

4/3, 木, 2025

不定積分

$$\int \overbrace{f(x)}^{\text{被積分関数}} dx = \underbrace{F(x)}_{\text{原始関数}} + \underbrace{C}_{\text{積分定数}}$$

積分変数

※ 積分変数は x 以外の文字を使ってもよい。数学的には任意。

$$\int f(t) dt = F(t) + C$$

② 色々な積分の公式 → 2年次ラストで展開。

置換積分法

テキスト P. 82 ~ 84

~~積分変数~~ $x = g(t)$ と置換すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{ F(x) + C \} &= \frac{d}{dt} F(g(t)) + 0 \neq f(g(t)) \cdot \frac{d}{dt} \\ &= \frac{dF(g(t))}{d(g(t))} \frac{d(g(t))}{dt} = \frac{dF(x)}{dx} \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

両辺を t について不定積分。

$$F(x) + C = \int \underbrace{\frac{dF(g(t))}{d(g(t))}}_{f(g(t))} \frac{d(g(t))}{dt} dt = \int f(g(t)) \frac{dx}{dt} dt$$

例 3.3

$$F(x) = \int f(x) dx,$$

$$x = g(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = g'(t)$$

$$= \int f(x) \frac{dx}{dt} dt, \quad \text{ただし } x = g(t)$$

$$= \int f(g(t)) \frac{dg(t)}{dt} dt$$

例 3.3

置換積分で $\int \left(\frac{1}{2}x - 1 \right)^5 dx$ は?

$$\left(\frac{1}{2}x - 1 \right) = t \iff x = 2t + 2,$$

$$\frac{dx}{dt} = 2 \rightarrow "dx = 2dt"$$

$$\text{与式} = \int \left(\frac{1}{2}x - 1 \right)^5 dx = \int t^5 \cdot 2dt = 2 \cdot \frac{1}{6} t^6 + C$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}x - 1 \right)^6 + C$$

例題 3.3 $\rightarrow$ 2 分 7 秒

問 3.5 以下の不定積分を求めよ。

(1) $\int x(x+2)^5 dx$

$$= \int (t-2)t^5 \left(\frac{dx}{dt}\right) dt$$

$$= \int [t^6 - 2t^5] dt = \frac{t^7}{7} - \frac{2}{6}t^6 + C$$

$$= t^6 \left(\frac{1}{7}t - \frac{1}{3} \right) + C = (x+2)^6 \left(\frac{1}{7}x - \frac{1}{3} \right)$$

② $\frac{d}{dx} \left\{ (x+2)^6 \left(\frac{x}{7} - \frac{1}{21} \right) \right\} = 6(x+2)^5 \left(\frac{1}{7} \right) + (x+2)^6 \left(\frac{1}{7} \right)$

$$= (x+2)^5 \left\{ 6 \left(\frac{x}{7} - \frac{1}{21} \right) + \frac{x+2}{7} \right\} = (x+2)^5 \left\{ x - \frac{1}{21} + \frac{2}{7} \right\} = x(x+2)^5$$

(2) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$

$$= \int \frac{\sqrt{t^2-1}}{t} \cdot \left(\frac{dx}{dt} \right) dt$$

$$= \int \frac{\sqrt{t^2-1}}{t} \cdot \frac{2t}{\sqrt{t^2-1}} dt = \int 2 dt = 2t + C = 2\sqrt{x^2-1} + C$$

(3) $\int 2xe^{(x^2-2)} dx$

$$= \int \frac{dt}{dx} dx$$

$$= \int dt = t + C$$

$$= e^{(x^2-2)} + C$$

$$x^2-2 = t \rightarrow \frac{d}{dx} \{ e^{(x^2-2)} \} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \{ e^t \} = 2x \cdot e^t = 2xe^{(x^2-2)}$$

$$t = e^{(x^2-2)} \\ \frac{dt}{dx} = 2xe^{(x^2-2)}$$

(4) $\int \cos^4 x \sin x dx$

$$= \int t^4 (-dt)$$

$$= -\frac{1}{5} t^5 + C = -\frac{1}{5} \cos^5 x + C$$

$$t = \cos x$$

$$\frac{dt}{dx} = -\sin x$$

$$\rightarrow \sin x dx = -dt$$

(5)

$$\int \frac{(\log x)^2}{x} dx$$

$$= \int t^2 \cdot dt = \frac{1}{3} t^3 + C = \frac{1}{3} (\log x)^3 + C$$

(6)

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1}{t^2} (-dt) = \int \frac{(-1)}{t^2} dt$$

$$= +\frac{1}{t} + C = \frac{1}{\cos^2 x} + C$$

$$t = \cos x$$

$$\frac{dt}{dx} = -\sin x \rightarrow \sin x dx = -dt$$

例題 3.4

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C \text{ を示せ} \rightarrow f(x) = t \text{ と置く. 以下略.}$$

例題 3.6

$$(1) \int \frac{6x^2}{x^3-5} dx$$

$$\begin{array}{l} \text{X2} \\ a(x) = x^3 - 5 \rightarrow a'(x) = 3x^2 \end{array}$$

$$= \int \frac{2a'(x)}{a(x)} dx = 2 \int \frac{a'(x)}{a(x)} dx = 2 \log |x^3 - 5| + C //$$

$$(2) \int \frac{\cos x}{\sin x} dx, \begin{array}{l} \text{X2} \\ a(x) = \sin x, a'(x) = \cos x \end{array}$$

$$= \int \frac{a'(x)}{a(x)} dx = \log |\sin x| + C //$$

$$(3) \int \frac{4e^{2x}}{e^{2x}+2} dx = \int \frac{2 \cdot a'(x)}{a(x)} dx \quad \begin{array}{l} \text{XE} \\ a(x) = e^{2x} + 2 \\ a'(x) = 2e^{2x} \end{array}$$

$$= 2 \log |a(x)| + C = 2 \log |e^{2x} + 2| + C //$$

$$(4) \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{a'(x)(-1)}{a(x)} dx \quad \begin{array}{l} \text{XE} \\ a(x) = \cos x \\ a'(x) = -\sin x \end{array}$$

$$= -\log |\cos x| + C //$$

$$(5) \int \frac{\sin x}{2 + \cos x} dx = \int \frac{-a'(x)}{a(x)} dx \quad \begin{array}{l} \text{X2} \\ a(x) = 2 + \cos x \\ a'(x) = -\sin x \end{array}$$

$$= -\log |a(x)| + C //$$

(1)~(5) 全部 11 min

(少しもと3.)

$$\text{例題 3.4} \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C \text{ を示せ.}$$

証明 $f(x) = t$ と置く。両辺を t で微分すると、

$$f'(x) \frac{dx}{dt} = 1$$

$$\Rightarrow \text{与式左辺} = \int \frac{1}{f(x)} f'(x) dx = \int \frac{1}{t} dt = \log |t| + C$$

$$= \log |f(x)| + C //$$

<4/9, 2025>

$$I = \int f(x) dx = \int f(g(t)) \left(\frac{dx}{dt} \right) dt \quad x = g(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = g'(t) \quad \left(\frac{dx}{dt} \right)$$

これが $at^2 + bt + c$ 等の単純な形なら、2のまゝ行く。

$$= \int f(t) \cdot g'(t) dt$$

これが $at^2 + bt + c$ 等の単純な形なら、2のまゝ行く。

$$= H(t) + C = (t \rightarrow x \text{ 戻し}) = F(x) + C$$

$$I = \int f(x) dx, \quad x = g(t) \text{ と } t = a(x) \text{ の両方、}$$

$$f(x) = f(g(t))$$

$$= b(t) \cdot a'(t)$$

23番の2とを“発見”できなかった、

$$= \int f(g(t)) dx = \int b(t) \cdot \left(\frac{dx}{dt} \right) dt = \int b(t) dt$$

$$= B(t) + C = (t \rightarrow x \text{ 戻し}) = F(x) + C$$

$$I = \int f(x) dx = \int f(g(t)) \left(\frac{dx}{dt} \right) dt \quad x = g(t) \leftrightarrow t = a(x)$$

$$\frac{dx}{dt} = g'(t) \quad \left(\frac{dx}{dt} \right)$$

$$= \int f(t) \cdot g'(t) dt$$

これが $at^2 + bt + c$ 等の単純な形なら、2のまゝ行く。

$$= H(t) + C = (t \rightarrow x \text{ 戻し}) = F(x) + C$$

$$I = \int f(x) dx, \quad x = g(t) \leftrightarrow t = a(x)$$

$$f(x) = f(g(t))$$

$$= b(t) \cdot a'(t)$$

23番の2とを“発見”できなかった、

$$= \int f(g(t)) dx = \int b(t) \left(\frac{dx}{dt} \right) dt = \int b(t) dt$$

$$= B(t) + C = (t \rightarrow x \text{ 戻し}) = F(x) + C$$

<4/9, 2025> 数学基礎 I①用

$$\left. \begin{array}{l} A = \sim \\ B = \sim \\ C = \sim \end{array} \right\} \rightarrow \text{代入する前に } QA + QB + QC \text{ の} \\ \text{形に整理しておく!}$$

