t$ とおくと $dx = -dt$

$$\begin{aligned}I &= \int_{\pi}^0 (\pi - t) f(\sin(\pi - t)) \cdot (-1) dt = \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin t) dt \\ &= \int_0^{\pi} (\pi - x) f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx - I\end{aligned}$$

よって $2I = \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$

すなわち $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$

(2) $\frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} = \frac{\sin x}{2 - \sin^2 x}$ と変形できるから

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

$\cos x = t$ とおくと $-\sin x dx = dt$

よって 与式 $= \frac{\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{-1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} = \pi \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$

$t = \tan \theta$ とおくと $dt = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$

ゆえに 与式 $= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$
 $= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \pi \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{4}$

x	$0 \rightarrow \pi$
t	$\pi \rightarrow 0$

x	$0 \rightarrow \pi$
t	$1 \rightarrow -1$

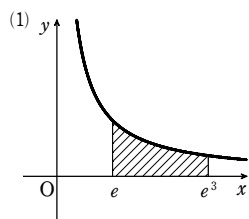
t	$0 \rightarrow 1$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

出題者=大石知広

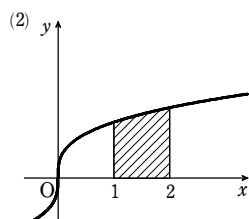
●回答は表面のみに記入すること。

問08-01 次の曲線や直線および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

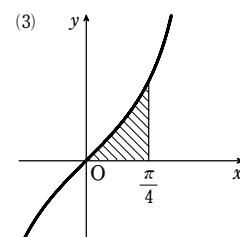
(1) $y = \frac{1}{x}$, $x = e$, $x = e^3$



(2) $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 1$, $x = 2$



(3) $y = \tan x$ $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}\right)$, $x = \frac{\pi}{4}$



(4) $y = \log(x-1)$, $x = 2$, $x = e+1$ ※図無し

出題者＝大石知広

● 締め切り＝[2025/06/24]、自己採点后に提出。

● 回答はA4レポート用紙に記入すること。

● 提出する際は

(1) 左上をホチキス留めし、

(2) 右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。

※この用紙を表紙として使うのも良い。

問10-01 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y = \sqrt{x}$, $y = x$

(2) $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$

(3) $y = \cos 2x$, $y = \sin 2x$ $\left(\frac{\pi}{8} \leq x \leq \frac{5}{8}\pi\right)$

問10-02 $g(y)$ の定積分：次の曲線と直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y^2 = x$, $y = 1$, $y = 4$, y 軸

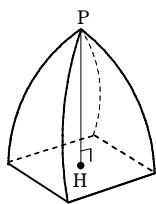
(2) $y^2 = x - 1$, $y = x - 1$

(3) $x = \sin y$ ($0 \leq y \leq \pi$), y 軸

(4) $y = e^x$, $y = e$, y 軸

問10-03 右の図のような高さが $PH = 10$ cm

の立体がある。底面に平行で頂点 P から x cm の距離にある平面でこの立体を切断すると、切り口は 1 辺 $\sqrt{x}$ cm の正方形になる。この立体の体積を求めよ。



問10-04 底面から x cm の高さにある平面での切り口が、半径 $\sqrt[3]{x}$ cm の円となる容器がある。深さが 27 cm のとき、この容器の容積 V を求めよ。

問10-05 次の曲線や直線および x 軸で囲まれた部分を、 x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

(1) $y = x^2 + 3x$, $y = 0$

(2) $y = 1 - \sqrt{x}$, $x = 0$

(3) $y = \tan x$, $x = \frac{\pi}{4}$

(4) $y = e^x$, $x = 1$, $x = 2$

問10-06 次の曲線と直線で囲まれた部分を、 y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

(1) $y = \log(1 + x)$, $x = 0$, $y = 2$

(2) $y = x^2$, $x + \sqrt{y} = 2$, $x = 0$

(3) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 2x$

出題者＝大石知広

- 締め切り＝[2025/06/24]、自己採点后に提出。
- 回答はA4レポート用紙に記入すること。
- 提出する際は

- (1) 左上をホチキス留めし、
- (2) 右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。

※この用紙を表紙として使うのも良い。

解説

(青字解説文)

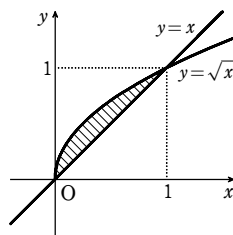
問10-01 次の曲線と直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

- (1) $y = \sqrt{x}$, $y = x$
- (2) $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$
- (3) $y = \cos 2x$, $y = \sin 2x$ ($\frac{\pi}{8} \leq x \leq \frac{5}{8}\pi$)

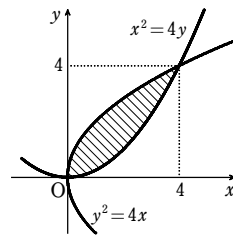
解説

求める面積を S とする。

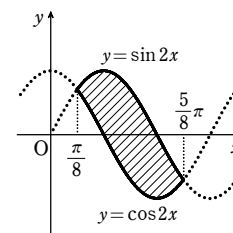
- (1) $\sqrt{x} = x$ とすると $x = x^2$
ゆえに $x(x-1) = 0$
よって $x = 0, 1$
ゆえに、曲線 $y = \sqrt{x}$ と直線 $y = x$ は、2点 $(0, 0)$, $(1, 1)$ で交わり、 $0 \leq x \leq 1$ では $\sqrt{x} \geq x$
よって $S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$