大前提: $\frac{\text{前} + \text{後}}{2} \geq 60 \leftarrow \text{通報条件}$

$\text{前} = \text{前期の}$

$\text{後} = \text{後期の}$

<4/14, 2025> 解析 (3-I) 用

例 3.5 (p.84)

$$\begin{aligned} (1) \quad & \int x(x+2)^5 dx \quad \left\{ \begin{array}{l} t = x+2 \\ \Downarrow \\ x = t-2 \\ \frac{dx}{dt} = dt \end{array} \right. \\ &= \int (t-2)t^5 dt \\ &= \int [t^6 - 2t^5] dt \\ &= \frac{t^7}{7} - \frac{2t^6}{6} + C \\ &= \frac{(x+2)^7}{7} - \frac{(x+2)^6}{3} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx \\ &= \int \frac{\sqrt{t^2+1}}{t} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt \right) \\ &= \int 1 dt = t + C \\ &= \sqrt{x^2-1} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & t = \sqrt{x^2-1} \\ & t^2 = x^2-1 \\ & x^2 = t^2+1 \\ & x = \sqrt{t^2+1} \\ & \frac{dx}{dt} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \\ & dx = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & \int 2x e^{x^2-2} dx \quad \left\{ \begin{array}{l} t = x^2-2 \\ \frac{dt}{dx} = 2x \end{array} \right. \\ &= \int \left(\frac{dt}{dx} \right) e^t dx \\ &= \int e^t dt = e^t + C = e^{x^2-2} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \quad & \int \frac{(\log x)^2}{x} dx \quad \left\{ \begin{array}{l} t = \log x \\ \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \end{array} \right. \\ &= \int t^2 \left(\frac{dt}{dx} \right) dx \\ &= \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3} (\log x)^3 + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad & \int \cos^4 x \sin x dx \quad \left\{ \begin{array}{l} t = \cos x \\ \frac{dt}{dx} = -\sin x \end{array} \right. \\ &= \int t^4 \left(-\frac{dt}{dx} \right) dx \\ &= (-) \int t^4 dt = -\frac{t^5}{5} + C \\ &= -\frac{\cos^5 x}{5} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \quad & \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx \quad \left\{ \begin{array}{l} t = \cos x \\ \frac{dt}{dx} = -\sin x \end{array} \right. \\ &= \int \frac{1}{t^2} \left(-\frac{dt}{dx} \right) dx \\ &= (-) \int \frac{1}{t^2} dt = (-) \cdot \frac{(-)}{t} + C \\ &= \frac{1}{\cos x} + C \end{aligned}$$

<4/14, 2025> 解析(3-I)用

問 3.6 (p.84)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \int \frac{6x^2}{x^3-5} dx \quad \begin{cases} a(x) = x^3-5 \\ a'(x) = 3x^2 \end{cases} \\
 &= 2 \int \frac{a'(x)}{a(x)} dx \\
 &= 2 \log |x^3-5| + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \\
 &= \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx \\
 &= \log |\sin x| + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \int \frac{4e^{2x}}{e^{2x}+2} dx \quad \begin{cases} a(x) = e^{2x}+2 \\ a'(x) = 2e^{2x} \end{cases} \\
 &= 2 \int \frac{a'(x)}{a(x)} dx \\
 &= 2 \log |e^{2x}+2| + C
 \end{aligned}$$

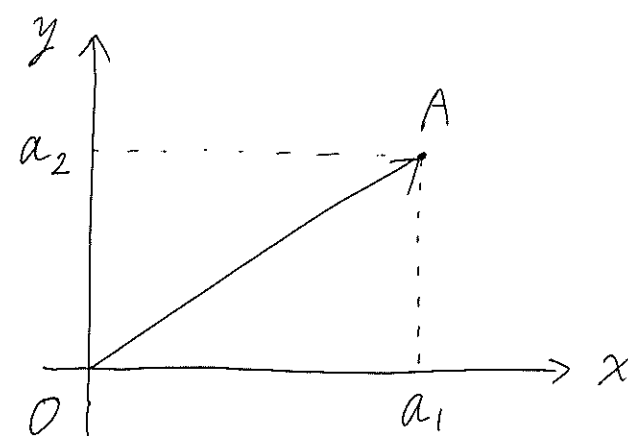
$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \int \tan x dx \\
 &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\
 &= \int \frac{(-)(\cos x)'}{\cos x} dx \\
 &= -\log |\cos x| + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & \int \frac{\sin x}{2+\cos x} dx \quad \begin{cases} a(x) = 2+\cos x \\ a'(x) = -\sin x \end{cases} \\
 &= \int \frac{(-)a'(x)}{a(x)} dx \\
 &= -\log |2+\cos x| + C
 \end{aligned}$$

* $\log 0 \rightarrow -\infty$
 という問題は、
 今は気にするな!

<4/14, 2025> 代数キカ(2-4)用

ベクトルの成分表示

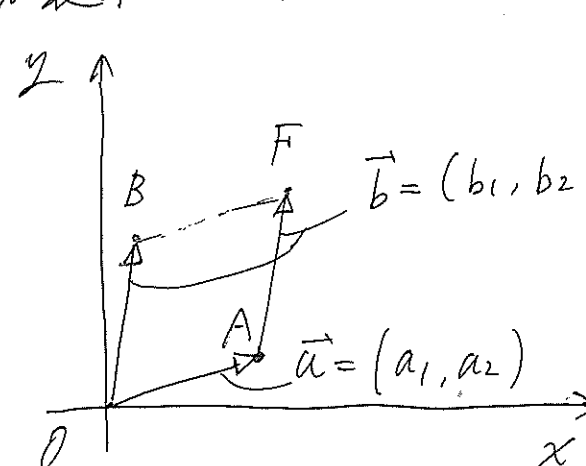


$$\begin{aligned}
 \vec{a} &= \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2), \\
 a_1 &\dots x \text{成分} \\
 a_2 &\dots y \text{成分}
 \end{aligned}$$

単位ベクトルを使った書き方

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} \vec{e}_1 = (1, 0) \\ \vec{e}_2 = (0, 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = (a_1, a_2) \\
 & \quad \quad \quad = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2
 \end{aligned}$$

成分表示を使ったベクトルの和と差



$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OF} &= \vec{a} + \vec{b} \\
 &= a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 \\
 &= (a_1 + b_1) \vec{e}_1 + (a_2 + b_2) \vec{e}_2 \\
 &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{BA} &= \vec{a} - \vec{b} \\
 &= (a_1 - b_1, a_2 - b_2)
 \end{aligned}$$

〈4/28, 月, 2025〉 解析学・3年・④用ノート

單元 = 定積分 (教科書 p. 90 ~ 93)

定積分 $\rightarrow F(x)$ は $f(x)$ の原始関数

$$I(a, b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

これは次のようにも書く。

$$\left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

基本的な性質

$$\int_a^b f(x) dx = (-1) \int_b^a f(x) dx \quad (\text{範囲を逆転} \rightarrow \text{変号})$$

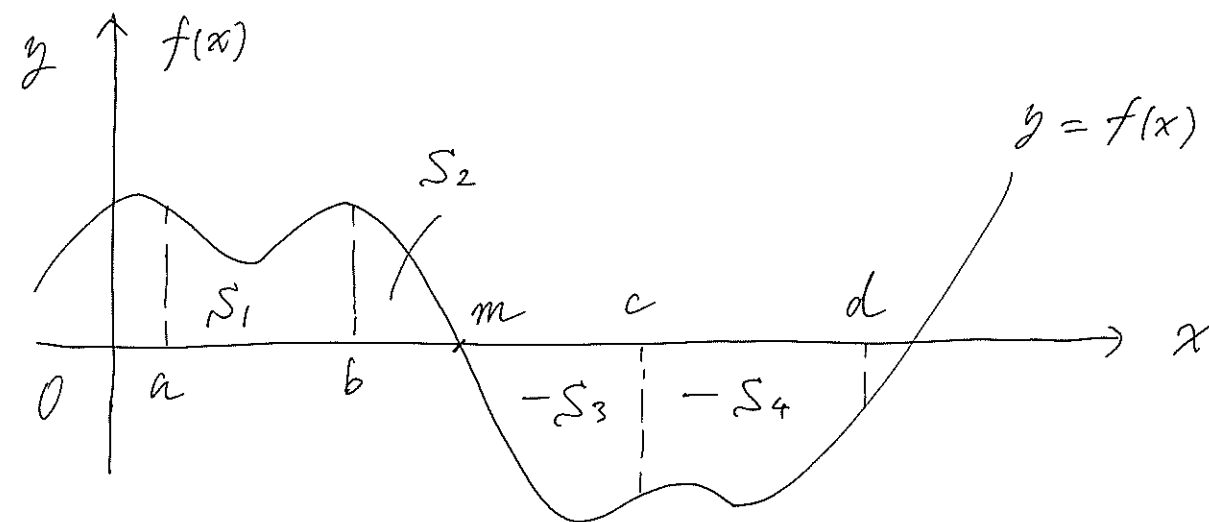
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (\text{範囲の分割})$$

$$\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0$$

$$\int_a^b \{ \alpha f(x) + \beta g(x) \} dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx \quad (\text{線形性})$$

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) + C \right]_a^b = \left[F(x) \right]_a^b + \underbrace{(C - C)}_{\text{積分定数は不要}}$$

面積と定積分 (p. 91)



それぞれの面積 $S_1, S_2, -S_3, -S_4$ について、

$$\int_a^b f(x) dx = \cancel{F(b) - F(a)} \left[F(x) \right]_a^b = S_1 > 0$$

$$\int_c^d f(x) dx = \left[F(x) \right]_c^d = -S_4 < 0$$

$$\int_b^c f(x) dx = \int_b^m f(x) dx + \int_m^c f(x) dx = S_2 - S_3$$

※ 今は覚えて！ 証明は後の
区分求積のところで。

微分積分学の基本定理 (p. 93)

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

証明

$$I = \int_a^x f(t) dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a),$$

右辺を $\frac{d}{dx}$ する。2の階、 $F(a)$ の方はもちろん
 x の関数ではない = 定数とみなせるので、

$$\frac{d}{dx} \{F(x) - F(a)\} = f(x) - 0 = f(x)$$

p. 15 (1)