- (2) $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$ から y を消去すると
 $\left(\frac{x^2}{4}\right)^2 = 4x$
よって $x^4 = 64x$
 $x(x^3 - 64) = 0$
ゆえに $x = 0, 4$
よって、2曲線は、2点 $(0, 0)$, $(4, 4)$ で交わり、 $0 \leq x \leq 4$ では $2\sqrt{x} \geq \frac{x^2}{4}$
よって $S = \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \left[\frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{12} \right]_0^4 = \frac{16}{3}$



- (3) $\cos 2x = \sin 2x$ とすると $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$
 $\frac{\pi}{8} \leq x \leq \frac{5}{8}\pi$ から $x = \frac{\pi}{8}, \frac{5}{8}\pi$
よって、2曲線は、2点 $\left(\frac{\pi}{8}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{5}{8}\pi, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ で交わり、 $\frac{\pi}{8} \leq x \leq \frac{5}{8}\pi$ では $\sin 2x \geq \cos 2x$
よって $S = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{5}{8}\pi} (\sin 2x - \cos 2x) dx$
 $= \left[-\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{5}{8}\pi} = \sqrt{2}$



問10-02 $g(y)$ の定積分：次の曲線と直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

- (1) $y^2 = x$, $y = 1$, $y = 4$, y 軸
- (2) $y^2 = x - 1$, $y = x - 1$
- (3) $x = \sin y$ ($0 \leq y \leq \pi$), y 軸
- (4) $y = e^x$, $y = e$, y 軸

解説

求める面積を S とする。

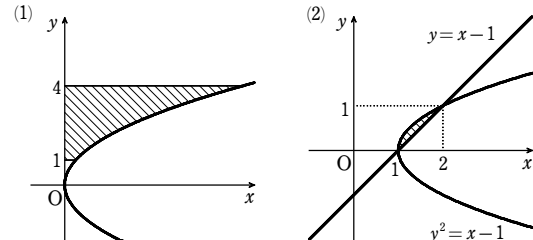
- (1) $1 \leq y \leq 4$ のとき $y^2 \geq 0$
 $S = \int_1^4 y^2 dy = \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_1^4 = \frac{1}{3} (64 - 1) = 21$

- (2) $y^2 = x - 1$, $y = x - 1$ から x を消去すると $y^2 + 1 = y + 1$
ゆえに $y = 0, 1$
よって、2曲線は、2点 $(1, 0)$, $(2, 1)$ で交わり、 $0 \leq y \leq 1$ のとき $y^2 + 1 \leq y + 1$

$$S = \int_0^1 \{(y+1) - (y^2+1)\} dy = \int_0^1 (y - y^2) dy = \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

別解 [積分の計算]

$$S = \int_0^1 (y - y^2) dy = \int_0^1 \{-y(y-1)\} dy = \frac{1}{6} (1-0)^3 = \frac{1}{6}$$



- (3) $0 \leq y \leq \pi$ のとき $\sin y \geq 0$

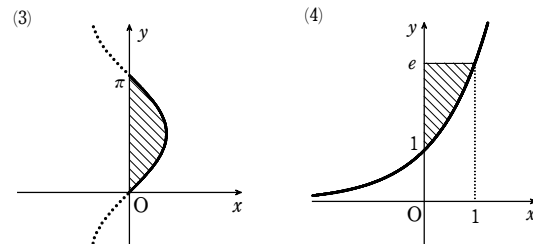
$$S = \int_0^\pi \sin y dy = \left[-\cos y \right]_0^\pi = 2$$

- (4) $y = e^x$ から $x = \log y$

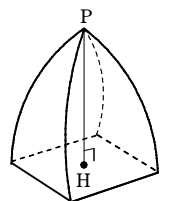
曲線 $y = e^x$ と y 軸の交点の座標は $(0, 1)$ で、 $1 \leq y \leq e$ のとき $\log y \geq 0$

$$S = \int_1^e \log y dy = \left[y \log y - y \right]_1^e = e - e - (-1) = 1$$

別解 $S = \int_0^1 (e - e^x) dx = \left[ex - e^x \right]_0^1 = 1$



問10-03 右の図のような高さが $PH = 10$ cm の立体がある。底面に平行で頂点 P から x cm の距離にある平面でこの立体を切断すると、切り口は1辺 $\sqrt{x}$ cm の正方形になる。この立体の体積を求めよ。



解説

切り口の正方形の面積は $(\sqrt{x})^2 = x$ (cm²)

よって、この立体の体積は

$$\int_0^{10} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{10} = 50 \text{ (cm}^3\text{)}$$

問10-04 底面から x cm の高さにある平面での切り口が、半径 $\sqrt[3]{x}$ cm の円となる容器がある。深さが 27 cm のとき、この容器の容積 V を求めよ。

解説

x cm の高さにある円の面積は $\pi \sqrt[3]{x^2}$ (cm²)

よって $V = \int_0^{27} \pi \sqrt[3]{x^2} dx = \pi \left[\frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} \right]_0^{27} = \frac{729}{5} \pi (\text{cm}^3)$

問10-05 次の曲線や直線および x 軸で囲まれた部分を、 x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

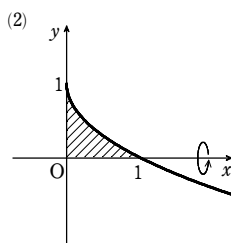
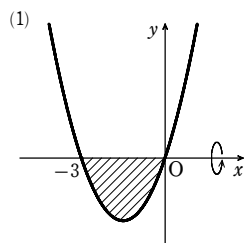
- (1) $y = x^2 + 3x$, $y = 0$ (2) $y = 1 - \sqrt{x}$, $x = 0$
 (3) $y = \tan x$, $x = \frac{\pi}{4}$ (4) $y = e^x$, $x = 1$, $x = 2$