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_1^{x+1} \{(x+1)-t\} \log t dt = \int_0^x \{x+s\} \log(s+1) ds \\ &= x \int_0^x \log(s+1) ds + \int_0^x s \log(s+1) ds \\ \frac{d}{dx} f(x) &= \int_0^x \log(s+1) ds + x \cdot \log(x+1) - x \log(x-1) \end{aligned}$$

$$f(x) = \int_1^{x+1} \{(x+1)-t\} \log t dt = \int_1^{x+1} \log t dt + \text{const}$$

$$= [t \log t - t]_{t=1}^{t=x+1} = (x+1) \log(x+1) - x$$

(X2)

$$(1) I(x) = \int_1^{x+1} \{(x+1)-t\} \log t dt$$

$$= (x+1) \int_1^{x+1} \log t dt - \int_1^{x+1} t \log t dt$$

$$I'(x) = \frac{d(x+1)}{dx} \frac{d}{d(x+1)} I(x) = \int_1^{x+1} \log t dt + \underbrace{(x+1) \cdot \log(x+1)}_{(- (x+1) \log(x+1))}$$

$$= [t \log t - t]_1^{x+1} = \{(x+1) \log(x+1) - (x+1)\} - \{1 \cdot 0 - 1\}$$

$$= (x+1) \log(x+1) - x$$

$$(2) I(x) = \int_0^{x^2} (x^2 - t) e^t dt = x^2 \int_0^{x^2} e^t dt - \int_0^{x^2} t e^t dt$$

$$I'(x) = \frac{d(x^2)}{dx} \frac{d}{d(x^2)} I(x) = 2x \left\{ \int_0^{x^2} e^t dt + \cancel{x^2 e^{x^2}} - \cancel{x^2 e^{x^2}} \right\}$$

$$= 2x [e^t]_{t=0}^{t=x^2} = 2x(e^{x^2} - 1)$$

✓ 今週は授業と宿題は無いが、代わりに

GW課題は必ずやると!

<5/11, 日, 2025> 解析学3年⑤用ノート

単元 = 置換積分法による定積分 (テキスト p. 94~96)

(復習) 定積分: $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とすると,

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

※ 積分定数は付かない。

置換積分法 (p. 94)

1. $x = g(t)$, $g(t)$ は微分可能 $\rightarrow \frac{dx}{dt} = g'(t)$

$$\begin{cases} a = g(\alpha) \\ b = g(\beta) \end{cases} \longleftrightarrow \begin{array}{c|c} x & a \rightarrow b \\ \hline t & \alpha \rightarrow \beta \end{array}$$

2. のとき次式が成り立つ。

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t) dt$$

証明: $x = g(t)$ とすると,

$$\frac{d}{dt} F(g(t)) = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = g'(t) \cdot f(x=g(t))$$

したがって, $F(g(t))$ は $g'(t)f(g(t))$ の原始関数なので,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= F(b) - F(a) = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) \\ &= \int_\alpha^\beta g'(t) f(g(t)) dt \end{aligned}$$

積分範囲の書き直し $\rightarrow$ 必ず行ふこと。

$$\begin{array}{c|c} x & a \rightarrow b \\ \hline t = g(x) & \alpha \rightarrow \beta \end{array}$$

注意①:

注意②: 不定積分と異なり、積分後に $g(t) \rightarrow x$ の形に戻す必要はない。

$$I = \int_\alpha^\beta f(g(t)) g'(t) dt = [F(g(t))]_\alpha^\beta = F(g(\beta)) - F(g(\alpha))$$

β & α を t として $g(t)$ 代入 & 計算してよい。

例 = 問 3.17 (p. 95)

$$\begin{aligned} (1) \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos x dx & \quad \begin{cases} t = g(x) = \sin x \\ \frac{dt}{dx} = g'(x) = \cos x \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 0 \rightarrow 1 \end{array} \\ &= \int_0^1 t^3 \frac{dt}{dx} dx \rightarrow \cos x = \frac{dt}{dx} \\ &= \int_0^1 t^3 dt = \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{5x+4}} dx & \quad \begin{cases} t = \sqrt{5x+4} \\ t^2 = 5x+4 \\ x = \frac{t^2-4}{5} \end{cases} \quad \begin{array}{c} \frac{dx}{dt} = \frac{2t}{5} \\ x+1 = \frac{t^2+1}{5} \end{array} \quad \begin{array}{c|c} x: & 0 \rightarrow 1 \\ \hline t: & 2 \rightarrow 3 \end{array} \\ &= \int_2^3 \left(\frac{t^2+1}{5} \right) \frac{1}{t} \cdot \frac{2t}{5} dt \quad \left(= \frac{2}{25} \cdot \frac{22}{3} = \frac{44}{75} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{25} \int_2^3 (t + \frac{1}{t}) dt = \frac{2}{25} \left[\frac{t^2}{2} + \ln t \right]_2^3 = \frac{2}{25} \left\{ 9 + 3 - \frac{8}{2} - 2 \right\} = \frac{2}{25} \cdot \frac{36-8-4}{3} = \frac{2}{25} \cdot \frac{24}{3} = \frac{16}{25}$$

例 = 問題 3.17 (p. 25) につき

$$(3) \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx, \quad \begin{cases} t = x^2 + 1 \\ \frac{dt}{dx} = 2x \\ \rightarrow x = \frac{1}{2} \frac{dt}{dx} \end{cases} \quad \begin{array}{|l} x: 0 \rightarrow 1 \\ t: 1 \rightarrow 2 \end{array}$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2} \frac{dt}{dx} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} [\log |t|]_1^2 = \frac{1}{2} \{ \log 2 - 0 \} = \frac{1}{2} \log 2$$

$$(4) \int_0^1 x e^{x^2} dx, \quad \begin{cases} t = x^2 \\ \frac{dt}{dx} = 2x \\ \rightarrow x = \frac{1}{2} \frac{dt}{dx} \end{cases} \quad \begin{array}{|l} x: 0 \rightarrow 1 \\ t: 0 \rightarrow 1 \end{array}$$

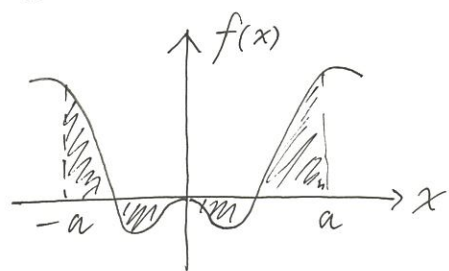
$$= \int_0^1 e^t \frac{1}{2} \frac{dt}{dx} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 e^t dt = \frac{1}{2} [e^t]_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

(5/12, 2025)
続きは明日に。

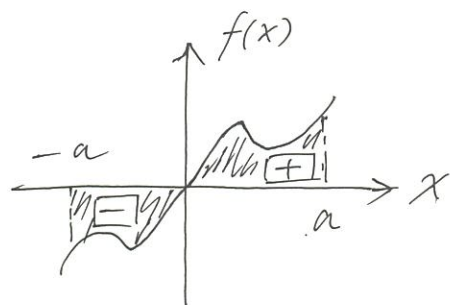
偶関数と奇関数の対称定積分

① $f(x)$ が偶関数, すなわち,
 $f(-x) = f(x)$ のとき,



$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

② $f(x)$ が奇関数, すなわち,
 $f(-x) = -f(x)$ のとき,



$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

① の証明: $f(-x) = (+) f(x) = f(x)$ のとき,

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_{-a}^0 f(-x) dx \quad \leftarrow t = -x \text{ とおくと, } \frac{dx}{dt} = (-1)$$

$$= \int_a^0 f(t) \cdot (-1) dt = - \int_a^0 f(t) dt = \int_0^a f(t) dt$$

したがって,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

$$= \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

積分定数を t から x に書き換えてよい。

② の証明: $f(-x) = (-) f(x) = -f(x)$ のとき,

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_{-a}^0 (-) f(-x) dx \quad \leftarrow t = -x \text{ とおくと,}$$

$$= \int_a^0 (-) f(t) \cdot (-1) dt = (-) \int_0^a f(t) dt$$

したがって,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

$$= (-) \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(x) dx = 0$$

× 7

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x (\cos x)' (-1) dx$$

$$= \left[\sin^{n-1} x (-\cos x) \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx$$

(n-1)

$$= 0 + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx$$

$$= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \rightarrow n I_n = (n-1) I_{n-2}$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \text{ より, } t = \frac{\pi}{2} - x \text{ とすれば,}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \int_{\pi/2}^0 \sin^n t (-dt) = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt = I_n$$

<5/19, 月, 2025> 解析学(3-I)⑥用ノート

本日 → 部分積分による定積分 (テキスト p. 97 ~ 99)

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = \left[f(x) g(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

(7/11)

使用上の注意: 一般に、以下のようにとると上手<u>く</u>2とか

$g(x)$ ~~を~~ = 微分された側 ... $x^n, \log x, \sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \tan^{-1} x$

$f'(x)$ ~~を~~ = 原始化された側 ... $\sin x, \cos x, e^{ax}$

例 = 例題 3.10 (p. 97)

$$(1) I = \int_0^{\pi/4} x^2 \sin 2x dx = \left[(+) x^2 \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) \right.$$

$g(x)$	$f'(x)$
x^2	$\sin 2x$
$\downarrow$	$\downarrow \int$
$2x$	$-\frac{1}{2} \cos 2x$
$\downarrow$	$\downarrow \int$
2	$-\frac{1}{4} \sin 2x$
$\downarrow$	$\downarrow \int$
0	$\frac{1}{8} \cos 2x$
$(-)$ $\rightarrow (-) \int 0 \cdot \frac{1}{8} \cos 2x dx$	

$$+ (-) 2x \left(-\frac{1}{4} \sin 2x \right) + (+) 2 \cdot \frac{1}{8} \cos 2x \Big]_0^{\pi/4}$$

$$+ (-) \int_0^{\pi/4} 0 \cdot \frac{1}{8} \cos 2x dx$$

$$\int_a^b 0 dx = \left[C \right]_a^b = C - C = 0$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2} \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \right]_0^{\pi/4}$$

$$= \left(\frac{\pi}{8} + 0 \right) - \left(0 + \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

$$(2) \quad I = \int_0^1 \tan^{-1} x \, dx = \int_0^1 1 \cdot \tan^{-1} x \, dx$$

$\frac{g(x)}{f(x)}$		$= \left[x \tan^{-1} x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$
$\begin{array}{c} \tan^{-1} x \\ \downarrow' \\ \frac{1}{x^2+1} \end{array}$	$\begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \int \\ x \end{array}$	$= \left\{ 1 \cdot \frac{\pi}{4} - 0 \right\} - \frac{1}{2} \left[\log(x^2+1) \right]_0^1$
$\underbrace{\hspace{10em}}_{(-)}$		$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2$

例② = 78 p. の (三角関数)ⁿ の積分 → 06-06 (おまけ)

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$$

$$\checkmark I_{n=0} = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = [x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\checkmark I_{n=1} = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 0 - (-1) = 1$$

$$\checkmark I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx \text{ についても } \rightarrow 06-06 (1),$$

$$\checkmark I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (\text{漸化式}) \rightarrow 06-06 (2),$$

<5/29, 火, 2025> 3-I 解析⑥用ノート

→ +3!