解説

(1) $x^2 + 3x = 0$ とすると $x = -3, 0$
 $V = \pi \int_{-3}^0 (x^2 + 3x)^2 dx = \pi \int_{-3}^0 (x^4 + 6x^3 + 9x^2) dx$

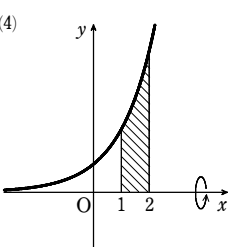
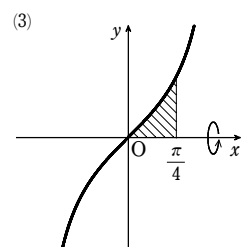
$= \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{3}{2} x^4 + 3x^3 \right]_{-3}^0 = \frac{81}{10} \pi$

(2) $1 - \sqrt{x} = 0$ とすると $x = 1$
 $V = \pi \int_0^1 (1 - \sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^1 (1 - 2\sqrt{x} + x) dx$
 $= \pi \left[x - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$



(3) $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \pi \left[\tan x - x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi - \frac{\pi^2}{4}$

(4) $V = \pi \int_1^2 e^{2x} dx = \pi \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_1^2 = \frac{\pi}{2} (e^4 - e^2)$



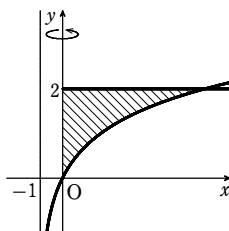
問10-06 次の曲線と直線で囲まれた部分を、 y 軸の周りに1回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

- (1) $y = \log(1+x)$, $x = 0$, $y = 2$
 (2) $y = x^2$, $x + \sqrt{y} = 2$, $x = 0$
 (3) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 2x$

解説

(1) $y = \log(1+x)$ から $x = e^y - 1$

図から $V = \pi \int_0^2 (e^y - 1)^2 dy$
 $= \pi \int_0^2 (e^{2y} - 2e^y + 1) dy$
 $= \pi \left[\frac{1}{2} e^{2y} - 2e^y + y \right]_0^2$
 $= \frac{\pi}{2} (e^4 - 4e^2 + 7)$



(2) 曲線 $x + \sqrt{y} = 2$ と直線 $x = 0$ の交点の y 座標は $y = 4$

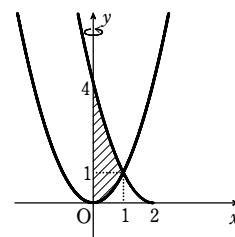
2 曲線 $y = x^2$, $x + \sqrt{y} = 2$ の方程式から y を消去すると $(2-x)^2 = x^2$

すなわち $4(1-x) = 0$

よって、 $x = 1$ から $y = 1$

ゆえに、交点の y 座標は $y = 1$

図から $V = \pi \int_0^1 y dy + \pi \int_1^4 (2 - \sqrt{y})^2 dy$
 $= \pi \int_0^1 y dy + \pi \int_1^4 (y - 4\sqrt{y} + 4) dy$
 $= \pi \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 + \pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{8}{3} y^{\frac{3}{2}} + 4y \right]_1^4 = \frac{4}{3} \pi$



(3) $x^2 - 4x + 5 = 2x$ から $x^2 - 6x + 5 = 0$

よって $(x-1)(x-5) = 0$

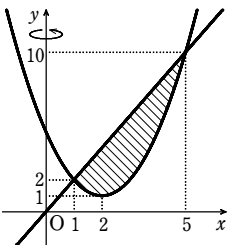
ゆえに $x = 1, 5$

$x = 1$ のとき $y = 2$

$x = 5$ のとき $y = 10$

$y = x^2 - 4x + 5$ から $x = 2 \pm \sqrt{y-1}$

図から $V = \pi \int_1^{10} \left\{ (2 + \sqrt{y-1})^2 - (2 - \sqrt{y-1})^2 \right\} dy$
 $+ \pi \int_2^{10} \left\{ (2 + \sqrt{y-1})^2 - \left(\frac{y}{2} \right)^2 \right\} dy$
 $= \pi \int_1^2 8\sqrt{y-1} dy + \pi \int_2^{10} \left(3 + 4\sqrt{y-1} + y - \frac{y^2}{4} \right) dy$
 $= \pi \left[\frac{16}{3} (y-1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 + \pi \left[3y + \frac{8}{3} (y-1)^{\frac{3}{2}} + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12} \right]_2^{10}$
 $= 64\pi$



出題者=大石知広

- 締め切り=[2025/07/01]、自己採点后に提出。
- 回答はA4レポート用紙に記入すること。
- 提出する際は

- (1) 左上をホチキス留めし、
- (2) 右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。

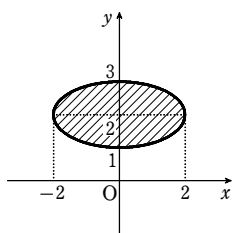
※この用紙を表紙として使うのも良い。

問11-01 (復習) 円 $x^2 + (y-3)^2 = 9$ を x 軸の周りに1回転させてできる立体(ぎりぎり穴が開いていないドーナツ)の体積を求めよ。

問11-02 (復習) 楕円 $\frac{x^2}{4} + (y-2)^2 = 1$

を以下の直線の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

- (1) x 軸 ※中抜き積分
- (2) y 軸



問11-03 次の曲線の長さ L を求めよ。 x の範囲はカッコで指定された範囲とする。

- (1) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ ($2 \leq x \leq 3$)
- (2) $y = \sqrt{4-x^2}$ ($-1 \leq x \leq 1$)
- (3) $y = \log(1-x^2)$ ($0 \leq x \leq \frac{1}{2}$)

問11-04 以下の問いに答えよ。

- (1) $x\sqrt{x^2+1} + \log(x+\sqrt{x^2+1})$ の導関数を $a\sqrt{f(x)}$ とする。
ここで、 a は定数で、 $f(x)$ は最高次の係数が1である整式とする。
このとき、 a の値と整式 $f(x)$ を求めよ。
- (2) 前問の答えを利用して、曲線 $y=x^2$ ($0 \leq x \leq 1$) の長さを求めよ。

問11-05 (自作) 次の曲線を x 軸のまわりに1回転してできる回転面の面積を求めよ。 x の範囲はカッコで指定された範囲とする。

- (1) $y=f(x)=2x$ ($0 \leq x \leq 1$)
- (2) $y=f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ ($-r \leq x \leq r$)

出題者=大石知広

- 締め切り=[2025/07/01]、自己採点后に提出。
- 回答はA4レポート用紙に記入すること。
- 提出する際は

- (1) 左上をホチキス留めし、
- (2) 右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。

※この用紙を表紙として使うのも良い。

(解説)

(青字解説文)

問11-01 (復習) 円 $x^2+(y-3)^2=9$ を x 軸の周りに1回転させてできる立体(ぎりぎり穴が開いていないドーナツ)の体積を求めよ。

(解説)

$$x^2+(y-3)^2=3^2 \text{ から } (y-3)^2=3^2-x^2$$

$$\text{ゆえに } y=3\pm\sqrt{3^2-x^2}$$

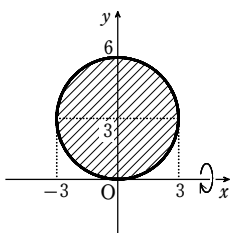
よって、求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-3}^3 \{(3+\sqrt{3^2-x^2})^2 - (3-\sqrt{3^2-x^2})^2\} dx \\ &= 2\pi \int_{-3}^3 12\sqrt{3^2-x^2} dx = 24\pi \int_0^3 \sqrt{3^2-x^2} dx \end{aligned}$$

$$x=3\sin\theta \text{ とおくと } \frac{dx}{d\theta}=3\cos\theta$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } V &= 24\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3^2-3^2\sin^2\theta} \cdot 3\cos\theta d\theta \\ &= 216\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = 216\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= 216\pi \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 216\pi \cdot \frac{\pi}{4} = 54\pi^2 \end{aligned}$$

(参考) 体積 V は、円の面積と円の中心 $(0, 3)$ が x 軸の周りに1回転したときの円周の長さの積 $9\pi \cdot 6\pi$ になっている。(パップス-ギュルダンの定理)

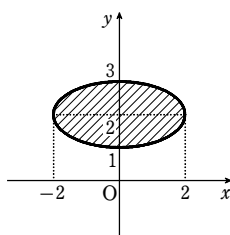


x	$0 \rightarrow 3$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$

問11-02 (復習) 楕円 $\frac{x^2}{4}+(y-2)^2=1$

を以下の直線の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

- (1) x 軸 ※中抜き積分
- (2) y 軸



(解説)

(1) 求める体積を V_1 とする。

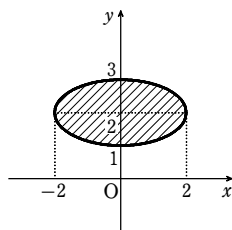
$$\frac{x^2}{4}+(y-2)^2=1 \text{ から}$$

$$y=2\pm\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$$

よって

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_{-2}^2 \left(2 + \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} \right)^2 dx \\ &\quad - \pi \int_{-2}^2 \left(2 - \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} \right)^2 dx \\ &= 4\pi \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx = 4\pi \cdot \frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 = 8\pi^2 \end{aligned}$$

(2) 求める体積を V_2 とする。



V_2 は楕円 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ を y 軸の周りに1回転させてできる立体の体積に等しいから

$$V_2 = \pi \int_{-1}^1 4(1-y^2) dy = 8\pi \int_0^1 (1-y^2) dy = 8\pi \left[y - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{16}{3}\pi$$

問11-03 次の曲線の長さ L を求めよ。 x の範囲はカッコで指定された範囲とする。

(1) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x} \quad (2 \leq x \leq 3)$

(2) $y = \sqrt{4-x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$

(3) $y = \log(1-x^2) \quad (0 \leq x \leq \frac{1}{2})$

(解説)

(1) $\frac{dy}{dx} = x^2 - \frac{1}{4x^2}$ であるから

$$1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 1 + \left(x^2 - \frac{1}{4x^2} \right)^2 = \left(x^2 + \frac{1}{4x^2} \right)^2$$

$$\begin{aligned} \text{よって } L &= \int_2^3 \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{4x^2} \right)^2} dx = \int_2^3 \left(x^2 + \frac{1}{4x^2} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{4x} \right]_2^3 \\ &= \left(9 - \frac{1}{12} \right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{8} \right) = \frac{51}{8} \end{aligned}$$

(2) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ であるから

$$1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 1 + \frac{x^2}{4-x^2} = \frac{4}{4-x^2}$$

$$\text{よって } L = \int_{-1}^1 \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$x=2\sin\theta \text{ とおくと } dx=2\cos\theta d\theta$$

また、 $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ のとき $\cos\theta \geq 0$ であるから

$$\begin{aligned} L &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{4\cos\theta}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}} d\theta = 2 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\theta \\ &= 2 \left[\theta \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

(3) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{1-x^2}$ であるから

$$1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2} = \left(\frac{1+x^2}{1-x^2} \right)^2$$

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ のとき } \frac{1+x^2}{1-x^2} > 0 \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-1 + \frac{2}{1-x^2} \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-1 + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx \\ &= \left[-x - \log|1-x| + \log|1+x| \right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} + \log 3 \end{aligned}$$