② 06-03, (1)

$$\int_{-1}^1 x e^{-3x^2} dx$$

$$= \left[-\frac{e^{-3x^2}}{6} \right]_{-1}^1 = -\frac{e^{-3}}{6} - \left(-\frac{e^{-3}}{6} \right) = 0$$

$$[e^{-3x^2}]'$$

$$= -3 \cdot 2x e^{-3x^2}$$

$$\rightarrow x e^{-3x^2} = \left[-\frac{e^{-3x^2}}{6} \right]'$$

(2)

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x dx,$$

$$= \left[-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \left\{ -\pi^2 (-1) + 2\pi \cdot 0 + 2(-1) \right\}$$

$$- \left\{ -\pi^2 (-1) + 2\pi \cdot 0 + 2(-1) \right\} = 0$$

$$\int x^2 \sin x dx$$

$$= \left[x^2 (-\cos x) \right] + \int 2x \cos x dx$$

$$= \left[\text{ } \right] + \left[2x (\sin x) \right] - \int 2 \sin x dx$$

$$= \left[\text{ } \right] + \left[\text{ } \right] - \left[2(-\cos x) \right]$$

$$= \left[x^2 (-\cos x) + 2x \sin x + 2 \cos x \right]$$

<5/29, 火, 2025> 2-4 代数カ⑦用ノート

→ +3!

$$t = a(x)$$

$$\frac{dt}{dx} = a'(x)$$

$$\int f(x) dx = \int g\left(\frac{1}{a(x)}\right) \cdot a'(x) dx$$

$$= \int g(t) \cdot \left(\frac{dt}{dx} \right) dx = \int g(t) dt,$$

$$\text{例: } \int 2x e^{x^2} dx$$

$$= \int e^t dt, t = x^2$$

$$\int f(x) g'(x) dx = \left[f(x) g(x) \right] - \int f'(x) g(x) dx,$$

$f(x)$ --- 微分された側 $\rightarrow x^n, e^x, \log x, \sin^{-1} x, \tan^{-1} x$

$g'(x)$ --- 原始化された側 $\rightarrow x^n, e^x, \sin x, \cos x, 1 = (x)'$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x+a)^n \\ (kx)^n \\ \sin kx \\ \cos kx \\ e^{kx} \end{array} \right\} \xrightarrow{\int \sim dx} \left\{ \begin{array}{l} \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1} \\ \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(kx)^{n+1}}{k} \\ \frac{-1}{k} \cos kx \\ \frac{1}{k} \sin kx \\ \frac{1}{k} e^{kx} \end{array} \right\}$$

$$\log(x+a) \xrightarrow{\int \sim dx} (x+a) \log(x+a) - x$$

<5/28, 水, 2025> 3-M2, 代数・力⑦用ノート

テスト前 → 定義をよく確認しておくこと!

例: 余因子, 余因子行列, 余因子展開,
クラメル公式, 正則条件, etc.

<6/5, 2025>

図習用カダイ⑥ → 返却, ⑦ → All In!

<6/6, 2025>

⑦ → 岩間, 小倉 → A

テストを実施 → ①数の計算 + 判別式

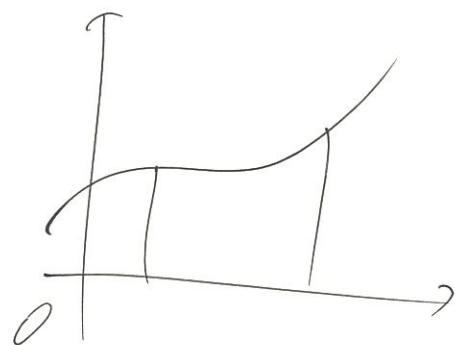
<6/6, 金, 2025>

1-2, 基礎数Ⅱ, ⑦ → 間根山

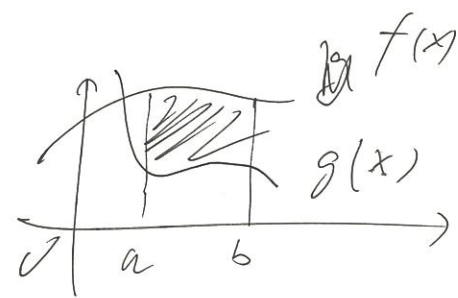
<6/10, 2025> 3-I 解析⑧用ノート

事後

面積と定積分 (p. 102 ~ 105)

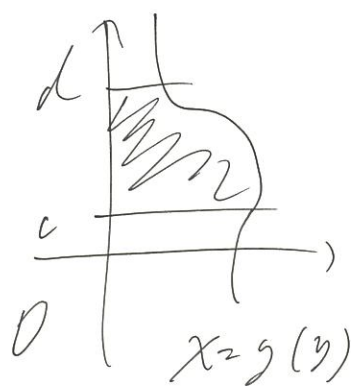


$$S = \int_a^b f(x) dx$$



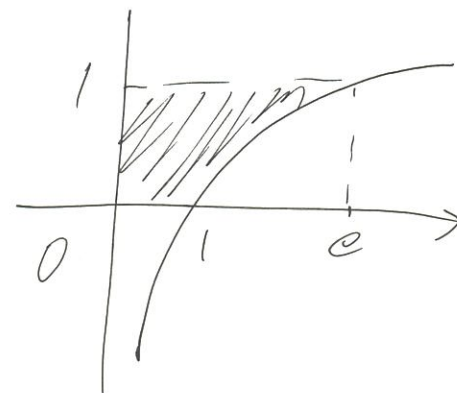
$$S = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

$$= \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$



$$S = \int_c^d g(y) dy$$

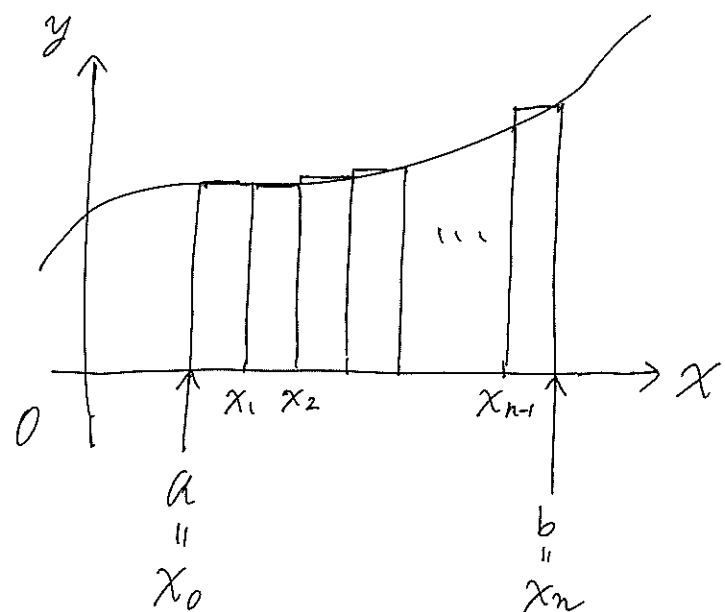
例: $y = \log x \Leftrightarrow x = e^y$



$$S = \int_0^1 e^y dy$$
$$= [e^y]_0^1 = e - 1$$

<6/11, 水, 2025> 3-I 解析 [8] B 用 1-ト

区分別積法



範囲:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \Delta_n(x_k),$$

$$\Delta_n(x_k) = f(x_k) \cdot [x_k - x_{k-1}]$$

ここでキレ等に分割したのなら、

$$\begin{cases} x_k = a + \frac{(b-a)}{n} k \\ x_{k-1} = a + \frac{(b-a)}{n} (k-1) \end{cases} \quad x_k - x_{k-1} = \frac{(b-a)}{n} \equiv \Delta_n$$

である。

$n \rightarrow \infty$ にすると、 S_n は $f(x)$ を定積分した面積に等しくなる。したがって、

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \Delta_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \int_a^b f(x) dx$$

例 = 例 3.9 (p.100)

区分別積による $\int_0^1 x^2 dx$ の計算。

$$\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \rightarrow x_k = a + \frac{(b-a)}{n} k = \frac{k}{n}, \text{ したがって、}$$

$$f(x_k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2, \quad \Delta_n = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \Delta_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \left\{ \sum_{k=1}^n k^2 \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(n+1)}{6}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}$$

一方で、

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} [x^3]_0^1 = \frac{1}{3}$$

合致した。

問 3.22

区分解法による $\int_0^2 x dx$ の計算。

$$\begin{cases} a=0 \\ b=2 \end{cases} \rightarrow x_k = a + \frac{b-a}{n}k = \frac{2k}{n},$$

$$f(x_k) = \frac{2k}{n}, \quad \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \Delta x = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2k}{n} \right) \cdot \frac{2}{n}$$

$$= \frac{4}{n^2} \sum_{k=1}^n k,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2} \left\{ \sum_{k=1}^n k \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 2$$

✓ 別の方法, $\int_0^2 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{4}{2} - 0 = 2$ 合っている。

余談

レピーターで定積分を近似計算するときのテクニック

→ 台形公式

*他にも色々あるが、一番代表的。

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} \cdot \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2}$$

区分解とは2が違ふ。

色々計算すると

$$\text{右辺} = \frac{b-a}{n} \left\{ \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right\} \text{となる。}$$

→ 通常の区分解の公式もよく使われるよ!