問11-04 以下の問いに答えよ。

- (1) $x\sqrt{x^2+1} + \log(x+\sqrt{x^2+1})$ の導関数を $a\sqrt{f(x)}$ とする。ここで、 a は定数で、 $f(x)$ は最高次の係数が1である整式とする。このとき、 a の値と整式 $f(x)$ を求めよ。
- (2) 前問の答えを利用して、曲線 $y=x^2$ ($0 \leq x \leq 1$) の長さを求めよ。

(解説)

(1) $\{x\sqrt{x^2+1} + \log(x+\sqrt{x^2+1})\}'$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{x^2+1} + x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} \\
 &= \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 2\sqrt{x^2+1} \\
 &\text{よって} \quad a=2, \quad f(x)=x^2+1
 \end{aligned}$$

(2) $y=x^2$ から

$$y'=2x$$

よって、求める長さを L とすると

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2} dx$$

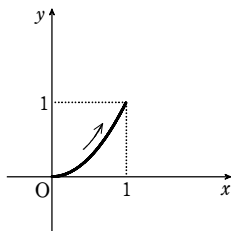
ここで、 $2x=t$ とおくと $2dx=dt$

$$L = \int_0^2 \sqrt{1+t^2} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{4} \int_0^2 2\sqrt{t^2+1} dt$$

よって、(1) から

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{4} \left[t\sqrt{t^2+1} + \log(t+\sqrt{t^2+1}) \right]_0^2 \\
 &= \frac{1}{4} \{ 2\sqrt{5} + \log(2+\sqrt{5}) \}
 \end{aligned}$$

x	$0 \rightarrow 1$
t	$0 \rightarrow 2$



問11-05 (自作) 次の曲線を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転面の面積を求めよ。 x の範囲はカッコで指定された範囲とする。

(1) $y=f(x)=2x \quad (0 \leq x \leq 1)$

(2) $y=f(x)=\sqrt{r^2-x^2} \quad (-r \leq x \leq r)$

(解答例)

(1)

$$1+|f'(x)|^2=1+4=5 \text{ より、}$$

$$S=2\pi \int_0^1 2x\sqrt{5} dx = 2\pi \cdot \sqrt{5} \int_0^1 2x dx = 2\pi \cdot \sqrt{5} [x^2]_0^1 = 2\sqrt{5} \pi$$

となる。

(2)

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$1+|f'(x)|^2 = \frac{r^2}{r^2-x^2}$$

$$\sqrt{1+|f'(x)|^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}} \text{ より、}$$

$$S=2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2-x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}} dx = 2\pi r \int_{-r}^r dx = 4\pi r^2$$

となる。

●回答は表面のみに記入すること。

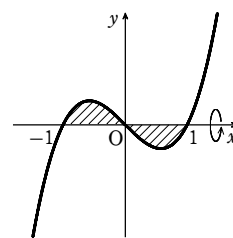
問11-X1 以下の楕円によって囲まれた領域の面積を求めよ。
 ヒント：楕円は x 軸および y 軸に関して対称である。よって、求める面積 S は第1象限にある部分の面積の4倍である。

(1) $2x^2 + 3y^2 = 6$

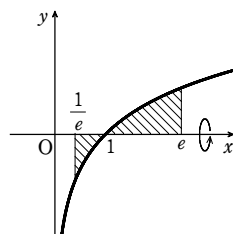
(2) $3x^2 + 4y^2 = 1$

問11-X2 次の曲線や直線および x 軸で囲まれた部分を、 x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

(1) $y = x^3 - x$



(2) $y = \log x, \quad x = \frac{1}{e}, \quad x = e$



●回答は表面のみに記入すること。

問11-X1 以下の楕円によって囲まれた領域の面積を求めよ。
ヒント：楕円は x 軸および y 軸に関して対称である。よって、求める面積 S は第1象限にある部分の面積の4倍である。

(1) $2x^2 + 3y^2 = 6$

$$x \geq 0, y \geq 0 \text{ では } x \cdot \frac{2}{3} + y^2 = 2,$$

$$y^2 = 2\left(1 - \frac{x^2}{3}\right) = \frac{2}{3}(3 - x^2),$$

$$\rightarrow y = \sqrt{\frac{2}{3}}(3 - x^2)^{1/2},$$

$$\rightarrow S_{1/4} = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{2}{3}}(3 - x^2)^{1/2} dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^{\sqrt{3}} (3 - x^2)^{1/2} dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{3\pi}{4} \quad \text{半径}\sqrt{3}\text{の円の}\frac{1}{4}\text{面積}$$

$$S = 4 \cdot S_{1/4} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 3\pi = \sqrt{6}\pi$$

(2) $3x^2 + 4y^2 = 1$

$$x \geq 0, y \geq 0 \text{ では } x^2 \cdot \frac{3}{4} + y^2 = \frac{1}{4},$$

$$y^2 = \frac{1}{4}\left(1 - 3x^2\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - x^2\right)$$

$$\rightarrow y = \sqrt{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{3} - x^2\right)^{1/2},$$

$$\rightarrow S_{1/4} = \int_0^{\sqrt{1/3}} \sqrt{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{3} - x^2\right)^{1/2} dx$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}} \int_0^{\sqrt{1/3}} \left(\frac{1}{3} - x^2\right)^{1/2} dx$$

$$\text{半径 } r = \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ の円面積の } \frac{1}{4}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 \pi = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{3},$$

$$\rightarrow S = 4 S_{1/4} = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 3}} \pi = \frac{\sqrt{3}}{6} \pi$$

問11-X2 次の曲線や直線および x 軸で囲まれた部分を、 x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

(1) $y = x^3 - x$

$$V = \pi \int_{-1}^0 (x^3 - x)^2 dx$$

$$+ \pi \int_0^1 (x^3 - x)^2 dx$$

← 第一項で $x \rightarrow -x$ と置換した。

$$= 2\pi \int_0^1 (x^3 - x)^2 dx = 2\pi \int_0^1 (x^6 - 2x^4 + x^2) dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{x^7}{7} - \frac{2x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \right)$$

$$= 2\pi \frac{15 - 2 \cdot 7 \cdot 3 + 35}{7 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{16}{105} \pi$$

(2) $y = \log x, x = \frac{1}{e}, x = e$

$$V = \int_{1/e}^e \pi (\log x)^2 dx$$

$$+ \int_1^e \pi (\log x)^2 dx$$

$$= \pi \int_{1/e}^e (\log x)^2 dx$$

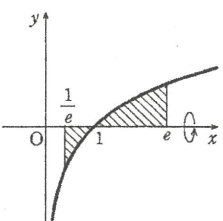
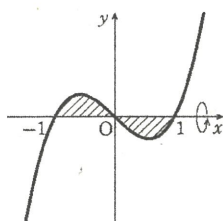
$$= \pi \left[x \cdot (\log x)^2 \right]_{1/e}^e - \pi \int_{1/e}^e 2 \log x dx$$

$$= \pi \left[x \cdot (\log x)^2 - 2x \log x + 2x \right]_{1/e}^e$$

$$= \pi \left\{ (e - 2e + 2e) - \left(\frac{1}{e} + 2 \cdot \frac{1}{e} + 2 \cdot \frac{1}{e} \right) \right\}$$

$$= \pi \left\{ e - 5 \cdot \frac{1}{e} \right\} = \pi \left(e - \frac{5}{e} \right)$$

$$\ast \int \log x dx = [x \log x - x]$$



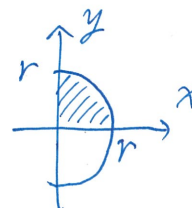
●回答は表面のみに記入すること。

問11-X1 以下の楕円によって囲まれた領域の面積を求めよ。
ヒント：楕円は x 軸および y 軸に関して対称である。よって、求める面積 S は第1象限にある部分の面積の4倍である。

(1) $2x^2 + 3y^2 = 6$

円面積分の公式：

$$S = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{\pi r^2}{4}$$



証明： $x = r \sin \theta$ とおく。

$$\frac{dx}{d\theta} = r \cos \theta, dx = r \cos \theta d\theta$$

$$\begin{array}{l} x | 0 \rightarrow r \\ \theta | 0 \rightarrow \pi/2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{r^2 - x^2} &= \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 \theta} \\ &= r \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \\ &= r \cos \theta, \text{ かつ } \end{aligned}$$

$$S = \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 \theta} \cdot r \cos \theta d\theta$$

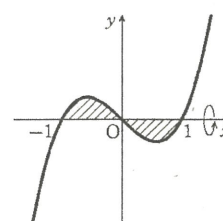
$$= r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = r^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= r^2 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}$$

$$= r^2 \left\{ \left(\frac{\pi}{4} + 0 \right) - (0 + 0) \right\} = \frac{\pi r^2}{4}$$

問11-X2 次の曲線や直線および x 軸で囲まれた部分を、 x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

(1) $y = x^3 - x$



別解：

(2) $y = \log x, x = \frac{1}{e}, x = e$

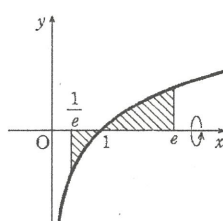
$$\int (\log x)^2 dx ?$$

$$\begin{aligned} x &= e^t, \log x = t, \\ \frac{dx}{dt} &= e^t, dx = e^t dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int t^2 e^t dt &= [t^2 e^t] - \int 2t e^t \\ &= [t^2 e^t] - [2t e^t] \\ &\quad + \int 2e^t dt \end{aligned}$$

$$= (t^2 - 2t + 2) e^t, \text{ かつ,}$$

$$\Rightarrow V = \int_{1/e}^e (\log x)^2 dx = \pi \left[e^t (t^2 - 2t + 2) \right]_{-1}^1 = \pi \left(e - \frac{5}{e} \right)$$



- 回答【かいとう】は表面【おもてめん】のみに記入【きにゅう】すること。

問12-X1 つぎの媒介変数【ばいかいへんすう】で表示【ひょうじ】された曲線【きょくせん】と x 軸【じく】でかこまれた面積【めんせき】をもとめよ。ただし、 t, θ が媒介変数である。

(1) $x=2t, y=2t-t^2 \quad (0 \leq t \leq 2)$

(2) $x=\cos \theta, y=2\sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$

問12-X2 つぎの媒介変数で表示された曲線の長【なが】さ L をもとめよ。ただし、 t, θ が媒介変数である。

(1) $x=\frac{2}{3}t^3, y=t^2 \quad (0 \leq t \leq 1)$

(2) $x=e^\theta \cos \theta, y=e^\theta \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$

問12-X3 曲線 $x=\theta \cos \theta, y=\theta \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ の長さは、曲線 $y=\frac{1}{2}x^2 \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$ の長さに等【ひと】しいことをしめせ。

ヒント：前者【ぜんしや】には媒介変数で表示されたときの積分公式【せきぶんこうしき】を、後者【こうしや】には通常【つうじょう】の積分公式をつかう。

● 回答【かいとう】は表面【おもてめん】のみに記入【きにゅう】すること。

問12-X1 つぎの媒介変数【ばいかいへんすう】で表示【ひょうじ】された曲線【きょくせん】と x 軸【じく】でかこまれた面積【めんせき】をもとめよ。ただし、 t, θ が媒介変数である。