ちなみに、

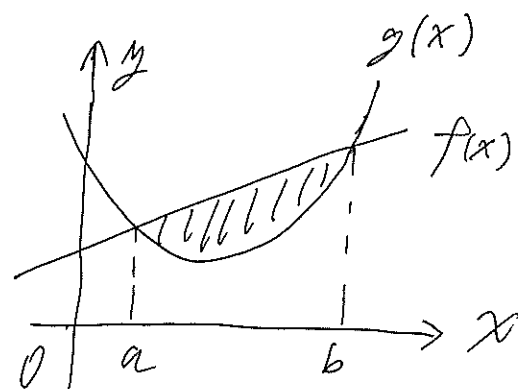
$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f(x_k), \quad x_k = a + \frac{(b-a)}{n}k$$

ただし数値計算なので、 n を無限にはできない。

体積の計算, ③ 回転体

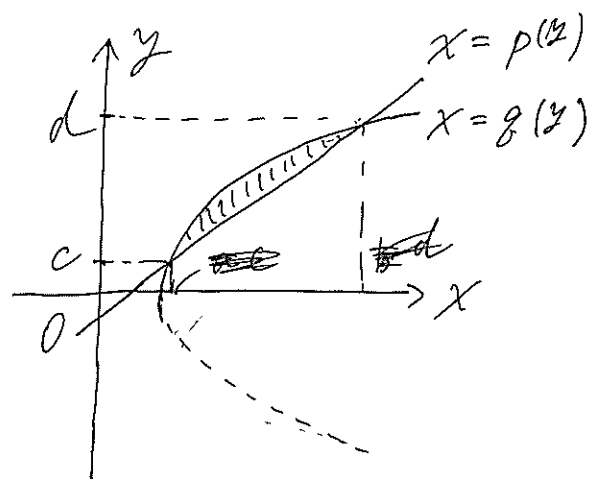
復習

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$



$$S = \int_c^d [p(y) - q(y)] dy$$

$$\begin{cases} x = p(y) \\ x = q(y) \end{cases}$$



復習

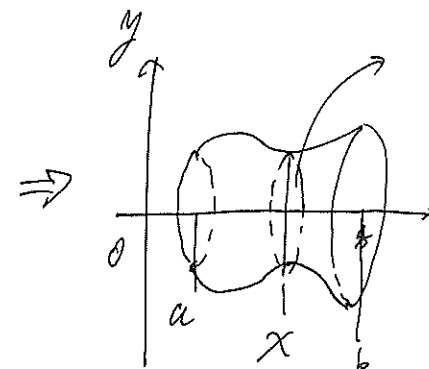
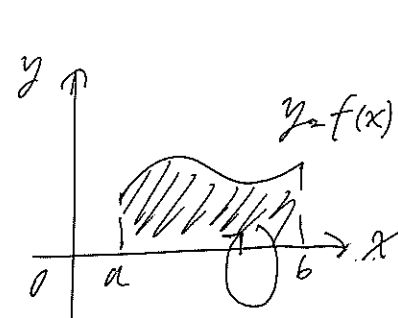
$$V = \int_a^b S(x) dx, \quad S(x) \dots \text{断面積を } x \text{ の関数として表せば勝ち。}$$

例 = 例 3.26 (p.107)

$PQ = e^x$, つまり S は 一辺長が e^x の正方形 $\rightarrow S(x) = e^{2x}$ となる。

$$V = \int_0^1 e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 = \frac{e^2 - 1}{2}$$

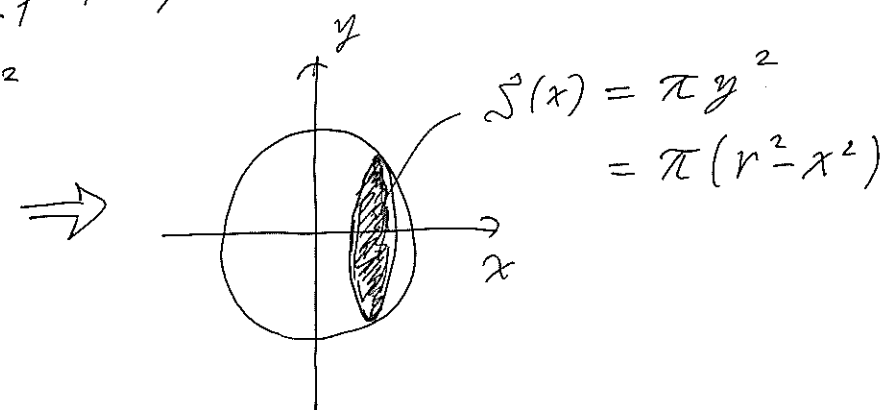
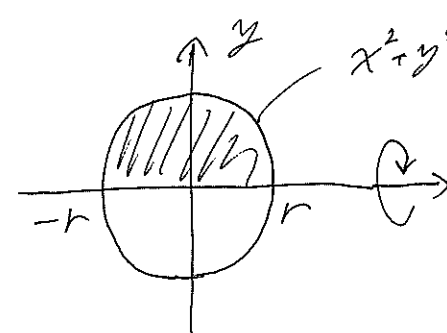
③ 回転体の体積 (x軸回り) (p.107)



半径 $= |y| = |f(x)|$ の円。
断面積は πr^2
 $= \pi |f(x)|^2$, よって,

$$V = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$$

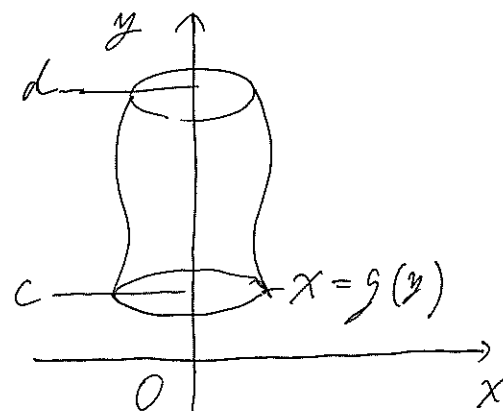
例 = 例 3.11, (2) (p.108)



$$V = \int_{-r}^r S(x) dx = \int_{-r}^r \pi (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r$$

$$= \pi \left\{ \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3} \right) \right\} = \pi \left\{ 2 - \frac{2}{3} \right\} r^3 = \pi \frac{4}{3} r^3$$

y軸回りの回転体の体積 (p.110)

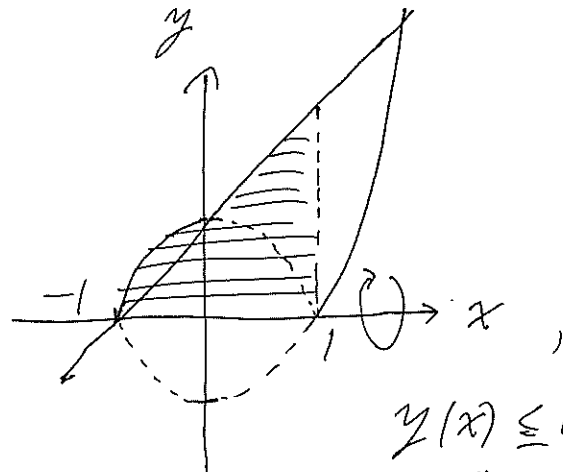
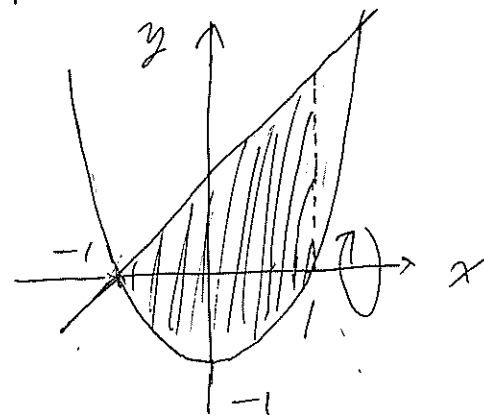


$$V = \int_c^d S(y) dy = \int_c^d \pi g(y)^2 dy$$

* x軸 $\rightarrow$ y軸に置き直すと以外, 考え方は全く同じ。

折り返し型の回転体 (p. 109)

例 = 例題 3.14, (1)



$y(x) \leq 0$ の
部分を折り返して
考え.

$$V = \pi \int_{-1}^0 |y_1(x)|^2 dx + \pi \int_0^1 |y_2(x)|^2 dx,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(x) = \overline{y_1(x)} = -x^2 + 1, \\ y_2(x) = x + 1 \end{array} \right.$$

$$= \pi \int_{-1}^0 (-x^2 + 1)^2 dx + \pi \int_0^1 (x + 1)^2 dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x \right]_{-1}^0 + \pi \left[\frac{(x+1)^3}{3} \right]_0^1 = \pi \frac{8}{15} + \pi \frac{7}{3} = \frac{43}{15} \pi$$

$$x = a \sin \theta,$$

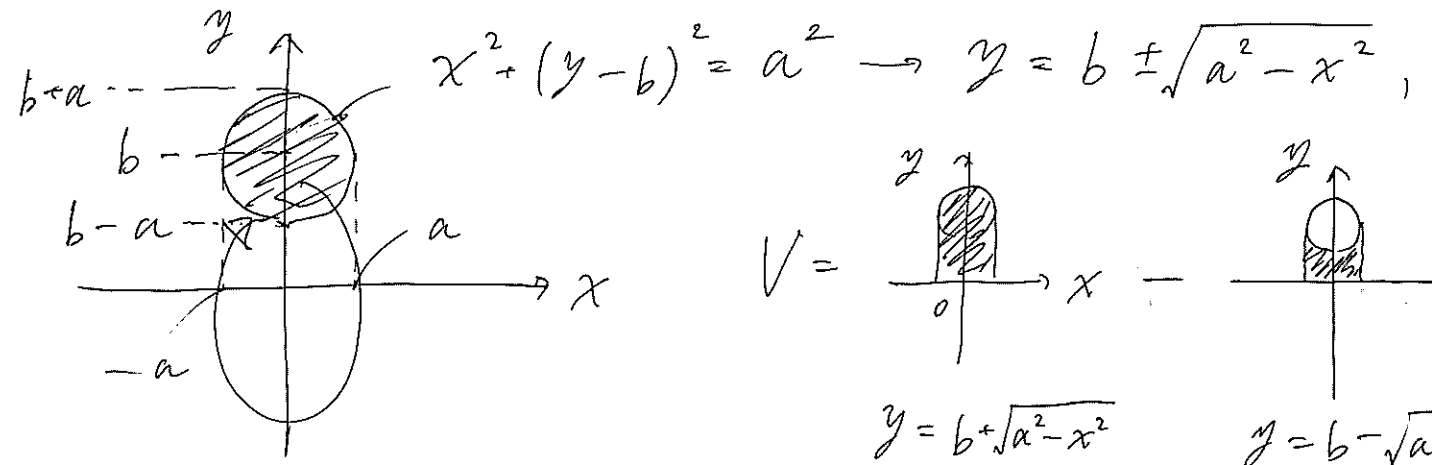
$$\frac{dx}{d\theta} = a \cos \theta$$

$$\begin{array}{c|c} x & -a \rightarrow a \\ \theta & -\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} \cdot a \cos \theta d\theta$$

$$= a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta$$

中抜き型の回転体、例 = 例題 3.14, (2)



$$V = \int_{-a}^a \left[\pi (b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 - \pi (b - \sqrt{a^2 - x^2})^2 \right] dx$$

$$= \pi \int_{-a}^a 4b \sqrt{a^2 - x^2} dx = \pi 4b \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

← 積分範囲が $x = -a$ から $x = a$ まで

$$= \pi 4b \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$x = a \sin \theta, \quad \frac{dx}{d\theta} = a \cos \theta,$$

$$\begin{array}{c|c} x & -a \rightarrow a \\ \theta & -\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$= \pi \cdot 4b \cdot a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \pi \cdot 4b \cdot a^2 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

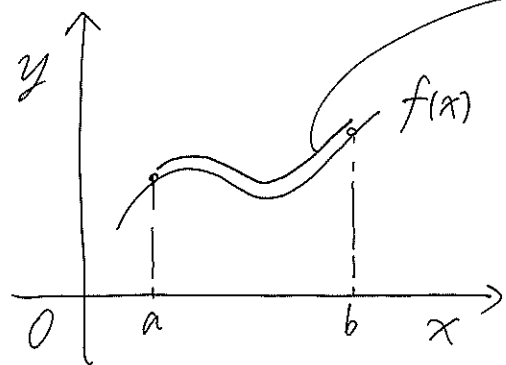
$$= \pi \cdot 4b \cdot a^2 \left\{ \frac{\pi}{2} + 0 \right\} = 2\pi^2 a^2 b$$

<6/23, 月, 2025> 3-I 解析学 11 用ノート

※ 菅原量子さんに振られた図。

本日 → 曲線の長さ、回転体の表面積

曲線の長さ (p. 111)



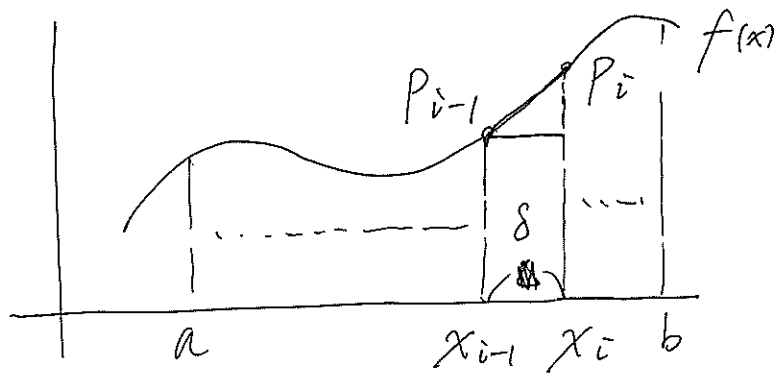
$$\text{長さ } L = \int_a^b \sqrt{1 + |f'(x)|^2} dx.$$

$$\text{ただし } f'(x) = \frac{d}{dx} f(x).$$

また $f(x)$ は $[a, b]$ で微分可能。

証明:

$x=a \sim b$ を δ 間隔で n 等分する。 $\begin{cases} a = x_0 \\ b = x_n \end{cases}$



$$\Rightarrow \Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \delta, \quad \Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

$$\Rightarrow |P_{i-1}P_i|^2 = (\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 = (x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2$$

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

したがって、 $x_0 = a \sim x_n = b$ までの長さの総和は

$$L_\delta = \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^n \left[(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

と書ける。(A)

(A) 各 i ごとに Δx_i を外に δ 出すと、

$$L_\delta = \sum_{i=1}^n \left[1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \Delta x_i \quad \text{※ } \Delta x_i = \delta$$

さて、

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

は直線 $P_{i-1}P_i$ の傾き。右図

から、小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ の内に

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(c_i) \quad (x_{i-1} < c_i < x_i)$$

を満たす c_i が少なくとも一つは存在する。従って、

$$L_\delta = \sum_{i=1}^n \left[1 + f'(c_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \delta \quad dn = \frac{b-a}{n}$$

$\delta \rightarrow 0$ とすると、($f(x)$ が $[a, b]$ で微分可能なので、)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} L_\delta = L = \int_a^b \sqrt{1 + |f'(x)|^2} dx \quad \text{が成り立つ。}$$

※ $\lim_{\delta \rightarrow 0}$ では $f'(c_i) = f'(x_{i-1}) = f'(x_i)$ に限りなく近づく。

例 = 例題 3.15 (p. 113)

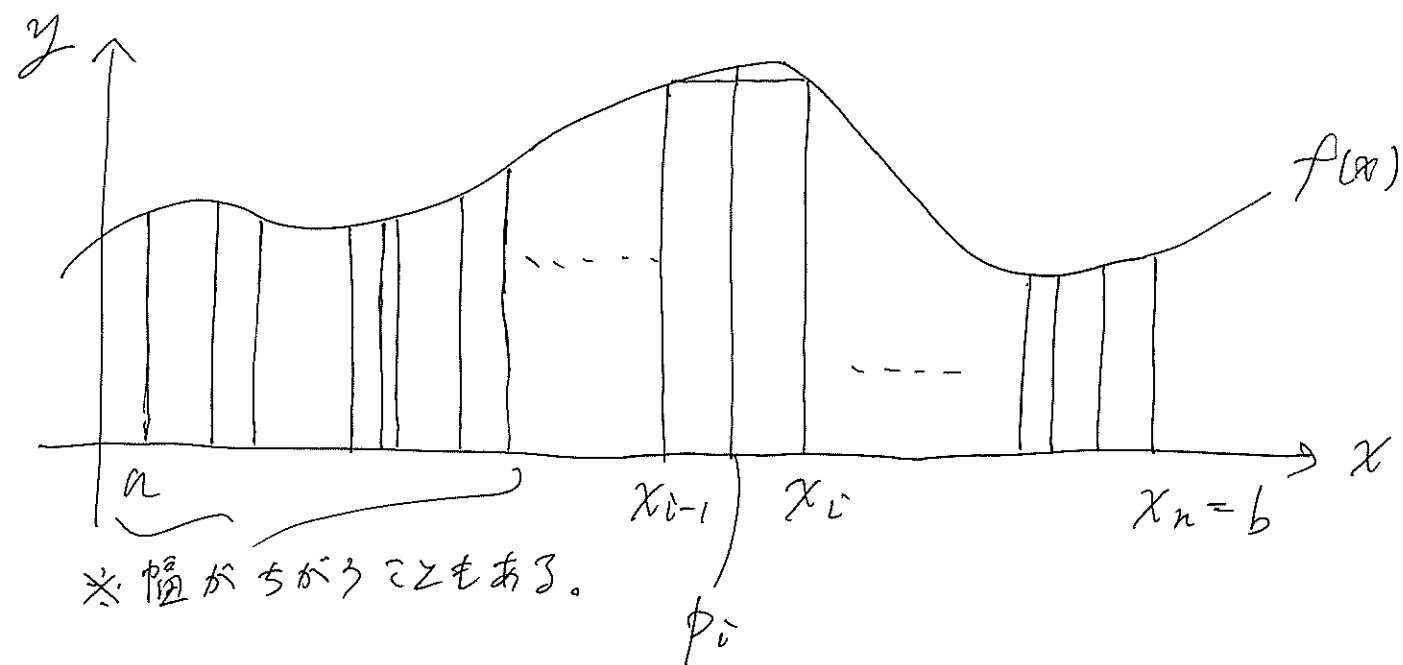
$y = f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ の $x=a$ から $x=b$ までの長さは?