(1) $x=2t, y=2t-t^2 \quad (0 \leq t \leq 2)$

求めた面積を S とする。

$$\begin{aligned} x=2t &\Rightarrow dx=2dt \\ S &= \int_0^2 (2t-t^2) \cdot 2 dt \quad \begin{array}{l} x|_0 \rightarrow 4 \\ t|_0 \rightarrow 2 \end{array} \\ &= \left[2t^2 - \frac{2}{3}t^3 \right]_0^2 = \left(8 - \frac{2}{3} \cdot 8 \right) - 0 \\ &= \frac{8}{3} \quad \# \end{aligned}$$

(2) $x=\cos \theta, y=2\sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$

求めた面積を S とする。

$$\begin{aligned} x=\cos \theta &\rightarrow \frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta \\ S &= \int_0^\pi |2\sin \theta \cdot (-\sin \theta)| d\theta \\ &= \int_0^\pi 2\sin^2 \theta d\theta = \int_0^\pi [1 - \cos 2\theta] d\theta \\ &= \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^\pi = \pi \quad \# \end{aligned}$$

問12-X2 つぎの媒介変数で表示された曲線の長【なが】さ L をもとめよ。ただし、 t, θ が媒介変数である。

(1) $x=\frac{2}{3}t^3, y=t^2 \quad (0 \leq t \leq 1)$

求めた長さを L とする。

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{|f'(t)|^2 + |g'(t)|^2} dt \quad \begin{array}{l} x=f(t)=\frac{2}{3}t^3 \\ f'(t)=2t^2 \\ y=g(t)=t^2 \\ g'(t)=2t \end{array} \\ &= \int_0^1 \sqrt{4t^4 + 4t^2} dt \\ &= \int_0^1 2t\sqrt{t^2+1} dt. \quad \leftarrow S = t^2+1 \text{ とおくと,} \\ &= \int_1^2 \sqrt{s} ds = \left[\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 \quad \begin{array}{l} ds = 2t \cdot dt \\ \rightarrow 2t = \frac{ds}{dt} \end{array} \\ &= \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1) \quad \# \quad \left(= \frac{4\sqrt{2}-2}{3} \right) \end{aligned}$$

(2) $x=e^\theta \cos \theta, y=e^\theta \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= f'(\theta) = e^\theta (\cos \theta - \sin \theta) \\ \frac{dy}{d\theta} &= g'(\theta) = e^\theta (\sin \theta + \cos \theta) \\ \rightarrow |f'(\theta)|^2 + |g'(\theta)|^2 &= 2e^{2\theta} \\ L &= \int_0^\pi \sqrt{2e^{2\theta}} d\theta = \sqrt{2} \left[e^\theta \right]_0^\pi \\ &= \sqrt{2} (e^\pi - 1) \quad \# \end{aligned}$$

問12-X3 曲線 $x=\theta \cos \theta, y=\theta \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ の長さは、曲線 $y=\frac{1}{2}x^2 \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$ の長さに等【ひと】しいことをしめせ。

ヒント：前者【せんしゃ】には媒介変数で表示されたときの積分公式【せきぶんこうしき】を、後者【こうしゃ】には通常【つうじょう】の積分公式をつかう。

$x=\theta \cos \theta$ & $y=\theta \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$
の長さを L_1 とする。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= f'(\theta) = \cos \theta - \theta \sin \theta \\ \frac{dy}{d\theta} &= g'(\theta) = \sin \theta + \theta \cos \theta \\ \rightarrow |f'(\theta)|^2 + |g'(\theta)|^2 &= 1 + \theta^2 \\ L_1 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2} d\theta \end{aligned}$$

一方、 $y=\frac{1}{2}x^2 \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$ の長さを L_2 とする。 $\frac{dy}{dx} = x$

$$\begin{aligned} L_2 &= \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \int_0^{2\pi} \{ 1 + x^2 \}^{\frac{1}{2}} dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+x^2} dx \end{aligned}$$

L_2 と L_1 は $\theta \leftrightarrow x$ であること以外、同じ式になっているので、 $L_1 = L_2$ $\#$

回答【かいとう】は表面【おもてめん】のみに記入【きにゅう】すること。

問13-X1 次の【つぎ】の媒介変数表示【ばいかいへんすうひょうじ】された曲線【きよくせん】

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad a > 0, \quad b > 0$$

でかこまれた図形【ずけい】を、 x 軸【じく】のまわりに回転【かいてん】させてできる立体【りったい】の体積【たいせき】 V をもとめよ。

問13-X2 次の媒介変数表示された曲線

$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad a > 0$$

を、 x 軸のまわりに回転させてできる回転面【かいてんめん】の面積【めんせき】 S をもとめよ。

問13-X3 次の極方程式【きよくほうていしき】であたえられる曲線によってかこまれた面積 S をもとめよ。

$$r = 6 \cos \theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

問13-X4 次の極方程式であたえられる曲線の長【なが】さ L をもとめよ。

$$r = 8 \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

回答【かいとう】は表面【おもてめん】のみに記入【きにゅう】すること。

解説

問13-X1 次【つぎ】の媒介変数表示【ばいかいへんすうひょうじ】された曲線【きよくせん】

$$x = a \cos \theta, y = b \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad a > 0, b > 0$$

でかこまれた図形【ずけい】を、 x 軸【じく】のまわりに回転【かいてん】させてできる立体【りったい】の体積【たいせき】 V をもとめよ。

解説

この曲線(楕円)は x 軸、 y 軸に関して対称であるから、

$0 \leq x \leq a, y \geq 0$ すなわち $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のときの曲線と x 軸、 y 軸