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{よって } L = \int_a^b \left(1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx = \int_a^b \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) dx$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Big|_a^b = \frac{e^b + e^{-b}}{2} - \frac{e^a + e^{-a}}{2}$$

リーマン和とリーマン積分 (p.101)

$$1 \text{ 分割 } \Delta = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$$



$$1 \text{ } p_i: x_{i-1} \leq p_i \leq x_i \rightarrow f(x) = f(p_i)$$

1 $|\Delta|$ は Δ に含まれる $x_{i-1} - x_i$ の中での最大値:

$$|\Delta| = \max \{x_{i-1} - x_i\}$$

1 リーマン和 S_Δ を次式で定義する。

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^n f(p_i) (x_i - x_{i-1})$$

リーマン積分 ~~可能性~~

1 $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ の選び方

1 $p_i (x_{i-1} \leq p_i \leq x_i)$ の選り方

2 の 2 点には任意性がある。しかし、 (A)

(J) 2 の 2 点をどのように選んでも、以下の値が一意的に決まる場合がある。
極限

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S_\Delta \rightarrow \alpha$$

2 のとき、 $RS(b) = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S_\Delta = \alpha$ と書き、
リーマン積分と呼ぶ。

そして $f(x)$ は区間 $[a, b]$ でリーマン積分可能である、という。

リーマン積分と定積分

$$RS(a, b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

これは $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で有限個の点を除いて連続かつ有界な f は存在する。

$$1 \text{ 性質: } [a, b] \text{ で } \begin{cases} f(x) \geq 0 \rightarrow RS(a, b) \geq 0 \\ f(x) \leq 0 \rightarrow RS(a, b) \leq 0 \end{cases}$$

区間求積 (p. 100) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n f(x_k) \frac{b-a}{n} \right\} = \int_a^b f(x) dx$$

$f(x)$ $[a \leq x \leq b]$ の長さ:

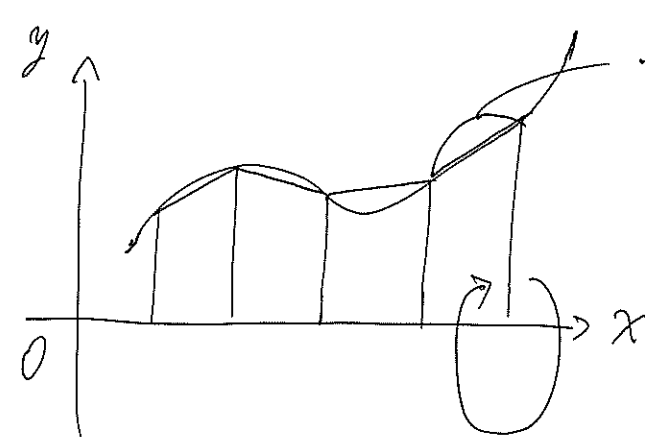
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(1 + |f'(c_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{b-a}{n} \right\}$$

$n \rightarrow \infty$ となれば $dn = \delta = \frac{b-a}{n} \rightarrow 0$ では
 $f'(c_i) = f'(x_i)$ に限りなく近づく。

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(1 + |f'(x_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{b-a}{n} \right\}$$

$$= \int_a^b \left(1 + |f'(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx$$

回転体の表面積 (p. 113)



$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \left(1 + |f'(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$\Delta s = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$ を x 軸まわりの回転させた。

$$\rightarrow S_{\Delta} \doteq \sum_{i=1}^n 2\pi |f(c_i)| \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^n 2\pi |f(c_i)| \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right)^2} \cdot \Delta x_i$$

したがって $n \rightarrow \infty$ とすると、 $f^{(i)}(c_i) \rightarrow f^{(i)}(x_i)$ に限りなく近づく
 $\Delta x_i \rightarrow 0$ 、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2\pi \left\{ |f(x_i)| \sqrt{1 + (f'(x_i))^2} \cdot \frac{b-a}{n} \right\}$$

$$= 2\pi \int_a^b |f(x)| \left(1 + |f'(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx = S$$

<6/30, 月, 2025> 3-I 解析学 12 周 ノート

媒介変数表示の曲線と面積

まず媒介変数表示とは?

$$y = f(x) \rightarrow \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \text{ と与えられる2つのもの。} \\ t \text{ が媒介変数。}$$

例① = 円方程式 (半径 = a)

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}$$

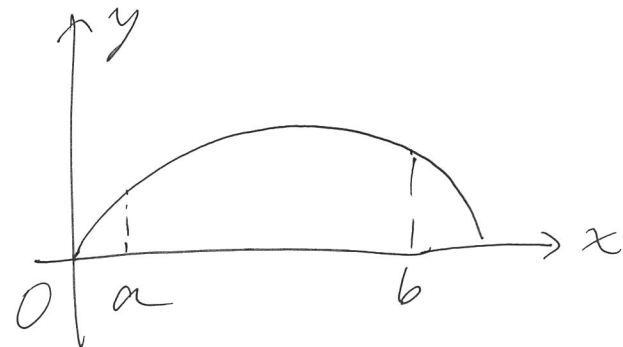
例② = サイクロイド

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

媒介変数表示された曲線の定積分 (p.138)

→ 置換積分を使う。

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$



$$S = \int_a^b |y| dx, \quad \begin{cases} y = g(t) \text{ \& } \frac{dx}{dt} = f'(t) \text{ より、} \\ \begin{array}{c|c} x & a \rightarrow b \\ \hline t & \alpha \rightarrow \beta \end{array} \end{cases}$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} |g(t)| \cdot f'(t) dt$$

この条件が追加:

$f'(t)$ は $t = \alpha \sim \beta$ で 常に正 とする。さもないと、

$x = f(t) \rightarrow t = f^{-1}(x)$ の逆解きが保証されない。

$f'(t) \geq 0$ ($t = \alpha \sim \beta$) ならば、面積は

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} |g(t) \cdot f'(t)| dt \quad \text{と求まる。} \\ \text{(定理 4.14)}$$

※ 実は $f'(t)$ が 常に負 ($t = \alpha \sim \beta$) であっても同じ公式が成り立つ。テキスト ~~p.138~~ p.138 を参照。

例 = 例題 4.11 (p.139)

サイクロイドと x 軸 ($x = 0 \sim 2\pi a$) で囲まれた面積は?

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \\ t = 0 \sim 2\pi \end{cases}$$

$f'(t) = a(1 - \cos t)$,
これは t の区間内で
常に ≥ 0 。

$$S = \int_0^{2\pi} |y(t) \cdot f'(t)| dt$$

x	$0 \rightarrow 2\pi a$
t	$0 \rightarrow 2\pi$

$$= \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = a^2 \left[\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{2\pi}$$

$$= 3\pi a^2$$

媒介変数表示された曲線の長さ (p. 140)

先週やった通り、

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left| \frac{dy}{dx} \right|^2} dx,$$

これを媒介変数 t による置換積分にする。

$$\begin{cases} x = f(t) \rightarrow dx = f'(t) dt, \\ y = g(t) \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{f'(t)} \cdot g'(t)$$

したがって、

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{g'(t)}{f'(t)} \right)^2} \cdot f'(t) dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt$$

と求まる。
(定理 4.15)

例 4.26, (2)

$$S = \int_{t=0}^{t=\pi} |y(t) \cdot x'(t)| dt$$

$$= \int_0^\pi ab |-\sin^2 t| dt$$

$$= ab \int_0^\pi \sin^2 t dt = ab \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2t}{2} dt$$

$$= ab \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^\pi = ab \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) - (0 + 0) \right\} = \frac{ab\pi}{2}$$

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t$$

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$$

例 4.27, (2)

$$\begin{cases} x = f(t) = e^{at} \cos bt \rightarrow f'(t) = e^{at} (a \cos bt - b \sin bt) \\ y = g(t) = e^{at} \sin bt \rightarrow g'(t) = e^{at} (a \sin bt + b \cos bt) \end{cases}$$

$$|f'(t)|^2 + |g'(t)|^2 = e^{2at} \left\{ (a \cos bt - b \sin bt)^2 + (a \sin bt + b \cos bt)^2 \right\}$$

$$= e^{2at} \{a^2 + b^2 + 0\} = e^{2at} (a^2 + b^2),$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{2at} (a^2 + b^2)} dt = \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} e^{at} dt = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \left[e^{at} \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} (e^{2\pi a} - 1)$$

〈7/4, 金, 2025〉 3-I 解析学 [13] 用ノート

回転体の体積 V : $y = F(x)$ のとき、

$$V = \pi \int_a^b \underbrace{|F(x)|^2}_{|y|^2} dx \dots (p. 107)$$

← 媒介変数表示 (p. 142)

$$C = \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} x & a \rightarrow b \\ t & \alpha \rightarrow \beta \end{array}$$

$$= \pi \int_{\alpha}^{\beta} \underbrace{|g(t)|^2}_{|y|^2} \cdot |f'(t)| dt \dots (p. 142)$$

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dx}{dt} \cdot dt \\ &= f'(t) dt \\ * f'(t) &\text{は定符号} \end{aligned}$$

* ただし $t = \alpha \sim \beta$ で $f'(t)$ は定符号とする。

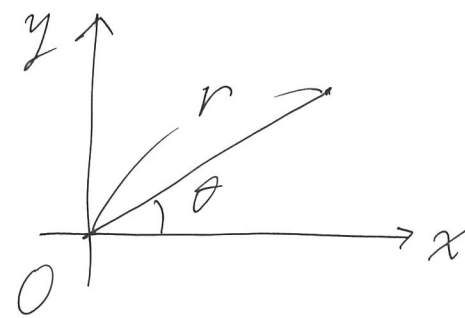
回転面の面積 S

$$S = 2\pi \int_a^b \underbrace{|F(x)|}_{|y|} \sqrt{1 + |F'(x)|^2} dx \dots (p. 114)$$

← 媒介変数表示 (同様)

$$= 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \underbrace{|g(t)|}_{|y|} \sqrt{|f'(t)|^2 + |g'(t)|^2} dt \dots (p. 142)$$

極座標 (p. 144)