で囲まれた部分を、 x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求め、それを2倍すればよい。

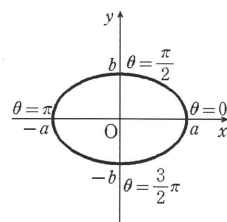
$dx = -a \sin \theta d\theta$ から

$$\begin{aligned} V &= 2 \cdot \pi \int_0^a y^2 dx \\ &= 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (b \sin \theta)^2 (-a \sin \theta) d\theta \end{aligned}$$

$$= 2\pi ab^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta$$

$$= 2\pi ab^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta - \cos^2 \theta \sin \theta) d\theta$$

$$= 2\pi ab^2 \left[-\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3} \pi ab^2$$



問13-X2 次の媒介変数表示された曲線

$$x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad a > 0$$

を、 x 軸のまわりに回転させてできる回転面【かいてんめん】の面積【めんせき】 S をもとめよ。

解説

答えは $\frac{64\pi a^2}{3}$ 教科書の間4.28

$$x = f(\theta) = a(t - \sin \theta)$$

$$y = g(\theta) = \frac{a}{2} (1 - \cos \theta)$$

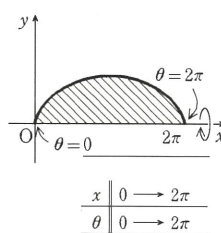
$$\rightarrow \begin{cases} f'(\theta) = a(1 - \cos \theta) \\ g'(\theta) = a \sin \theta \end{cases} \quad (\cos \theta)$$

$$|f'(\theta)|^2 + |g'(\theta)|^2 = a^2 (2 - 2 \cos \theta) = 2a^2 (1 - \cos \theta)$$

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{2} a^2 (1 - \cos \theta)^{\frac{3}{2}} d\theta$$

$$\left\{ \begin{aligned} 1 - \cos \theta &= 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ \sqrt{1 - \cos \theta} &= \sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned} \right.$$

$$= 2\pi \cdot 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta = 2\pi \cdot 4a^2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{64}{3} \pi a^2$$



問13-X3 次の極方程式【きよくほうていしき】であたえられる曲線によってかこまれた面積 S をもとめよ。

$$r = 6 \cos \theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

解説

教科書の間4.32, (2) $\rightarrow$ 答えは 9π

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |r(\theta)|^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 36 \cos^2 \theta d\theta$$

$$= 18 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos 2\theta + 1}{2} d\theta = 18 \left[\frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= 18 \cdot \left\{ \left(0 + \frac{\pi}{4} \right) - \left(0 - \frac{\pi}{4} \right) \right\} = 18 \cdot \frac{\pi}{2} = 9\pi$$

問13-X4 次の極方程式であたえられる曲線の長【なが】 L をもとめよ。

$$r = 8 \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

解説

教科書の間4.33, (1) $\rightarrow$ 答えは 8π

$$r = F(\theta) = 8 \sin \theta \rightarrow F'(\theta) = 8 \cos \theta$$

$$\begin{aligned} |F'(\theta)|^2 + |F(\theta)|^2 &= 64 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= 64, \end{aligned}$$

$$L = \int_0^\pi \sqrt{|F'(\theta)|^2 + |F(\theta)|^2} d\theta$$

$$= 8 \int_0^\pi d\theta = 8\pi$$

問13-X2 の定積分の詳細

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{|f'(\theta)|^2 + |g'(\theta)|^2} \cdot |g(\theta)| d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{2} a \sqrt{1 - \cos \theta} \cdot a (1 - \cos \theta) d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \sqrt{2} a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)^{3/2} d\theta, \quad \begin{cases} 1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ \sqrt{1 - \cos \theta} = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \end{cases}$$

$$= 2\pi \cdot \sqrt{2} a^2 \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2} \sin^3 \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta$$

$$= 2\pi \cdot 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta, \quad \begin{cases} \tau = \frac{\theta}{2} & \theta | 0 \rightarrow 2\pi \\ \tau | 0 \rightarrow \pi \end{cases}$$

$$= 2\pi \cdot 4a^2 \int_0^\pi \sin^3 \tau \cdot 2 d\tau \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\tau}{d\theta} &= \frac{1}{2} \rightarrow d\theta = 2 d\tau \end{aligned} \right.$$

$$= 2\pi \cdot 8a^2 \int_0^\pi \sin \tau (1 - \cos^2 \tau) d\tau, \quad \begin{cases} \int (-\sin x \cos^{n-1} x) dx \\ = \frac{\cos^n x}{n} \end{cases}$$

$$= 2\pi \cdot 8a^2 \left[-\cos \tau + \frac{\cos^3 \tau}{3} \right]_0^\pi$$

$$= 2\pi \cdot 8a^2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \right\} = 2\pi \cdot 8a^2 \left\{ \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right\}$$

$$= 2\pi \cdot 8a^2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{64}{3} \pi a^2$$

本番 [2025/07/16]

回答【かいとう】は表面【おもてめん】のみに記入【きにゅう】すること。

問 14-X1

以下【いか】の広義積分【こうぎせきぶん】が収束【しゅうそく】するか発散【はっさん】するかをしらべ、収束するならばその値【あたい】をもとめよ。

(1)

$$I = \int_0^1 \frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} dx \quad (1)$$

(3)

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx \quad (3)$$

(4)

$$I = \int_{-\infty}^\infty x e^{-x} dx \quad (4)$$

(2)

$$I = \int_0^e x \log x dx \quad (2)$$

ただし $\lim_{s \rightarrow 0} [s^2 \log s] = 0$ である。