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

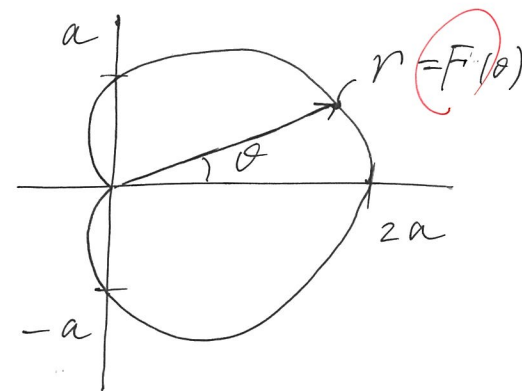


$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

極方程式

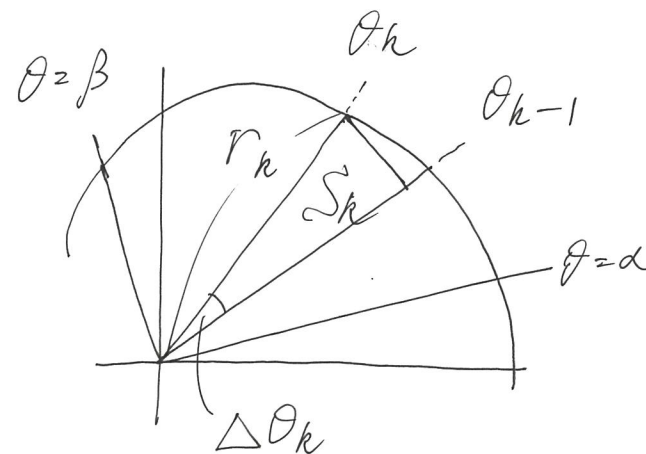
$r = F(\theta)$ ----- 偏角 θ の関数として動径 r を表す。

例 = カージオイド (p. 145)



$$r = a(1 + \cos \theta)$$

極方程式で表された曲線の定積分 (面積)



$$S_k = \frac{1}{2} r_k^2 \Delta \theta_k$$

$$S \doteq \sum_{k=1}^n S_k = \sum_{k=1}^n \frac{r_k^2}{2} \Delta \theta_k$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{r^2(\theta)}{2} d\theta \quad \begin{cases} \alpha = \theta_0 \\ \beta = \theta_n \end{cases}$$

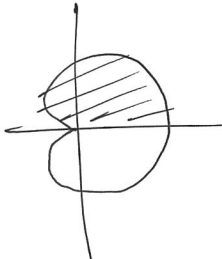
すなわち、

極方程式 $r = F(\theta)$ ($\alpha \leq \theta \leq \beta$) で表される曲線
と $\theta = \alpha, \theta = \beta$ で囲まれた面積 S は、

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} |r^2(\theta)| d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} |F(\theta)|^2 d\theta$$

例 = カージオイド ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) の面積 (p. 147)

→ $0 \leq \theta \leq \pi$ までの面積を2倍すれば良い。

$$S_{1/2} = \int_0^{\pi} |F(\theta)|^2 d\theta, \quad r = F(\theta) = a(1 + \cos\theta)$$


$$= \int_0^{\pi} a^2 (1 + \cos\theta)^2 d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{\pi} \left\{ 1 + 2\cos\theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right\} d\theta$$

$$= a^2 \left[\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2$$

極方程式で表される曲線の長さ

$$\begin{cases} x = f(\theta) = r \cos\theta \\ y = g(\theta) = r \sin\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = F'(\theta) \cos\theta - F(\theta) \sin\theta \\ \frac{dy}{d\theta} = F'(\theta) \sin\theta + F(\theta) \cos\theta = g'(\theta) \end{cases}$$

これを媒介変数表示での長さの積分公式

(*)

$$(\rightarrow) L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta \quad \text{に代入すれば良い。}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= |f'(\theta)|^2 + |g'(\theta)|^2 \\ &= (F'(\theta) \cos\theta - F(\theta) \sin\theta)^2 + (F'(\theta) \sin\theta + F(\theta) \cos\theta)^2 \\ &= |F'(\theta)|^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta) + |F(\theta)|^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &\quad - 2F'(\theta)F(\theta) \cos\theta \sin\theta + 2F'(\theta)F(\theta) \cos\theta \sin\theta \quad \text{相殺} \\ &= |F'(\theta)|^2 + |F(\theta)|^2 \quad \text{より、} \end{aligned}$$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{|F'(\theta)|^2 + |F(\theta)|^2} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{|r'(\theta)|^2 + |r(\theta)|^2} d\theta$$

例 ~~カージオイド~~

$$r = a \sin\theta, \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

$$r' = \frac{dr}{d\theta} = a \cos\theta,$$

$$\rightarrow |r|^2 + |r'|^2 = a^2 \sin^2\theta + a^2 \cos^2\theta = a^2$$

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{a^2} d\theta = a \int_0^{\pi} d\theta = \pi a$$

×E

通常の定積分 $y = F(x)$
($x = a \sim b$) $\rightarrow F'(x) = \frac{dy}{dx}$

曲線 - x 軸間の
面積

$$S = \int_a^b |F(x)| dx$$

曲線の長さ

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + |F'(x)|^2} dx$$

回転体の体積
(x 軸まわり)

$$V = \pi \int_a^b |F(x)|^2 dx$$

回転面の側面積
(x 軸まわり)

$$S = 2\pi \int_a^b |F(x)| \sqrt{1 + |F'(x)|^2} dx$$

媒介変数表示 $\begin{cases} x = f(\theta) \\ y = g(\theta) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(\theta) = \frac{dx}{d\theta} \\ g'(\theta) = \frac{dy}{d\theta} \end{cases}$
($\theta = \alpha \sim \beta$)
※ $f'(\theta)$ は定符号とす。

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} |g(\theta)| \cdot |f'(\theta)| d\theta$$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{|f'(\theta)|^2 + |g'(\theta)|^2} d\theta$$

$$V = \pi \int_a^b |g(\theta)|^2 \cdot |f'(\theta)| d\theta$$

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |g(\theta)| \sqrt{|f'(\theta)|^2 + |g'(\theta)|^2} d\theta$$

〈7/14, 月, 2025〉 3-I 解析学 [14] 用ノート

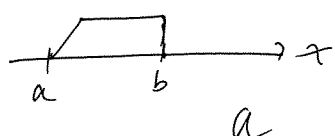
広義積分 (p. 149)

$\int_a^b f(x) dx$ は閉区間 $[a, b]$ で $f(x)$ が連続な

ときに定まった。これを次の2つの場合に拡張する。

(I) 区間の端点で $f(x)$ が定義されない。

(II) 区間の幅が無限である。

ケース (I) $(a, b]$ 

$f(x)$ は $(a, b]$ で連続, $x=a$ で定義不可のとき、

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx \quad \cdots \cdots (\star 1)$$

$f(x)$ は $[a, b)$ で連続, $x=b$ で定義不可のとき、

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \quad \cdots \cdots (\star 2)$$

($\star 1$) や ($\star 2$) 式が極限值を持つなら、広義積分可能という。そうでないなら、その積分は発散する。

例①: $\int_1^3 \frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^3 2x \cdot (x^2-1)^{-\frac{2}{3}} dx$

$\left\{ \begin{array}{l} x^2-1 = t, \\ 2x = \frac{dt}{dx} \end{array} \right.$

$$\text{まず } \int 2x(x^2-1)^{-\frac{2}{3}} dx = \int t^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{dt}{dx} \cdot dx = 3 \cdot t^{\frac{1}{3}} = 3(x^2-1)^{\frac{1}{3}} \text{ より、}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } & \int_1^3 2x \cdot (x^2-1)^{-\frac{2}{3}} dx = \left[3(x^2-1)^{\frac{1}{3}} \right]_1^3 \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[3(x^2-1)^{\frac{1}{3}} \right]_{1+\varepsilon}^3 = 3 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ 8^{\frac{1}{3}} - (2\varepsilon + \varepsilon^2)^{\frac{1}{3}} \right\} \\ & = 3 \{ 2 - 0 \} = 6 \end{aligned}$$

例②: $\int_1^3 \frac{2x}{x^2-1} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^3 2x \cdot (x^2-1)^{-1}$

$$\begin{aligned} \text{よって } & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\log|x^2-1| \right]_{1+\varepsilon}^3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \log 8 - \log|2\varepsilon + \varepsilon^2| \right\} \\ & = \{ \log 8 - (-\infty) \}, \text{ 発散。} \end{aligned}$$

ケース (II)

$f(x)$ が $[a, \infty)$ で連続であるとき、

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{v \rightarrow \infty} \int_a^v f(x) dx \quad \cdots \cdots (\star 1)$$

$f(x)$ が $(-\infty, b]$ で連続であるとき、

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^b f(x) dx \quad \cdots \cdots (\star 2) \text{ (連続)}$$

(続) $f(x)$ が $(-\infty, \infty)$ で連続であるとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{u \rightarrow \infty \\ v \rightarrow \infty}} \int_{-u}^v f(x) dx \quad \text{---} \quad (*)3$$

(*)1) ~ (*)3) 式が極限值を持つなら広義積分可能、
そうでないなら発散。

例③ = 例 4.35, (1)

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx &= \int_2^{\infty} (x-1)^{-2/3} dx = \lim_{v \rightarrow \infty} \int_2^v (x-1)^{-2/3} dx \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} \left[3(x-1)^{1/3} \right]_2^v = \{3 \cdot \infty^{1/3} - 3\}, \text{発散} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{9+x^2} &= \lim_{\substack{u \rightarrow \infty \\ v \rightarrow \infty}} \int_{-u}^v \frac{dx}{x^2+3^2} = \lim_{\substack{v \rightarrow \infty \\ u \rightarrow \infty}} \left[\frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\frac{x}{3} \right) \right]_{-u}^v \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{\infty}{3} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{-\infty}{3} \right) \right\} = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

<7/22, 火, 2025> 3-I 解析学 15 用ノート

→ 内容は無し、試験前のまとめ！

<7/23, 水, 2025> ³⁻M2 代数・カ ~~14~~ 15 用ノート

→ 問題 14 の解説で終わり！

R7年度・前期

授業終了!!